Signali i sustavi

AUDITORNE VJEŽBE 10

LS&S
FER – ZESOI

Jednadžbe diferencija

- Koriste se u opisu diskretnog sustava modelom s ulazno – izlaznim varijablama.
- Određivanje odziva sustava svodi se na problem rješavanja jednadžbi diferencija.
- Načine rješavanja jednadžbi diferencija ilustrirat ćemo primjerima.

Jednadžbe diferencija, primjer

- 1. JEDNADŽBA DIFERENCIJA
- $y(k) + y(k-2) = u(k)$.
- Opisuje neki diskretni sustav.
- Potrebno je odrediti odziv na pobudu jediničnom stepenicom.

$$u(k) = \begin{cases} 1^k \text{ za } k \geq 0 \\ 0 \text{ za } k < 0 \end{cases}.$$

Rješavanje jednadžbe diferencija postupkom računanja korak po korak

- Naša jednadžba je jednadžba diferencija drugog stupnja.
- Da bi je riješili potrebno je poznavanje dva početna uvjeta.
- Budući da je pobuda različita od nule za $k \geq 0$ onda određujemo i odziv za $k \geq 0$.
- U skladu s tim, potrebno je poznavati početne uvjete u $y(-1)$ i $y(-2)$.
- Metoda korak po korak je najjednostavniji način izračunavanja odziva.

Metoda korak po korak ...

- Modificiramo izgled početne jednadžbe:

$$y(k) = -y(k-2) + u(k).$$

- Uvrstimo li zadanu pobudu, dobivamo:

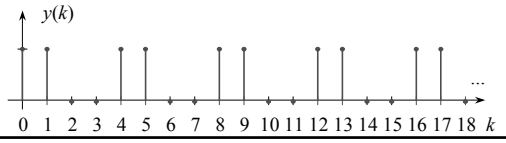
$$y(k) = -y(k-2) + 1^k, \text{ za } k \geq 0.$$

- Uz pretpostavljene početne uvjete $y(-1) = y(-2) = 0$, uvrštavanjem vrijednosti k računamo:
  - $k = 0 \Rightarrow y(0) = -y(-2) + 1^0 = -0 + 1 = 1$
  - $k = 1 \Rightarrow y(1) = -y(-1) + 1^1 = -0 + 1 = 1$
  - $k = 2 \Rightarrow y(2) = -y(0) + 1^2 = -1 + 1 = 0$
  - $k = 3 \Rightarrow y(3) = -y(1) + 1^3 = -1 + 1 = 0$
  - $k = 4 \Rightarrow y(4) = -y(2) + 1^4 = 0 + 1 = 1$

Metoda korak po korak ...

- $k = 5 \Rightarrow y(5) = -y(3) + 1^5 = 0 + 1 = 1$
- $k = 6 \Rightarrow y(6) = -y(4) + 1^6 = -1 + 1 = 0$
- $k = 7 \Rightarrow y(7) = -y(5) + 1^7 = -1 + 1 = 0$
- $k = 8 \Rightarrow y(8) = -y(6) + 1^8 = 0 + 1 = 1$ itd.

- Odziv zadanog diskretnog sustava na jediničnu stepenicu je periodički niz.

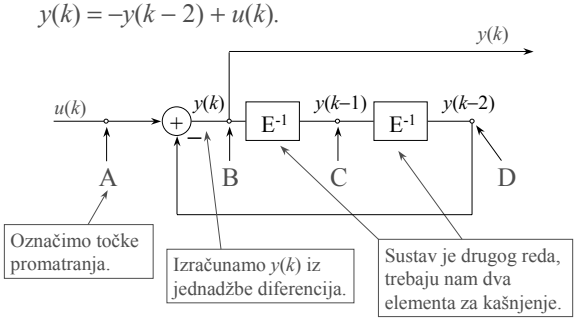


Metoda korak po korak

- Metoda korak po korak za rješavanje jednadžbi diferencija nema ekvivalenta kod diferencijalnih jednadžbi!
- Ovaj način rješavanja jednadžbe diferencija ne daje analitički izraz za odziv.
- Međutim, interesantan je jer se primjenjuje u sklopovskim ili programskim simulacijama sustava.
- Korištenjem osnovnih elemenata diskretnih sustava, moguće je za zadanu jednadžbu diferencija nacrtati simulacijski blok dijagram.

