Dio I

Kontinuirani signali i sustavi

2. Kontinuirani signali

Funkcije su preslikavanja definirana na skupovima. Signalima zovemo one funkcije koje predstavljaju informaciju.

Signale možemo podijeliti na više raznih načina. Obzirom na vremenski interval u kojem je signal definiran razlikujemo

1. nekauzalne signale koji su različiti od nule skoro svuda (lijevi signal na slici 2.1.),
2. kauzalne signale koji su uvijek jednaki nuli za $t < 0$ (središnji signal na slici 2.1.) i
3. antikauzalne signale koji su uvijek jedanki nuli za $t > 0$ (desni signal na slici 2.1.).

Obzirom na predvidljivost signala razlikujemo

1. determinističke ili predvidljive signale i
2. stohastičke ili slučajne signale (stoga i nepredvidljive).

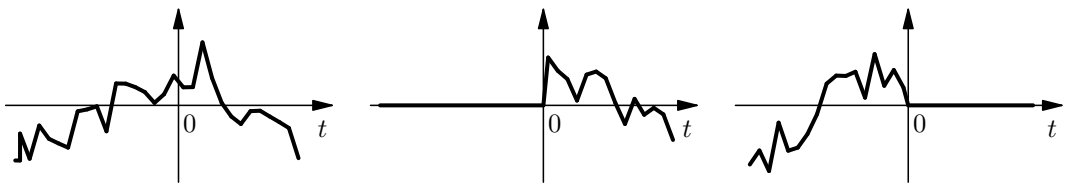
Obzirom na periodičnost razlikujemo

1. aperiodične signale i
2. periodične signale.

Za periodične signale za svaki t vrijedi $f(t) = f(t + T)$ pri čemu je T period. Posebno važni periodični signali harmonijske funkcije. Harmonijski signal

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta) \tag{2.1}$$

karakteriziran je amplitudom A, kružnom frekvencijom ω i fazom θ.



Slika 2.1.: Primjeri nekauzalnog, kauzalnog i antikauzalnog signala

Skup svih funkcija sa X u Y predstavlja prostor funkcija. Sustavi su funkcije koje preslikavaju jedan prostor funkcija u drugi prostor funkcija.

Primjer 2.1. Odredi i skiciraj zbroj i umnožak signala

$$x_1(t) = \cos(3\pi t + \pi) \quad \text{i} \quad x_2(t) = \frac{5}{2} + 2\cos(\pi t).$$

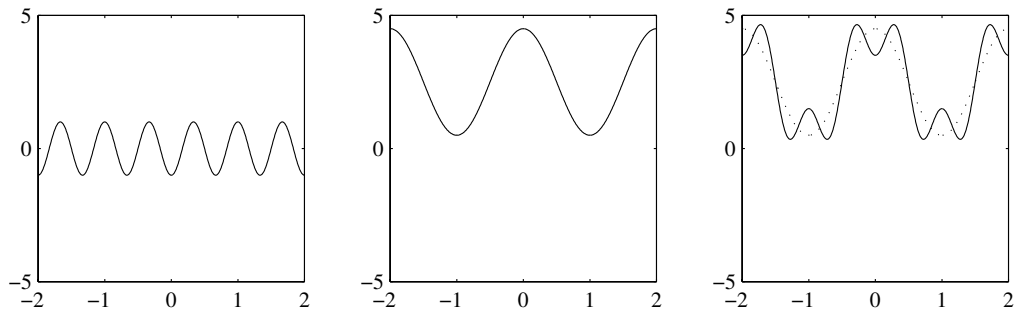
Rješenje: Kod jednostavnih operacija nad signalima kao što su zbrajanje i množenje vršimo odabranu operaciju uz fiksirano vrijeme odnosno parametar t. U našem slučaju je zbroj signala

$$x_1(t) + x_2(t) = \frac{5}{2} + \cos(3\pi t + \pi) + 2\cos(\pi t),$$

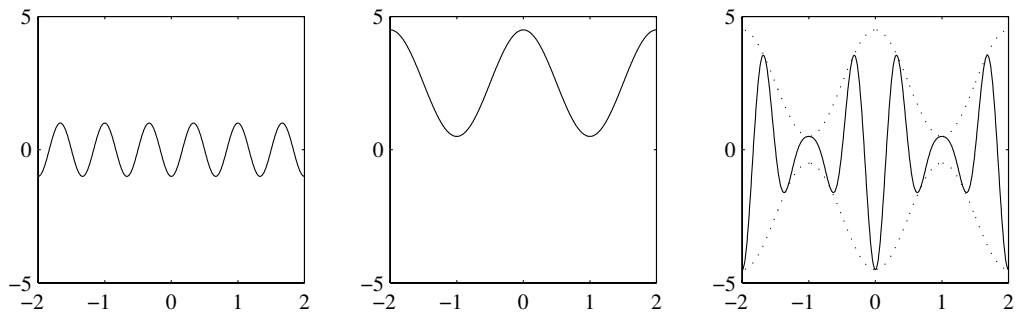
dok je umnožak

$$\begin{aligned} x_1(t)x_2(t) &= \cos(3\pi t + \pi)\Big(\frac{5}{2} + 2\cos(\pi t)\Big) \\ &= \frac{5}{2}\cos(3\pi t + \pi) + \cos(2\pi t + \pi) + \cos(4\pi t + \pi). \end{aligned}$$

Zbroj signala prikazan je na slici 2.2., dok je umnožak prikazan na slici 2.3..



Slika 2.2.: Zbrajanje dva signala



Slika 2.3.: Množenje dva signala

Primijetite da smo u slučaju množenja zadanih signala dobili nove frekvencije. Općenito, pomnožmo li dva harmonijska signala

$$x_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \theta_1) \quad \text{i} \quad x_2(t) = A_2\cos(\omega_2 t + \theta_2)$$

rezultat se može prikazati kao linearna kombinacija dvije harmonijske funkcije frekvencija $\omega_1 - \omega_2$ i $\omega_1 + \omega_2$ kao

$$x_1(t)x_2(t) = \frac{A_1A_2}{2}\big(\cos\big((\omega_1 - \omega_2)t + (\theta_1 - \theta_2)\big) + \cos\big((\omega_1 + \omega_2)t + (\theta_1 + \theta_2)\big)\big).$$

Primjer 2.2. Za svaki od zadanih signala odredi domenu i kodomenu te ih predstavi u obliku $f : X \to Y$. Signali su

a) napon na akumulatoru,

b) vrijednost dionica tvrtke nakon dnevnog trgovanja i

c) pozicija vozila na ravnoj cesti duljine L.

Rješenje: Promatramo li napon na akumulatoru kao domenu možemo odabrati vrijeme, dok nam kodomena predstavlja napon akumulatora. Odaberimo kao kodomenu jednočlani skup $Napon = \{12\,\mathrm{V}\}$. U tom je slučaju funkcija

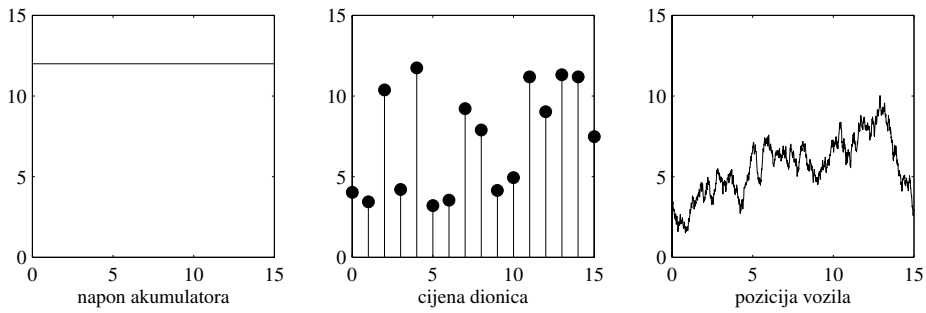
$$f : \mathbb{R} \to Napon,$$

te je $u(t) = 12\,\mathrm{V}$ za svaki $t \in \mathbb{R}$. Kodomenu smo naravno mogli i drugačije definirati, npr. kao interval $[0\,\mathrm{V}, 14\,\mathrm{V}]$ čime naravno mijenjamo model. Domenu i kodomenu obično odabiremo prema zahtjevima koje postavljamo pred model.

Za vrijednost dionica tvrtke kao domenu možemo odabrati skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, gdje nam svaki broj predstavlja kraj dana i dnevnog trgovanja. Kodomena je skup vrijednosti novca *Novac* koji se sastoji od pozitivnih realnih brojeva s dozovljena dva decimalna mjesta. Preslikavanje je sada $f : \mathbb{N} \to Novac$.

Pozicija vozila na cesti ovisi o vremenu t te je domena skup realnih brojeva $\mathbb{R}$. Mogući položaji vozila su unutar intervala $[0, L]$ gdje 0 odgovara početku ceste, a L kraju ceste. Kodomena je tada interval $[0, L]$ i predstavlja poziciju na cesti. Preslikavanje je sada $f : \mathbb{R} \to [0, L]$.

Moguće realizacije pojedinih signala dane su na slici 2.4.. Lijevo je nacrtan napon na akumulatoru, u sredini je nacrtana moguća cijena dionica kroz prvih četrnaest dana dok se na desnoj slici nalazi moguća pozicija vozila na cesti.



Slika 2.4.: Primjeri signala

Primjer 2.3. Neka su dani skupovi X i Y s elementima

$$X = \{a, b, c\} \quad \text{i} \quad Y = \{0, 1\}.$$

Pronađite i napišite sve funkcije sa X u Y. Općenito, ako skup X ima m elemenata, a skup Y n elemenata koliko ukupno preslikvanja postoji sa skupa X u skup Y.

Rješenje: Jedan od načina definiranja funkcija je preko uređenih parova $\big(x, f(x)\big)$ gdje je $x \in X$. Uz takve oznake moguća preslikavanja su

$$\begin{array}{ll} \{(a,0),(b,0),(c,0)\} & \{(a,0),(b,0),(c,1)\} \\ \{(a,0),(b,1),(c,0)\} & \{(a,0),(b,1),(c,1)\} \\ \{(a,1),(b,0),(c,0)\} & \{(a,1),(b,0),(c,1)\} \\ \{(a,1),(b,1),(c,0)\} & \{(a,1),(b,1),(c,1)\} \end{array}$$

Vidimo da ukupno postoji 8 preslikavanja.

Općenito, za svaki $x \in X$ postoji n mogućih izbora u skupu Y. Kako skup X ima m elemenata traženi broj preslikavanja je n^m.

3. Bezmemorijski kontinuirani sustavi

Bezmemorijske kontinuirane sustave možemo podijeliti na eksplicitne i implicitne sustave:

1. Implicitni sustavi su oni sustavi za koje je moguće napisati sortiranu spojnu listu.
2. Eksplicitni sustavi su oni sustavi za koje nije moguće napisati sortiranu spojnu listu. U tom slučaju govorimo o sustavima s povratnom vezom.

3.1. Funkcijski blokovi

Za sustav opisan funkcijom $y = f(x)$ kažemo da je linearan ako vrijedi

$$f(ax_1 + bx_2) = af(x_1) + bf(x_2), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Ako je svaki funkcijski blok sustava linearan onda je i cijeli sustav linearan. U tom slučaju kažemo da je sustav strukturno linearan. Primijetite da obrat ne vrijedi, naime linearan sustav ne mora nužno biti sastavljen od linearnih funkcijskih blokova. Za takav sustav kažemo da je samo operacijski linearan.

Za sustav s više ulaza kažemo da je linearan ako vrijedi

$$f(ax_{11} + bx_{12}, ax_{21} + bx_{22}) = af(x_{11}, x_{21}) + bf(x_{12}, x_{22}), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Pravila spajanja funkcijskih blokova su

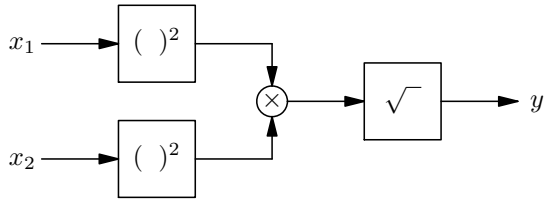
1. Nije dozvoljeno spajanje izlaza funkcijskih blokova.
2. Svaki ulaz u funkcijski blok mora biti spojen na izlaz nekog funkcijskog bloka ili predstavlja ulaz u cijeli sustav.
3. Izlaz samo jednog funkcijskog bloka je izlaz sustava.

Primjer 3.1. Ispitajte linearnost funkcijskog bloka opisanog funkcijom $y = f(x) = x$. Da li je sustav linearan operacijski i da li je linearan strukturno?

Rješenje: Da bi provjerili linearnost moramo provjeriti da li sustav zadovoljava izraz (3.1). Vrijedi

$$f(ax_1 + bx_2) = ax_1 + bx_2 = af(x_1) + bf(x_2)$$

te je sustav linearan, i to operacijski. Da bi mogli reći da je sustav linearan strukturno moramo pokazati da je svaki funkcijski blok sustava linearan. Kako se zadani sustav sastoji od samo jednog funkcijskog bloka čiju linearnost smo pokazali, sustav je linearan i strukturno.



Slika 3.1.: Jednostavan bezmemorijski sustav

Primjer 3.2. Za sustav na slici 3.1. ispitajte strukturnu i operacijsku linearnost.

Rješenje: Kako je na slici 3.1. prikazan sustav s više ulaza moramo pokazati da vrijedi 3.2. No prvo trebamo odrediti prijenosnu funkciju sustava:

$$y = f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 x_2^2} = |x_1 x_2|.$$

Sada računamo

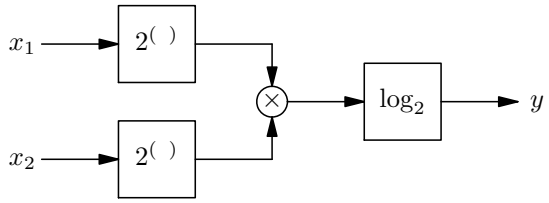
$$f(ax_{11} + bx_{12}, ax_{21} + bx_{22}) = \big|(ax_{11} + bx_{12})(ax_{21} + bx_{22})\big|$$

i

$$af(x_{11}, x_{21}) + bf(x_{12}, x_{22}) = a|x_{11}x_{21}| + b|x_{12}x_{22}|.$$

Kako su dva dobivna izraza različita, sustav nije linearan operacijski. Kako sustav nije linearan operacijski, ne može biti linearan ni strukturno.

Primjer 3.3. Za sustav na slici 3.2. ispitajte strukturnu i operacijsku linearnost.



Slika 3.2.: Jednostavan bezmemorijski sustav

Rješenje: Kako je na slici 3.2. prikazan sustav s više ulaza moramo pokazati da vrijedi 3.2. Računamo funkciju koja opisuje sustav,

$$y = f(x_1, x_2) = \log_2(2^{x_1} 2^{x_2}) = x_1 + x_2.$$

Sada je

$$\begin{aligned} f(ax_{11} + bx_{12}, ax_{21} + bx_{22}) &= (ax_{11} + bx_{12}) + (ax_{21} + bx_{22}) \\ &= a(x_{11} + x_{21}) + b(x_{21} + x_{22}) \\ &= af(x_{11}, x_{21}) + bf(x_{12}, x_{22}) \end{aligned}$$

Kako smo pokazali da vrijedi 3.2 sustav je linearn operacijski, no kako pojedini funkcijski blokovi nisu linearni sustav nije linearan strukturno.

Primjer 3.4. Realizirajte funkcijski blok za množenje korištenjem bloka za kvadiranje koji je realiziran aproksimacijom kvadratne U/I karakteristike, pojačala i zbrajala.

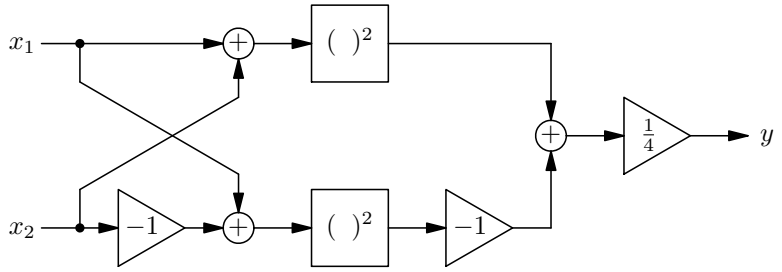
Rješenje: Kod realizacije se koristimo dobro poznatim izrazom za kvadrat zbroja,

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2.$$

Vidimo da kvadriranjem zbroja dobivamo između ostalog i član koji je umnožak. Članove x_1^2 i x_2^2 možemo eliminirati ako iskoristimo i izraz za kvadrat razlike. Tada umnožak možemo zapisati kao

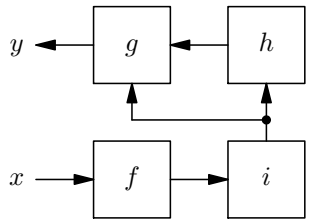
$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 = \frac{1}{4}\big((x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2\big).$$

Blok dijagram realizacije je prikazan na slici 3.3..



Slika 3.3.: Funkcijski blok za množenje

Primjer 3.5. Za sustav na slici 3.4. napišite i sortirajte spojnu listu. Da li je zadani sustavi eksplicitan ili implicitan?



Slika 3.4.: Jednostavni bezmemorijski sustav

Rješenje: Za svaki blok od kojeg se sastoji sustav redom pišemo elemente spojne liste. Element spojne liste za svaki funkcijski blok navodi sve ulaze u taj blok. Spojna lista je stoga

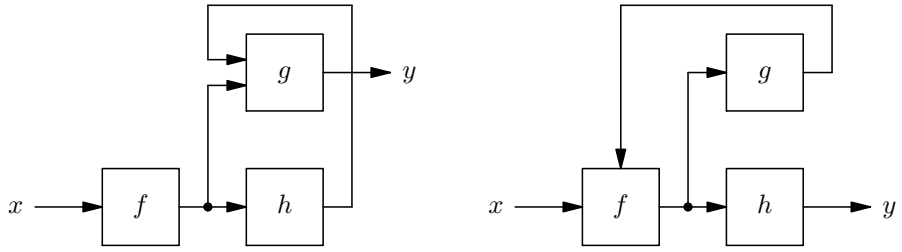
$$\begin{aligned} g &: \quad i, h \\ h &: \quad i \\ f &: \quad x \\ i &: \quad f \end{aligned}$$

Za listu kažemo da je sortirana kada za svaki redak elemente desno od dvotočke koji nisu ulazi u sustav možemo pronaći lijevo od dvotočke u nekom od prethodnih redaka. Sortiranjem spojne liste dobivamo

$$\begin{aligned} f &: \quad x \\ i &: \quad f \\ h &: \quad i \\ g &: \quad i, h \end{aligned}$$

Kako se spojna lista može sortirati sustav je eksplicitan.

Zadatak 3.1. Za sustave na slici 3.5. napiši i sortiraj spojnu listu. Da li su sustavi implicitni ili eksplicitni?



Slika 3.5.: Jednostavni bezmemorijski sustavi

Rješenje: Sortirana spojna lista za prvi sustav je

$$\begin{aligned} f: &\quad x \\ h: &\quad f \\ g: &\quad f, h \end{aligned}$$

te je sustav eksplicitan. Spojna lista za drugi sustav je

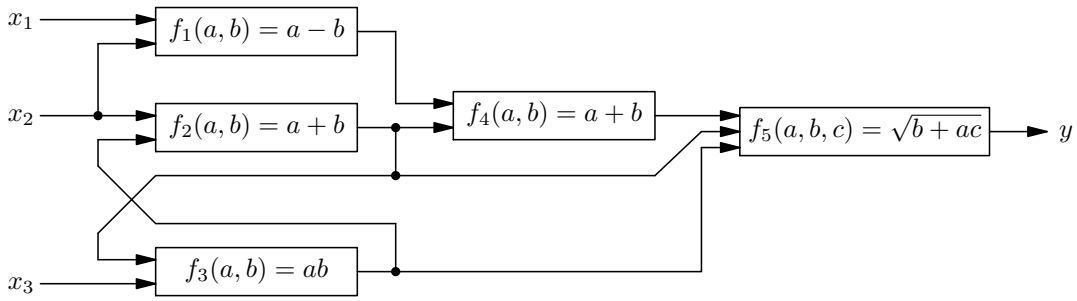
$$\begin{aligned} f: &\quad x, g \\ g: &\quad f \\ h: &\quad f \end{aligned}$$

i ne može se sortirati te je sustav implicitan.

Primjer 3.6. Za bezmemorijski sustav zadan slikom 3.6. odredite spojnu listu. Da li je sustav implicitan? Definirajte novu pomoćnu varijablu q te napišite jednadžbe sustava u obliku

$$\begin{aligned} q &= F(q, x_2, x_3) \\ y &= G(q, x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

Odredite funkciju $y = H(x_1, x_2, x_3)$ koja opisuje zadani sustav.



Slika 3.6.: Bezmemorijski sustavi

Rješenje: Označimo s f_1, f_2, f_3, f_4 i f_5 izlaze iz odgovarajući funkcijskih blokova. Sada možemo napisati spojnu listu:

$$\begin{aligned} f_1: &\quad x_1, x_2 \\ f_2: &\quad x_2, f_3 \\ f_3: &\quad x_2, f_2 \\ f_4: &\quad f_1, f_2 \\ f_5: &\quad f_2, f_3, f_4 \\ y: &\quad f_5 \end{aligned}$$

Dobivenu spojnu listu nije moguće sortirati te zadani sustav nije implicitan. Da bi odredili jednadžbe sustava u zadanom obliku prvo raspisujemo izlaz y. Dobivamo

$$y = \sqrt{f_2 + f_3 f_4} = \sqrt{f_2 + (f_1 + f_2) f_2 x_3} = \sqrt{f_2 + (x_1 - x_2 + f_2) f_2 x_3}.$$

Kada bi u dobivenom izrazu raspisali f_2 dobili bi izraz koji ovisi o f_3, a kada bi opet raspisali tako uneseni f_3 izrazi bi ovisio o f_2 što je posljedica petlji u sustavu. Za pomoćnu varijablu stoga je potrebno odabrati bilo f_2 bilo f_3. Odaberemo li $q = f_2$ dobivamo

$$y = \sqrt{q + (x_1 - x_2 + q) q x_3} = G(q, x_1, x_2, x_3).$$

Sada je

$$f_2 = x_2 + f_3 = x_2 + f_2 x_3$$

što uz $q = f_2$ daje

$$q = x_2 + q x_3 = F(q, x_2, x_3).$$

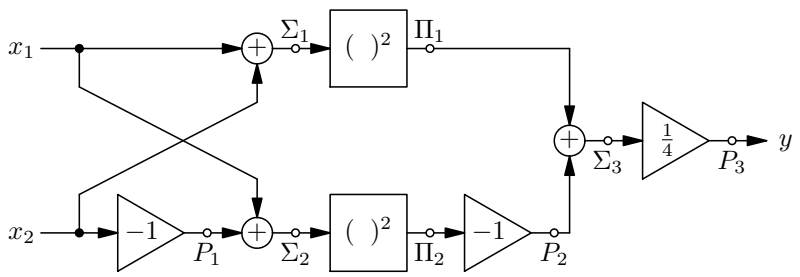
Eliminacijom q iz prethodne jednadžbe dobivamo

$$q = \frac{x_2}{1 - x_3}$$

te je cijeli sustav opisan jednadžbom

$$y = \sqrt{\frac{x_2}{1 - x_3} + \left(x_1 - x_2 + \frac{x_2}{1 - x_3}\right) \frac{x_2 x_3}{1 - x_3}} = H(x_1, x_2, x_3).$$

Zadatak 3.2. Za množilo na slici 3.7. napiši i sortiraj spojnu listu. Da li je sustav implicitan ili eksplicitan?



Slika 3.7.: Sustav za množenje dva signala

Rješenje: Sortirana spojna lista za zadano množilo je

Σ_1 :	x_1, x_2	Σ_2 :	P_1, x_1	Σ_3 :	Π_1, P_2
P_1 :	x_2	Π_2 :	Σ_2	P_3 :	Σ_3
Π_1 :	Σ_1	P_2 :	Π_2		

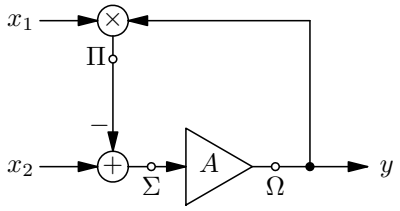
te je sustav eksplicitan.

Primjer 3.7. Korištenjem množila, pojačala i zbrajala realizirajte sustav koji dijeli dva broja.

Rješenje: Za realizaciju sustava koji će dijeliti dva broja korištenjem bloka za množenje koristi se povratna veza. Sam sustav je prikazan na slici 3.8..

Ulazi u sustav su x_1 i x_2, a izlaz je $y = x_1/x_2$. Spojna lista za sustav je

$$\begin{aligned} \Sigma &: \quad x_2, \Pi \\ \Pi &: \quad x_1, \Omega \\ \Omega &: \quad \Sigma \end{aligned}$$



Slika 3.8.: Sustav za dijeljenje dva signala

Kako spojnu listu nije moguće sortirati sustav je implicitan, što smo i očekivali jer postoji petlja povratne veze. No možemo formalno prekinuti petlju povratne veze kako je prikazano na slici 3.9. uvođenjem $q = Q$ umjesto Ω. Varijabla q sada predstavlja dodatni ulaz u sustav. U tom slučaju je moguće napisati i sortirati spojnu listu:

$$\begin{aligned} \Pi: &\quad x_1, q \\ \Sigma: &\quad x_2, \Pi \\ Q: &\quad \Sigma \end{aligned}$$

Sada prema spojnoj listi odmah pišemo jednadžbe za pojedini blok, te zatim redom uvrštavamo svaku jednadžbu u sljedeću:

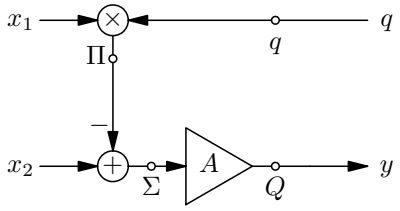
$$\begin{aligned} \Pi &= x_1 q \\ \Sigma &= x_2 - \Pi \\ Q &= A\Sigma \\ y &= Q \end{aligned}$$

Nakon sređivanja dobivamo

$$y = A(x_2 - x_1 q) = f(x_1, x_2, q).$$

Kako smo kod prekidanja petlje povratne veze odabrali $y = q$ konačni izraz koji opisuje sustav postaje

$$y = A(x_2 - x_1 y) = f(x_1, x_2, y).$$



Slika 3.9.: Prekidanje petlje povratne veze

Podijelimo sada dobiveni izraz s Ax_1. Dobivamo

$$y = \frac{x_2}{x_1} - \frac{y}{Ax_1}.$$

Kada pojačanje A teži k beskonačnosti ($A \to \infty$) dobivamo

$$y = \frac{x_2}{x_1}.$$

Za stvarnu implementaciju dovoljno je da pojačanje pojačala bude dovoljno veliko da član $y/(Ax_1)$ značajno ne doprinosi izlazu.

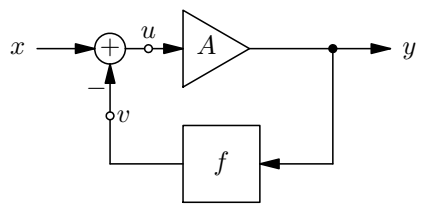
Razmotimo još što se događa u slučaju dijeljenja s nulom. Kada je $x_1 = 0$ dobivamo

$$y = A(x_2 - x_1 y) = Ax_2,$$

pa za $A \to \infty$ imamo i $y \to \infty$. Opet, za stvarnu implementaciju za x_1 koji je blizak nuli te za jako veliko pojačanje A izlaz će biti ograničen naponom napajanja pojačala.

