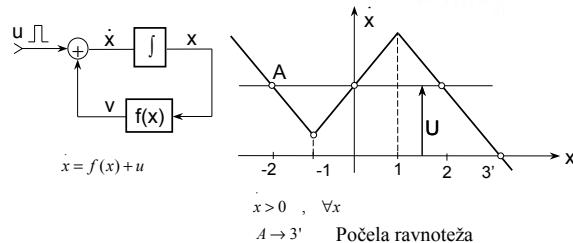


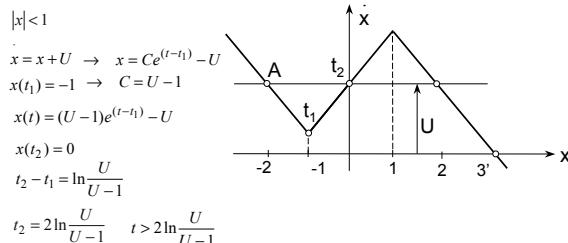
SIS

AUDITORNE VJEŽBE 4

Primjer - Model bistabila



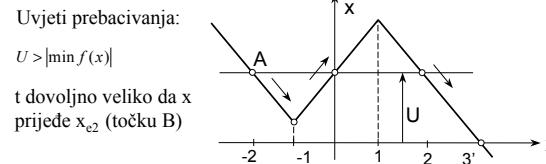
Primjer - Model bistabila - nastavak



Nelinearan vremenski nepromjenjiv sustav prvog reda - nastavak

- ◆ Kao što smo već naveli, sustav u prethodnom primjeru ima dva ravnotežna stanja koja su stabilna.
- ◆ To je jednostavan model električnog sklopa, tzv. bistabila, koji ima široku primjenu u digitalnoj tehnici.
- ◆ Dva stabilna stanja odgovaraju binarnim stanjima 0 i 1.

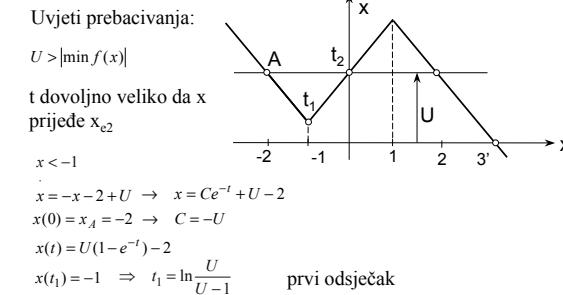
Primjer - Model bistabila - nastavak



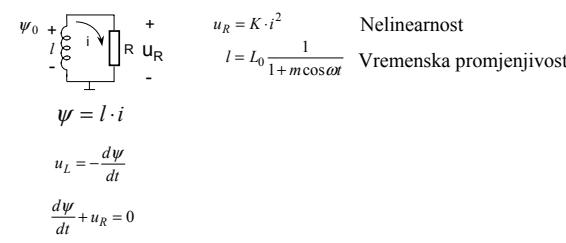
Nelinearan vremenski nepromjenjiv sustav prvog reda - nastavak

- ◆ Da bi se obavljale logičke operacije, bistabil treba prebacivati iz jednog stanja u drugo i obratno.
- ◆ To se može izvršiti dovođenjem tzv. okidnog signala.

Primjer - Model bistabila - nastavak



Nelinearan vremenski promjenjiv sustav prvog reda



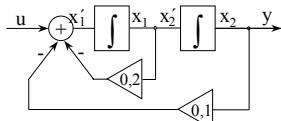
Nelinearan vremenski promjenjiv sustav prvog reda

Differential equation:
 $\frac{d\psi}{dt} + K \frac{\psi^2}{l^2} = 0$
 $\frac{d\psi}{dt} + K \frac{\psi^2 (1+m \cos \omega t)^2}{l^2} = 0$
 $\int_{\psi(0)}^{\psi(t)} \frac{d\psi}{\psi^2} = - \int_0^t \frac{K(1+m \cos \omega t)^2}{l^2} dt$
 $\psi = \frac{\psi(0)}{1 + \frac{K\psi(0)}{L_0} \left[(1 + \frac{m^2}{2})t + \frac{2m \sin \omega t}{\omega} + \frac{m^2}{4\omega} \sin 2\omega t \right]}$

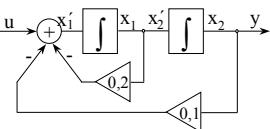
Sustavi drugog reda

- Kontinuirani sustav zadan je modelom na slici.
Odrediti diferencijalnu jednadžbu koja opisuje ovaj sustav i izračunati odziv na pobudu:

$$u(t) = U \cos \omega_1 t.$$



Parametri pobude?