Simulacijski blok dijagram

$$y(k) = -y(k-2) + u(k).$$



Postupak simulacije

- Postupak izvođenja simulacije prikazat ćemo tabelom.
- Stupci A, B, C, D predstavljaju stanje pojedinih točaka modela u koracima *k*.

	A	B	C	D
k	u(k)	y(k) = –y(k – 2) + u(k)	y(k – 1)	y(k – 2)
0	u(0) = 1	y(0) = –y(–2) + u(0) = 0 + 1 = 1	y(–1) = 0	y(–2) = 0
1	u(1) = 1	y(1) = –y(–1) + u(1) = 0 + 1 = 1	y(0) = 1	y(–1) = 0
2	u(2) = 1	y(2) = –y(0) + u(2) = –1 + 1 = 0	y(1) = 1	y(0) = 1
3	u(3) = 1	y(3) = –y(1) + u(3) = –1 + 1 = 0	y(2) = 0	y(1) = 1
4	u(4) = 1	y(4) = –y(2) + u(4) = 0 + 1 = 1	y(3) = 0	y(2) = 0

itd.

Realizacija sustava

Realizacija osnovnih elemenata modela:

- Zbrajalo i elementi za jedinično kašnjenje realiziraju se sklopovski pomoću digitalnih integriranih sklopova za zbrajanje, množenje i pomak.
- Programski se realiziraju na računalu opće ili posebne namjene (specijalizirani procesori za digitalnu obradu signala).

Klasični način rješavanja linearnih jednadžbi diferencija

- Rješenje nehomogenih linearnih jednadžbi diferencija općenito se dobiva kao suma:
- rješenja homogene jednadžbe $y_h(k)$, kojeg određuje struktura jednadžbe i
- partikularnog rješenja $y_p(k)$, kojeg određuje funkcija pobude.

Primjer 1, određivanje homogenog rješenja

- ***Primjer 1.*** Odrediti rješenje homogene jednadžbe diferencija:

$$y(k)-\frac{1}{2}y(k-1)-\frac{1}{2}y(k-2)=0.$$

- Jednadžbu zadovoljava funkcija $y(k)=q^k$.
- Uvrštavanjem ove funkcije dobivamo tzv. karakterističnu jednadžbu:

$$q^k-\frac{1}{2}q^{k-1}-\frac{1}{2}q^{k-2}=0.$$

Primjer 1, karakteristična jednadžba

- Odnosno: $\left(1-\frac{1}{2}q^{-1}-\frac{1}{2}q^{-2}\right)\cdot q^{k}=0.$
- Netrivijalno rješenje traži da je:

$$1-\frac{1}{2}q^{-1}-\frac{1}{2}q^{-2}=0.$$

- Množenjem s q^2 dobivamo karakterističnu jednadžbu koja daje dva karakteristična korijena.

Primjer 1, karakteristična jednadžba

- Ova dva karakteristična korijena nazivaju se i vlastite frekvencije.

$$q^{2}-\frac{1}{2}q-\frac{1}{2}=0\Rightarrow q_{1}=1\; q_{2}=-\frac{1}{2}.$$

- Jednadžbu dakle zadovoljavaju funkcije odnosno nizovi q_1^{k}, q_2^{k}.
- Rješenje homogene jednadžbe diferencija, za slučaj različitih q_1 i q_2 dobivamo u obliku:

Primjer 1, određivanje konstanti...

$$y_h(k)=\mathrm{C}_1q_1^k+\mathrm{C}_2q_2^k=\mathrm{C}_1(1)^k+\mathrm{C}_2\left(-\frac{1}{2}\right)^k.$$

- Konstante C_1 i C_2 se određuju na temelju poznavanja početnih uvjeta $y(-1)$ i $y(-2)$.
- Neka su npr. $y(-1) = 1$ i $y(-2) = 2$. Homogena:

$$y_h(k)=\mathrm{C}_1(1)^k+\mathrm{C}_2\left(-\frac{1}{2}\right)^k.$$

- Vrijedi samo za $k \geq 0$!