Primjer 3.8. Realizirajte sustav za računanje inverzne funkcije f^{-1} koristeći funkcijski blok za računanje funkcije f, pojačalo i zbrajalo.

Rješenje: Da bi realizirai sustav za računanje inverzne funkcije koristimo povratnu vezu kako je prikazano na slici 3.10.. Kako sustav ima petlju povratne veze radi se o implicitnom sustavu.



Slika 3.10.: Sustav za računanje inverzne funkcije

Jednadžbe sustava su

$$\begin{aligned} u &= x - v \\ v &= f(y) \\ y &= Au \end{aligned}$$

Sređivanjem dobivamo jednadžbu sustava

$$y = A\big(x - f(y)\big),$$

što ne možemo izraziti kao eksplicitnu funkciju po varijabli x. No zato dobiveni izraz možemo zapisati kao eksplicitnu funkciju po varijabli y,

$$x = f(y) + \frac{y}{A}.$$

Kada pojačanje A teži k beskonačnosti ($A \to \infty$) dobivamo

$$x = f(y),$$

odnosno

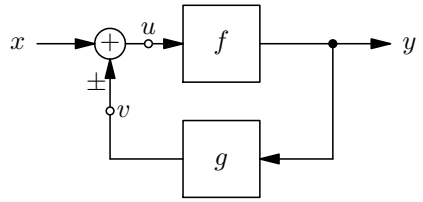
$$y = f^{-1}(x).$$

Vidimo da prikazani sklop realizira upravo inverznu funkciju

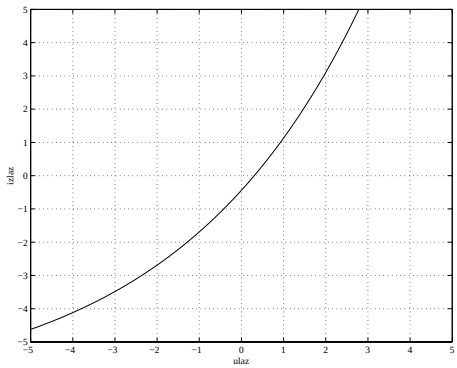
3.2. Relacijski blokovi

Primjer 3.9. Analiziraj sustav s petljom povratne veze prikazan na slici 3.11.. Ako su U/I karakteristike blokova f i g zadane na slici 3.12., odredi U/I karakteristiku sustava za slučaj pozitivne i negativne povratne veze. Da li je cijeli sustav funkcijski ili relacijski blok?

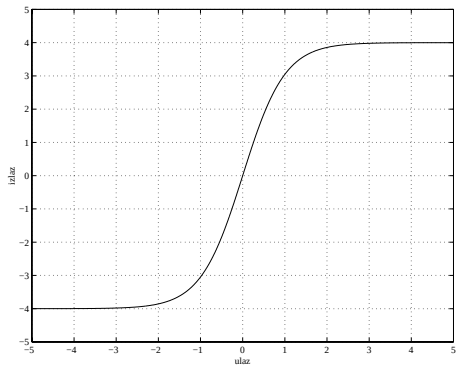
Rješenje: Zadani sustav ima jednu petlju povratne veze. Sama povratna veza može biti pozitivna ili negativna ovisno da li se povratni signal v (izlaz iz bloka



Slika 3.11.: Sustav s povratnom vezom



funkcijski blok f



funkcijski blok g

Slika 3.12.: U/I karakteristike funkcijskih blokova f i g

g) dodaje ili oduzima od pobude. Dakle, za dodavanje (+) govorimo o pozitivnoj povratnoj vezi, dok za oduzimanje (−) govorimo o negativnoj povratnoj vezi.

Jednadžbe sustava sa slike 3.11. su

$$\begin{aligned} u &= x \pm v \\ v &= g(y) \\ y &= f(u) \end{aligned}$$

Nakon sređivanja dobivamo

$$x = f^{-1}(y) \mp g(y).$$

Dobiveni izraz nam predstavlja inverznu prijenosnu funkciju sustava. Prijenosna funkcija sustava bi bila

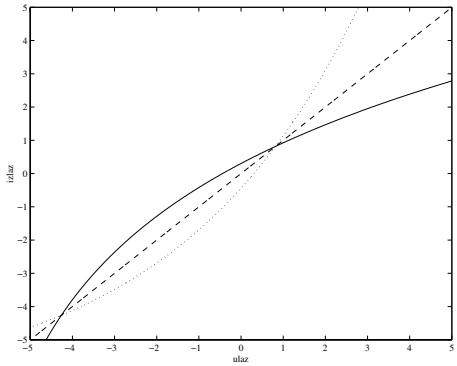
$$y = \left(f^{-1} \mp g\right)^{-1}(x).$$

Naravno, ovdje pretpostavljamo da navedeni inverzi postoje. U slučaju kada inverzne funkcije f^{-1} i $(f^{-1} \mp g)^{-1}$ postoje cijeli sustav se može zamijeniti jednim funkcijskim blokom, a u protivnom govorimo o relacijskom bloku.

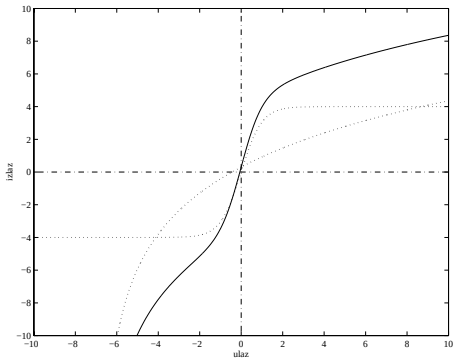
Za negativnu povratnu vezu vrijedi

$$x = \left(f^{-1} + g\right)(y).$$

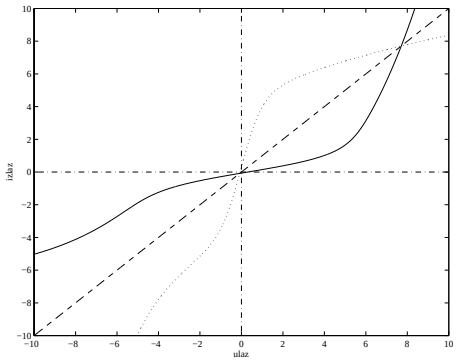
Da bi odredili prijenosnu funkciju sustava prvo određujemo f^{-1} zrcaljenjem grafa funkcije f oko pravca $y = x$ kako je prikazano na slici 3.13.. Sada je potrebno zbrojiti f^{-1} i g te odrediti inverz takve kompozicije. Dani postupak opet provodimo grafički kako je prikazano na slici 3.14.. Na prvoj slici punom crtom je prikazan zbroj funkcija f^{-1} i g dok su same funkcije f^{-1} i g prikazane crtkano. Na drugoj slici je prikazana konačna karateristika dobivena zrcaljenjem zbroja oko pravca $y = x$. Dobivena karakteristika u ovom slučaju je funkcija te cijeli sustav za slučaj negativne povratne veze možemo zamijeniti jednim funkcijskim blokom.



Slika 3.13.: Grafičko određivanje inverza funkcije f



zbroj $f^{-1} + g$



tražena karakteristika $(f^{-1} + g)^{-1}$

Slika 3.14.: Određivanje U/I karakteristike sustava za slučaj pozitivne povratne veze

Za pozitivnu povratnu vezu vrijedi

$$x = \big(f^{-1} - g\big)(y).$$

Da bi odredili prijenosnu funkciju sustava opet nam je potrebna f^{-1} (slika 3.13.). Sada je potrebno izračunati razliku f^{-1} i g te odrediti inverz takve kompozicije. Dani postupak opet provodimo grafički kako je prikazano na slici 3.15.. Dobivena karakteristika u ovom slučaju nije funkcija već relacija, pa cijeli sustav za slučaj negativne povratne veze možemo zamijeniti jedino relacijskim blokom.

Primjer 3.10. Zadan je sustav prikazan na slici 3.16.. Neka je funkcija f zbroj,

$$f(x, y) = x + y.$$

Odredi relaciju koja opisuje ovakav sustav. Može li se sustav zamijeniti ekvivalentinm funkcijskim blokm?

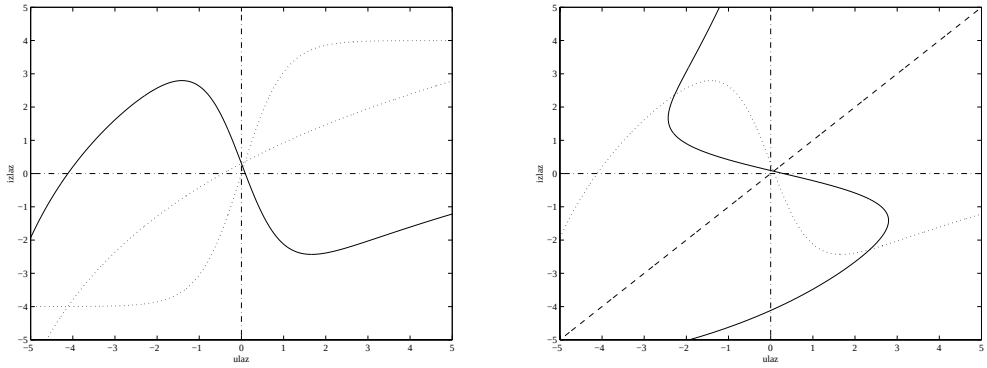
Rješenje: Jednadžba koja opisuje sustav je

$$y = f(x, y) = x + y.$$

Za $x = 0$ izlaz y je proizvoljan, dok za $x \neq 0$ nema rješenja, tj. sustav je nemoguć. Kako je jednadžba koja opisuje sustav $x = 0$ sustav nije moguće nadomjestiti funkcijskim, već samo relacijskim blokom.

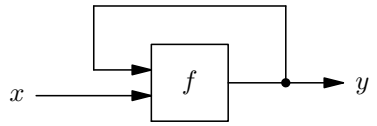
Primjer 3.11. Zadan je sustav prikazan na slici 3.17.. Neka su funkcije f i q

$$f(x, y) = x + y$$
$$g(x) = x^2$$



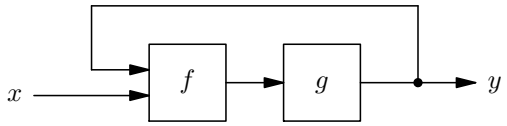
razlika $f^{-1} - g$ tražena karakteristika $(f^{-1} - g)^{-1}$

Slika 3.15.: Određivanje U/I karakteristike sustava za slučaj negativne povratne veze



Slika 3.16.: Implicitni sustav

Odredi i nacrtaj relaciju koja opisuje sustav.



Slika 3.17.: Implicitni sustav

Rješenje: Jednadžba koja opisuje sustav je

$$y = g\big(f(x,y)\big) = (x+y)^2.$$

Sređivanjem dobivamo relaciju koja opisuje sustav,

$$y^2 + (2x-1)y + x^2 = 0.$$

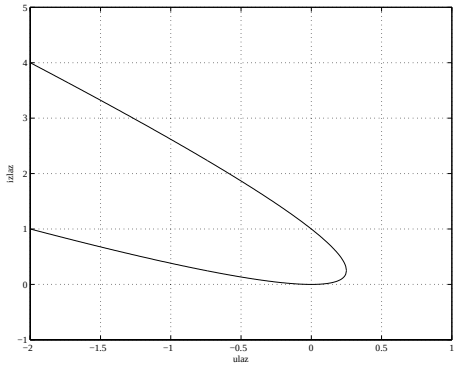
Relana rješenja postoje samo za slučaj kada je diskriminanta D veća ili jednaka nuli, odnosno za

$$D = (2x-1)^2 - 4x^2 \geq 0.$$

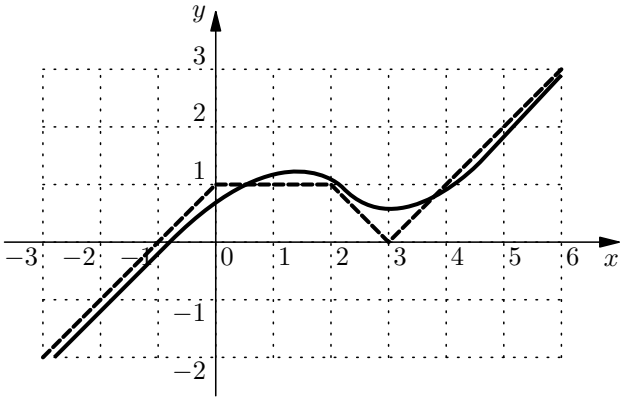
Sada slijedi da realno rješenje postoji za $x \leq \frac{1}{4}$. No kako se radi o paraboli, za svaki $x \leq \frac{1}{4}$ dobivamo dva realna rješenja koja predstavljaju dva moguća izlaza iz sustava, npr. za $x = 0{,}125$ dobivamo $y_1 = 0{,}998$ i $y_2 = -0{,}238$. Sama prabola je prikazana na slici 3.18..

3.3. Aproksimacija U/I karakteristike linearnim segmentima

Postoje razne U/I karakteristike koje je izuzetno teško točno realizirati. U takvim slučajevima obično se realizira sustav koji aproksimira traženu U/I karakteristiku. Najjednostavnija aproksimacija je upravo aproksimacija linearnim segmentima prikazana na slici 3.19. .



Slika 3.18.: Relacija koja opisuje sustav sa slike 3.17.

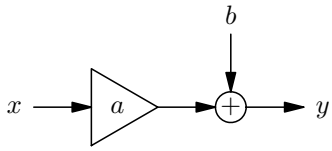


Slika 3.19.: Aproksimacija U/I karakteristike

Najprije pogledajmo kako se realizira obična afina funkcija opisana jednadžbom

$$y = ax + b. \tag{3.3}$$

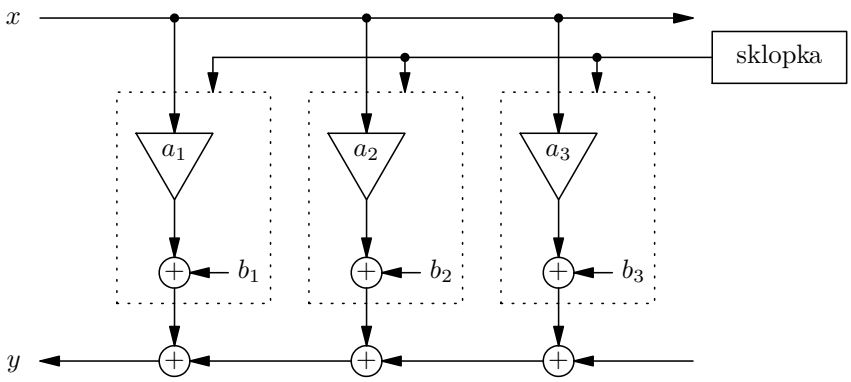
Jednadžba zadana s (3.3) ima jedno zbrajanje i jedno množenje te se može realizirati korištenjem zbrajala i pojačala kako je prikazano na slici 3.20.. No takvom realizacijom nije moguće ostvariti pravac paralelan s y-osi (koeficijent a bi u tom slučaju trebao težiti k beskonačnosti), no to i nije toliko bitno jer takav pravac, osnosno odgovarajuća U/I karakteristika ne predstavlja funkcijski već relacijski blok.



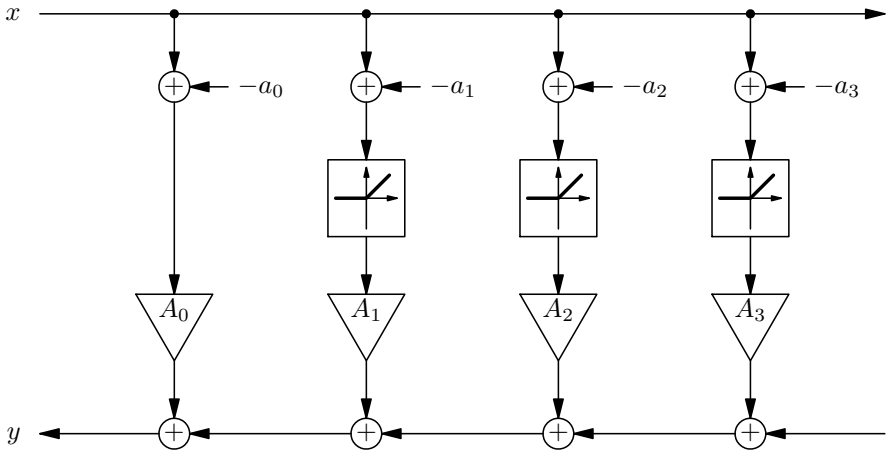
Slika 3.20.: Realizacija jednadžbe pravca

Kako želimo aproksimirati bilo kakvu funkcijsku U/I karakteristiku s više različitih linearnih segmenata, potrebno je kombinirati više struktura koje realiziraju afinu funkciju. Da bi mogli kombinirati dane strukture u jedan sustav koji ima traženu U/I karakteristiku potreban je još jedan element koji bi djelovao poput sklopke i na taj način odabirao jednu od traženih afinih funkcija (slika 3.21.). U tom slučaju bi uključeni segment realizirao traženu afinu funkciju, dok bi isključeni segmenti na izlazu davali nulu.

Za element koji će djelovati kao sklopka odabrali smo funkcijski blok prag. Funkcijski blok prag daje na izlazu nulu sve dok je ulazni signal manji od nule, što nam upravo i treba. Prag treba postaviti u svaku granu tako da grana na izlazu daje nulu dok treba biti isključena. Osnovna realizacija u tom slučaju izgleda kako je prikazano na slici 3.22..



Slika 3.21.: Načelna shema bloka za aproksimaciju U/I karakteristike



Slika 3.22.: Osnovna shema funkcijskog bloka za aproksimaciju U/I karakteristike

Za takvu realizaciju paralelnih grana mora biti barem onoliko koliko linearnih segmenata postoji u traženoj karakteristici. Na slici 3.22. nacrtana su četiri segmenta, a karakteristika koja se realizira ima tri točke loma. Te točke loma su redom a_1, a_2 i a_3, a te konstante određuju kada se uključuje odgovarajuća grana. Analiza cijele karakteristike dana je u tablici 3.1.. Primijetite da je nabib pravca u danom trenutku zbroj pojačanja pojačala u trenutno aktivnim granama, dok trenutno aktivne grane određuje blok prag.

interval	$-\infty < x < a_1$	$a_1 \leq x < a_2$	$a_2 \leq x < a_3$	$a_3 \leq x < +\infty$
karakteristika	$y = A_0x - A_0a_0$	$y = A_0(x - a_0)$	$y = A_0(x - a_0)$	$y = A_0(x - a_0)$
		$+ A_1(x - a_1)$	$+ A_1(x - a_1)$	$+ A_1(x - a_1)$
			$+ A_2(x - a_2)$	$+ A_2(x - a_2)$
				$+ A_3(x - a_3)$
nagib	A_0	$A_0 + A_1$	$A_0 + A_1 + A_2$	$A_0 + A_1 + A_2 + A_3$
pomak	$-A_0a_0$	$-A_0a_0 - A_1a_1$	$-A_0a_0 - A_1a_1$	$-A_0a_0 - A_1a_1$
			$-A_2a_2$	$-A_2a_2 - A_3a_3$

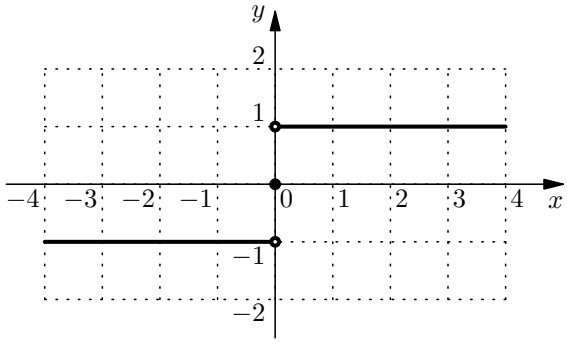
Tablica 3.1.: Karakteristika funkcijskog bloka sa slike 3.22.

Na prikazan način je moguće sastaviti bilo kakavu funkcijsku karakteristiku gdje se linearni segmenti nastavljaju jedan na drugi bez skokova, tj. diskontinuiteta. Ako želimo realizirati karakteristiku u kojoj se linearni segmenti ne nastavljaju jedan na drugi, odnosno postoje skokovi u karakteristici, potrebno je koristiti dodatni funkcijski blok signum. Taj blok je definiran

funkcijom sgn(x),

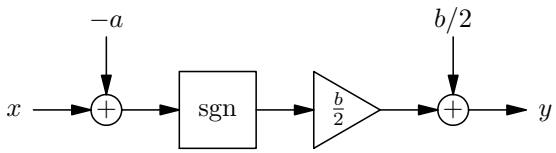
$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{za } x > 0 \\ 0, & \text{za } x = 0 \\ -1, & \text{za } x < 0 \end{cases} . \tag{3.4}$$

Karakteristika signum funkcijskog bloka dana je na slici 3.23.. Kako je vidljivo iz slike, funkcija sgn ima skok od +2, i to od −1 do +1 u nuli. Obično je pri realizaciji neke zadane karakteristike potreban skok za neki drugi iznos, i obično ne u nuli. Da bi to postigli potrebno je dodatno transformirati ulazni signal u blok signum, a i izlazni signal iz bloka signum.



Slika 3.23.: sgn(x) funkcija

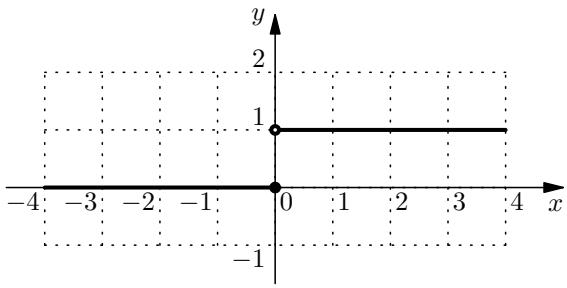
Pretpostavimo da je potrebno postići skok za b od nule do b u točci $x = a$. U tom slučaju najprije ulazni signal trebamo transformirati tako da je nula transformiranog signala u točci $x = a$ što postižemo oduzimanjem konstante a. Kako izlaz iz bloka signum ima skok od +2, potrebno je izlaz pomnožiti s $b/2$ čime dobivamo skok za b u točci $x = a$. No taj skok je od $-b/2$ do $b/2$, tako da je još potrebno dodati $b/2$ da bi skok bio od nule do b. Sturuktura je prikazana na slici 3.24..



Slika 3.24.: Realizacija skoka za b od nule do b u točci $x = a$

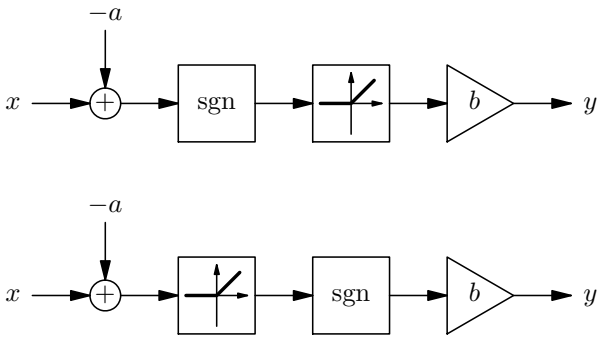
Primijetite da karakteristika funkcije sgn(x) na slici 3.23. u nuli ima vrijednost nula. U zadacima danim ovdje skok će biti nacrtan kao vertikalna ravna crta, tj. vrijednost funkcije u točci skoka nije bitna, već su bitne vrijednosti funkcije prije i poslije skoka.

Skok u karakteristici je moguće realizirati i na drugi način, i to kombinacijom blokova signum i prag. Sama funkcija sgn(x) ima skok od −1 do +1, dok će kombinacija signuma i praga imati skok od nule do +1. Pri tome redoslijed blokova nije bitan jer obje kombinacije daju jednaku U/I karakteristiku prikazanu na slici 3.25..



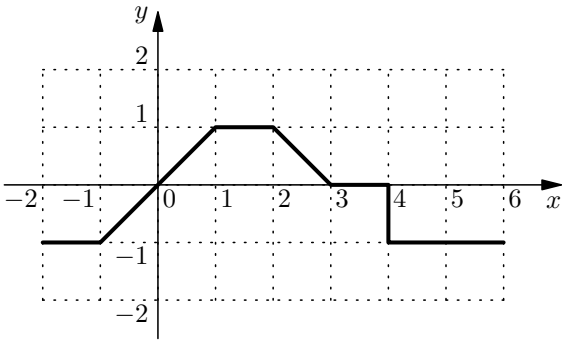
Slika 3.25.: Kombinacija sgn(x) i prag funkcija

Stoga umjesto sheme za realizaciju skoka u U/I karakteristici prikazanoj na slici 3.24. kojom dobivamo skok od nule do b u točci $x = a$ možemo korisiti jednu od shema sa slike 3.26.. Naravno, ovdje prikazane realizacija skoka nisu jednine moguće.



Slika 3.26.: Neke od mogućih realizacija skoka od nule do b u točci a

Primjer 3.12. Realiziraj karakteristiku zadanu slikom 3.27. koristeći blokove zbrajalo, pojačalo, prag i signum.



Slika 3.27.: U/I karakteristika

Rješenje: Karakteristika zadana slikom 3.27. ima pet točaka loma, s time da skok u točci $x = 4$ računamo kao jednu točku loma. Točke loma su redom -1, 1, 2, 3 i 4, pa je

$$a_1 = -1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2,\ a_4 = 3 \text{ i } a_5 = 4.$$

Nagib prvog pravca je 0, dakle

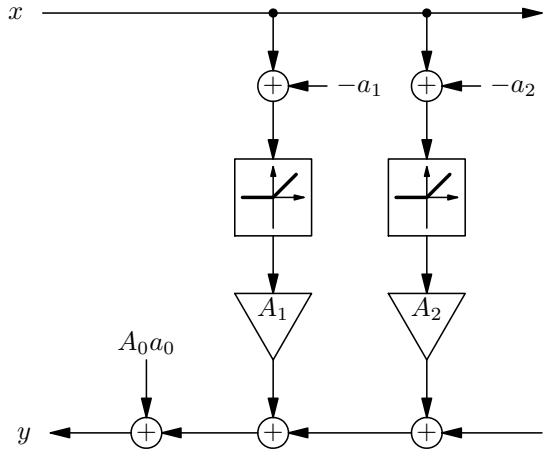
$$A_0 = 0,$$

dok je pomak -1, te je prema tablici 3.1.

$$A_0 a_0 = -1.$$

Očito je da koeficijent a_0 u ovom slučaju nije iz skupa realnih brojeva. Naime, zadani prvi pravac je paralelan s x-osi te ga nije moguće realizirati kako je nacrtano na slici 3.22., već ga realiziramo dodavanjem konstante izravno u izlaz. Pri tome struktura svih ostalih blokova ostaje nepromijenjena (slika 3.28.).