- $y = x_2$
- $x_2' = x_1$
- $x_1' = u - 0,2 x_1 - 0,1 x_2$
- $x_2'' = x_1'$
- $x_2'' = u - 0,2 x_1 - 0,1 x_2$
- $x_2'' = u - 0,2 x_2' - 0,1 x_2$
- $x_2'' + 0,2 x_2' + 0,1 x_2 = u$
- $y'' + 0,2 y' + 0,1 y = u$
- Početni uvjeti neka su:
 $y(0) = -10, y'(0) = -5.$
- Parametri pobude neka su:
 $U = 3, \omega_1 = 1,8.$

Odziv sustava?

- A) Totalno (ukupno) rješenje (odziv):
 $y(t) = y_H(t) + y_p(t).$
- Ukupno rješenje je suma rješenja homogene jednadžbe i partikularnog rješenja - to važi za sve linearne jednadžbe.
- A.1.) Homogena jednadžba:
 $y'' + 0,2 y' + 0,1 y = 0.$
- Prepostavimo rješenje oblika:
 $y_H(t) = A e^{st}.$

Rješavamo homogenu ...

- Uvrstimo pretpostavljeno rješenje u jednažbu:
 $s^2 A e^{st} + 0,2 s A e^{st} + 0,1 A e^{st} = 0.$
Pokratimo sa $A e^{st}$ (možemo, jer $A e^{st} \neq 0$).
- $s^2 + 0,2 s + 0,1 = 0$
se naziva karakteristična jednadžba sustava.
- Korijeni karakteristične jednadžbe su:

$$s_{1,2} = \frac{-0,2 \pm \sqrt{0,2^2 - 4 \cdot 0,1}}{2} = -0,1 \pm 0,3j,$$

Rješavamo homogenu ...

- pa je rješenje homogene:
 $y_H(t) = A_1 e^{(-0,1+0,3j)t} + A_2 e^{(-0,1-0,3j)t}$
 $= e^{-0,1t} (A_1 e^{0,3jt} + A_2 e^{-0,3jt})$
 $= e^{-0,1t} (A_1 \cos 0,3t + A_1 j \sin 0,3t + A_2 \cos 0,3t - A_2 j \sin 0,3t).$
- Uvedemo nove (kompleksne) konstante:
 $y_H(t) = e^{-0,1t} (C_1 \cos 0,3t + C_2 \sin 0,3t)$
gdje su $C_1 = A_1 + A_2$ i $C_2 = j(A_1 - A_2).$

Partikularno rješenje ...

- Partikularno rješenje ima oblik pobude:
 $y_p(t) = Y \cos(\omega_1 t + \varphi).$
- Trebaju nam još i derivacije:
 $y_p'(t) = -\omega_1 Y \sin(\omega_1 t + \varphi),$
 $y_p''(t) = -\omega_1^2 Y \cos(\omega_1 t + \varphi).$
- Sve to uvrstimo u diferencijalnu jednadžbu
 $y'' + 0,2 y' + 0,1 y = u,$
 $-\omega_1^2 Y \cos(\omega_1 t + \varphi) - 0,2 \omega_1 Y \sin(\omega_1 t + \varphi)$
 $+ 0,1 Y \cos(\omega_1 t + \varphi) = U \cos \omega_1 t.$

Partikularno rješenje ...

- Prisjetimo se trigonometrijskih jednadžbi:
 $\cos(\omega_1 t + \varphi) = \cos \omega_1 t \cdot \cos \varphi - \sin \omega_1 t \cdot \sin \varphi,$
 $\sin(\omega_1 t + \varphi) = \sin \omega_1 t \cdot \cos \varphi + \cos \omega_1 t \cdot \sin \varphi.$
- Nakon uvrštenja i grupiranja, naša diferencijalna jednadžba postaje:
 $Y [-\omega_1^2 \cos \varphi - 0,2 \omega_1 \sin \varphi + 0,1 \cos \varphi] \cos \omega_1 t$
 $+ Y [\omega_1^2 \sin \varphi - 0,2 \omega_1 \cos \varphi - 0,1 \sin \varphi] \sin \omega_1 t$
 $= U \cos \omega_1 t.$

Partikularno rješenje ...

- Metoda jednakih koeficijenata daje:
- $Y [-\omega_1^2 \cos \varphi - 0,2 \omega_1 \sin \varphi + 0,1 \cos \varphi] = U,$
 - $Y [\omega_1^2 \sin \varphi - 0,2 \omega_1 \cos \varphi - 0,1 \sin \varphi] = 0. (Y \neq 0)$
 - $\Rightarrow (\omega_1^2 - 0,1) \sin \varphi = 0,2 \omega_1 \cos \varphi$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{0,2 \omega_1}{\omega_1^2 - 0,1}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{0,2 \omega_1}{\omega_1^2 - 0,1}, \text{ a iz gornje jednadžbe slijedi:}$$

$$Y = \frac{U}{(0,1 - \omega_1^2) \cos \varphi - 0,2 \omega_1 \sin \varphi}$$

Partikularno rješenje ...