Primjer 1, određivanje konstanti...

- Da bi odredili C_1 i C_2 treba metodom korak po korak iz početnih uvjeta odrediti $y(0)$ i $y(1)$.

$$y(0)=\frac{1}{2}y(-1)+\frac{1}{2}y(-2)=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 2=\frac{3}{2}.$$

- Za $k=1$:

$$y(1)=\frac{1}{2}y(0)+\frac{1}{2}y(-1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{5}{4}.$$

- Prema tome sada možemo definirati dvije jednadžbe s dvije nepoznanice.

Primjer 1, određivanje konstanti

- Za $k=0$: $y(0)=\frac{3}{2}=C_1\cdot(1)^0+C_2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^0.$
- Za $k=1$: $y(1)=\frac{5}{4}=C_1\cdot(1)^1+C_2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^1.$
- Odnosno, možemo pisati u obliku:

$$\left.\begin{aligned} C_1+C_2&=\frac{3}{2}\\ C_1-\frac{1}{2}C_2&=\frac{5}{4}\end{aligned}\right\}\Rightarrow C_1=\frac{4}{3},C_2=\frac{1}{6}.$$

Primjer 2, karakteristična jednadžba...

$$y(k)-\frac{3}{4}y(k-2)-\frac{1}{4}y(k-3)=0.$$

- Rješenje homogene jednadžbe?
- Funkcija koja zadovoljava gornju jednadžbu je oblika $y(k)=q^k$, stoga slijedi:

$$q^k-\frac{3}{4}q^{k-2}-\frac{1}{4}q^{k-3}=0.$$

$$q^k\left(1-\frac{3}{4}q^{-2}-\frac{1}{4}q^{-3}\right)=0/\cdot q^3.$$

Primjer 2, karakteristična jednadžba...

- Karakteristična jednadžba je trećeg reda.

$$q^3 - \frac{3}{4}q - \frac{1}{4} = 0.$$

- Sređivanjem jednadžbe dobivamo:

$$q^3 - \frac{1}{4}q - \frac{1}{2}q - \frac{1}{4} = 0,$$

$$q \cdot \left(q^2 - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(q + \frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$\left(q + \frac{1}{2}\right)\left[q^2 - \frac{1}{2}q - \frac{1}{2}\right] = 0.$$

Primjer 2, karakteristična jednadžba

- I konačno ...

$$\left(q + \frac{1}{2}\right)\left(q + \frac{1}{2}\right)(q - 1) = 0.$$

- Iz čega slijede rješenja ...

$$q_1 = -\frac{1}{2}, \qquad q_2 = -\frac{1}{2}, \qquad q_3 = 1.$$

Primjer 2, rješenje homogene ...

- Ovdje se radi o višestrukoj (dvostrukoj) vlastitoj vrijednosti, pa je homogeno rješenje oblika:

$$y_h(k) = \mathrm{C}_1 q_1^k + \mathrm{C}_2 k q_1^k + \mathrm{C}_3 q_3^k =$$

$$= \mathrm{C}_1\left(-\frac{1}{2}\right)^k + \mathrm{C}_2 k\left(-\frac{1}{2}\right)^k + \mathrm{C}_3 (1)^k.$$

Primjer 3, karakteristična jednadžba...

$$y(k)-\frac{1}{2}y(k-1)+\frac{1}{4}y(k-2)=0.$$

- Rješenje:
- Funkcija koja zadovoljava gornju jednadžbu je oblika $y(k) = q^k$ stoga slijedi:

$$q^k-\frac{1}{2}q^{k-1}+\frac{1}{4}q^{k-2}=0/:q^{k-2},$$

$$q^2-\frac{1}{2}q+\frac{1}{4}=0.$$

Primjer 3, karakteristična jednadžba...

- Rješavanjem ove kvadratne jednadžbe dobivamo rješenja:

$$q_{1,2}=\frac{1}{4}\pm j\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

- Rješenja možemo zapisati na drugi način:

$$q_1=\frac{1}{4}+j\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}},$$

$$q_2=\frac{1}{4}-j\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}.$$

Primjer 3, rješenje homogene...