Potrebno je još odrediti pojačanja pojačala. Prema karakteristici na slici 3.27. nagibi pravaca su redom 0, 1, 0, -1, 0 i 0. Iz tih nagiba sada računamo



Slika 3.28.: Načelna shema sustava kada je prvi zadani segment paralelan s x-osi

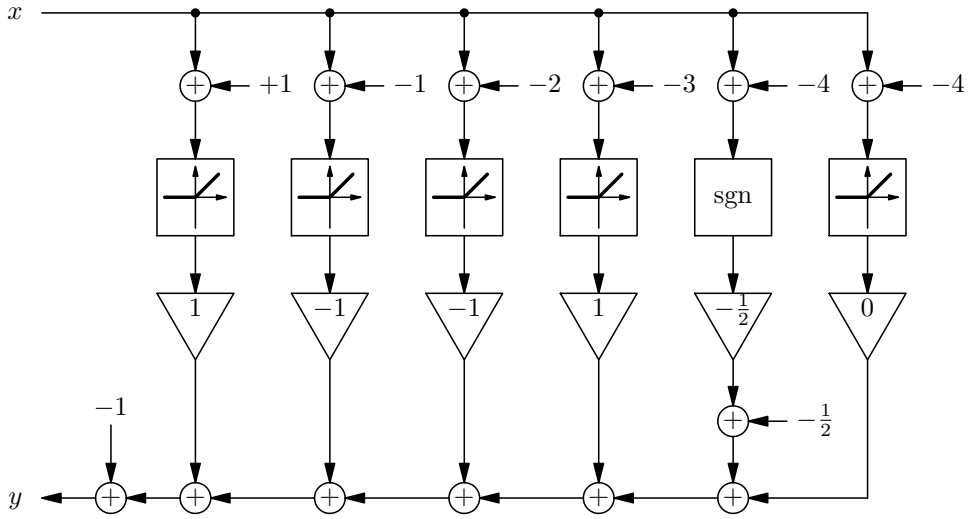
redom pojačanja od A_1 do A_5

$$\begin{aligned}
0 &= A_0 \\
1 &= A_0 + A_1 \\
0 &= A_0 + A_1 + A_2 \\
-1 &= A_0 + A_1 + A_2 + A_3 \\
0 &= A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \\
0 &= A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5
\end{aligned}$$

Za pojačanja redom dobivamo

$$A_0 = 0,\ A_1 = 1,\ A_2 = -1,\ A_3 = -1,\ A_4 = 1 \text{ i } A_5 = 0.$$

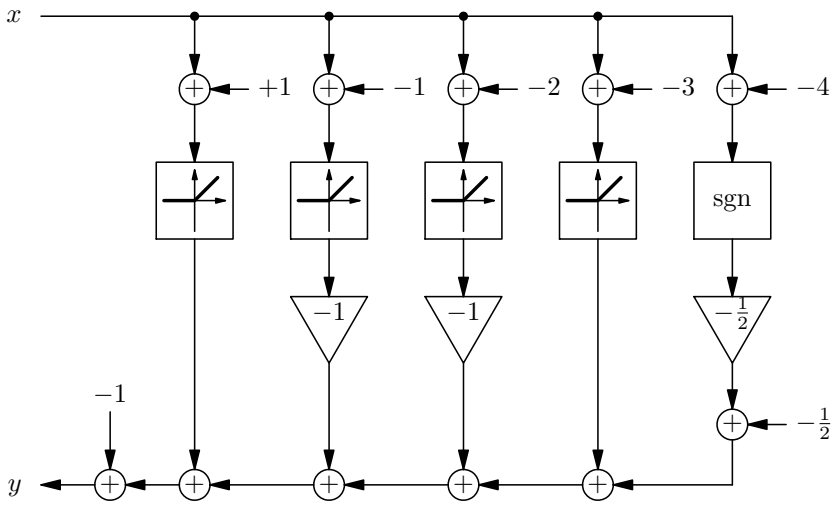
Time je određena struktura svih segmenata osim skoka. Zadana karakteristika ima skok za -1 u točci $x = 4$. Da bi smo taj skok realizirali koristimo shemu prikazanu na slici 3.24.. Sada možemo nacrtati konačnu shemu bloka koji realizira zadanu U/I karakteristiku (slika 3.29.).



Slika 3.29.: Shema sustava s U/I karakteristikom prikazanom na slici 3.27.

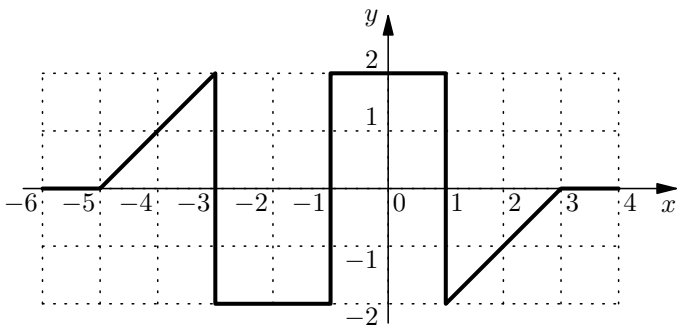
Na slici 3.29. je nacrtano potpuno rješenje zajedno sa svim izračunatim parametrima. Dobiveno rješenje se može pojednostavniti izbacivanjem nepotrebnih

elemenata kao što su npr. jedinično pojačalo. Osim tih pojednostavljenja primijetite da cijela zadnja grana na izlazu ima pojačalo pojačanja 0 i uopće ne utječe na karakteristiku te se može izostaviti. Rezultat tih pojednostavljenja prikazan je na slici 3.30.. Osim toga uvijek je moguće primijeniti pravila algebre funkcijskih blokova te dodatno pojednostavniti dobivenu shemu.



Slika 3.30.: Pojednostavljenja shema sa slike 3.29.

Zadatak 3.3. Korištenjem funkcijskih blokova prag, pojačalo, zbrajalo i signum realizirajte U/I karakteristiku zadanu slikom 3.31.. Odredite odziv na pobudu zadanu slikom 3.32..



Slika 3.31.: U/I karakteristika

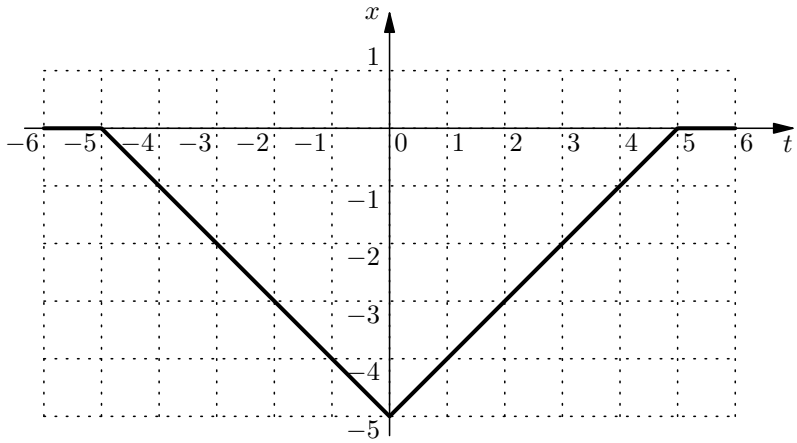
Rješenje: Jedno od mogućih rješenja je prikazano na slici 3.33., dok je odziv prikazan na slici 3.34..

Zadatak 3.4. Korištenjem funkcijskih blokova prag, pojačalo i zbrajalo realizirajte U/I karakteristiku zadanu slikom 3.35.. Odredite odziv na pobudu zadanu slikom 3.36..

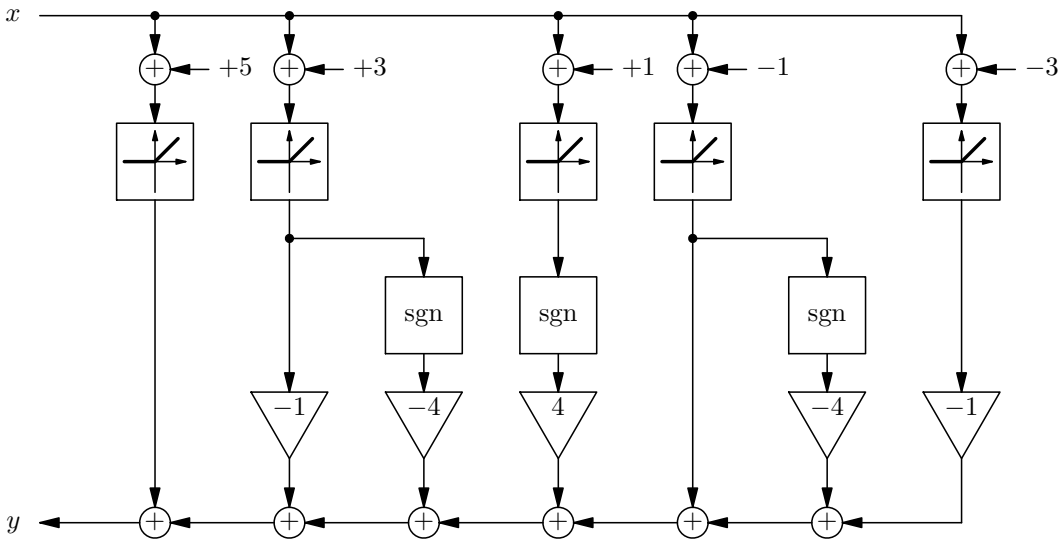
Rješenje: Jedno od mogućih rješenja je prikazano na slici 3.37., dok je odziv prikazan na slici 3.38..

Zadatak 3.5. Za bezmemorijski sustav zadan slikom 3.39. odredi ulazno-izlaznu karakteristiku te odziv na pobudu $x(t) = t + 1$.

Rješenje: Ulazno-izlazna karakteristika sustava ima dva prekida u točkama -2



Slika 3.32.: Pobuda $x(t)$



Slika 3.33.: Realizacija karakteristike sa slike 3.31.

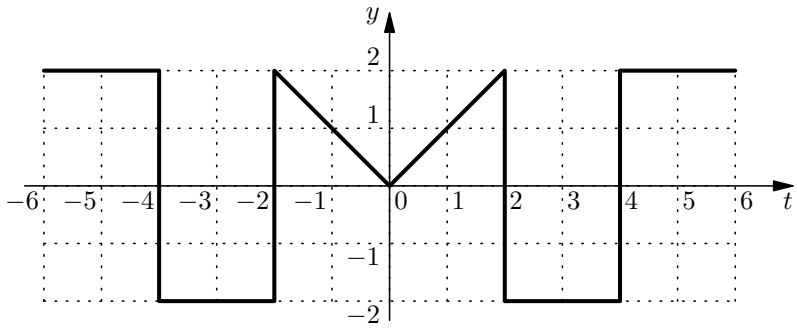
i 0. Karakteristika je

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ 1, & x = -2 \\ x+4, & -2 < x < 0 \\ 3, & x = 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases} .$$

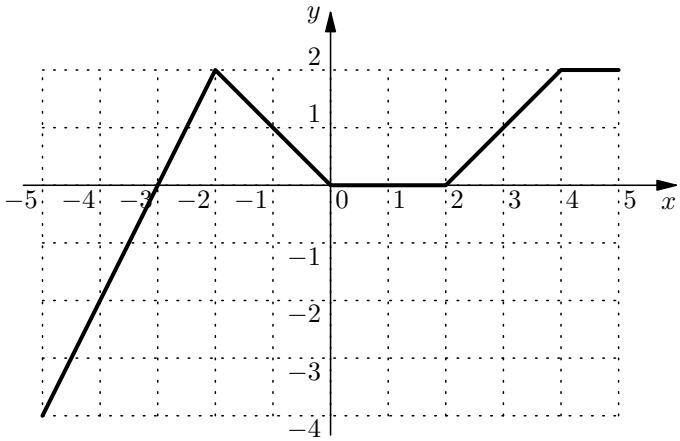
Odziv na zadanu pobudu $x(t) = t + 1$ je

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < -3 \\ 1, & t = -3 \\ t+4, & -2 < t < -1 \\ 3, & t = -1 \\ 2, & t > -1 \end{cases} .$$

Primjer 3.13. Odredite ulazno-izlaznu karakteristiku sustava zadanog slikom 3.40.. Odredite



Slika 3.34.: Odziv $y(t)$ sustava sa slike 3.33. na pobudu sa slike 3.32.



Slika 3.35.: U/I karakteristika

odziv sustava na diskretni signal konačnog trajanja

$$x[n] = \{\ldots, 0, \underline{0}, 1/4, -1/2, 3/4, -1, 3/4, 1/5, 0, 0, 0, \ldots\}.$$

Rješenje: Odredimo najprije ulazno-izlaznu karakteristiku. Prema slici 3.40. karakteristika će imati ukupno pet točaka loma. Granice intervala koje predstavljaju točke loma karakteristike su

$$\{-1, -1/2, 0, 1/2, 1\},$$

a na izlazu se preslikavaju u

$$\{0, 2, 13/2, 14, 47/2\}.$$

U svakom od intervala karakteristika se može opisati afinom funkcijom oblika

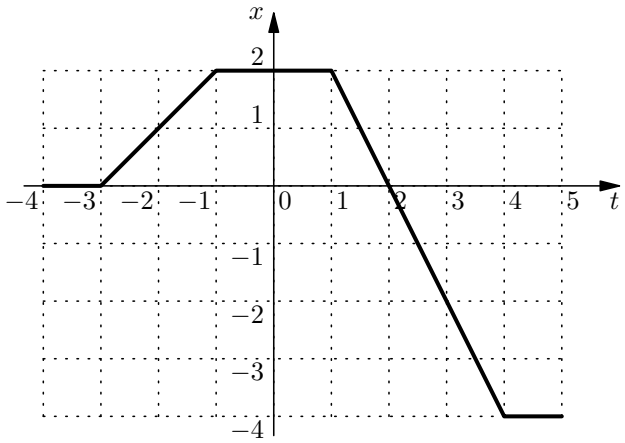
$$y[n] = a_i x[n] + b_i.$$

Nagibi pravaca u pojedinim intervalima odgovaraju zbroju aktivnih pojačala na izlazu pojedinih segmenata i redom iznose

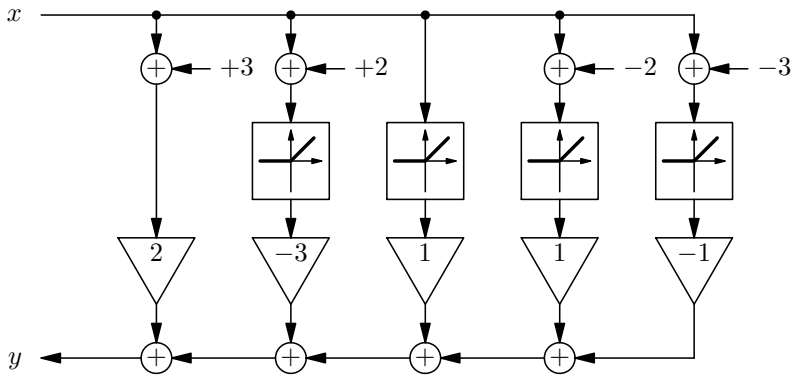
$$a_0 = 0, \quad a_1 = 4, \quad a_2 = 9, \quad a_3 = 15, \quad a_4 = 19 \quad \text{i} \quad a_5 = 22.$$

Sada određujemo i pomake b_i te dobivamo

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 4, \quad b_1 = \frac{13}{2}, \quad b_1 = \frac{13}{2}, \quad b_1 = \frac{9}{2} \quad \text{i} \quad b_1 = \frac{3}{2}.$$



Slika 3.36.: Pobuda $x(t)$



Slika 3.37.: Realizacija karakteristike sa slike 3.35.

Karakteristiku sada možemo zapisati kao

$$y[n] = \begin{cases} 0, & x[n] < -1 \\ 4x[n] + 4, & -1 \leq x[n] < -\frac{1}{2} \\ 9x[n] + \frac{13}{2}, & -\frac{1}{2} \leq x[n] < 0 \\ 15x[n] + \frac{13}{2}, & 0 \leq x[n] < \frac{1}{2} \\ 19x[n] + \frac{9}{2}, & \frac{1}{2} \leq x[n] < 1 \\ 22x[n] + \frac{3}{2}, & 1 \leq x[n] \end{cases}.$$

Potrebno je još odrediti izlazni niz za pobudu

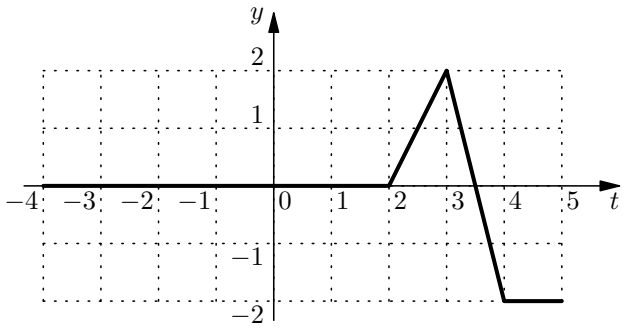
$$x[n] = \{\ldots, 0, \underline{0}, 1/4, -1/2, 3/4, -1, 3/4, 1/5, 0, 0, 0, \ldots\}.$$

Uvrštavanjem u jednadžbe ulazno-izlazne karakteristike dobivamo

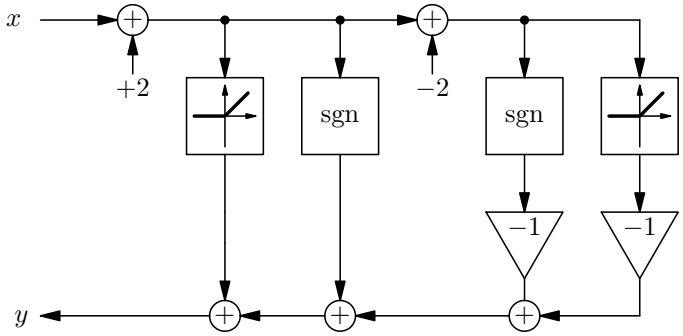
$$y[n] = \{\ldots, 13/2, \underline{13/2}, 41/4, 2, 75/4, 0, 75/4, 19/2, 13/2, 13/2, 13/2, \ldots\}.$$

Zadatak 3.6. Za bezmemorijski kontinuirani sustav zadan je odziv $y(t)$ prikazan na slici 3.41. na pobudu $x(t)$ prikazanu na slici 3.42.. Odredite U/I karakteristiku sustava te realizirajte sustav koristeći funkcijske blokove pojačalo, zbrajalo, prag i signum.

Rješenje: U/I karakteristika traženog sustava prikazana je na slici 3.43., dok je jedna od mogući realizacija prikazana na slici 3.44..



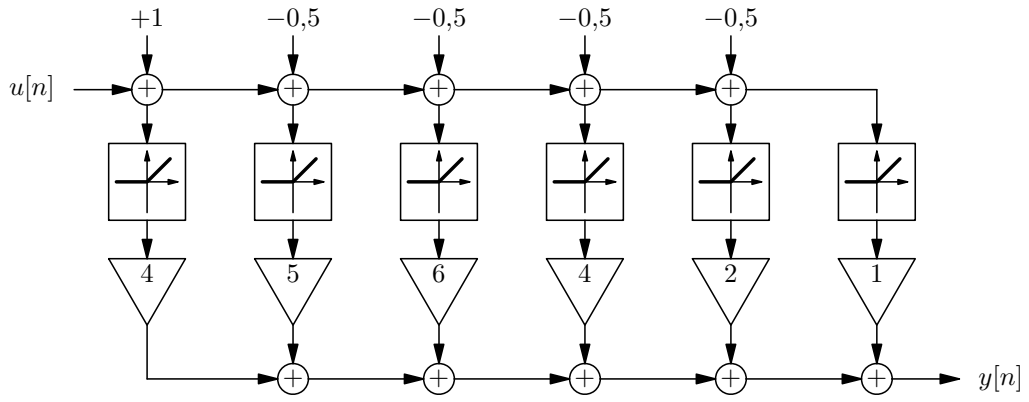
Slika 3.38.: Odziv $y(t)$ sustava sa slike 3.37. na pobudu sa slike 3.36.



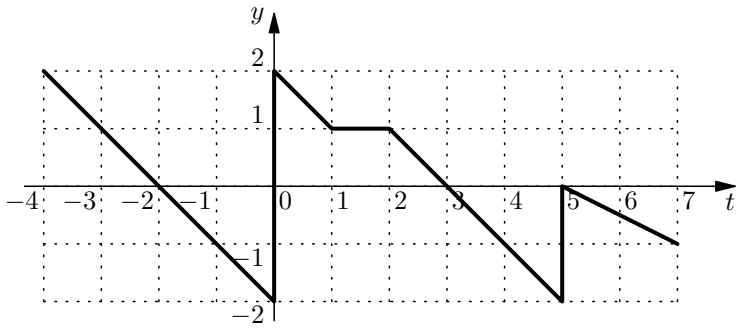
Slika 3.39.: Bezmemorijski sustav

Zadatak 3.7. Za bezmemorijski kontinuirani sustav zadan slikom 3.45. odredite U/I karakteristiku. Odredite i odziv na pobudu sa slike 3.46..

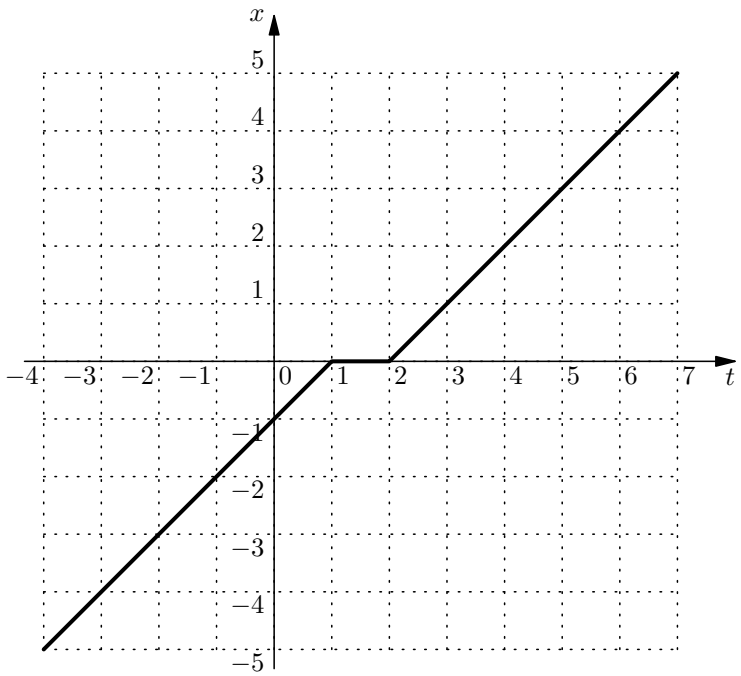
Rješenje: U/I karakteristika traženog sustava prikazana je na slici 3.47., dok je odziv na zadanu pobudu prikazan na slici 3.48..



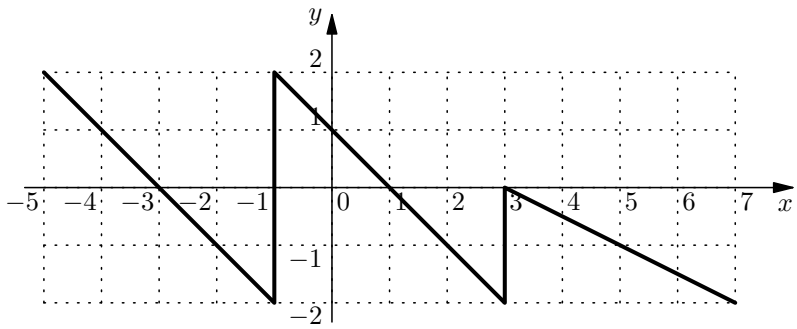
Slika 3.40.: Diskretni sustav



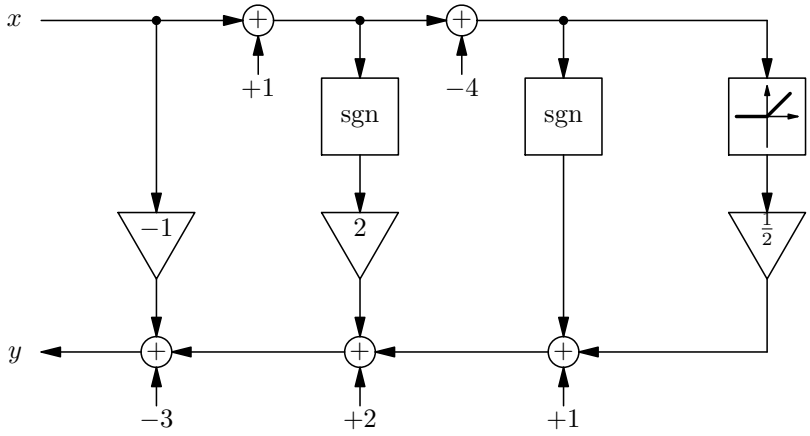
Slika 3.41.: Odziv $y(t)$ na pobudu sa slike 3.42.



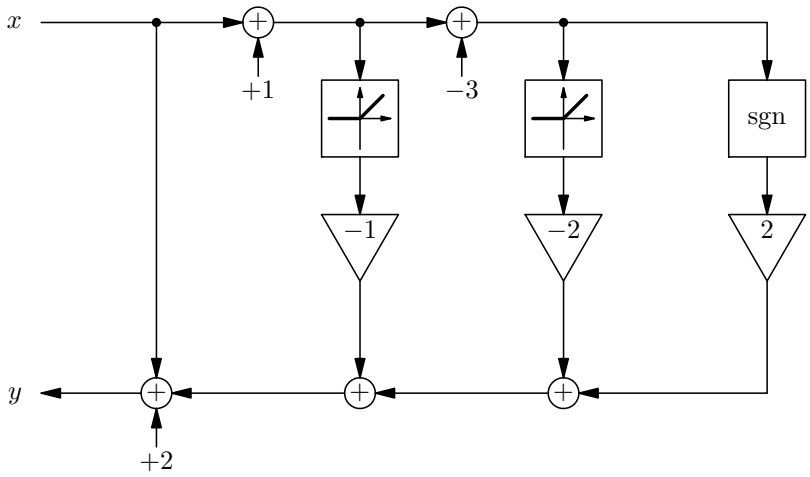
Slika 3.42.: Pobuda $x(t)$



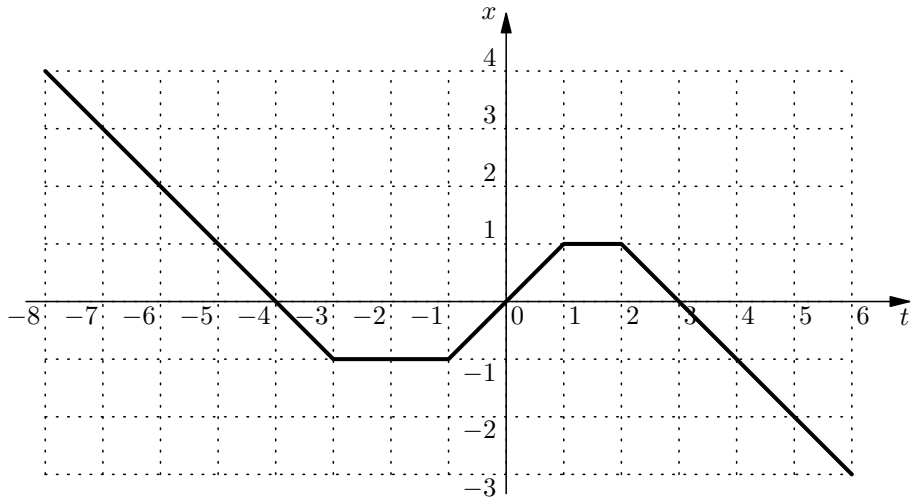
Slika 3.43.: U/I karakteristika



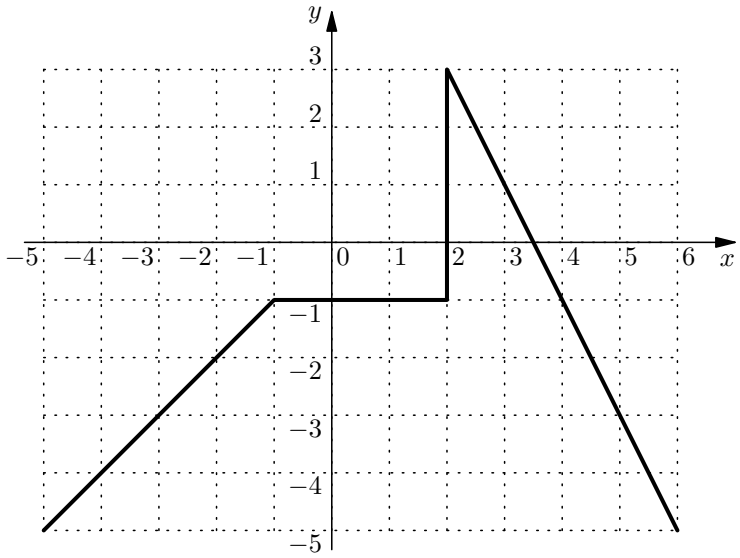
Slika 3.44.: Realizacija karakteristike sa slike 3.43.