- Ako uvrstimo konkretne brojke, imamo:
 $U = 3, \omega_1 = 1,8$
 $\varphi = 0,114151267$
 $Y = -0,949196$
- $y_p = -0,949196 \cos(1,8t + 0,114151267)$
 $= -\cos x = \cos(x - \pi)$
- $y_p = 0,949196 \cos(1,8t - 3,027441387)$

Partikularno rješenje na drugi način...

Specijalni slučaj: pobuda je harmonička, omogućava upotrebu fazora.

- $u = U \cos \omega_1 t$
 $= \operatorname{Re}[U e^{j\omega_1 t}] = \operatorname{Re}[U e^{s_1 t}],$
- gdje je $s_1 = j\omega_1$. Pripremimo y_p i derivacije:
- $y_p = Y e^{s_1 t},$
- $y_p' = s_1 \cdot Y e^{s_1 t},$
- $y_p'' = s_1^2 \cdot Y e^{s_1 t}.$

Važna interpretacija rješenja!!!

$$s_1^2 \cdot Y e^{s_1 t} + 0,2s_1 \cdot Y e^{s_1 t} + 0,1Y e^{s_1 t} = U e^{s_1 t} \quad / : e^{s_1 t}$$

$$\blacksquare Y[s_1^2 + 0,2s_1 + 0,1] = U$$

$$\frac{Y}{U} = H(s_1) = \frac{1}{s_1^2 + 0,2s_1 + 0,1}$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 0,2s + 0,1} \quad s = j\omega$$

$$\blacksquare H(j\omega) = |\underbrace{H(j\omega)}_{\text{amplituda}}| \cdot e^{j\underbrace{\varphi(\omega)}_{\text{faza}}} \quad \text{Prijenosna funkcija}$$

... i konačno ...

$$\begin{aligned} \blacksquare y_p &= \operatorname{Re}[H(j\omega_1) \cdot U e^{j\omega_1 t}] \\ &= \operatorname{Re}[|H(j\omega_1)| \cdot e^{j\varphi} \cdot U e^{j\omega_1 t}] \\ &= |H(j\omega_1)| \cdot U \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi) \\ &= 0,949196 \cos(1,8t - 3,02744) \end{aligned}$$

Totalno (ukupno) rješenje sustava:

$$\begin{aligned} \blacksquare y(t) &= y_H(t) + y_p(t) \\ y(t) &= (C_1 \cos 0,3t + C_2 \sin 0,3t) e^{-0,1t} + \\ &\quad 0,949196 \cos(1,8t - 3,02744) \end{aligned}$$

Konstante?

$$\begin{aligned} \blacksquare y(0) &= -10, \quad \text{početni uvjeti} \\ \blacksquare y'(0) &= -5 \end{aligned}$$

B1 - Odziv nepobuđenog sustava

$$\begin{aligned} \blacksquare y_1(t) &=? \\ \blacksquare y_1'' + 0,2y_1' + 0,1y_1 &= 0, \\ \blacksquare y_1(0) &= -10, \\ \blacksquare y_1'(0) &= -5, \\ \blacksquare y_1 &= y_H = (A_1 \cos 0,3t + A_2 \sin 0,3t) e^{-0,1t}. \end{aligned}$$

Iz početnih uvjeta slijedi:

$$\begin{aligned} \blacksquare A_1 &= -10, \\ \blacksquare A_2 &= -20, \\ \blacksquare y_1 &= (-10 \cos 0,3t - 20 \sin 0,3t) e^{-0,1t}. \quad \text{vlastiti odziv uslijed početnih uvjeta} \end{aligned}$$

Partikularno rješenje na drugi način, nastavak...

$$\begin{aligned} H(s_1) &= H(j\omega_1) = \frac{1}{(j\omega_1)^2 + 0,2j\omega_1 + 0,1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(0,1 - \omega_1^2)^2 + 0,04\omega_1^2}} e^{-j\arctg \frac{0,2\omega_1}{0,1 - \omega_1^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare |H(j\omega_1)| &= 0,316398667 \\ \blacksquare \varphi &= -3,02744 \end{aligned}$$

B2 - Odziv pobuđenog mrtvog sustava

$$\begin{aligned} \blacksquare y_2'' + 0,2y_2' + 0,1y_2 &= u, \\ \blacksquare y_2(0) &= 0, \\ \blacksquare y_2'(0) &= 0, \\ \blacksquare y_2(t) &= (B_1 \cos 0,3t + B_2 \sin 0,3t) e^{-0,1t} + \\ &\quad 0,949196 \cos(1,8t - 3,02744). \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} y_2(0) &= 0 \\ y_2'(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} B_1 &= 0,943018 \\ B_2 &= -0,33436 \end{aligned}$$