- Rješenje homogene jednadžbe je prema tome:

$$y_h(k)=\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}\right)^k+\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}\right)^k=$$

$$=\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot e^{j\frac{\pi}{3}k}+\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}k}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^k\left[\mathrm{C}_1\cos\frac{\pi}{3}k+\mathrm{C}_1 j\sin\frac{\pi}{3}k+\mathrm{C}_2\cos\frac{\pi}{3}k-\mathrm{C}_2 j\sin\frac{\pi}{3}k\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^k\left[(\mathrm{C}_1+\mathrm{C}_2)\cos\frac{\pi}{3}k+(\mathrm{C}_1 j-\mathrm{C}_2 j)\sin k\frac{\pi}{3}\right].$$

Primjer 3, rješenje homogene

- Konačno rješenje možemo pisati kao :

$$y_h(k) = \underbrace{\left(A\cos k\frac{\pi}{3} + B\sin k\frac{\pi}{3}\right)}_{\text{faza vlastite frekvencije}}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^k}_{\text{modul vlastite frekvencije}}.$$

Određivanje partikularnog rješenja

- Najveći broj pobuda zanimljivih za analizu diskretnih sustava dade se predstaviti ili aproksimirati nizovima oblika polinoma ili kompleksne eksponencijale.
- To je razlog da se metoda neodređenih koeficijenata koristi u analizi sustava (zbog njene jednostavnosti).

Zadatak 1.

- Naći odziv diskretnog sustava opisanog jednadžbom diferencija:

$$y(k) + 2y(k-1) + y(k-2) = u(k),$$

- na pobudu:

$$u(k) = \begin{cases} k(-1)^k & \text{za } k \geq 0, \\ 0 & \text{za } k < 0, \end{cases}$$

- i uz početne uvjete $y(-1) = 0$ i $y(-2) = 1$.

Zadatak 1, homogena jednadžba...

- Rješenje:
- Potrebno je riješiti nehomogenu jednadžbu:

$$y(k)+2y(k-1)+y(k-2)=k(-1)^k \qquad \text{za } k \geq 0.$$

- Osim rješenja homogene jednadžbe, potrebno je naći i partikularno rješenje.
- Određivanje homogenog rješenja:
- Uvrštavanjem niza $y(k) = q^k$ u homogenu jednadžbu, dobivamo karakterističnu jednadžbu:

Zadatak 1, rješenje homogene

$$q^k + 2q^{k-1} + q^{k-2} = 0 / : q^{k-2},$$

$$q^2 + 2q + 1 = 0,$$

$$q_1 = q_2 = -1,$$

- pa je homogeno rješenje:

$$y_h(k) = \mathrm{C}_1(-1)^k + \mathrm{C}_2 k(-1)^k.$$

Zadatak 1, partikularno rješenje...

- Određivanje partikularnog rješenja:
- Pobuda je složena i predstavlja umnožak polinoma prvog reda i eksponencijalnog niza.
- Za pobudu polinomom n–tog reda i partikularno rješenje će biti polinom n–tog reda.
- Za pobudu eksponencijalom i partikularno rješenje ima oblik kompleksne eksponencijale.
- Za našu pobudu $u(k) = k(-1)^k$ partikularno rješenje bi izgledalo ovako:

Zadatak 1, partikularno rješenje...

$$y_p(k) = (\mathrm{A}k + \mathrm{B}) \times (-1)^k$$

- Budući da je frekvencija kompleksne eksponencijale jednaka vlastitoj frekvenciji sustava (i dvostruka je) , partikularno rješenje treba pomnožiti sa nizom k^s gdje je s – stupanj višestrukosti karakteristične frekvencije.
- Stoga, naše partikularno rješenje izgleda ovako:

$$y_p(k) = k^2(\mathrm{A}k + \mathrm{B})(-1)^k.$$

Zadatak 1, partikularno rješenje...