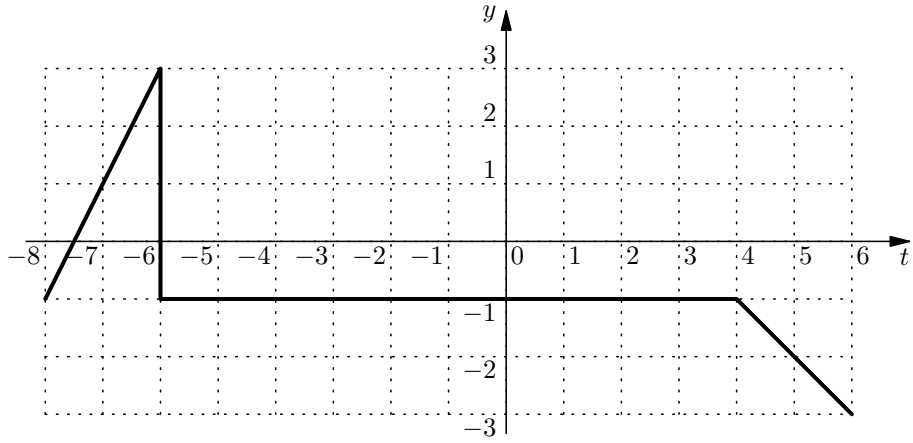
Slika 3.45.: Bezmemorijski kontinuirani sustav



Slika 3.46.: Pobuda $x(t)$



Slika 3.47.: U/I karakteristika



Slika 3.48.: Odziv $y(t)$ sustava sa slike 3.45. na pobudu sa slike 3.46.

3.4. Algebra funkcijskih blokova

Pravila iz algebre funkcijskih blokova koristimo pri pojednostavljivanju ili analizi sustava, bilo memorijskih bilo bezmemorijskih.

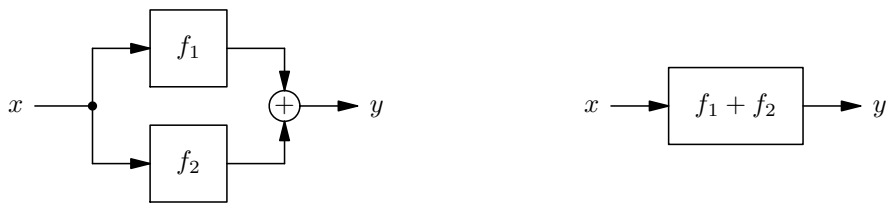
Prvo pojednostavljenje jest paralela funkcijskih blokova kako je prikazano na lijevom dijagramu sa slike 3.49.. Ovdje je izlaz y jednak zbroju vrijednosti funkcija,

$$y = f_1(x) + f_2(x).$$

Takav zbroj pišemo kao

$$y = \big(f_1 + f_2\big)(x), \tag{3.5}$$

no ovdje nam operacija + sada predstavlja zbrajanje funkcija. Tako definirano zbrajanje je komutativno. Stoga paralelu zamijenjujemo s novim funkcijskim blokom u kojeg upisujemo $f_1 + f_2$ kako je prikazano na desnom dijagramu sa slike 3.49..



Slika 3.49.: Paralela dva funkcijska bloka

Kaskada funkcijskih blokova odgovara kompoziciji funkcija. Za kaskadu prikazanu na lijevom dijagramu sa slike 3.50. izlaz y je

$$y = f_2\big(f_1(x)\big) = \big(f_2 \circ f_1\big)(x)$$

Kompoziciju pišemo kao

$$y = \big(f_1 \cdot f_2\big)(x), \tag{3.6}$$

gdje na ulaz x prvo djeluje prva funkcija f_1, a na njen rezultat onda djeluje druga funkcija f_2. Primijetite da kompozicija funkcija općenito nije komutativna, odnosno

$$f_2 \circ f_1 \neq f_1 \circ f_2.$$

Kaskadu stoga zamijenjujemo novim funkcijskim blokom u kojeg upisujemo $f_1 \cdot f_2$ kako je prikazano na desnom dijagramu sa slike 3.50..

Slika 3.50.: Kaskada dva funkcijska bloka

Jedna od najvažnijih struktura je povratna veza koja je prikazana na lijevom dijagramu sa slike 3.51.. Odredimo funkciju s kojom možemo zamijeniti takav blok. Vrijedi

$$y = f_1\big(x - f_2(y)\big).$$

Neka je funkcija g_1 linearna. Tada dobivamo

$$y = f_1(x) - f_1\big(f_2(y)\big) = f_1(x) - \big(f_1 \cdot f_2\big)(y).$$

Označimo li s 1 funkciju identiteta,

$$1(x) = x, \tag{3.7}$$

možemo pisati

$$\big(1 + f_1 \cdot f_2\big)(y) = f_1(x).$$

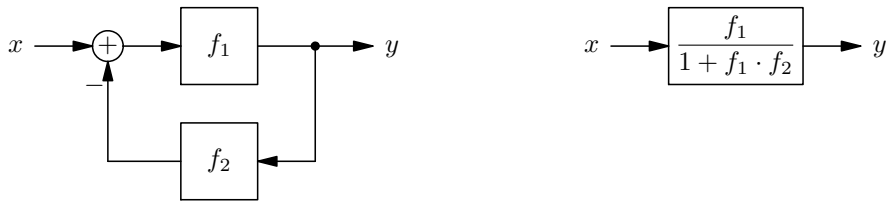
Ako postoji inverz složene funkcije $1 + f_1 \cdot f_2$ dobiveni izraz možemo dodatno pojednostavniti u

$$y = \Big(\frac{f_1}{1 + f_1 \cdot f_2}\Big)(x). \tag{3.8}$$

Povratnu vezu stoga možemo zamijeniti s novim funkcijskim blokom u kojeg upisujemo

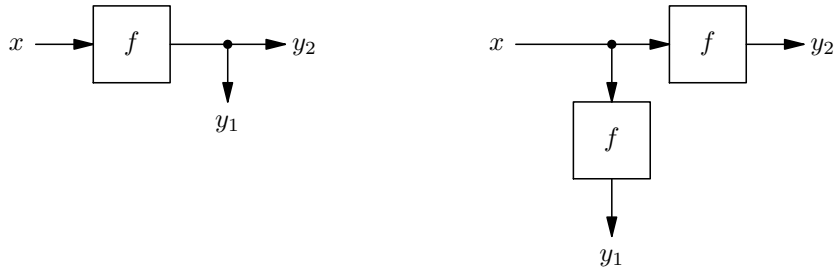
$$\frac{f_1}{1 + f_1 \cdot f_2}$$

kako je prikazano na desnom dijagramu sa slike 3.51.. Primijetite da je prikazana zamjena ispravna samo ako je funkcija f_1 linearna te ako postoji inverzsložene funkcije $1 + f_1 \cdot f_2$.

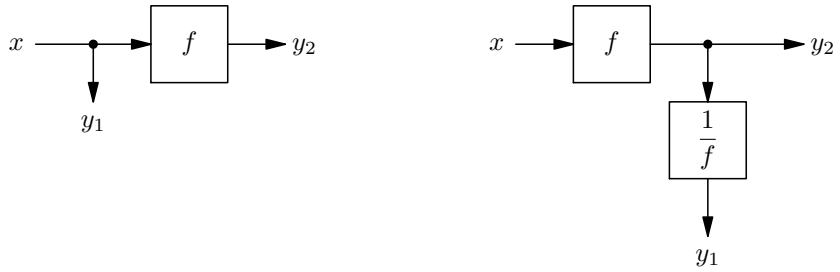


Slika 3.51.: Povratna veza

Točka račvanja se može pojaviti prije ili nakon nekog funkcijskog bloka i često ju je potrebno pomaknuti kroz funkcijski blok. Te dvije situacije su prikazane na lijevim dijagramina sa slika 3.52. i 3.53.. Pomicanje točke račvanja lijevo kroz funkcijski blok je trivijalna operacija i vršimo je uduplavanjem funkcijskog bloka kroz koji se pomiče točka račvanja (slika 3.52.). No kod pomicanja točke račvanja desno kroz funkcijski blok potrebno je dodati dodatni blok koji realizira inverznu funkciju. Pomicanje je moguće samo ako inverz postoji, te u tom slučaju dodani blok označavamo s $1/f$ kako je prikazano na slici 3.53..



Slika 3.52.: Micanje točke račvanja lijevo



Slika 3.53.: Micanje točka račvanja desno

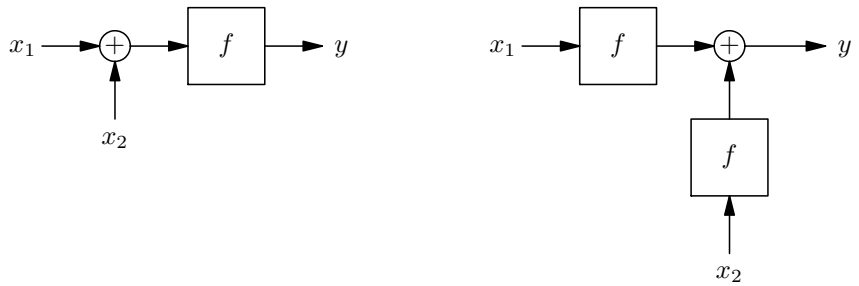
Osim račvanja signali se mogu sastajati u zbrajalu. Takvo sastajanje opet će u nekim slučajevima biti potrebno pomaknuti kroz funkcijski blok. Dvije česte situacije su prikazane na lijevim dijagramima sa slika 3.54. i 3.55.. Za slučaj pomaka točke zbrajanja udesno prema slici 3.54. je

$$y = f(x_1 + x_2).$$

Da bi mogli izvršiti pomak funkcija f mora biti linearna. U tom slučaju je

$$y = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \tag{3.9}$$

te jednostavno blok pomičemo u svaku od ulaznih grana u zbrajalo kako je prikazano na desnom dijagramu sa slike 3.54.. Primijetite da isto vrijedi i za slučaj kada više od dva signala dolaze u zbrajalo.



Slika 3.54.: Micanje točke zbrajanja desno

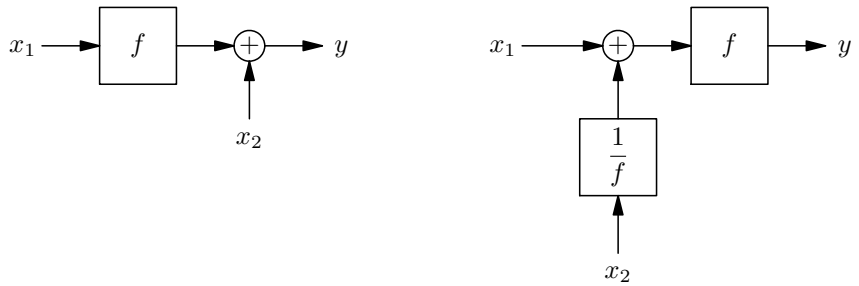
Za pomak lijevo prema slici 3.55. je

$$y = x_2 + f(x_1).$$

Da bi mogli izvršiti pomak zahtijevamo da funkcija f bude linearna te da postoji inverz. Tada je

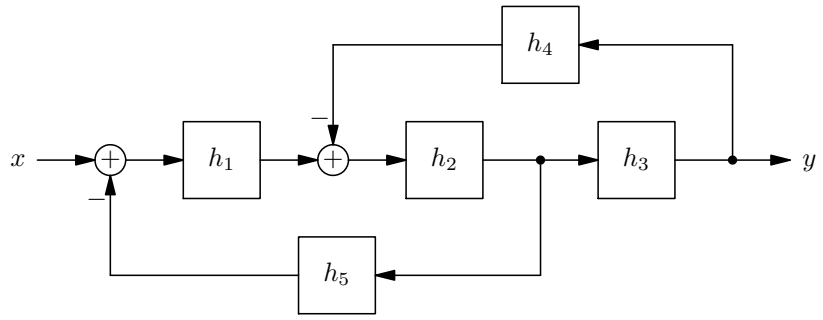
$$y = x_2 + f(x_1) = \left(\frac{f}{f}\right)(x_2) + f(x_1) = f\left(\left(\frac{1}{f}\right)(x_2) + x_1\right). \tag{3.10}$$

Zamjenu tada vršimo kako je prikazano na desnom dijagramu sa slike 3.55..



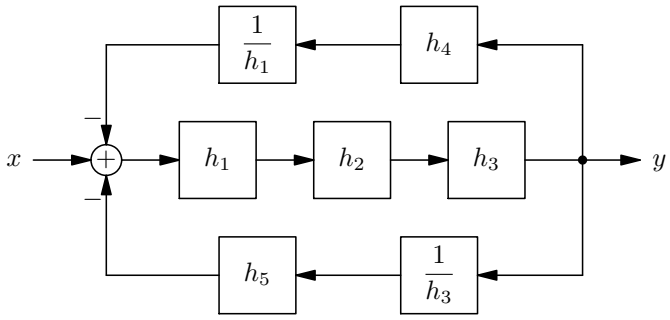
Slika 3.55.: Micanje točke zbrajanja lijevo

Primjer 3.14. Primjenom algebre funkcijskih blokova sažmite dijagram prikazan slikom 3.56.. Pretpostavite da su sve kompozicije funkcija komutativne te da su funkcije linearne i da postoje inverzi.



Slika 3.56.: Blok-dijagram sustava

Rješenje: Ako promotrimo dijagram na slici 3.56. najveći problem u sažimanju nam predstavljaju zbrajalo prije ulaza u blok h_2 te račvanje na izlazu istog bloka. Da bi ih uklonili pomaknuti ćemo zbrajalo lijevo kroz blok h_1 i točku račvanja desno kroz blok h_3. Pri tome pretpostavljamo da postoje inverzi funkcija h_1 i h_3 te da je h_1 linearna. Nakon primjene pravila dobivamo novi dijagram koji je prikazan na slici 3.57..

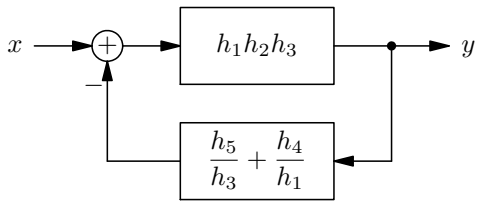


Slika 3.57.: Blok-dijagram sustava sa slike 3.56. nakon prvog koraka sažimanja

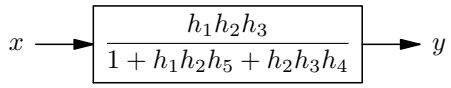
U tako dobivenoj strukturi sada prepoznajemo kaskade blokova u svakoj od tri paralelne grane. Osim prepoznatih kaskada u pojedinim granama, dvije vanjske grane (gornja i donja) predstavljaju paralelu. Sažimanjem kaskada i paralele dobiva se sustav prikazan na slici 3.58., gdje sada prepoznajemo povratnu vezu. Sažimanjem povratne veze dobivamo konačnu funkciju bloka,

$$y = \Big(\frac{h_1 h_2 h_3}{1 + h_1 h_2 h_5 + h_2 h_3 h_4}\Big)(x),$$

kao što je i prikazano na slici 3.59..



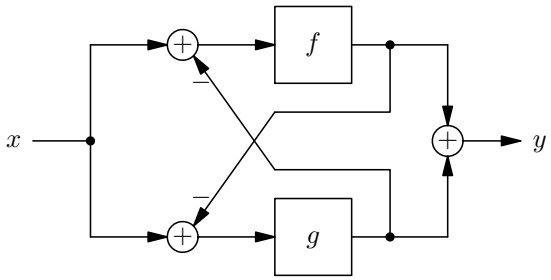
Slika 3.58.: Blok-dijagram sustava sa slike 3.56. nakon drugog koraka sažimanja



Slika 3.59.: Sažeti blok-dijagram sustava sa slike 3.56.

Zadatak 3.8. Ispitajte da li je sustav zadan slikom 3.60. eksplicitan ili implicitan. Pomoću pravila algebre funkcijskih blokova sažmite zadani sustav u jedan funkcijski blok. Pretpostavite da su funkcije f i g linearne, da imaju inverz te da je njihova kompozicija komutativna.

Rješenje: Sustav je implicitan. Nadomjesni funkcijski blok je $\dfrac{f + g - 2fg}{1 - fg}$.



Slika 3.60.: Blok-dijagram sustava

4. Fourierova i Laplaceova transformacija

4.1. Furierova transformacija

Fourirerova transformacija funkcije $x(t)$ je:

$$\mathcal{F}\big[x(t)\big] = X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt \tag{4.1}$$

Inverzna transformacija je:

$$\mathcal{F}^{-1}\big[X(\omega)\big] = x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \tag{4.2}$$

Funkcija $x(t)$ i njen spektar $X(\omega)$ čine transformacijski par:

$$x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X(\omega) \tag{4.3}$$

Dovoljni (ali ne i nužni) uvjeti za postojanje Fouirerove transformacije funkcije $x(t)$ su:

1. Funkcija $x(t)$ zadovoljava Dirichletove uvjete (funkcija je ograničena s konačnim brojem maksimuma i minimuma te konačnim brojem diskontinuiteta u bilo kojem konačnom vremenskom intervalu).
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|dt < \infty$

Neka je $x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X(\omega)$ i neka su α_i, t_0 i ω_0 konstante. Fourireva transformacija tada zadovoljava sljedeća svojstva:

1. Linearnost:
$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i(\omega) = X(\omega)$$
2. Pomak u vremenu i frekvenciji:
$$x(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X(\omega)e^{-j\omega t_0}$$
$$x(t)e^{j\omega_0 t} \circ\!\!-\!\!\bullet\, X(\omega-\omega_0)$$
3. Skaliranje:
$$x(\alpha t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{|\alpha|}X\Big(\frac{\omega}{\alpha}\Big)$$
4. Dualnost:
$$X(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, 2\pi x(-\omega)$$

5. Deriviranje:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \circ\!\!-\!\!\bullet\ (j\omega)^n X(\omega)$$

$$(-jt)^n x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{d^n X(\omega)}{d\omega^n}$$

6. Integriranje:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet\ \pi X(0)\, \delta(\omega) + \frac{X(\omega)}{j\omega}$$

$$\pi x(0)\, \delta(t) - \frac{x(t)}{jt} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \int_{-\infty}^{\omega} X(\xi)\, d\xi$$

7. Konjugacija:

$$x^*(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ X^*(-\omega)$$

$$x^*(-t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ X^*(\omega)$$

8. Konvolucija:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau)\, d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet\ X_1(\omega) X_2(\omega)$$

$$x_1(t) x_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\xi) X_2(\omega - \xi)\, d\xi$$

9. Korelacija:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1^*(\tau) x_2(t+\tau)\, d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet\ X_1^*(\omega) X_2(\omega)$$

$$x_1^*(t) x_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_1^*(\xi) X_2(\omega + \xi)\, d\xi$$

10. Parsevalov teorem:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1^*(t) x_2(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_1^*(\omega) X_2(\omega)\, d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2\, d\omega$$

Primjer 4.1. Odredite Fourierovu transformaciju konačnog signala

$$x(t) = \begin{cases} A, & -\tau/2 < t < \tau/2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases},$$

gdje su A i τ realne konstante.

Rješenje: Fourierovu transformaciju zadanog pravokutnog impulsa računamo prema definiciji (4.1):

$$X(\omega) = \mathcal{F}\big[x(t)\big] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt.$$

Uvrštavanjem signala dobivamo

$$X(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j\omega t}\, dt = A \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\bigg|_{-\tau/2}^{\tau/2} = A\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}.$$

Dobivena funkcija je oblika $\sin(x)/x$ i obično je označavamo sa sinc,

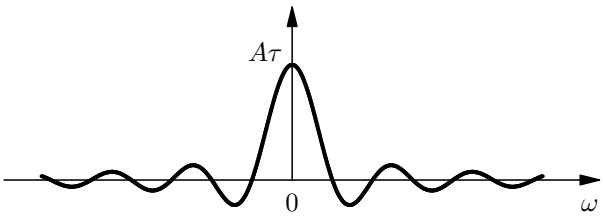
$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \qquad (4.4),$$

pa je transformacija pravokutnog impulsa

$$X(\omega) = \frac{A\tau}{\pi} \operatorname{sinc}\Big(\frac{\omega\tau}{2\pi}\Big).$$

Transformacija je prikazana na slici 4.1..

Prema teoremu o dualnosti Fourierova transformacija $\operatorname{sinc}(t)$ funkcije je pravokutni impuls s centrom u $\omega = 0$.



Slika 4.1.: Fourierova transformacija pravokutnog impulsa

Primjer 4.2. Izračunaj Fourierovu transformaciju signala

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1 \\ -1, & -1 \le t < 0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Rješenje: Primijetimo najprije da je zadani signal $x(t)$ neparna funkcija, tj. vrijedi $x(-t) = -x(t)$. Raspišemo li izraz (4.1) dobivamo

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\big(cos(\omega t) - j\sin(\omega t)\big)\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} cos(\omega t) x(t)\, dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} sin(\omega t) x(t)\, dt. \end{aligned}$$

Kako je kosinus parna funkcija produkt $cos(\omega t)x(t)$ je neparna funkcija te prvi član iščezava. Produkt $x(t)\sin(\omega t)$ je parna funkcija te je sada

$$\begin{aligned} X(\omega) &= -2j \int_{0}^{+\infty} x(t)\sin(\omega t)\, dt = -2j \int_{0}^{1} \sin(\omega t)\, dt \\ &= -\frac{2j}{\omega}\big(\cos(\omega t) - 1\big). \end{aligned}$$

Primjer 4.3. Izračunaj Fourierovu transformaciju signala

$$x(t) = \begin{cases} \cos(\omega_0 t), & -T \le t \le T \\ 0, & \text{inače} \end{cases},$$

gdje je T pozitivna realna konstanta.

RJEŠENJE: Računamo prema definiciji

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-T}^{T} \cos(\omega_0 t)e^{-j\omega t}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{-T}^{T} \big(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\big)e^{-j\omega t}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-j(\omega-\omega_0)}e^{-j(\omega-\omega_0)t} + \frac{1}{-j(\omega+\omega_0)}e^{-j(\omega+\omega_0)t}\right)\Bigg|_{-T}^{T}. \end{aligned}$$

Nakon uvrštavanja granica dobivamo spektar signala

$$X(\omega) = \frac{1}{\omega-\omega_0}\sin\big((\omega-\omega_0)T\big) + \frac{1}{\omega+\omega_0}\sin\big((\omega+\omega_0)T\big).$$

Primijetite da smo isti rezultat mogli dobiti preko teorema o konvoluciji računanjem konvolucije spektara kosinus funkcije i pravokutnog vremenskog otvora.

Zadatak 4.1. Odredite Fourierovu transformaciju funkcije $x(t) = e^{-\alpha t^2}$ gdje je α pozitivna realna konstanta.

RJEŠENJE: Spektar je $X(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\exp(-\frac{\omega^2}{4\alpha})$.

Primjer 4.4. Provjerite da Gaussova funkcija $x(t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\exp(-\alpha t^2)$ zadovoljava jednakost

$$D_t D_\omega = \frac{1}{2}.$$

Pri tome je D_t^2 efektivno trajanje signala i D_ω^2 efektivna širina pojasa spektra i vrijedi

$$D_t^2 = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\big|x(t)\big|^2\,dt}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big|x(t)\big|^2\,dt} \quad \text{i} \quad D_\omega^2 = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2\big|X(\omega)\big|^2\,d\omega}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big|X(\omega)\big|^2\,d\omega}.$$

RJEŠENJE: Fourierova transformacija zadane funkcije je

$$x(t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\,e^{-\alpha t^2} \circ\!\!-\!\!\bullet\; X(\omega) = e^{-\omega^2/4\alpha}.$$

Odredimo najprije efektivno trajanje signala D_t^2. Vrijedi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\left|\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\,e^{-\alpha t^2}\right|^2 dt = \frac{1}{4\sqrt{2\pi\alpha}} \quad \text{i} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\,e^{-\alpha t^2}\right|^2 dt = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}$$

te je

$$D_t^2 = \frac{1}{4\alpha}.$$

Analogno je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2\big|e^{-\omega^2/4\alpha}\big|^2\,d\omega = \sqrt{2\pi\alpha^3} \quad \text{i} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\big|e^{-\omega^2/4\alpha}\big|^2\,d\omega = \sqrt{2\pi\alpha},$$

te je

$$D_\omega^2 = \alpha.$$

Sada je

$$D_t D_\omega = \sqrt{D_t^2 D_\omega^2} = \sqrt{\frac{1}{4\alpha}\alpha} = \frac{1}{2}.$$

5. Linearne diferencijalne jednadžbe

Neka je zadana linearna diferencijalna jednadžba oblika

$$\begin{aligned} a_k y^{(k)}(t) + a_{k-1} y^{(k-1)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = \\ b_l u^{(l)}(t) + b_{l-1} u^{(l-1)}(t) + \cdots + b_1 u^{(1)}(t) + b_0 u(t) \end{aligned} . \tag{5.1}$$

Pri rješavanju takve jednadžbe prvo rješavamo odgovarajuću homogenu jednadžbu,

$$a_k y^{(k)}(t) + a_{k-1} y^{(k-1)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = 0. \tag{5.2}$$

Rješenje je oblika $y_h(t) = e^{st}$, a uvrštavanjem istog u jednadžbu dobivamo

$$\big(a_k s^k + a_{k-1} s^{k-1} + \cdots + a_1 s + a_0\big) e^{st} = 0. \tag{5.3}$$

Rješenja jednadžbe (5.3) su ili realna ili konjugirano-kompleksna, pa je ovisno o vrsti korijena doprinos homogenom rješenju:

1. Jendostruki realni korijen $s = s_1$ daje doprinos

$$y_h(t) = C_1 e^{s_1 t}.$$

2. k-struki realni korijen $s = s_1 = \cdots = s_k$ daje doprinos

$$y_h(t) = (C_1 t^{k-1} + C_2 t^{k-2} + \cdots + C_{k-1} t + C_k) e^{s_1 t}.$$

3. Jendostruki konjugirano-kompleksni par $s_1 = \overline{s}_2 = \sigma + j\omega$ daje doprinos

$$y_h(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} = e^{\sigma t}\big(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\big).$$

4. k-struki konjugirano-kompleksni par $s_1 = \overline{s}_2 = \cdots = s_{2k-1} = \overline{s}_{2k} = \sigma + j\omega$ daje doprinos

$$\begin{aligned} y_h(t) = e^{\sigma t}\big(\quad & (A_1 t^{k-1} + A_2 t^{k-2} + \cdots + A_{k-1} t + A_k)\cos(\omega t) \\ & + (B_1 t^{k-1} + B_2 t^{k-2} + \cdots + B_{k-1} t + B_k)\sin(\omega t)\big). \end{aligned}$$

Sada rješavamo polaznu nehomogenu jednadžbu (5.1), tj. tražimo partikularno rješenje $y_p(t)$. Partikularno rješenje možemo jednostavno odrediti samo za pobude određnog tipa:

1. Zadana pobuda je eksponencijalna funkcija oblika $u(t) = Ae^{at}$. Ako a nije korijen karakteristične jednadžbe tada je

$$y_p(t) = C_1 e^{at},$$

a ako je a k-struki korijen tada je

$$y_p(t) = C_1 t^k e^{at}.$$

2. Zadana pobuda je polinom k-tog stupnja oblika $u(t) = A_k t^k + A_{k-1} t^{k-1} + ... + A_1 t + A_0$. Partikularno rješenje je također polinom k-tog stupnja,

$$y_p(t) = C_k t^k + C_{k-1} t^{k-1} + ... + C_1 t + C_0.$$

3. Zadana pobuda je sinusoida oblika $u(t) = A \sin(\omega t)$. Ako $j\omega$ nije korijen karakteristične jednadžbe tada je

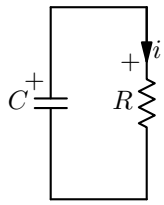
$$y_p(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t),$$

a ako je $j\omega$ k-struki korijen karakteristične jednadžbe tada je

$$y_p(t) = t^k \big(C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)\big).$$

5.1. Sustavi prvog reda

Primjer 5.1. Zadan je lineran vremenski nepromijenjiv sustav prvog reda prikazan na slici 5.1.. Odredi funkcije koje opisuju promjenu naboja na kapacitetu te napona na otporniku ako je naboj na kapacitetu u trenutku $t = t_0$ iznosio q_0. Nacrtaj blok-dijagram zadanog sustava.