Konačno rješenje:

$$\begin{aligned} \blacksquare y(0) &= -10 \\ \blacksquare y'(0) &= -5 \end{aligned} \quad \Rightarrow C_1, C_2 \text{ dvije jednadžbe s dvije nepoznanice}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare y(t) &= C_1 \dots + C_2 \dots \\ \blacksquare y'(t) &= C_1 \dots + C_2 \dots, \quad t = 0 \\ \blacksquare C_1 &= -9,057, \quad C_2 = -20,33, \\ \blacksquare y(t) &= (-9,057 \cos 0,3t - 20,33 \sin 0,3t) e^{-0,1t} \\ &\quad + 0,949 \cos(1,8t - 3,02744). \end{aligned}$$

B2 - Odziv pobuđenog mrtvog sustava

$$\begin{aligned} \blacksquare y_2(t) &= (0,943018 \cos 0,3t - 0,33436 \sin 0,3t) e^{-0,1t} \\ &\quad \text{vlastito titranje uslijed pobude} \\ &\quad + 0,949196 \cos(1,8t - 3,02744) \\ &\quad \text{stacionarno stanje} \end{aligned}$$

$$\blacksquare y = y_1 + y_2 \quad \text{Ukupni odziv}$$

Amplitude vlastitog titranja određene su neskladom početnog i stacionarnog stanja!

Lin. diferencijalne jednadžbe n-tog reda s konstantnim koeficijentima



- $a_n y^{(n)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b_m x^{(m)} + \dots + b_1 x + b_0$
- 1.) Rješavamo **homogenu**:
- $a_n y^{(n)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$.
- Pretpostavimo rješenje u obliku $y_H(t) = e^{st}$.
- Uvrštenjem dobijemo karakterističnu jednadžbu:
- $(a_n s^n + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0) e^{st} = 0$.
- a) Korijeni realni i različiti $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}$ i $s_i \neq s_j, \forall i, j$
- $y_H = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} + \dots + C_n e^{s_n t}$.

Lin. diferencijalne jednadžbe n-tog reda s konstantnim koeficijentima



- b) Neki korijeni višestruki, npr. $s_1 = s_2 = s_3$ i $s_4 = s_5$
- $y_H = (C_1 + C_2 t + C_3 t^2) e^{s_1 t} + (C_4 + C_5 t) e^{s_4 t}$ + ostatak.
- c) Korijeni konjugirano kompleksni
- (ako su a_0 do a_n realni brojevi, onda se korijeni uvijek javljaju u konjugirano kompleksnim parovima)
- $s_1 = \alpha + j\beta$,
- $s_2 = \alpha - j\beta, \quad s_3, \dots, s_n$ realni i različiti
- $y_H = (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) e^{\alpha t}$ + ostatak.

Lin. diferencijalne jednadžbe n-tog reda s konstantnim koeficijentima



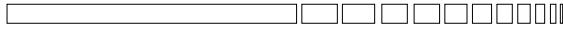
- d) korijeni konjugirano kompleksni i višestruki
- $s_1 = s_2 = \alpha + j\beta$,
- $s_3 = s_4 = \alpha - j\beta, \quad s_5, \dots, s_n$ realni i različiti
- $y_H = [(C_1 + C_2 t) \cos \beta t + (C_3 + C_4 t) \sin \beta t] e^{\alpha t}$ + ostatak
- 2.) Rješavamo **nehomogenu** (partikularno rješenje):
- nema općenitog rješenja, ali ako je pobuda određenog tipa (najčešće jest), onda znamo riješiti.

Lin. diferencijalne jednadžbe n-tog reda s konstantnim koeficijentima



- a) Pobuda u obliku: $K_1 e^{at}$
- - ako a nije korijen karakteristične jednadžbe:
- $y_p = A e^{at}$
- - ako je a r-struki korijen karakter. jednadžbe:
- $y_p = A t^r e^{at}$

Lin. diferencijalne jednadžbe n-tog reda s konstantnim koeficijentima



- b) Pobuda u obliku: $K_2 \sin \omega t$
- - ako $s=j\omega$ nije korijen karakter. jednadžbe:
- $y_p = A \sin \omega t + B \cos \omega t$
- - ako je $s=j\omega$ r-struki korijen karakter. jedn.:
- $y_p = t^r (A \sin \omega t + B \cos \omega t)$
- Ako sustav ima višestruke korijene na $j\omega$ osi, može li biti stabilan (za konačnu pobudu konačni odziv)?
- **Ne.**
- Na (konačnu) pobudu $y = \sin \omega t$ je (beskonačan) odziv $y = At \sin \omega t$, ako je $j\omega$ korijen karakter. jednadžbe.