- Uvrštenjem partikularnog rješenja u nehomogenu jednadžbu i primjenom metode neodređenih koeficijenata možemo odrediti konstante A i B.

$$\begin{aligned}
y_\mathrm{p}(k) &= k^2(\mathrm{A}k + \mathrm{B})(-1)^k = \\
&= (\mathrm{A}k^3 + \mathrm{B}k^2)(-1)^k, \\
y_\mathrm{p}(k-1) &= [\mathrm{A}(k-1)^3 + \mathrm{B}(k-1)^2](-1)^{k-1} = \\
&= -[\mathrm{A}k^3 - 3\mathrm{A}k^2 + 3\mathrm{A}k - \mathrm{A} + \mathrm{B}k^2 - 2\mathrm{B}k + \mathrm{B}](-1)^k, \\
y_\mathrm{p}(k-2) &= [\mathrm{A}(k-2)^3 + \mathrm{B}(k-2)^2](-1)^{k-2} = \\
&= [\mathrm{A}k^3 - 6\mathrm{A}k^2 + 12\mathrm{A}k - 8\mathrm{A} + \mathrm{B}k^2 - 4\mathrm{B}k + 4\mathrm{B}](-1)^k.
\end{aligned}$$

Zadatak 1, partikularno rješenje...

- Uvrstimo li $y_\mathrm{p}(k)$, $y_\mathrm{p}(k-1)$, $y_\mathrm{p}(k-2)$ u jednadžbu, slijedi:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{A}k^3 + \mathrm{B}k^2)(-1)^k - \\
&-[2\mathrm{A}k^3 + 2(\mathrm{B} - 3\mathrm{A})k^2 + 2(3\mathrm{A} - 2\mathrm{B})k + 2(\mathrm{B} - \mathrm{A})](-1)^k + \\
&+ [\,\mathrm{A}k^3 + (\mathrm{B} - 6\mathrm{A})k^2 + (12\mathrm{A} - 4\mathrm{B})k + 4\mathrm{B} - 8\mathrm{A}](-1)^k = \\
&= k(-1)^k.
\end{aligned}$$

- Grupiranjem uz pojedine potencije od k dobivamo:

$$\begin{aligned}
&[(\mathrm{A} - 2\mathrm{A} + \mathrm{A})k^3 + (6\mathrm{A} - 2\mathrm{B} + \mathrm{B} + \mathrm{B} - 6\mathrm{A})k^2 + \\
&+ (-6\mathrm{A} + 4\mathrm{B} + 12\mathrm{A} - 4\mathrm{B})k + (2\mathrm{A} - 2\mathrm{B} + 4\mathrm{B} - 8\mathrm{A})](-1)^k = \\
&= k(-1)^k.
\end{aligned}$$

Zadatak 1, ukupno rješenje...

$(6Ak - 6A + 2B)(-1)^k = k(-1)^k$,
$6A = 1$,
$-6A + 2B = 0$,
$A = 1/6$ & $B = 1/2$.

- Partikularno rješenje sada glasi :

$$y_p(k) = \left(\frac{1}{6}k^3 + \frac{1}{2}k^2\right)(-1)^k.$$

- Totalno rješenje :

$$y(k) = y_h(k) + y_p(k).$$

Zadatak 1, ukupno rješenje

$$y(k) = C_1(-1)^k + C_2 k(-1)^k + \left(\frac{1}{6}k^3 + \frac{1}{2}k^2\right)(-1)^k$$

za $k \geq 0$.

Zadatak 2, homogena...

- Riješi jednadžbu $y(k) + 2y(k-1) + y(k-2) = u(k)$ uz supstituciju $k - 2 = k'$.
- Odnosno, potrebno je riješiti jednadžbu $y(k'+2) + 2y(k'+1) + y(k') = u(k'+2)$ uz uvjete:

$$u(k) = \begin{cases} k(-1)^k & \text{za } k \geq 0, \\ 0 & \text{za } k < 0. \end{cases}$$

- Rješenje homogene jednadžbe

$$y(k+2) + 2y(k+1) + y(k) = 0.$$

- Uvrstimo niz $y(k) = q^k$ i dobivamo:

$$q^{k+2} + 2q^{k+1} + q^k = 0 \ /:q^k.$$

Zadatak 2, nastavak ...