Slika 5.1.: Sustav prvog reda

Rješenje: Zadana je jednostavna električna mreža koja se sastoji od jednog kapaciteta i jednog otpornika. Otpornik je bezmemorijski element, dok je kapacitet memorijski element. Vrijedi

$$i = \frac{u}{R}$$
$$i = -C\frac{du}{dt}$$

gdje je u napon na otporniku, a i struja petlje. Kombiniranjem tih izraza dobivamo

$$\frac{u}{R} + C\frac{du}{dt} = 0,$$

odnosno kako je $u = q/C$

$$\frac{q}{RC} + \frac{dq}{dt} = 0.$$

Na temelju dobivenog izraza crtamo blok-dijagram sustava kako je prikazano na slici 5.2.. Sada je potrebno riješiti dobivenu jednadžbu za naboj na kapacitetu. Vrijedi

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC},$$

odnosno

$$\frac{1}{q}dq = -\frac{1}{RC}dt.$$

Dobivenu jednadžbu sada integriramo od t_0 do t

$$\int_{q_0}^{q} \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}\int_{t_0}^{t} dt$$

i dobivamo

$$\ln\left|\frac{q}{q_0}\right| = -\frac{1}{RC}(t - t_0).$$

Dobiveni izraz prepravljamo u eksplicitnu funkciju naboja q,

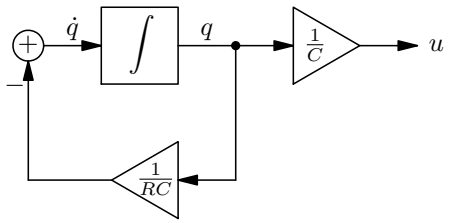
$$q(t) = q_0 e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}.$$

Napon na otporniku jednostavno odredimo iz $u = q/C$:

$$u(t) = \frac{q_0}{C} e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}.$$

Primijetite da nam je q_0 predstavljao početni naboj na kapacitetu. Umjesto početnog naboja možemo uvesti i početni napon u_0 određen kao $u_0 = q_0/C$, pa izraz za promijenu napona kroz vrijeme postaje

$$u(t) = u_0 e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}.$$



Slika 5.2.: Blok-dijagram sustava sa slike 5.1.

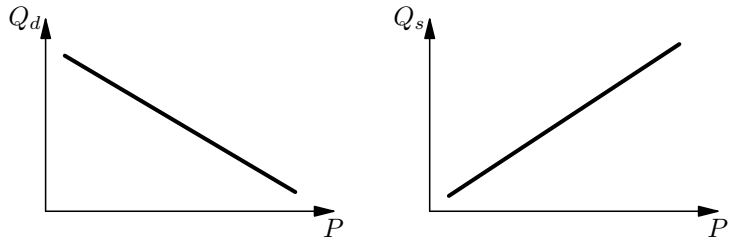
Primjer 5.2. Za određeno dobro funkcija potražnje neka je oblika

$$Q_d = a - bP,$$

a za isto to dobro neka je funkcija pobude oblika

$$Q_s = -c + dP.$$

Pri tome su a, b, c i d pozitivni realni brojevi, a P trenutna cijena proizvoda. Koja je dinamika tržišne cijene, odnosno koja je ravnotežna cijena ako je stopa promijene cijene proporiconalna višku potražnje?



Slika 5.3.: Veza cijene s ponudom i potražnjom

Rješenje: Stopa promijene cijene u bilo kojem trenutku je izravno proprcionalna višku potražnje $Q_d - Q_s$. Neka je faktor proprcionalnosti m. Tada je

$$\frac{dP}{dt} = m(Q_d - Q_s).$$

m je koeficijent prilagodbe. Da bi odredili dinamiku tržišne cijene uvrštavamo zadane izraze za ponudu i potražnju te dobivamo

$$\frac{dP}{dt} + m(b + d)P = m(a + c).$$

Gornju jednadžbu možemo interpertirati kao linearni vremenski nepromjenjiv sustav prvog reda. Rješavanjem dobivene jednadžbe proizlazi

$$P(t) = \Big(P(0) + \frac{a+c}{b+d}\Big)e^{-m(b+d)t} + \frac{a+c}{b+d},$$

što zapisano preko ravnotežne cijene

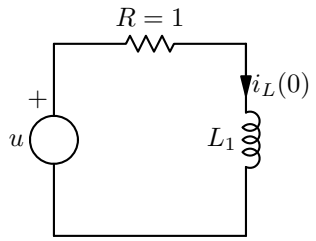
$$P_e = \frac{a+c}{b+d}$$

postaje

$$P(t) = \big(P(0) - P_e\big)e^{-m(b+d)t} + P_e.$$

U dobivenom izrazu nam $P(0)$ predstavlja početnu cijenu u trenutku $t = 0$, a P_e ravnotežnu cijenu. Ukoliko je $m(b+d) > 0$ cijena će težiti prema ravnotežnoj cijenu P_e, odnosno sustav će biti stabilan.

Zadatak 5.1. Sustav prvog reda je prikazan na slici 5.4.. Odredite vrijednost induktiviteta L i struju $i_L(0)$ ako je homogeno rješenje diferencijalne jednadžbe koja opisuje sustav $i_h(t) = 2e^{-t/2}$ (konstanta izračunata iz ukupnog odziva), a na ulaz djeluje pobuda $u(t) = 2\sin(t/2)$. Izračunajte slobodni i prisilni odziv sustava. Vrijednost otpora je $R = 1$.



Slika 5.4.: Sustav prvog reda

Rješenje: Induktivitet je $L = 2$, dok je $i_L(0) = 1$. Slobodni odziv sustava je $i_n(t) = e^{-t/2}$, a prisilni odziv je $i_m(t) = e^{-t/2} + \sin(t/2) - \cos(t/2)$.

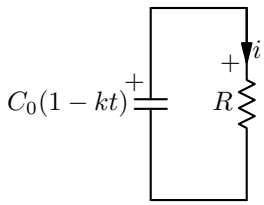
Primjer 5.3. Linearna vremenski promjenjiva mreža prikazana je na slici 5.5.. U zadanoj mreži promjenjivi element je kapacitet koji se mijenja prema izrazu

$$c = C_0(1 - kt),$$

odnosno mijenjamo razmak između ploča prema izrazu

$$l = \frac{l_0}{1 - kt}.$$

Odredi izraz za promjenu naboja na kapacitetu i napona na otporniku ako je u trenutku $t = t_0$ naboj na kapacitetu q_0.



Slika 5.5.: Vremenski promjenjiv sustav prvog reda

Rješenje: Struja kroz otpornik posljedica je napona na kapacitetu i ovisi o promjeni naboja na pločama kapaciteta. Vrijedi

$$i = -\frac{dq}{dt}.$$

Pri tome je napon na otporniku jednak naponu na kapacitetu te vrijedi

$$u = iR = -R\frac{dq}{dt} \tag{5.4}$$

$$u = \int_0^{l_0 \frac{1}{1-kt}} \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon_r s}\, dl = \frac{q}{(1-kt)} \frac{l_0}{\epsilon_0 \epsilon_r s} \tag{5.5}$$

Kombirniranjem jednadžbi proizlazi

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC_0(1-kt)} q = 0.$$

Dobivenu jednadžbu zapisujemo kao

$$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC_0} \frac{dt}{1-kt}$$

te integriramo. Dobivamo

$$\ln\Big|\frac{q}{q_0}\Big| = \frac{1}{RC_0 k} \ln\Big|\frac{1-kt}{1-kt_0}\Big|.$$

Uz $q > 0$ i $1 - kt > 0$ dobiveni izraz možemo zapisati u obliku

$$q(t) = q_0 \Big(\frac{1-kt}{1-kt_0}\Big)^{\frac{1}{RC_0 k}},$$

čime smo dobili izraz koji opisuje promjenu naboja na kapacitetu kroz vrijeme. Napon na otporniku je

$$u(t) = -R\frac{dq}{dt} = \frac{q_0}{C_0(1-kt_0)} \Big(\frac{1-kt}{1-kt_0}\Big)^{\frac{1}{RC_0 k}-1},$$

što jednostavije pišemo kao

$$u(t) = u_0 \Big(\frac{1-kt}{1-kt_0}\Big)^{\frac{1}{RC_0 k}-1},$$

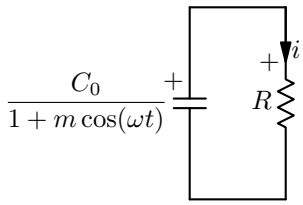
gdje je u_0 napon u trenuku t_0.

Zadatak 5.2. Linearna vremenski promjenjiva mreža prikazana je na slici 5.6.. U zadanoj mreži promjenjivi element je kapacitet koji se mijenja prema izrazu

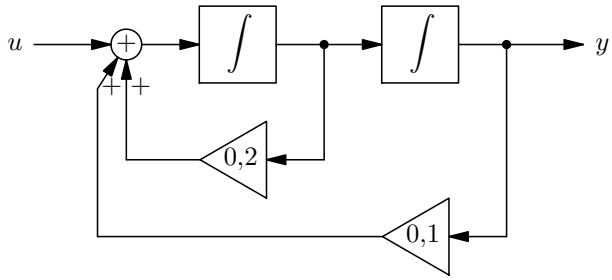
$$c = \frac{C_0}{1 + m\cos(\omega t)}$$

Odredi izraz za promjenu naboja na kapacitetu ako je u trenutku $t = t_0$ naboj na kapacitetu q_0.

Rješenje: $q(t) = q_0 \exp\Big(\frac{1}{RC_0}(t - t_0) + \frac{m}{RC_0\omega}\big(\sin(\omega t) - \sin(\omega t_0)\big)\Big).$



Slika 5.6.: Vremenski promjenjiv sustav prvog reda



Slika 5.7.: Sustav drugog reda

5.2. Sustavi drugog reda

Primjer 5.4. Model kontinuiranog sustava drugog reda prikazan je na slici 5.7.. Odredite diferencijalnu jednadžbu koja opisuje sustav. Izračunajte odziv sustava na pobudu

$$u(t) = U_0 \cos(\omega_0 t)$$

ako je $U_0 = 3$ i $\omega_0 = 1{,}8$. Početni uvjeti neka su $y(0) = -10$ i $y'(0) = -5$.

Rješenje: Prvo određujemo diferencijalnu jednadžbu koja opisuje sustav. Kako je izlaz iz zadnjeg integratora upravo $y(t)$, na ulazu u integrator je $y'(t)$. Analogno zaključujemo da je na ulazu prvog integratora $y''(t)$. Pišemo jednažbu za zbrajalo na ulazu

$$u(t) - 0{,}1y(t) - 0{,}2y'(t) = y''(t),$$

što nakon sređivanja postaje

$$y''(t) + 0{,}1y(t) + 0{,}2y'(t) = u(t).$$

Time smo odredili diferencijalnu jednadžbu koja opisuje sustav.

Rješenje nehomohene diferencijalne jednadžbe je zbroj rješenja homogene diferencijalne jednadžbe i partikularnog rješenja,

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t),$$

i zovemo ga totalni ili ukupni odziv sustava.

Homogena jednadžba je

$$y''(t) + 0{,}1y(t) + 0{,}2y'(t) = 0.$$

Pretpostavimo rješenje oblika $y(t) = Ce^{st}$. Uvrštavanjem dobivamo

$$Ce^{st}(s^2 + 0{,}1s + 0{,}2) = 0.$$

Zanimaju na samo netrivijalna rješenja gornje jednadžbe. To su rješenja karakteristične jednadžbe

$$s^2 + 0{,}1s + 0{,}2 = 0,$$

i iznose

$$s_{1,2} = \frac{-0{,}2 \pm \sqrt{0{,}2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0{,}1}}{2 \cdot 1} = -0{,}1 \pm 0{,}3j.$$

Rješenje homogene jednadžbe je oblika

$$y_h(t) = C_1 e^{-0{,}1+0{,}3j} + C_2 e^{-0{,}1-0{,}3j}.$$

Obično rješenje modificiramo tako da izbjegnemo kompleksne eksponencijalne funkcije. Pišemo

$$\begin{aligned} y_h(t) &= C_1 e^{-0{,}1+0{,}3j} + C_2 e^{-0{,}1-0{,}3j} = e^{-0{,}1t}\big(C_1 e^{0{,}3j} + C_2 e^{-0{,}3j}\big) \\ &= e^{-0{,}1t}\big((C_1 + C_2)\cos(0{,}3t) + j(C_1 - C_2)\sin(0{,}3t)\big) \end{aligned}$$

Članove $C_1 + C_2$ i $j(C_1 - C_2)$ možemo promatrati kao nove konstante. Označimo ih opet s A i B. Homogeno rješenje je tada

$$y_h(t) = e^{-0{,}1t}\big(A\cos(0{,}3t) + B\sin(0{,}3t)\big).$$

Partikularno rješenje za pobudu $u(t) = u_0 \cos(\omega_0 t)$ je oblika

$$y_p(t) = Y\cos(\omega_0 t + \phi).$$

Zahtijevamo da partikularno rješenje zadovoljava diferencijalnu jednadžbu. Nakon uvrštavanja dovivamo

$$-\omega_0^2 Y\cos(\omega_0 t + \phi) - 0{,}2\omega_0 Y\sin(\omega_0 t + \phi) + 0{,}1Y\cos(\omega_0 t + \phi) = U\cos(\omega_0 t).$$

Nakon sređivanja dobivamo

$$\begin{aligned} &Y\big(-\omega_0^2\cos\phi - 0{,}2\omega_1\sin\phi + 0{,}1\cos\phi\big)\cos(\omega_0 t) \\ &+ Y\big(\ \ \omega_0^2\cos\phi - 0{,}2\omega_1\cos\phi - 0{,}1\sin\phi\big)\sin(\omega_0 t) = U\cos(\omega_0 t) \end{aligned}$$

Kako jednadžba mora vrijediti za svaki t vrijedi

$$\begin{aligned} Y\big(-\omega_0^2\cos\phi - 0{,}2\omega_1\sin\phi + 0{,}1\cos\phi\big) &= U \\ Y\big(\omega_0^2\cos\phi - 0{,}2\omega_1\cos\phi - 0{,}1\sin\phi\big) &= 0 \end{aligned}$$

Kako zbog prve jednadžbe Y mora biti različit od nule iz druge jednadžbe dobivamo

$$\omega_0^2\cos\phi - 0{,}2\omega_1\cos\phi - 0{,}1\sin\phi = 0,$$

odnosno nakon sređivanja

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{0{,}2\omega_0}{\omega_0^2 - 0{,}1}.$$

Za amplitudu Y dobivamo

$$Y = \frac{U}{(0{,}1 - \omega_0^2)^2\cos\phi - 0{,}2\omega_0\sin\phi}.$$

Za zadanu amplitudu i frekvenciju pobude dobivamo $Y = -0{,}949196$ i $\phi = 0{,}114151$ te je partikularno rješenje

$$y_p(t) = 0{,}95\cos(1{,}8t - 3{,}03).$$

Primijetite da smo u partikularnom rješenju promijenili fazu da izbjegnemo negativnu amplitudu.

Ukupno rješenje sustava je zbroj homogenog i partikularnog rješenja te iznosi

$$y(t) = e^{-0{,}1t}\big(A\cos(0{,}3t) + B\sin(0{,}3t)\big) + 0{,}95\cos(1{,}8t - 3{,}03).$$

Konstante A i B određujemo iz početnih uvjeta $y(0) = -10$ i $y'(0) = -5$. Dobivamo $A = -9{,}06$ i $B = -20{,}33$ te je ukupni odziv

$$y(t) = e^{-0{,}1t}\big(-9{,}06\cos(0{,}3t) - 20{,}33\sin(0{,}3t)\big) + 0{,}95\cos(1{,}8t - 3{,}03).$$

Zadatak 5.3. Kontinuirani sustav zadan je diferencijalnom jednadžbom

$$y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = u(t).$$

Odredite odziv na pobudu $u(t) = \cos(3t)$ uz početne uvjete $y(0) = 2$ i $y'(0) = 0$. Izračunajte amplitudnu i faznu karakteristiku.

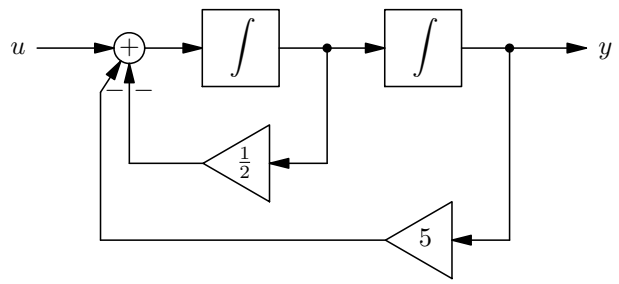
Rješenje: Odziv je $y(t) = \big(\frac{23}{12}\cos(\sqrt{2}t) + \frac{13}{12}\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)\big)e^{-t} + \frac{1}{12}\sqrt{2}\cos(3t + \frac{\pi}{4})$. Amplitudna i fazna karakteristika su

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega^4 - 2\omega^2 + 9}}, \quad \varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}\frac{2\omega}{3 - \omega^2}.$$

Zadatak 5.4. Za kontinuirani sustav zadan slikom 5.8. odredite amplitduno-frekvencijsu i fazno-frekvencijsku karakteristiku i odziv na pobudu

$$u(t) = \sin(2t).$$

Početni uvjeti su $y(0) = -\frac{5}{2}$ i $y'(0) = 1$.



Slika 5.8.: Sustav drugog reda

Rješenje: Odziv na zadanu pobudu je

$$y(t) = \Big(-2\cos\frac{t\sqrt{79}}{4} - \frac{2}{\sqrt{79}}\sin\frac{t\sqrt{79}}{4}t\Big)e^{-t/4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\Big(2t - \frac{\pi}{4}\Big).$$

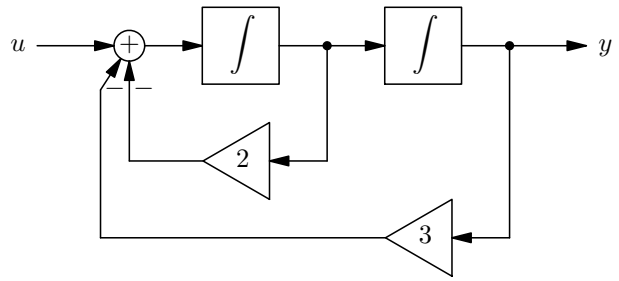
Amplitudna i fazna karakteristika su

$$A(\omega) = \frac{2}{\sqrt{4\omega^4 - 39\omega^2 + 100}} \quad \text{i} \quad \phi(\omega) = -\operatorname{arctg}\frac{\omega}{10 - 2\omega^2}.$$

Zadatak 5.5. Za kontinuirani sustav prikazan na slici 5.9. odredite amplitudno-frekvencijsku i fazno-frekvencijsku karakteristiku te odziv na pobudu $u(t) = 2\cos(t)$. Početni uvjeti su $y(0) = 1$ i $y'(0) = 0$.

Rješenje: Odziv na zadanu pobudu je $y(t) = \frac{1}{2}\cos(\sqrt{2}t)e^{-t} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos(t - \frac{\pi}{4})$. Amplitudna i fazna karakteristika su

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega^4 - 2\omega^2 + 9}} \quad \text{i} \quad \phi(\omega) = -\operatorname{arctg}\frac{2\omega}{3 - \omega^2}.$$



Slika 5.9.: Sustav drugog reda

Primjer 5.5. Za kontinuirani sustav drugog reda zadan jednadžbom

$$y''(t) + 0{,}1y(t) + 0{,}2y'(t) = u(t)$$

odredi ukupni odziv kao zbroj odziva nepobuđenog sustava i pobuđenog mirnog sustava. Pobuda je $u(t) = 3\cos(1{,}8t)$, a početna stanja su $y(0) = -10$ i $y'(0) = -5$.

Rješenje: Odziv nepobuđenog sustava uz zadane početne uvjete odgovara rješenju homogene jednadžbe uz te iste početne uvjete. Za zadanu diferencijalnu jednadžbu vlastite frekvencije su $s_{1,2} = -0{,}1 \pm 0{,}3$ te je homogeno rješenje oblika

$$y_h(t) = e^{-0{,}1t}\big(C_{11}\cos(0{,}3t) + C_{12}\sin(0{,}3t)\big).$$

Konstante određujemo iz početnih uvjeta $y(0) = -10$ i $y'(0) = -5$. Odziv je

$$y_n(t) = e^{-0{,}1t}\big(-10\cos(0{,}3t) - 20\sin(0{,}3t)\big).$$

Time smo dobili vlastiti odziv sustava uslijed početnih uvjeta.

Mirni (mrtvi) sustav je sustav u kojem nema energije. U ovom slučaju to nam odgovara početnim stanjima jednakima nuli. Kako je sustav pobuđen rješavamo jednadžbu

$$y_2''(t) + 0{,}1y_2(t) + 0{,}2y_2'(t) = u(t)$$

uz početne uvjete $y_2(0) = 0$ i $y_2'(0) = 0$. Rješenje je zbroj rješenja homogene jednadžbe i partikularnog rješenja,

$$y_m(t) = e^{-0{,}1t}\big(C_{21}\cos(0{,}3t) + C_{22}\sin(0{,}3t)\big) + y_p(t).$$

Kako je zadana pobuda harmonička za određivanje partikularnog rješenja možemo koristit fazore.

Za pobudu oblika $u(t) = U\cos(\omega t)$ vrijedi

$$u(t) = U\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\big[Ue^{j\omega t}\big] = \mathrm{Re}\big[Ue^{st}\big].$$

Uvrštavanjem Ue^{st} u polaznu diferencijalnu jednadžbu dobivamo

$$s^2Ye^{st} + 0{,}2Ye^{st} + 0{,}1Ye^{st} = Ue^{st},$$

odnosno nakon dijeljenja s e^{st}

$$\frac{Y}{U} = \frac{1}{s^2 + 0{,}2s + 0{,}1} = H(s).$$

Dobiveni izraz predstavlja nam prijenosnu funkciju sustava $H(s)$. Za stabilne sustave zamjenom $s = j\omega$ i rastavom prijenosne funkcije na umnožak apsolutne vrijednosti i argumenta dobivamo amplitudnu i faznu karakteristiku:

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + 0{,}2j\omega + 0{,}1} = \frac{1}{\sqrt{(0{,}1-\omega^2)^2 + 0{,}04\omega^2}}e^{-j\,\mathrm{arctg}\,\frac{0{,}2\omega}{0{,}1-\omega^2}}.$$

Partikularno rješenje $y_p(t)$ sada određujemo prema

$$y_p(t) = \mathrm{Re}\big[H(j\omega_0) \cdot Ue^{j\omega_0 t}\big],$$

što nam daje

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \mathrm{Re}\big[H(j\omega_0) \cdot Ue^{j\omega_0 t}\big] \\ &= \mathrm{Re}\big[|H(j\omega_0)|e^{j\phi} \cdot Ue^{j\omega_0 t}\big] \\ &= |H(j\omega_0)|U\cos(\omega_0 t + \phi) \end{aligned}$$

odnosno

$$y_p(t) = 0{,}95\cos(1{,}8t - 3{,}03).$$

Odziv je stoga

$$y_m(t) = e^{-0{,}1t}\big(0{,}94\cos(0{,}3t) - 0{,}33C_{22}\sin(0{,}3t)\big) + y_p(t),$$

gdje su konstante $C_{21} = 0{,}943018$ i $C_{22} = -0{,}334360$ određeni iz početnih uvjeta $y_m(0) = 0$ i $y_m'(0) = 0$. Primijetite da i odziv $y_m(t)$ pobuđenog mirnog sustava sadrži titranja vlastitim frekvencijama zbog nesklada između početnog i stacionarnog stanja.

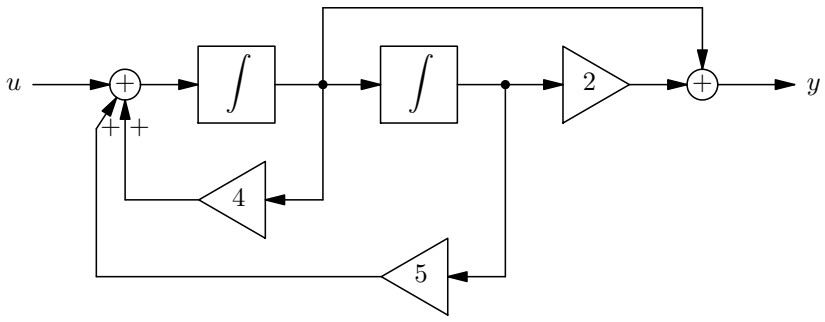
Odziv sustava je zbroj

$$y(t) = y_n(t) + y_m(t)$$

i iznosi

$$y(t) = e^{-0{,}1t}\big(-9{,}06\cos(0{,}3t) - 20{,}33\sin(0{,}3t)\big) + 0{,}95\cos(1{,}8t - 3{,}03).$$

Zadatak 5.6. Napišite diferencijalnu jednadžbu za sustav na slici 5.10.. Odredite početne uvjete i ukupan odziv zadanog sustava ako je rješenje homogene jednadžbe $y_h(t) = 5e^{-t} + e^{5t}$, a pobuda je $u(t) = 5e^{5t}$ za $t \geq 0$. Da li je sustav stabilan?

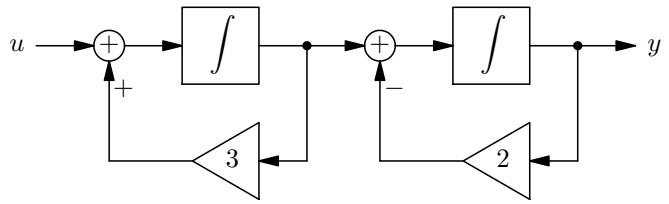


Slika 5.10.: Sustav drugog reda

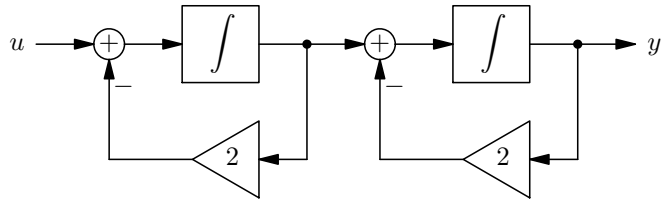
Rješenje: Diferencijalna jednadžba je $y''(t) - 4y'(t) - 5y(t) = u' + 2u$. Ukupni odziv je $y(t) = 5e^{-t} + e^{5t} + \frac{35}{6}te^{5t}$, a početni uvjeti su $y(0) = 6$ i $y'(0) = \frac{35}{6}$. Sustav je nestabilan jer se jedan pol nalazi u desnoj poluravnini.

Zadatak 5.7. Kontinuirani sustav nacrtan je na slici 5.11.. Odredite jednadžbu sustava te slobodni, prisilni i ukupni odziv ako se na ulaz dovede pobuda $u(t) = 0{,}5e^{-2t}$ za $t \geq 0$. Početni uvjeti su $y(0) = 2$ i $y'(0) = 0{,}5$.

Rješenje: Jednadžba sustava je $y''(t) - y'(t) - 6y(t) = u(t)$. Slobodni odziv je $y_n(t) = \frac{9}{10}e^{3t} + \frac{11}{10}e^{-2t}$, prisilni odziv je $y_m(t) = \frac{1}{50}e^{3t} - \frac{1}{50}e^{-2t} - \frac{1}{10}te^{-2t}$, a ukupni odziv je $y(t) = \frac{23}{25}e^{3t} + \frac{27}{25}e^{-2t} - \frac{1}{10}te^{-2t}$.



Slika 5.11.: Sustav drugog reda



Slika 5.12.: Sustav drugog reda

Zadatak 5.8. Za kontinuirani sustav zadan slikom 5.12. odredite odziv nepobuđenog i mirnog sustava, te ukupni odziv sustava. Na ulaz sustava dovodimo pobudu $u(t) = 4e^{-t}\,\mathrm{s}(t)$. Neka su početni uvjeti $y(0) = 2$ i $y'(0) = 0$. Ispitajte stabilnost sustava.

Rješenje: Jednadžba sustava je $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = u(t)$. Slobodni odziv je $y_n(t) = (2 + 4t)e^{-2t}$, prisilni odziv je $y_m(t) = (-4 - 4t)e^{-2t} + 4e^{t}$, a ukupni odziv je $y(t) = -2e^{-2t} + 4e^{-t}$.

Zadatak 5.9. Odziv nepobuđenog sustava drugog reda bez nula je

$$y_n(t) = \frac{1}{5}e^{2t} + \frac{1}{10}e^{-t}.$$

Odredite početna stanja sustava. Uz takva početna stanja odredite odziv mirnog i ukupni odziv sustava za pobudu

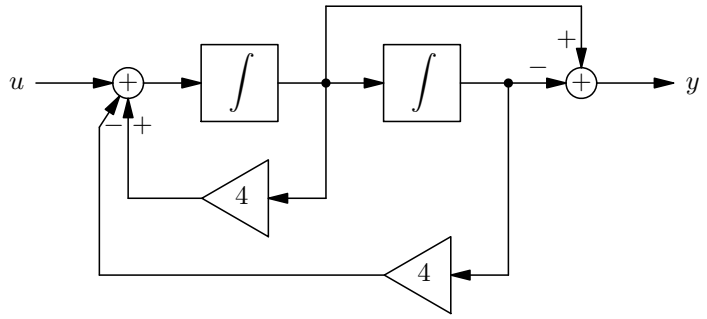
$$u(t) = 0{,}5e^{2t}.$$

Rješenje: Početna stanja su $y(0) = \frac{3}{10}$ i $y'(0) = \frac{3}{10}$. Odziv mirnog sustava je $y_m(t) = -\frac{1}{18}e^{2t} + \frac{1}{18}e^{-t} + \frac{1}{6}te^{2t}$, dok je ukupni odziv $y(t) = \frac{13}{90}e^{2t} + \frac{7}{45}e^{-t} + \frac{1}{6}te^{2t}$.

Zadatak 5.10. Odziv nepobuđenog sustava prikazanog na slici 5.13. je

$$y_n(t) = \Big(\frac{5}{9} - \frac{6}{9}t\Big)e^{2t}.$$

Odredite početne uvjete, odziv mirnog i ukupni odziv sustava ako je pobuda $u(t) = 2e^{-t}\,\mathrm{s}(t)$.



Slika 5.13.: Sustav drugog reda

Rješenje: Početni uvjeti su $y(0) = \frac{5}{9}$ i $y'(0) = \frac{4}{9}$. Odziv mirnog sustava je $y_m(t) = (\frac{4}{9} - \frac{12}{9}t)e^{2t} - \frac{4}{9}e^{-t}$, a ukupni odziv je $y(t) = (1 - 2t)e^{2t} - \frac{4}{9}e^{-t}$.

5.3. Opći linearni sustavi

Odziv linearnog sustava se općenito može odrediti integralom

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t,\tau)\,d\tau. \tag{5.6}$$

Pri tome je $h(t,\tau)$ impulsni odziv sustava. Za vremenski nepromjenjive sustave impulsni odziv ne ovisi o vremenu t, već samo o pomaku te vrijedi

$$h(t,\tau) = h(t-\tau). \tag{5.7}$$

Za takve sustave je odziv

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t,\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = h(t) * x(t), \tag{5.8}$$

što odgovara množenju u domeni transformacije,

$$x(t) * h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; X(\omega)H(\omega). \tag{5.9}$$

Primjer 5.6. Signal $x(t) = e^{-at}\,\mathrm{s}(t)$ doveden je na ulaz vremenski nepromijenjivog linearnog sustava s impulsnim odzivom $h(t) = be^{-bt}\,\mathrm{s}(t)$, gdje su a i b realne pozitivne konstante. Odredite odziv sustava u vremenskoj i u frekvencijskoj domeni.

Rješenje: Odziv u vremenskoj domeni određujemo prema izrazu (5.8). Tada je

$$\begin{aligned} y(t) = h(t) * y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)y(t-\tau)\,d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} be^{-b\tau}\,\mathrm{s}(\tau)e^{-a(t-\tau)}\,\mathrm{s}(t-\tau)\,d\tau \\ &= \int_{0}^{t} be^{-b\tau}e^{-a(t-\tau)}\,d\tau, \end{aligned}$$

gdje zadnji redak vrijedi samo za $t > 0$, dok je za $t \leq 0$ odziv $y(t) = 0$. Integriranjem dobivamo

$$y(t) = be^{-at}\int_0^t e^{-(b-a)\tau}\,d\tau = \frac{b}{b-a}\left(e^{-at} - e^{-bt}\right), \quad \text{za } t > 0.$$

Odziv za svaki t možemo zapisati pomoću step funkcije kao

$$y(t) = \frac{b}{b-a}\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)\mathrm{s}(t).$$

Odziv u frekvencijskoj domeni određujemo prema izrazu (5.9). Prvo određujemo transformacije ulaznog signala i impulsnog odziva:

$$\begin{aligned} x(t) = e^{-at}\,\mathrm{s}(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; X(\omega) = \frac{1}{a+j\omega} \\ h(t) = be^{-bt}\,\mathrm{s}(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; H(\omega) = \frac{b}{b+j\omega} \end{aligned}$$

Odziv u frekvencijskoj domeni je produkt te dvije transformacije:

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = \frac{b}{ab - \omega^2 + j\omega(a+b)}.$$

6. Prikaz sustava u prostoru stanja

U prostoru stanja linearni sustav opisujemo s jednadžbom stanja

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \tag{6.1}$$

i izlaznom jednadžbom

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}. \tag{6.2}$$

Primjenom Laplaceove transformacije na jednadžbe (6.1) i (6.2) dobivamo opis linearnog sustava u frekvencijskoj domeni

$$\begin{aligned} s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \\ \mathbf{Y}(s) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \end{aligned} \tag{6.3}$$

Rješenje sustava (6.3) je

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{\Phi}(s)\mathbf{x}(0) + \mathbf{\Phi}(s)\mathbf{B}\mathbf{U}(s), \tag{6.4}$$

gdje je

$$\mathbf{\Phi}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \tag{6.5}$$

matrica karakterističnih frekvencija. Odziv sustava u frekvencijskoj domeni je

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{\Phi}(s)\mathbf{x}(0) + \big(\mathbf{C}\mathbf{\Phi}(s)\mathbf{B} + \mathbf{D}\big)\mathbf{U}(s). \tag{6.6}$$

Prijenosna matrica sustava je

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}\mathbf{\Phi}(s)\mathbf{B} + \mathbf{D}. \tag{6.7}$$

Prebacivanjem izraza (6.4) i (6.6) u vremensku domenu dobivamo

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau \tag{6.8}$$

i

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{C}\mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t). \tag{6.9}$$

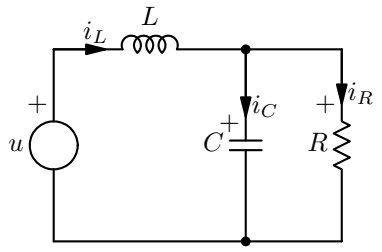
Matrica $\mathbf{\Phi}(t)$ je fundamentalna ili prijelazna matrica.

6.1. Prikaz u prostoru stanja

Primjer 6.1. Za električnu mrežu prikazanu na slici 6.1. napišite jednadžbe stanja i izlazne jednadžbe ako je napon izvora u ulaz u sustav, a struja na otporniku i_R izlaz iz sustava.

Rješenje: Memorijski elementi u zadanoj mreži su induktivitet L i kapacitet C. Za te elemente vrijedi

$$\begin{aligned} u_L = L\frac{di_L}{dt} \quad &\Rightarrow \quad \frac{di_L}{dt} = \frac{u_L}{L} \\ i_C = C\frac{du_C}{dt} \quad &\Rightarrow \quad \frac{du_C}{dt} = \frac{i_C}{C} \end{aligned}$$



Slika 6.1.: Električna mreža

Dane jednadžbe možemo nacrtati kao što je prikazano na slici 6.2., pa se kao prirodan izbor varijabli stanja nameće struja na induktivitetu i_L i napon na kapacitetu u_C.

Slika 6.2.: Induktivitet i kapacitet kao integratori

Kada smo odabrali varijable stanja treba napisati jednadžbe stanja. Pri pisanju jednadžbi stanja koristiti ćemo teorem superpozicije – odnosno, doprinos svakog aktivnog elementa mreže određuje se uz isključene preostale aktivne elemente. Uz varijable stanja koje su struje na induktivitetima te naponi na kapacitetima isključiti element znači kratko spojiti stezaljke za kapacitet i naponski izvor te odspojiti stezaljke za induktivitet te strujni izvor.

Zadana mreža ima tri aktivna elementa te razlikujemo tri doprinosa od naponskog izvora (A), induktiviteta (B) te kapaciteta (C) kako je prikazano na slici 6.3.. Tada je

$$\begin{array}{lllllllllllllll}
u_L & = & L\dfrac{di_L}{dt} & = & u_{LA} & + & u_{LB} & + & u_{LC} & = & u & + & 0 & - & u_C \\
i_C & = & C\dfrac{du_C}{dt} & = & i_{CA} & + & i_{CB} & + & i_{CC} & = & 0 & + & i_L & - & \dfrac{u_C}{R} \\
i_R & = & & = & i_{RA} & + & i_{RB} & + & i_{RC} & = & 0 & + & 0 & + & \dfrac{u_C}{R}
\end{array}$$

Nakon dijeljenja odgovarajućih jednadžbi s L i C dobivamo jednadžbe stanja u matričnom obliku

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

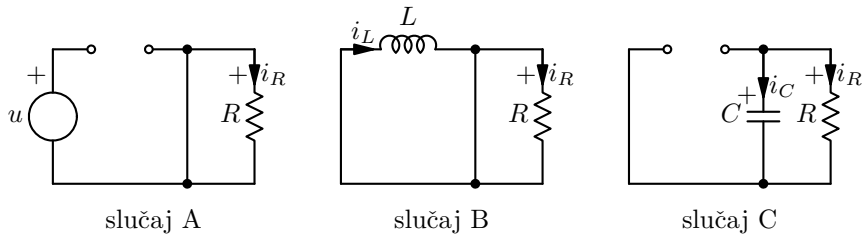
te izlaznu jednadžbu

$$i_R = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u.$$

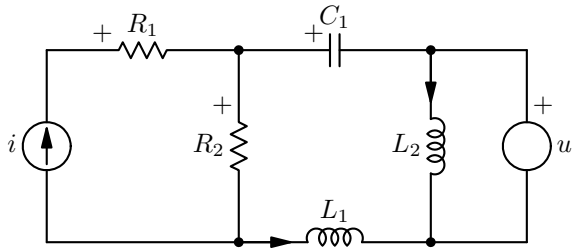
Zadatak 6.1. Za električnu mrežu prikazanu na slici 6.4. napišite jednadžbe stanja i izlazne jednadžbe ako su napon u i struja i ulazi u sustav, a naponi na otpornicima u_{R_1} i u_{R_2} izlazi iz sustava.

Rješenje: Jednadžbe su

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ u_{C_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{L_1} & 0 & \frac{1}{L_1} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{C_1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ u_{C_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & -\frac{R_2}{L_1} \\ \frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix},$$



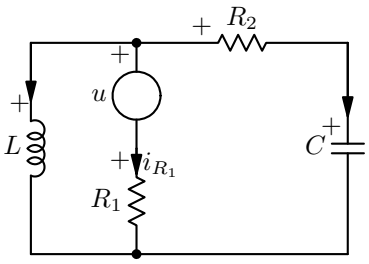
Slika 6.3.: Tri slučaja pri korištenju metode superpozicije



Slika 6.4.: Električna mreža

$$\begin{bmatrix} u_{R_1} \\ u_{R_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ R_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ u_{C_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & R_1 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix}.$$

Zadatak 6.2. Za električnu mrežu prikazanu na slici 6.5. napišite jednadžbe stanja i izlazne jednadžbe u matričnom obliku. Ulaz u sustav je napon u, a izlazi su struja i_{R_1} i naponi u_{R_2} i u_L.



Slika 6.5.: Električna mreža

Rješenje: Jednadžbe su

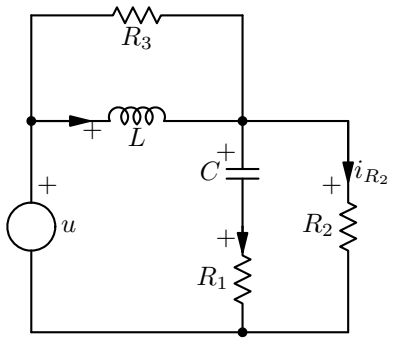
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} = \frac{1}{R_1+R_2}\begin{bmatrix} -\frac{R_1R_2}{L} & \frac{R_1}{L_1} \\ -\frac{R_1}{C} & -\frac{1}{C} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \frac{1}{R_1+R_2}\begin{bmatrix} \frac{R_2}{L} & \frac{1}{C} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} i_{R_1} \\ u_{R_2} \\ u_L \end{bmatrix} = \frac{1}{R_1+R_2}\begin{bmatrix} -R_2 & 1 \\ -R_1R_2 & -R_2 \\ -R_1R_2 & R_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \frac{1}{R_1+R_2}\begin{bmatrix} -1 \\ R_2 \\ R_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \end{bmatrix}.$$

Zadatak 6.3. Za električnu mrežu prikazanu na slici 6.6. napišite jednadžbe stanja i izlazne jednadžbe u matričnom obliku. Ulaz u sustav je napon u, a izlaz struja i_{R_2}.

Rješenje: Jednadžbe su

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} = \frac{1}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}\left(-\begin{bmatrix} \frac{R_1R_2R_3}{L} & \frac{R_2R_3}{L} \\ -\frac{R_2R_3}{C} & \frac{R_2+R_3}{C} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_3(R_1+R_2)}{L} \\ \frac{R_2}{C} \end{bmatrix} u\right),$$



Slika 6.6.: Električna mreža

$$i_{R_2} = \frac{1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}\left(\begin{bmatrix} R_1R_3 & R_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 \end{bmatrix} u\right).$$

Primjer 6.2. Odredite model u prostoru stanja za ponudu i potražnju turističkih proizvoda. Neka su proizvodi putovanja vlakom i autobusom te smještaj. Pretpostavite da promjena cijene tih proizvoda ovisi o razlici ponude i potražnje. Pretpostavite linearne ovisnosti ponude i potražnje o cijenama proizvoda.

Rješenje: Kao varijable stanja odabiremo cijenu željezničke karte P_1, cijenu autobusne karte P_2 te cijenu smještaja P_3. Neka su Q_{di} i Q_{si}, $i = 1, 2, 3$ funkcije potražnje i ponude za danim proizvodima. Promjena cijene u vremenu određena je neskladom između ponude i potražnje prema

$$\frac{dP_i}{dt} = k_i(Q_{di} - Q_{si}), \quad k_i > 0.$$

Pretpostavljamo linearne ovisnosti ponude i potražnje o cijenama proizvoda pa možemo pisati

$$\begin{aligned}
Q_{d1} &= a_1 - b_{11}P_1 + b_{12}P_2 - b_{13}P_3 \\
Q_{s1} &= -c_1 + d_1P_1 \\
Q_{d2} &= a_2 + b_{21}P_1 - b_{22}P_2 - b_{23}P_3 \\
Q_{s2} &= -c_2 + d_2P_2 \\
Q_{d3} &= a_3 - b_{31}P_1 - b_{32}P_2 - b_{33}P_3 \\
Q_{s3} &= -c_3 + d_3P_3
\end{aligned}$$

Pri tome su koeficijenti a, b, c i d pozitivni. Analiziramo li izraz za ponudu i potražnu željezničkih karata vidimo da potražnja raste kada se povećava cijena autobusne karte te opada kada rastu cijene željezničkih karata i smještaja. Ponuda pak raste kada cijena željezničkih karata raste. Na jednak način smo postavili i ostale jednadžbe. Kombinacijom svih navedenih izraza dobivamo jednadžbu stanja

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_1 \\ \dot{P}_2 \\ \dot{P}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1(b_{11}+d_1) & k_1b_{12} & -k_1b_{13} \\ k_2b_{21} & -k_2(b_{22}+d_2) & -k_2b_{23} \\ -k_3b_{31} & -k_3b_{23} & -k_3(b_{33}+d_3) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1(a_1+c_1) \\ k_2(a_2+c_2) \\ k_3(a_3+c_3) \end{bmatrix}.$$

Primjer 6.3. Matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ kontinuiranog sustava su

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ako je pobuda

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} 2\delta(t) \\ \mathrm{s}(t) \end{bmatrix}$$

Odredite odziv sustava, fundamentalnu matricu te matricu impulsnog odziva. Početna stanja neka su

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rješenje: Prvo određujemo matricu karakterističnih frekvencija $\mathbf{\Phi}(s)$. Vrijedi

$$\mathbf{\Phi}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}).$$

Kako je

$$\operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

i

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} s & 2 \\ -1 & s+3 \end{vmatrix} = (s+1)(s+2)$$

za matricu karakterističnih frekvencija dobivamo

$$\mathbf{\Phi}(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix}.$$

Nakon rastava na parcijalne razlomke je

$$\mathbf{\Phi}(s) = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{s+2} + \dfrac{2}{s+1} & \dfrac{2}{s+2} - \dfrac{2}{s+1} \\ -\dfrac{1}{s+2} + \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{2}{s+2} - \dfrac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

te inverznom Laplaceovom transformacijom dobivamo fundamentalnu matricu sustava

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} -e^{-2t} + 2e^{-t} & 2e^{-2t} - 2e^{-t} \\ -e^{-2t} + e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Odziv $y(t)$ računamo prema (6.9),

$$y(t) = \mathbf{C\Phi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{C\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t).$$

Kako je

$$\mathbf{C\Phi}(t) = \begin{bmatrix} -e^{-2t} + 2e^{-t} & 2e^{-2t} - 2e^{-t} \end{bmatrix}$$

i

$$\mathbf{C\Phi}(t)\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2e^{-2t} + 4e^{-t} & 2e^{-2t} - 2e^{-t} \end{bmatrix}$$

odziv je

$$\begin{aligned} y(t) &= (-e^{-2t} + 2e^{-t})1 + (2e^{-2t} - 2e^{-t})0 \\ &\quad + \int_0^t (-2e^{-2(t-\tau)} + 4e^{-(t-\tau)})2\delta(\tau)\,d\tau \\ &\quad + \int_0^t (2e^{-2(t-\tau)} - 2e^{-(t-\tau)})\,\mathrm{s}(\tau)\,d\tau \\ &\quad + 0 \cdot 2\delta(t) + 1\,\mathrm{s}(t) \end{aligned}$$

Nakon integracije odziv je

$$y(t) = (-e^{-2t} + 2e^{-t} + 10e^{-t}\,\mathrm{s}(t) - 5e^{-2t}\,\mathrm{s}(t) + \mathrm{s}(t).$$

Preostaje nam još odrediti impulsnu matricu. Prijenosnu matrica računamo prema (6.7) te dobivamo

$$\mathbf{H}(s) = \begin{bmatrix} -\dfrac{2}{s+2} + \dfrac{4}{s+1} & \dfrac{2}{s+2} - \dfrac{2}{s+1} + 1 \end{bmatrix}.$$

Prelaskom u vremensku domenu dobivamo matricu impulsnog odziva

$$\mathbf{h}(t) = \begin{bmatrix} -2e^{-2t} + 4e^{-t} & 2e^{-2t} - 2e^{-t} + \delta(t) \end{bmatrix}.$$

Zadatak 6.4. Za kontinuirani sustav zadan diferencijalnom jednadžbom

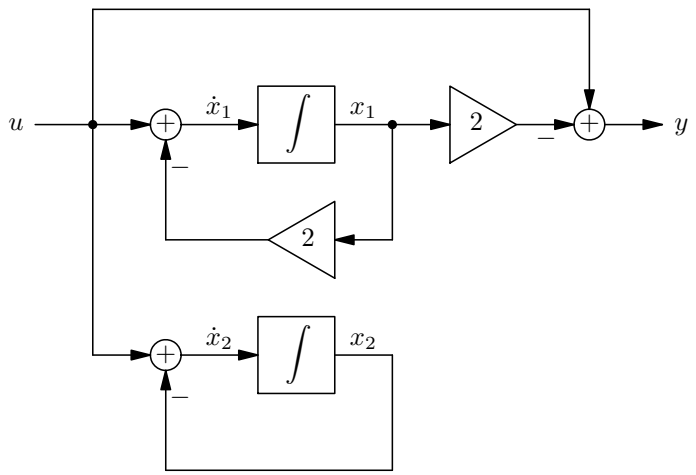
$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = u''(t) + u'(t)$$

odredite model koristeći kanonske varijable stanja. Napišite jednadžbe stanja i izlaznu jednadžbu u matričnom obliku. Nacrtajte model sustava.

Rješenje: Matrice su

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix},$$

a jednadžbe su $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$, $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$. Model je prikazan na slici 6.7..



Slika 6.7.: Model sustava

Zadatak 6.5. Matrice **A**, **B**, **C** i **D** kontinuiranog sustava su

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odredite impulsni odziv sustava.

Rješenje: Impulsni odziv je $h(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - \delta(t) & 4e^{t} + 3e^{-t} + \delta(t) \end{bmatrix}$.

Zadatak 6.6. Matrice **A**, **B**, **C** i **D**,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix},$$

rezultat su paralelne realizacije vremenski kontinuiranog sustava. Odredite impulsni odziv sustava. Napišite diferencijalnu jednadžbu sustava kojom je definiran odnos pobude i odziva.

Rješenje: Impulsni odziv je $h(t) = \delta(t) + e^{-2t} - 2e^{-3t}$, dok je diferencijalna jednadžba $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = u''(t) + 4u'(t) + 5u(t)$.

Zadatak 6.7. Fundamentalna matrica kontinuiranog linearnog sustava je

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - e^{t} & 2e^{-t} - e^{-2t} \\ e^{-2t} - e^{-t} & 2e^{-2t} - 2e^{-t} \end{bmatrix},$$

dok su matrice **B**, **C** i **D**

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odredite impulsni odziv sustava.

RJEŠENJE: Impulsni odziv sustava je $h(t) = \begin{bmatrix} -3e^{-t} + 6e^{-2t} & 2e^{-t} - e^{-2t} + \delta(t) \end{bmatrix}$.

Primjer 6.4. Kontinuirani sustav opisan je jednadžbama

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) + \frac{1}{3} y_2(t) &= u_1(t) \\ \frac{1}{3} y_1(t) + \dot{y}_2(t) &= u_2(t) \end{aligned}$$

Odredite matrice **A**, **B**, **C** i **D** zadanog sustava. Izračunajte prijenosnu funkciju sustava i pripadni impulsni odziv te odredite odziv na pobudu

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} 3\,\mathrm{s}(t) \\ 9\delta(t) \end{bmatrix}$$

ako su početna stanja jednaka nuli.

RJEŠENJE: Zadane su izlazne jednadžbe te prvo moramo odabrati varijable stanja. Odaberimo

$$x_1 = y_1 \quad \text{i} \quad x_2 = y_2.$$

Sada su jednadžbe stanja

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\frac{1}{3} x_2(t) + u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{1}{3} x_1(t) + u_2(t) \end{aligned}$$

te možemo zapisati jednadžbe sustava u matričnom obliku

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matrice sustava su sada

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sada je potrebno odrediti prijenosnu matricu sustava prema (6.7). Fundamentalna matrica zadanog sustava je

$$\mathbf{\Phi}(s) = \frac{\operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} = \begin{bmatrix} \dfrac{s}{s^2 - \frac{1}{9}} & -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{s^2 - \frac{1}{9}} \\ -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{s^2 - \frac{1}{9}} & \dfrac{s}{s^2 - \frac{1}{9}} \end{bmatrix},$$

a kako su matrice $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$ jedinične prijenosna matrica je

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{I}\mathbf{\Phi}(s)\mathbf{I} + \mathbf{0} = \begin{bmatrix} \dfrac{s}{s^2 - \frac{1}{9}} & -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{s^2 - \frac{1}{9}} \\ -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{s^2 - \frac{1}{9}} & \dfrac{s}{s^2 - \frac{1}{9}} \end{bmatrix}.$$

Da bi odredili impulsni odziv moramo rastaviti prijenosnu maticu u parcijalne razlomke. Kako je

$$\frac{s}{s^2 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{2}\frac{1}{s - \frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\frac{1}{s + \frac{1}{3}}$$

i

$$-\frac{1}{3}\frac{1}{s^2 - \frac{1}{9}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{s - \frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\frac{1}{s + \frac{1}{3}}$$

impulsni odziv je

$$\mathbf{h}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{3}t} + e^{-\frac{1}{3}t}\right) & \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{3}t} - e^{\frac{1}{3}t}\right) \\ \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{3}t} - e^{-\frac{1}{3}t}\right) & \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{3}t} + e^{-\frac{1}{3}t}\right) \end{bmatrix}.$$

Za zadanu pobudu odziv u s domeni je

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{U}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s}{s^2 - \frac{1}{9}} & -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{s^2 - \frac{1}{9}} \\ -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{s^2 - \frac{1}{9}} & \dfrac{s}{s^2 - \frac{1}{9}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{s} \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{9}{s} \end{bmatrix}$$

što nakon prebacivanja u vremensku domenu daje

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 9\,\mathrm{s}(t) \end{bmatrix}.$$

Zadatak 6.8. Kontinuirani sustav opisan je jednadžbama

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) + 2y_2(t) &= u_1(t) \\ 2y_1(t) + \dot{y}_2(t) &= u_2(t) \end{aligned}$$

Odredite matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ zadanog sustava. Izračunajte prijenosnu funkciju sustava i pripadni impulsni odziv te odredite odziv na pobudu

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} 2\,\mathrm{s}(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix}$$

ako su početna stanja jednaka nuli.