$q^2 + 2q + 1 = 0.$

- Rješenja ove karakteristične jednadžbe poznata su nam iz prethodnog zadatka.
- Nehomogena jednadžba u tom slučaju glasi:

$$y(k+2) + 2y(k+1) + y(k) = (k+2)(-1)^{k+2},$$

$$y(k+2) + 2y(k+1) + y(k) = (k+2)(-1)^{k}.$$

- Partikularno rješenje je oblika:

$$y_p(k) = k^2(\mathrm{C}k + \mathrm{D})(-1)^k = (\mathrm{C}k^3 + \mathrm{D}k^2)(-1)^k.$$

- Potrebno je odrediti $y_p(k+1)$ i $y_p(k+2)$.

Zadatak 2, partikularno rješenje...

$$y_p(k+1) = [\mathrm{C}(k+1)^3 + \mathrm{D}(k+1)^2](-1)^{k+1} =$$
$$= -[\mathrm{C}k^3 + 3\mathrm{C}k^2 + 3\mathrm{C}k + \mathrm{C} + \mathrm{D}k^2 + 2\mathrm{D}k + \mathrm{D}](-1)^k =$$
$$= -[\mathrm{C}k^3 + (3\mathrm{C} + \mathrm{D})k^2 + (3\mathrm{C} + 2\mathrm{D})k + (\mathrm{D} + \mathrm{C})](-1)^k.$$

$$y_p(k+2) = [\mathrm{C}(k+2)^3 + \mathrm{D}(k+2)^2](-1)^{k+2} =$$
$$= [\mathrm{C}k^3 + 6\mathrm{C}k^2 + 12\mathrm{C}k + 8\mathrm{C} + \mathrm{D}k^2 + 4\mathrm{D}k + 4\mathrm{D}](-1)^k =$$
$$= [\mathrm{C}k^3 + (6\mathrm{C} + \mathrm{D})k^2 + (12\mathrm{C} + 4\mathrm{D})k + (8\mathrm{C} + 4\mathrm{D})](-1)^k.$$

- Uvrštavanjem u jednadžbu slijedi:

$$[\mathrm{C}k^3 + (6\mathrm{C} + \mathrm{D})k^2 + (12\mathrm{C} + 4\mathrm{D})k + (8\mathrm{C} + 4\mathrm{D})](-1)^k +$$
$$+ [-2\mathrm{C}k^3 + (-6\mathrm{C} - 2\mathrm{D})k^2 + (-6\mathrm{C} - 4\mathrm{D})k + -2\mathrm{D} - 2\mathrm{C}](-1)^k +$$
$$(\mathrm{C}k^3 + \mathrm{D}k^2)(-1)^k = (k+2)(-1)^k.$$

Zadatak 2, partikularno rješenje...

- Grupiranjem po potencijama od k

$$[(\mathrm{C} - 2\mathrm{C} + \mathrm{C})k^3 + (6\mathrm{C} + \mathrm{D} - 6\mathrm{C} - 2\mathrm{D} + \mathrm{D})k^2 +$$
$$+ (12\mathrm{C} + 4\mathrm{D} - 6\mathrm{C} - 4\mathrm{D})k + (8\mathrm{C} + 4\mathrm{D} - 2\mathrm{D} - 2\mathrm{C})](-1)^k =$$
$$= (k+2)(-1)^k.$$

- Iz ovoga slijedi :

$$6\mathrm{C}k + 6\mathrm{C} + 2\mathrm{D} = k + 2,$$
$$6\mathrm{C} = 1 \Rightarrow \mathrm{C} = 1/6,$$
$$6\mathrm{C} + 2\mathrm{D} = 2 \Rightarrow \mathrm{D} = 1/2.$$

- Pa je partikularno rješenje:

$$y_p(k) = \left(\frac{1}{6}k^3 + \frac{1}{2}k^2\right)(-1)^k.$$

Zadatak 2, komentar

- Naravno, i totalno rješenje je jednako:

$$y(k) = C_1(-1)^k + C_2 k(-1)^k + \left(\frac{1}{6}k^3 + \frac{1}{2}k^2\right)(-1)^k .$$

- Uočavamo da obje jednadžbe:
  - $y(k) + 2y(k-1) + y(k-2) = u(k)$,
  - $y(k+2) + 2y(k+1) + y(k) = u(k+2)$,

  imaju identično rješenje (tj. ekvivalentne su).
- Prva se realizira pomoću elemenata za jedinično kašnjenje (E^{-1}), druga pomoću elemenata za predikciju (E) !