Rješenje: Matrice sustava su

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Prijenosna matrica i impulsni odziv su

$$\mathbf{H}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2-4} & \frac{-2}{s^2-4} \\ \frac{-2}{s^2-4} & \frac{s}{s^2-4} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{h}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(e^{2t} + e^{-2t}\right) & -\frac{1}{2}\left(e^{2t} - e^{-2t}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(e^{2t} - e^{-2t}\right) & \frac{1}{2}\left(e^{2t} + e^{-2t}\right) \end{bmatrix}.$$

Odziv na zadanu pobudu je $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{s}(t) \end{bmatrix}^T$

6.2. Metode realizacije sustava

6.2.1. Direktna realizacija

Primjer 6.5. Koristeći direktnu metodu odredite model linearnog sustava opisanog diferencijalnom jednadžbom

$$y'''(t) + 2y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = u(t).$$

Rješenje: Primijenimo Laplaceovu transformaciju na jednadžbu uz pretpostavku da su početni uvjeti jednaki nuli. Dobivamo

$$s^3Y(s) + 2s^2Y(s) + 5sY(S) + 6Y(s) = U(s).$$

Sređivanjem te prebacivanjem odziva $Y(s)$ i pobude $U(s)$ na istu stranu određujemo prijenosnu funkciju sustava

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 5s + 6}.$$

Kod direktne metode za varijable stanja odabiremo odziv i njegove derivacije, dakle

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= y'(t) = x_1'(t) \\ x_3(t) &= y''(t) = x_2'(t) \end{aligned}$$

Time smo dobili dvije jednadžbe stanja. Zadnju jednadžbu stanja dobivamo uvrštavanjem varijabli stanja u polaznu diferencijalnu jednadžbu,

$$x_3'(t) + 2x_3(t) + 5x_2(t) + 6x_1(t) = u(t).$$

Sada možemo napisati jednadžbe stanja u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t).$$

Kako smo za izlaz odabrali zadnju varijablu stanja izlazna jednadžba je

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t).$$

Simulacijski dijagram zajedno s označenim varijablama stanja prikazan je na slici 6.8..

Primjer 6.6. Koristeći direktnu metodu odredite model linearnog sustava opisanog prijenosnom funkcijom

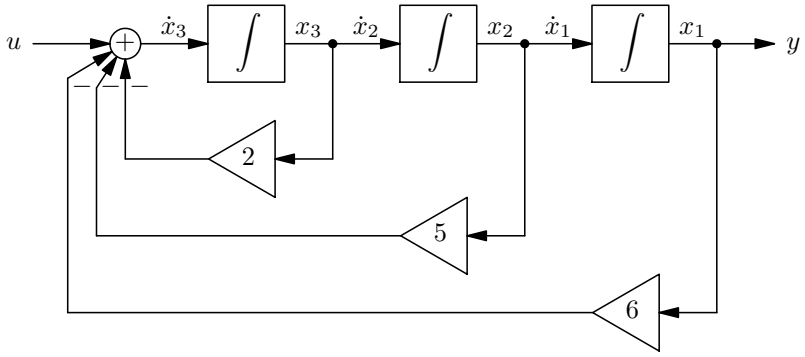
$$H(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}{s^3 + 2s^2 + 5s + 6}.$$

Rješenje: Prijenosna funkcija sustava je

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}{s^3 + 2s^2 + 5s + 6},$$

pa je

$$\begin{aligned} P(s) &= s^3 + 2s^2 + 3s + 4 \\ Q(s) &= s^3 + 2s^2 + 5s + 6 \end{aligned}$$



Slika 6.8.: Direktna realizacija sustava

Odziv $Y(s)$ u domeni transformacije na pobudu $U(s)$ možemo zapisati na način

$$Y(s) = H(s)U(s) = P(s)\frac{1}{Q(s)}U(s).$$

Pri realizaciji sustava najprije ćemo realizirati dio određen s

$$Z(s) = \frac{1}{Q(s)}U(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 5s + 6}U(s).$$

Taj dio nam odgovara diferencijalnoj jednadžbi

$$z'''(t) + 2z''(t) + 5z'(t) + 6z(t) = u(t), \tag{6.10}$$

za koju odabiremo varijable stanja

$$\begin{aligned} x_1(t) &= z(t) \\ x_2(t) &= z'(t) \\ x_3(t) &= z''(t) \end{aligned}$$

Jednadžbe stanja za diferencijalnu jednadžbu (6.10) su sada

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_3(t) \\ x_3'(t) &= -6x_1(t) - 5x_2(t) - 2x_3(t) + u(t) \end{aligned}$$

Time su određene i jednadžbe stanja za cijeli sustav jer nam brojnik prijenosne funkcije $P(s)$ određuje izlaznu jednadžbu. Vrijedi

$$Y(s) = P(s)Z(s) = (s^3 + 2s^2 + 3s + 4)Z(s)$$

što u vremenskoj domeni postaje

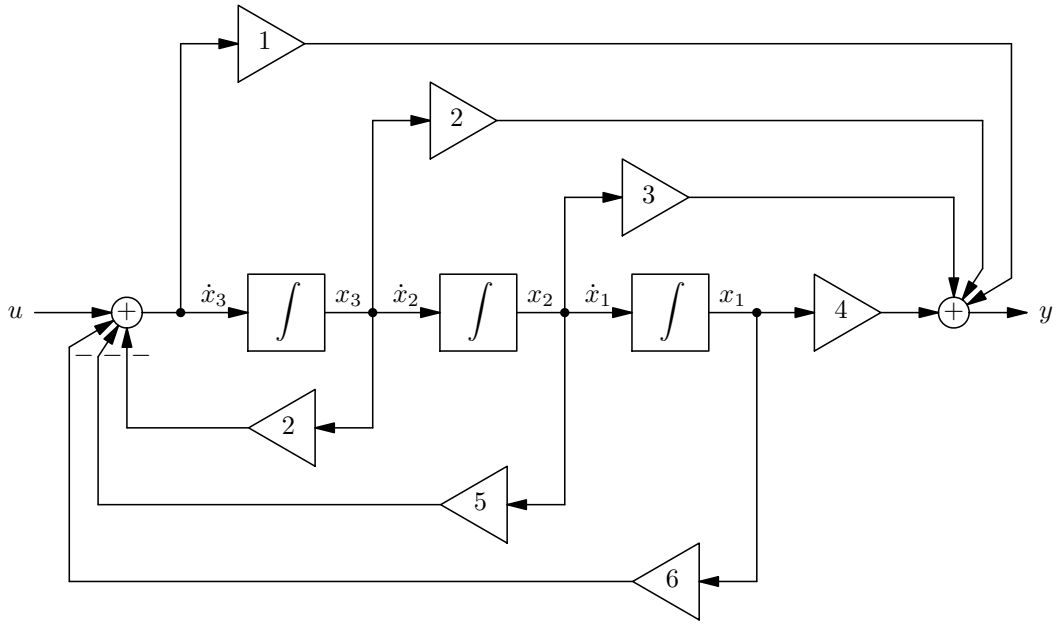
$$y(t) = z'''(t) + 2z''(t) + 3z'(t) + 4z(t).$$

Uvrštavanjem prethodno odabranih varijabli stanja umjesto $z(t)$ i njegovih derivacija dobivamo izlaznu jednadžbu

$$y(t) = -2x_1(t) - 2x_2(t) + u(t).$$

Jednadžbe sustava u matričnom obliku su

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t).$$



Slika 6.9.: Direktna realizacija sustava

i

$$y(t) = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} u(t).$$

Simulacijski dijagram zajedno s označenim varijablama stanja prikazan je na slici 6.9..

Zadatak 6.9. Prijenosna funkcija kontinuiranog linearnog sustava je

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)^3}.$$

Odredite matrice **A**, **B**, **C** i **D** direktne realizacije i nacrtajte sustav. Objasnite strukturu dobivene matrice **A**.

Rješenje: Matrice su

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix},$$

dok je model prikazan na slici 6.10.. Dobivena matrica **A** ima strukturu tipičnu za direktnu realzaciju. Na gornjoj sporednoj dijagonali su jedinice, dok su u zadnjem retku elementi različiti od nule koji odgovaraju povratnim vezama.

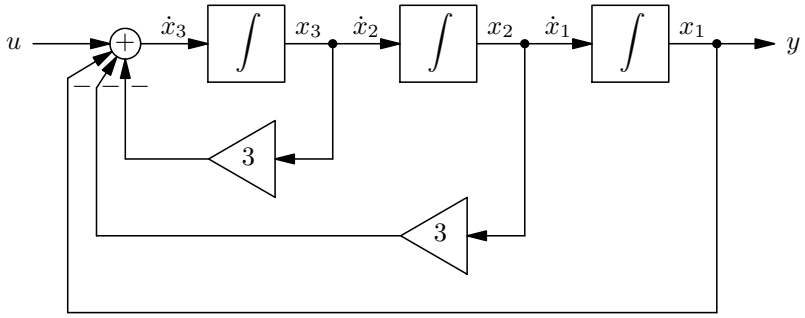
Zadatak 6.10. Prijenosna funkcija linearnog kontinuiranog sustava je

$$H(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^2 + 2s + 1}.$$

Odredite matrice **A**, **B**, **C** i **D** direktne realizacije i nacrtajte sustav. Objasnite strukturu dobivene matrice **A**.

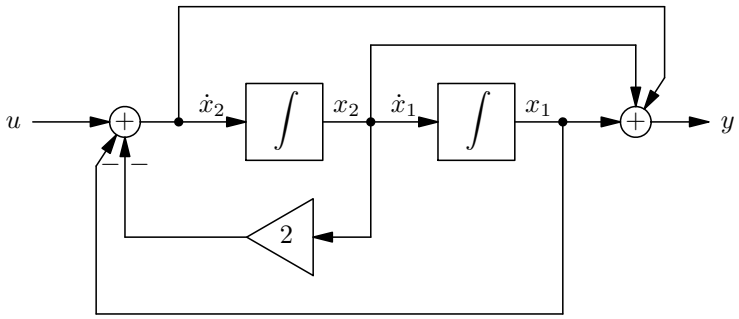
Rješenje: Matrice su

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix},$$



Slika 6.10.: Direktna realizacija sustava

dok je model prikazan na slici 6.11.. Dobivena matrica **A** ima strukturu tipičnu za direktnu realzaciju. Na gornjoj sporednoj dijagonali su jedinice, dok su u zadnjem retku elementi različiti od nule koji odgovaraju povratnim vezama.



Slika 6.11.: Direktna realizacija sustava

6.2.2. Kaskadna realizacija

Primjer 6.7. Za sustav opisan prijenosnom funkcijom

$$H(s) = \frac{(s+2)(s+1)}{(s+3)(s+4)}$$

nacrtajte model i napišite jednadbžbe stanja koristeći kaskadnu realizaciju.

Rješenje: Da bi realizirali sustav koristeći kaskadnu realizaciju razlažemo prijenosnu funkciju na produkt,

$$H(s) = \frac{(s+2)(s+1)}{(s+3)(s+4)} = \frac{s+2}{s+3} \cdot \frac{s+1}{s+4}.$$

Primijetite da postoji više različitih mogućih razlaganja. Za naše razlaganje elementi kaskade su

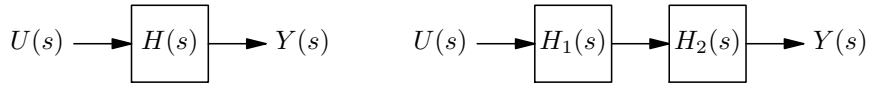
$$H_1(s) = \frac{s+2}{s+3} \quad \text{i} \quad H_2(s) = \frac{s+1}{s+4},$$

koji su spojeni prema slici 6.12.. Svaki od elemenata kaskade možemo realizirati na različite načine. Odaberimo direktnu realizaciju. Tada za $H_1(s)$ pišemo jednadžbu stanja

$$x_1'(t) = -3x_1(t) + u(t)$$

i izlaznu jednadbžu

$$y_1(t) = x_1'(t) + 2x_1(t) = -x_1(t) + u(t),$$



Slika 6.12.: Kaskadno razlaganje sustava

gdje je $u(t)$ ulaz u cijeli sustav.

Za drugi element kaskade je ulaz izlaz prvog elementa kaskade. Sada prema prijenosnoj funkciji $H_2(s)$ drugog elementa pišemo jednadžbu stanja

$$x_2'(t) = -4x_2(t) + y_1(t) = -x_1(t) - 4x_2(t) + u(t)$$

i izlaznu jednadžbu

$$y_2(t) = x_2'(t) + x_2(t) = -x_1(t) - 3x_2(t) + u(t).$$

Pri tome je izlaz iz drugog elementa kaskade ujedno i izlaz cijelog sustava.

Sada možemo napisati jednadžbe stanja

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -3x_1(t) + u(t) \\ x_2'(t) &= -x_1(t) - 4x_2(t) + u(t) \end{aligned}$$

i izlaznu jednadžbu

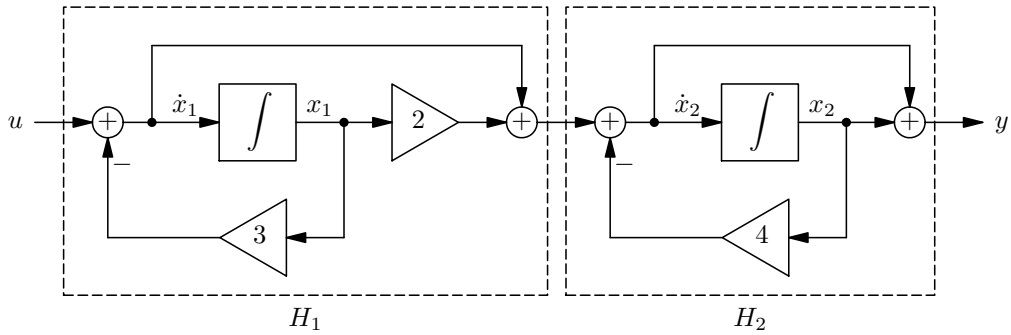
$$y(t) = -x_1(t) - 4x_2(t) + u(t),$$

odnosno u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} u(t).$$

Model sustava prikazan je na slici 6.13..



Slika 6.13.: Simulacijski blok dijagram

Primjer 6.8. Prijenosna funkcija kontinuiranog sustava je

$$H(s) = \frac{s(s+1)(s+2)}{(s+3)(s+4)(s^2+2s+2)}.$$

Realizirajte sustav kaskadnom metodom te napišite jednadžbe stanja.

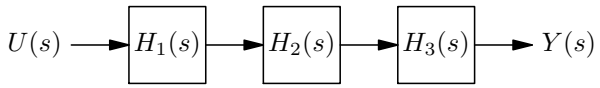
Rješenje: Iako zadani sustav ima četiri pola te ga možemo rastaviti na kaskadu koja se sastoji od četiri elementa, razložiti ćemo ga na samo tri elementa da izbjegnemo imaginarne koeficijente. Imaginarni koeficijenti bi se pojavili jer sustav ima par kompleksnih polova. Rastav koji odabiremo je

$$H(s) = \frac{s(s+1)(s+2)}{(s+3)(s+4)(s^2+2s+2)} = \frac{s+1}{s+3} \cdot \frac{s}{s+4} \cdot \frac{s+2}{s^2+2s+2},$$

gdje su

$$H_1(s) = \frac{s+1}{s+3}, \quad H_2(s) = \frac{s}{s+4} \quad \text{i} \quad H_3(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+2}.$$

Pri tome su sustavi spojeni kako je prikazano na slici 6.14..



Slika 6.14.: Kaskadno razlaganje sustava

Za prvi element kaskade $H_1(s)$ jednadžba stanja je

$$x_1'(t) = -3x_1(t) + u(t),$$

dok je izlazna jednadžba

$$y_1(t) = x_1'(t) + x_1(t) = -2x_1(t) + u(t).$$

Izlaz prvog elementa kaskade je ulaz u drugi. Jednadžba stanja za $H_2(s)$ je

$$x_2'(t) = -4x_2(t) + y_1(t) = -2x_1(t) - 4x_2(t) + u(t),$$

a izlazna jednadžba je

$$y_2(t) = x_2'(t) = -2x_1(t) - 4x_2(t) + u(t).$$

Zadnji element kaskade nije razlagan u kaskadu dva sustava prvog reda jer bi ti sustavi imali kompleksne koeficijente. Umjesto toga elemet $H_3(s)$ realiziramo direktom metodom da bi svi koeficijenti ostali realni. Iz prijenosne funkcije

$$H_3(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+2}$$

odmah pišemo jednadžbe stanja

$$\begin{aligned} x_3'(t) &= x_4(t) \\ x_4'(t) &= -2x_3(t) - 2x_4(t) + y_2(t) = -2x_1(t) - 4x_2(t) - 2x_3(t) - 2x_4(t) + u(t) \end{aligned}$$

i izlaznu jednadžbu

$$y_3(t) = x_4(t) + 2x_3(t).$$

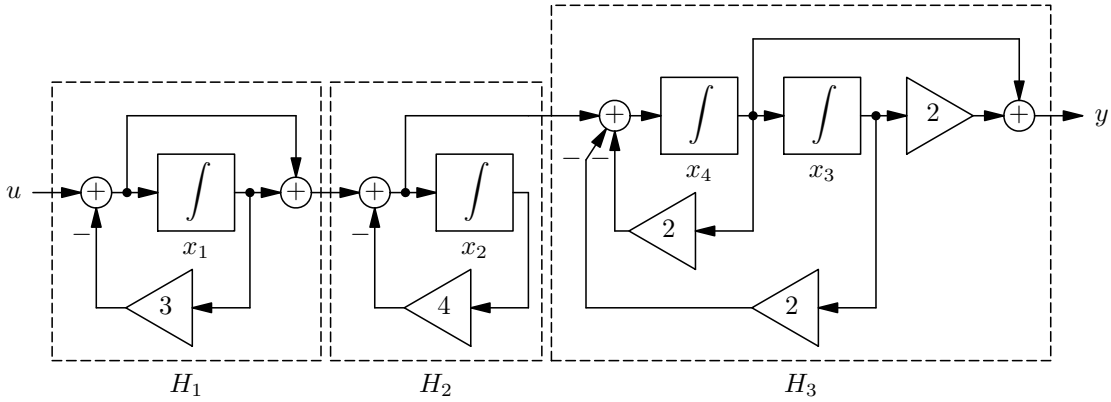
Zadnja jednadžba nam ujedno predstavlja i izlaznu jednadžbu cijelog sustava.

Sada možemo napisati jednadžbe sustava u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t).$$

Model sustava prikazan je na slici 6.15..



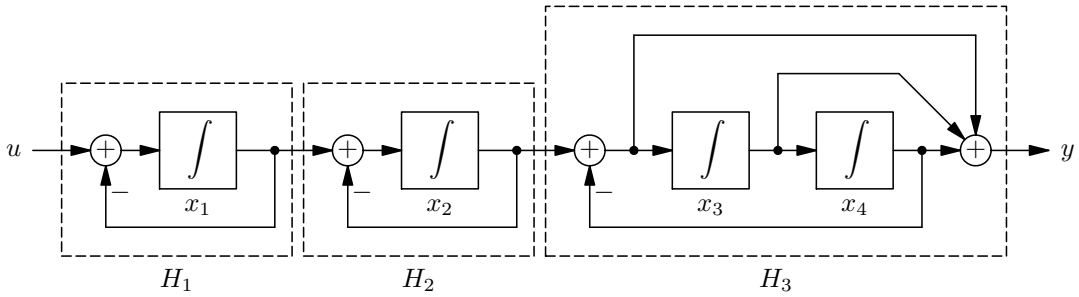
Slika 6.15.: Simulacijski blok dijagram

Zadatak 6.11. Kaskadno realizirajte kontinuirani sustav koji ima dvije nule, $n_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$ i četiri pola, $p_{1,2} = \pm j$ i $p_{3,4} = -1$ i zadovoljava uvjet $H(0) = 1$. Napište matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ i nacrtajte model sustava. Objasnite strukutru matrice $\mathbf{A}$ koju ste dobili.

Rješenje: Matrice su

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix},$$

dok je model prikazan na slici 6.16.. Kako je u trećoj sekciji kaskade direktna realizacija, donja trokutasta matrica karakteristična za kaskadnu realizaciju je pokvarena (jedinica u predzadnjem retku).



Slika 6.16.: Model sustava

Zadatak 6.12. Kontinuirani sustav zadan je prijenosnom funkcijom

$$H(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{(s^3+5s^2+3s+1)(s+3)(s+4)}.$$

Nacrtajte simulacijski blok-dijagram sustava u kojem je sustav realiziran pomoću kaskade dvaju sustava od kojih je jedan realiziran preko normalnih varijabli stanja, a drugi preko kanonskih varijabli stanja.

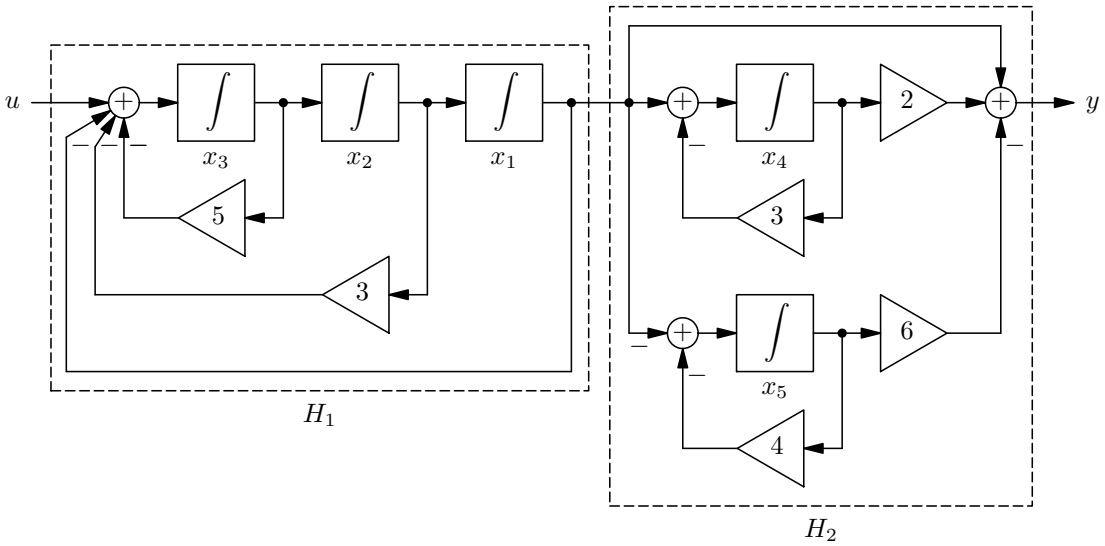
Rješenje: Za normalne varijable stanja odabrana je prijensna funkcija $H_1(s)$, dok je za kanonske varijable stanja odabrana funkcija H_2. Simulacijski blok-dijagram je prikazan na slici 6.17..

$$H_1(s) = \frac{1}{s^3+5s^2+3s+1}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}, \quad \mathbf{y_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}\mathbf{u}$$

$$H_2(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{(s+3)(s+4)}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}\mathbf{y_1}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}\mathbf{y_1}$$



Slika 6.17.: Simulacijski blok-dijagram

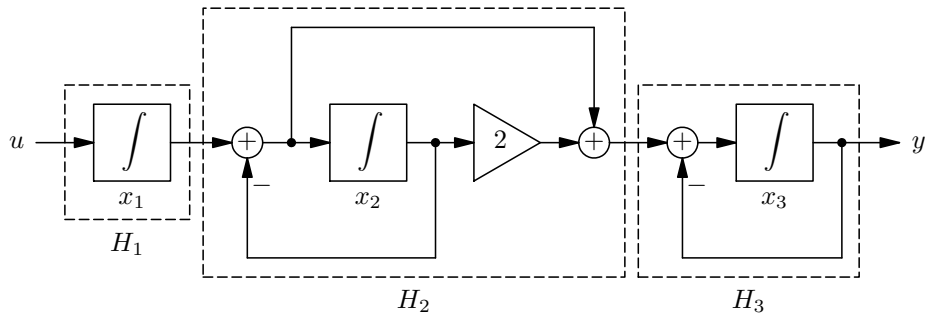
Zadatak 6.13. Impulsni odziv kontinuiranog sustava je

$$h(t) = 2\,\mathrm{s}(t) - 2e^{-t} - te^{-t}, \quad t \geq 0.$$

Realizirajte sustav kaskadnom metodom. Napišite jednadžbe stanja i izlaznu jednadžbu sustava te nacrtajte simulacijski blok-dijagram.

Rješenje: Simulacijski blok-dijagram prikazan je na slici 6.18., dok su jednadžbe sustava

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}\mathbf{u}$$



Slika 6.18.: Simulacijski blok-dijagram

6.2.3. Paralelna realizacija

Jednadžbe sustava u prostoru stanja su

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \tag{6.11}$$

Za paralelnu realizaciju tražimo kanonske varijable stanja kojima odgovara matrica $\mathbf{A}$ koja ima Jordanovu formu. Tada matricu sustava $\mathbf{A}$ označavamo $\mathbf{A}^*$. Ako je zadan sustav u prostoru stanja gdje matrica $\mathbf{A}$ nema Jordanovu formu, na kanonski oblik prelazimo pomoću regularne matrice transformacije $\mathbf{T}$ prema

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^* &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \qquad & \mathbf{C}^* &= \mathbf{C}\mathbf{T} \\ \mathbf{B}^* &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} \qquad & \mathbf{D}^* &= \mathbf{D} \end{aligned} \tag{6.12}$$

Pri transformaciji karakteristične vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ ostaju nepromijenjene, odnosno sustav ostaje isti samo što ga opisujemo preko novih varijabli stanja. Matricu transformacije $\mathbf{T}$ koja transformira matricu u dijagonalnu nazivamo modalna matrica i označavamo s $\mathbf{M}$.

Svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ su nule karakterstičnog polinoma

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0. \tag{6.13}$$

Netrivijalna rješenja homogene algebarske jednadžbe

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{6.14}$$

su svojstveni vektori matrice $\mathbf{A}$. Modalnu matricu $\mathbf{M}$ formiramo od karakterističnih vektora matrice $\mathbf{A}$ prema

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix}, \tag{6.15}$$

gdje su $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,... $\mathbf{x}_n$ netrivijalna rješenja jednadžbe (6.14).

Za slučaj kada su sve svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ različite stupce modalne matrice $\mathbf{M}$ možemo sastaviti od bilo kojeg stupca adjungirane pridružene matrice $\operatorname{adj}(s_i\mathbf{I} - \mathbf{A})$ za različite svojstvene vrijednosti. Pri tome odabrani stupac ne smije biti nul-stupac.

Adjungirana matrica matrice $\mathbf{A}$ je matrica

$$\operatorname{adj}\mathbf{A} = [x_{ij}]^T, \tag{6.16}$$

gdje je

$$x_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}. \tag{6.17}$$

Pri tome je D_{ij} determinanta podmatrice matrice $\mathbf{A}$ dobivene izbacivanjem i-tog retka i j-tog stupca.

Ako je matrica $\mathbf{A}$ matrica direktne realizacije oblika

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \tag{6.18}$$

modalnu matricu možemo konstruirati izravno ako znamo svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$. Za slučaj jednostrukih polova koji odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima s_1, s_2,... s_n modalna matrica $\mathbf{M}$ je oblika

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_1^2 & s_2^2 & s_3^2 & \dots & s_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1^{n-1} & s_2^{n-1} & s_3^{n-1} & \dots & s_n^{n-1} \end{bmatrix}. \tag{6.19}$$

Za slučaj višestrukih polova za svaki višestruki pol ponavljamo stupac koji odgovara polu s time da ga deriviramo te skaliramo. Ako je pol k-struk tada imamo k stupaca oblika

$$\frac{1}{i!}\frac{d^i}{ds^i}\begin{bmatrix}1 & s & s^2 & \dots & s^n\end{bmatrix}^T, \quad i = 0, \dots, k-1. \tag{6.20}$$

Na primjer, ako imamo peterostruki pol s_1 modalna matrica je

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ s_1^2 & \frac{2}{1!}s_1 & 1 & 0 & 0 \\ s_1^3 & \frac{3}{1!}s_1^2 & \frac{6}{2!}s_1 & 1 & 0 \\ s_1^4 & \frac{4}{1!}s_1^3 & \frac{12}{2!}s_1^2 & \frac{24}{3!}s_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Primjer 6.9. Za zadanu matricu sustava

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

odredite modalnu matricu te svojstvene vrijednosti.

Rješenje: Odredimo najprije svojstvene vrijednosti prema (6.13). Dobivamo

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ -1 & s-1 & 0 \\ -2 & -3 & s-2 \end{vmatrix} = (s-1)^2(s-2) = 0,$$

te su svojstvene vrijednosti $s_1 = 2$ i $s_{2,3} = 1$. Da bi odredili modalnu matricu rješavamo sustav

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 1 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix}.$$

Dani sustav rastavljamo u tri jednadžbe

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = s_1\mathbf{x}_1 \tag{6.21}$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = s_2\mathbf{x}_2 \tag{6.22}$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x}_3 = s_3\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_2 \tag{6.23}$$

Prva jednadžba je

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{13} \end{bmatrix},$$

čije rješenje je

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix}0 & 0 & \lambda_1\end{bmatrix}^T, \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}.$$

Sada proizvoljno odabremo parametar λ_1, npr. $\lambda_1 = 1$. Svojstveni vektor $\mathbf{x}_1$ je

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T.$$

Za drugu jednadžbu vrijedi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix}.$$

U ovom slučaju je rješenje

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix}0 & \lambda_2 & -3\lambda_2\end{bmatrix}^T, \quad \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Opet proizvoljno izaberemo $\lambda_2 = 1$ te je svojstveni vektor

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}^T.$$

Zadnja jednadžba je

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix}.$$

Njeno rješenje je

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 & -5\lambda_2 - 3\lambda_3 \end{bmatrix}^T, \quad \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}.$$

Ovdje smo ograničeni na parametar λ_2 odabran za vektor $\mathbf{x}_2$, no opet proizvoljno možemo odabrati $\lambda_3 = 1$.Svojstveni vektor $\mathbf{x}_3$ je

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -8 \end{bmatrix}^T.$$

Modalna matrica je

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -8 \end{bmatrix},$$

pa transformacijom matrice $\mathbf{A}$ prema (6.12) dobivamo

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Primjer 6.10. Za zadanu matricu sustava

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

odredite modalnu matricu te svojstvene vrijednosti.

Rješenje: Odredimo najprije svojstvene vrijednosti prema (6.13). Dobivamo

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} s-2 & 2 & -3 \\ -1 & s-1 & -1 \\ -1 & -3 & s+2 \end{vmatrix} = s^3 - 2s^2 - 5s + 6 = (s-1)(s+2)(s-3).$$

Svojstvene vrijednosti $s_1 = 1$, $s_2 = -2$ i $s_3 = 3$ su međusobno različite te modalnu matricu $\mathbf{M}$ sastavljamo od stupaca adjungirane pridružene matrice. Adjungirana pridružena matrica je

$$\operatorname{adj}(s_i\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s^2 - 4 & -2s + 7 & 3s - 5 \\ s + 2 & s^2 - s - 5 & s + 1 \\ s + 2 & 3s - 8 & s^2 - 3s + 4 \end{bmatrix}.$$

Za svojstvenu vrijednost $s_1 = 1$ adjungirana pridružena matrica postaje

$$\operatorname{adj}(s_1\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 3 & -5 & 2 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix},$$

za svojstvenu vrijednost $s_2 = -2$

$$\operatorname{adj}(s_2\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 11 & -11 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -14 & 14 \end{bmatrix},$$

te za svojstvenu vrijednost $s_2 = -3$

$$\operatorname{adj}(s_3\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 5 & 15 & 4 \\ 5 & 15 & 4 \end{bmatrix}.$$

Modalnu matricu $\mathbf{M}$ dobivamo kombiniranjem stupaca matrica $\operatorname{adj}(s_1\mathbf{I} - \mathbf{A})$, $\operatorname{adj}(s_2\mathbf{I} - \mathbf{A})$ i $\operatorname{adj}(s_3\mathbf{I} - \mathbf{A})$,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -1 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -14 & 1 \end{bmatrix}.$$

Transformacijom matrice $\mathbf{A}$ prema (6.12) dobivamo

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Primjer 6.11. Za matricu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

direktne realizacije odredite modalnu matricu $\mathbf{M}$ te matricu $\mathbf{A}^*$.

Rješenje: Najprije određujemo polove sustava. Vrijedi

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ -1 & 3 & s-3 \end{vmatrix} = s^3 - 3s^2 + 3s - 1 = (s-1)^3.$$

Kako smo dobili jednu višestruku svojstvenu vrijednost modalnu matricu određujemo prema (6.20),

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_1 & 1 & 0 \\ s_1^2 & \frac{2}{1!}s_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrica $\mathbf{A}^*$ je

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Primjer 6.12. Prijenosna funkcija kontinuiranog sustava je

$$H(s) = \frac{s^2 + 7s + 12}{s^4 + 3s^3 + 3s^2 + s}.$$

Nacrtajte simulacijski dijagram te napišite jednadžbe sustava pomoću kanonskih varijabli stanja.

Rješenje: Da bi odredili paralelnu realizaciju koja odgovara kanonskim varijablama stanja potrebno je prijenosnu funkciju rastaviti na parcijalne razlomke. Da

bi mogli odrediti rastav na parcijalne razlomke najprije tražimo polove sustava. Kako je

$$s^4 + 3s^3 + 3s^2 + s = s(s+1)^2(s+2)$$

polovi su $s_1 = 0$, $s_{2,3} = -1$ i $s_4 = -2$. Rastav na parcijalne razlomke je oblika

$$H(s) = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{1}{s} + \alpha_2 \frac{1}{(s+1)^2} + \alpha_3 \frac{1}{s+1} + \alpha_4 \frac{1}{s+2}.$$

Sada je potrebno odrediti koeficijente rastava:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \lim_{s\to\infty} \frac{s^2+7s+12}{s^4+3s^3+3s^2+s} = 0 \\
\alpha_1 &= s\frac{(s+3)(s+4)}{s(s+1)^2(s+2)}\bigg|_{s=0} = \frac{(0+3)(0+4)}{(0+1)^2(0+2)} = 6 \\
\alpha_2 &= (s+1)^2\frac{(s+3)(s+4)}{s(s+1)^2(s+2)}\bigg|_{s=-1} = \frac{(-1+3)(-1+4)}{-1(-1+2)} = -6 \\
\alpha_3 &= \frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\Big((s+1)^2\frac{(s+3)(s+4)}{s(s+1)^2(s+2)}\Big)\bigg|_{s=-1} = -5 \\
\alpha_4 &= (s+2)\frac{(s+3)(s+4)}{s(s+1)^2(s+2)}\bigg|_{s=-2} = \frac{(-2+3)(-2+4)}{-2(-2+1)^2} = -1
\end{aligned}$$

Rastav je

$$H(s) = \frac{6}{s} + \frac{-5}{s+1} + \frac{-6}{(s+1)^2} + \frac{-1}{s+2},$$

što odgovara paraleli četiri sustava s prijenosnim funkcijama

$$H_1(s) = \frac{6}{s}, \quad H_2(s) = \frac{-6}{(s+1)^2}, \quad H_3(s) = \frac{-5}{s+1} \quad \text{i} \quad H_4(s) = \frac{-1}{s+2}.$$

Svaki podsustav je prvog reda te nam daje jednu varijablu stanja. Prema njihovim prijenosnim funkcijama pišemo jednadžbe stanja

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &= u(t) \\
x_2'(t) &= x_3(t) - x_2(t) \\
x_3'(t) &= -x_3(t) + u(t) \\
x_4'(t) &= -2x_4(t) + u(t)
\end{aligned}$$

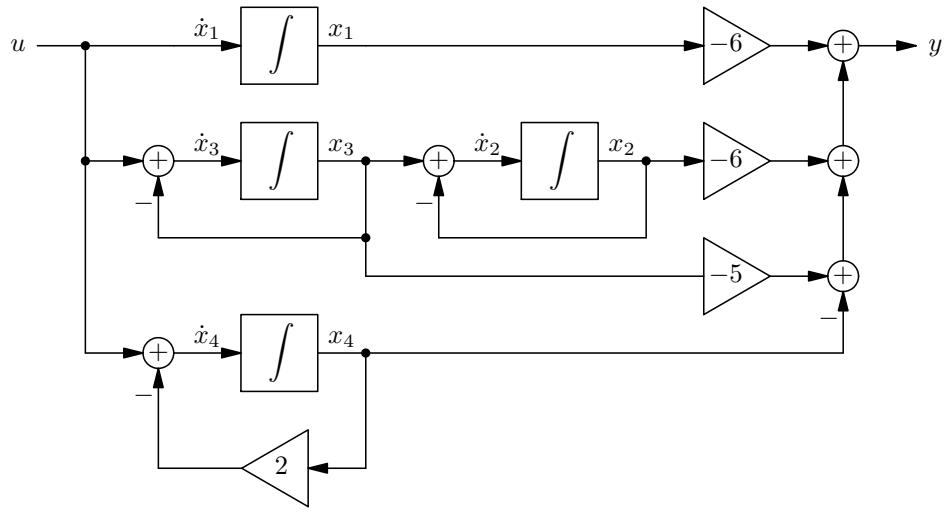
što u matričnom obliku postaje

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t).$$

Višestruki korijen uzrokuje pojavljivanje Jordanovog bloka u matrici **A** paralelne realizacije. Izlaznu jednadžbu određujemo zbrajanjem doprinosa pojedinih paralelnih sustava te dobivamo

$$y(t) = \begin{bmatrix} 6 & -6 & -6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t).$$

Prema dobivenim jednadžbama crtamo simulacijski dijagram kako je prikazano na slici 6.19..



Slika 6.19.: Simulacijski dijagram

Primjer 6.13. Prijenosna funkcija kontinuiranog sustava je

$$H(s) = \frac{(s+2)(s+1)}{(s+3)(s^2+4s+5)}.$$

Nacrtajte simulacijski dijagram te napišite jednadžbe sustava pomoću kanonskih varijabli stanja.

Rješenje: Pri realizaciji preko kanonskih varijabli stanja uvijek rastavljamo zadanu prijenosnu funkciju na parcijalne razlomke. U ovom slučaju zadana prijenosna funkcija ima kompleksni par polova te koristimo rastav u kojem su parcijalni razlomci koji odgovaraju kompleksnom paru polova skupljeni u jedan razlomak. Time se izbjegava pojavljivanje kompleksnih koeficijenata.

Polovi sustava su $s1 = -3$ i $s_{2,3} = +2 \pm j$ te tražimo rastav oblika

$$H(s) = \frac{(s+2)(s+1)}{(s+3)(s^2+4s+5)} = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{s+3} + \frac{\alpha_2 s + \alpha_3}{s^2+4s+5}.$$

Koeficijente rastava računamo prema

$$\alpha_0 = \lim_{s\to\infty} \frac{(s+2)(s+1)}{(s+3)(s^2+4s+5)} = 0$$
$$\alpha_1 = (s+3)\frac{(s+2)(s+1)}{(s+3)(s^2+4s+5)}\bigg|_{s=-3} = \frac{(-3+2)(-3+1)}{\big((-3)^2+4\cdot(-3)+5\big)} = 1$$

Koeficijente α_2 i α_3 određujemo korištenjem metode neodređenih koeficijenata. Vrijedi

$$H(s) = \frac{(s+2)(s+1)}{(s+3)(s^2+4s+5)} = \frac{1}{s+3} + \frac{\alpha_2 s + \alpha_3}{s^2+4s+5},$$

što nakon sređivanja daje

$$s^2 + 3s + 2 = s^2(1+\alpha_2) + s(4 + 3\alpha_2 + \alpha_3) + 5 + 3\alpha_3.$$

Iz dobivene jednadžbe pišemo sustav

$$1 = 1 + \alpha_2$$
$$3 = 4 + 3\alpha_2 + \alpha_3$$
$$2 = 5 + 3\alpha_3$$

koji ima tri jednadžbe s dvije nepoznanice. Rješavanjem dvije od njih dobivamo $\alpha_2 = 0$ i $\alpha_3 = -1$, što moramo provjeriti uvrštavanjem u treću. Kako rješenje zadovoljava i treću jednadžbu rastav je valjan (u protivnom ne postoji rastav kojeg smo pretpostavili). Rastavljena prijenosna funkcija je

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{-1}{s^2+4s+5}.$$

Za prijenosnu funkciju $H_1(s)$ pišemo jednadžbu stanja

$$x_1'(t) = -3x_1(t) + u(t).$$

Prijenosnu funkciju $H_2(s)$ realiziramo direktom metodom i pišemo jednadžbe stanja

$$\begin{aligned} x_2'(t) &= x_3(t) \\ x_3'(t) &= -5x_2(t) - 4x_3(t) + u(t) \end{aligned}$$

Izlazna jednadžba je

$$y(t) = x_1(t) - x_2(t).$$

Jednadžbe sustava u matričnom obliku su

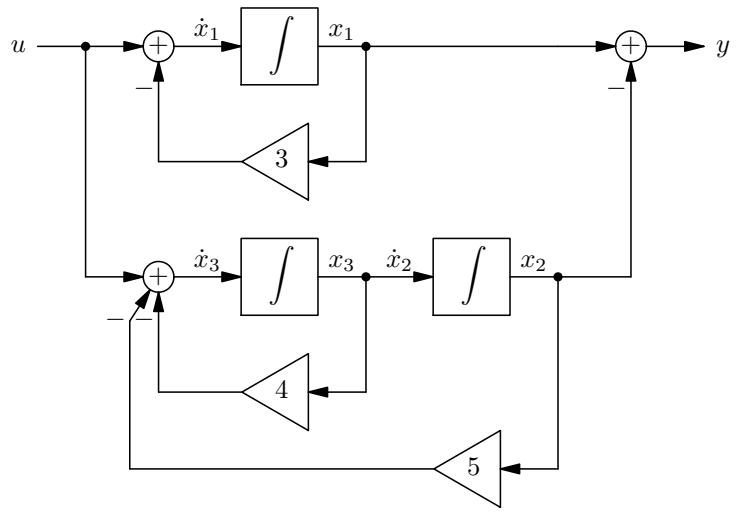
$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t).$$

i

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t).$$

Primijetite da matrica **A** u ovom slučaju nije dijagonalna Jordanova matrica, no možemo je promatrati kao dijagonalnu blok matricu, gdje za svaki kompleksni par polova na dijagonali imamo blok veličine 2 koji predstavlja direktnu realizaciju sustava drugog reda.

Na kraju prema dobivenim jednadžbama crtamo simulacijski dijagram kako je prikazano na slici 6.20..



Slika 6.20.: Simulacijski dijagram

Primjer 6.14. Prijenosna funkcija kontinuiranog sustava je

$$H(s) = \frac{s(s+1)}{(s+1)(s+2)}.$$

Nacrtajte simulacijski dijagram te napišite jednadžbe sustava pomoću kanonskih varijabli stanja.

Rješenje: Primijetimo da u zadanoj prijenosnoj funkciji $H(s)$ imamo par pol/nula. Taj par ne utječe na vladanje sustava i nije vidljiv s ulaznih i izlaznih stezaljki, no kako utječe na stanje sustava ne smijemo ga pokratiti. Ovo je pogotovo važno kada nam model predstavlja neki fizikalni sustav gdje par pol/nula može odgovarti nekom parametru sustava koji nije osmotriv.

Polovi sustava su $s_1 = 2$ i $s_2 = 3$ te tražimo rastav na parcijalne razlomke oblika

$$H(s) = \frac{s(s+1)}{(s+1)(s+2)} = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{s+2} + \frac{\alpha_2}{s+1}.$$

Koeficijenti rastava su

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \lim_{s\to\infty} \frac{s(s+1)}{(s+1)(s+2)} = 1 \\
\alpha_1 &= (s+2)\frac{s(s+1)}{(s+1)(s+2)}\bigg|_{s=-2} = \frac{-2(-2+1)(-3+1)}{-2+1} = -2 \\
\alpha_2 &= (s+1)\frac{s(s+1)}{(s+1)(s+2)}\bigg|_{s=-1} = \frac{-1(-1+1)}{-1+2} = 0
\end{aligned}$$

te je rastav

$$H(s) = 1 + \frac{-2}{s+2} + \frac{0}{s+1}.$$

Za prvi podsustav određen s

$$H_1(s) = \frac{-2}{s+2}$$

pišemo jednadžbu stanja

$$x_1'(t) = -2x_1(t) + u(t).$$

Drugi podsustav je određen s prijenosnom funkcijom

$$H_2(s) = \frac{0}{s+2}.$$

Iako je brojnik nula možemo napisati jednadžbu stanja

$$x_2'(t) = -x_2(t) + u(t).$$

Izlazna jednadžba je

$$y(t) = -2x_1(t) + u(t).$$

Jednadžbe sustava u matričnom obliku su

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t).$$

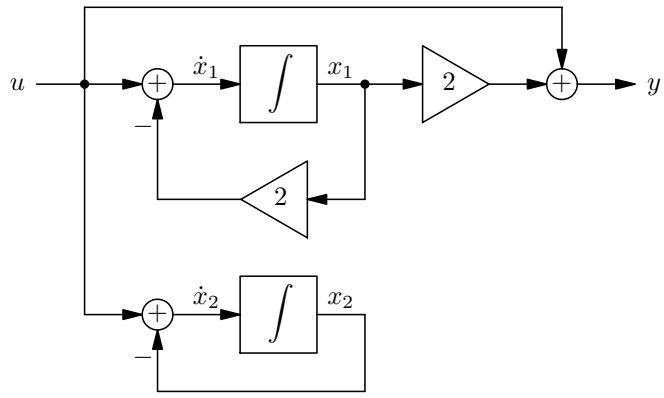
i

$$y(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} u(t).$$

Na kraju prema dobivenim jednadžbama crtamo simulacijski dijagram kako je prikazano na slici 6.21.. Primijetite da druga varijabla stanja postoji, ali ne utječe na izlaz sustava.

Zadatak 6.14. Kontinuirani sustav opisan je prijenosnom funkcijom

$$H(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{(s+1)^2(s+2)}.$$



Slika 6.21.: Simulacijski dijagram

Odredite matrice $\mathbf{A}^*$, $\mathbf{B}^*$, $\mathbf{C}^*$ i $\mathbf{D}^*$ paralelne realizacije.

Rješenje: Matrice paralelne realizacije sustava su

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \quad .$$

Zadatak 6.15. Odziv nepobuđenog sustava drugog reda je

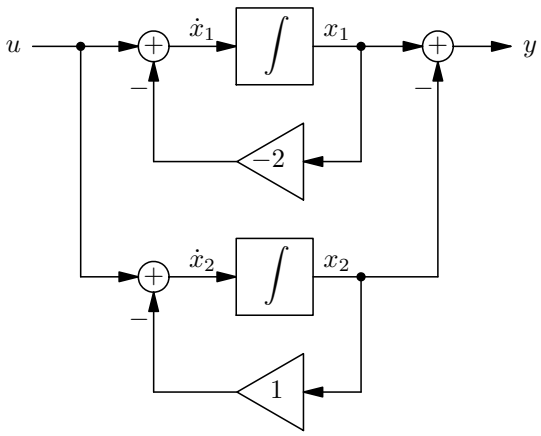
$$y(t) = \frac{1}{5}e^{2t} + \frac{1}{10}e^{-t}.$$

Odredite početna stanja za dani odziv ako sustav nema nula. Odredite matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ te nacrtajte blok-dijagram za paralenu realizaciju ako je $H(0) = -\frac{3}{2}$.

Rješenje: Početna stanja su $y(0) = \frac{3}{10}$ i $y'(0) = \frac{3}{10}$. Prijenosna funkcija sustava je $H(s) = \frac{3}{(s-2)(s+2)}$, a matrice paralelne realizacije su

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

Blok-dijagram paralelne realizacije je dan na slici 6.22..



Slika 6.22.: Blok-dijagram paralelne realizacije

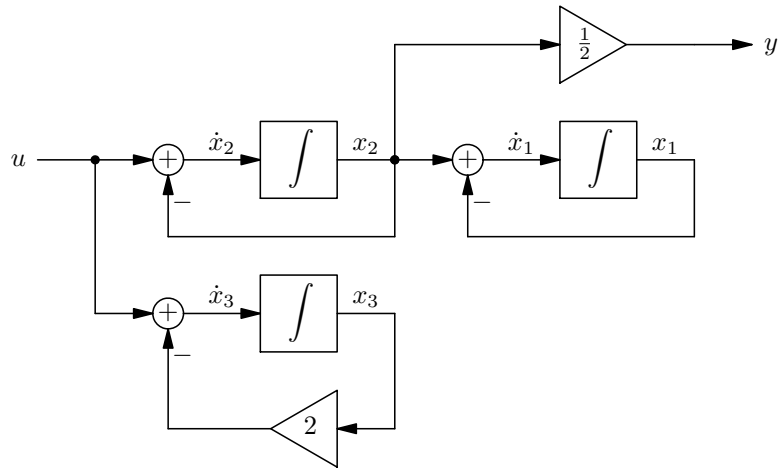
Zadatak 6.16. Kontinuirani sustav opisan je s dvije nule $n_1 = -1$ i $n_2 = -2$ te s tri pola

$p_{1,2} = -1$ i $p_3 = -2$. Prijenosna funkcija sustava zadovoljava uvjet $H(0) = \frac{1}{2}$. Odredite matrice $\mathbf{A}^*$, $\mathbf{B}^*$, $\mathbf{C}^*$ i $\mathbf{D}^*$ paralelne realizacije te nacrtajte simulacijski blok-dijagram.

RJEŠENJE: Matrice paralelne realizacije sustava su

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \quad .$$

Blok-dijagram paralelne realizacije je dan na slici 6.23..



Slika 6.23.: Blok-dijagram paralelne realizacije

6.3. Upravljivost i osmotrivost

Linearni sustav opisan jednadžbom stanja

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^*\mathbf{x} + \mathbf{B}^*\mathbf{u}$$

potpuno je upravljiv (*controlability*) ako postoji signal $\mathbf{u}$ koji može prevesti sustav iz nekog proizvoljnog početnog stanja $\mathbf{x}_0$ u neko odabrano stanje unutar konačnog vremena.

Linearni sustav opisan jednadžbama

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned}$$

poptuno je osmotriv (*observability*) ako se uz poznatu pobudu $\mathbf{u}$ može jednoznačno odrediti početno stanje $\mathbf{x}_0$ iz izlaznog signala $\mathbf{y}$ promatranog u konačnom vremenskom intervalu.

Neka je sustav prikazan u kanonskom obliku

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^*\mathbf{x} + \mathbf{B}^*\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}^*\mathbf{x} + \mathbf{D}^*\mathbf{u} \end{aligned} \tag{6.24}$$

Sustav opisan jednadžbama (6.24) je upravljiv

1. ako su svi elementi bilo kojeg retka matrice $\mathbf{B}^*$ koji odgovaraju posljednjem retku svakog Jordanovog bloka u $\mathbf{A}^*$ različiti od nule i
2. ako su svi elementi bilo kojeg retka matrice $\mathbf{B}^*$ koji odgovaraju jednostrukim korijenima u matrici $\mathbf{A}^*$ različiti od nule.

Sustav opisan jednadžbama (6.24) je osmotriv

1. ako su svi elementi bilo kojeg stupca matrice $\mathbf{C}^*$ koji odgovaraju prvom stupci svakog Jordanovog bloka u $\mathbf{A}^*$ različiti od nule i
2. ako su svi elementi bilo kojeg stupca matrice $\mathbf{C}^*$ koji odgovaraju jednostrukim korijenima u matrici $\mathbf{A}^*$ različiti od nule.

Provjeravanje danih uvjeta jednostavno je samo za sustave koji su prikazani u kanonskom obliku. Općenito je sustav opisan jednadžbama

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \tag{6.25}$$

upravljiv ako matrica

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \tag{6.26}$$

ima rang n gdje je n broj varijabli stanja. Sustav opisan jednadžbama (6.25) je osmotriv ako matrica

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T & (\mathbf{A}^T)^2\mathbf{C}^T & \dots & (\mathbf{A}^T)^{n-1}\mathbf{C}^T \end{bmatrix} \tag{6.27}$$

ima rang n.

Primjer 6.15. Jednadžbe stanja sustava u kanonskom obliku su

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 2x_1(t) + 5u(t) \\ x_2'(t) &= x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) &= x_3(t) + 2u(t) \end{aligned}$$

Izlazne jednadžbe su

$$\begin{aligned} y_1(t) &= x_1(t) + 3x_3(t) \\ y_2(t) &= 2x_1(t) + 4x_3(t) \end{aligned}$$

Odredite upravljivost i osmotrivost sustava.

Rješenje: Napišimo zadane jednadžbe u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

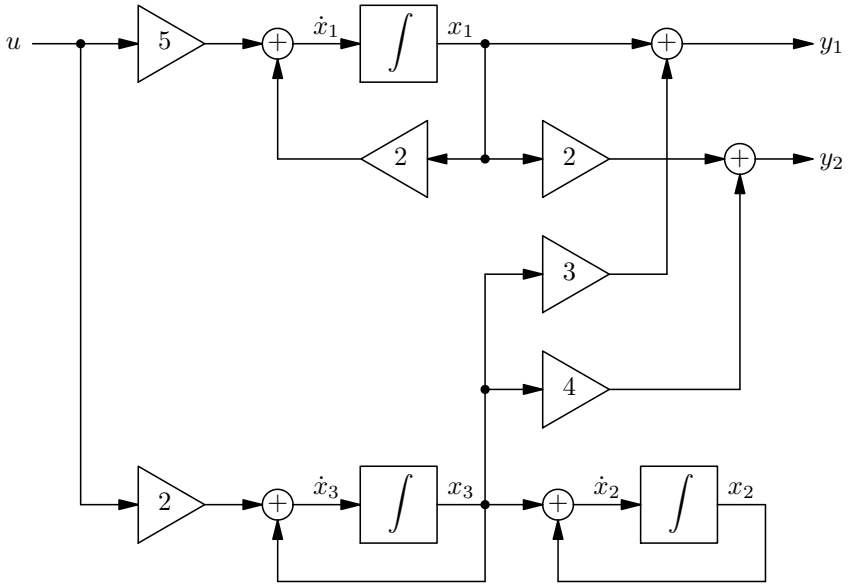
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Iz napisanih matričnih jednadžbi vidimo da je sustav upravljiv, ali da nije osmotriv. Sustav nije osmotriv jer prvom stupcu Jordanovog bloka dvostrukog pola $s = 1$ odgovara nul-stupac u matrici $\mathbf{C}^*$

Nacrtamo li simulacijski dijagram (slika 6.24.) vidljivo je da varijablu stanja $x_2(t)$ ne vidimo na izlazu (stanje nije osmotrivo).

Primjer 6.16. Matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ direktne realizacije kontinuiranog sustava su

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 13 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 6 & \frac{11}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$



Slika 6.24.: Simulacijski dijagram

Ispitajte upravljivost i osmotrivost zadanog sustava

Rješenje: Potrebno je odrediti matrice paralelne realizacije. Kako je zadana direktna realizacija matricu prijelaza određujemo prema (6.19). Polovi sustava su

$$det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (s+1)(s+2)(s+3),$$

pa je modalna matrica

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \\ (-2)^2 & (-1)^2 & (-3)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix}.$$

Matrice paralelne realizacije su

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Provjerom da li matrice paralelne realizacije sustava zadovoljavaju uvjete upravljivosti i osmotrivosti vidimo da je sustav osmotriv, ali da nije upravljiv. Neupravljivost se vidi i na dijagramu sustava prikazanom na slici 6.25..

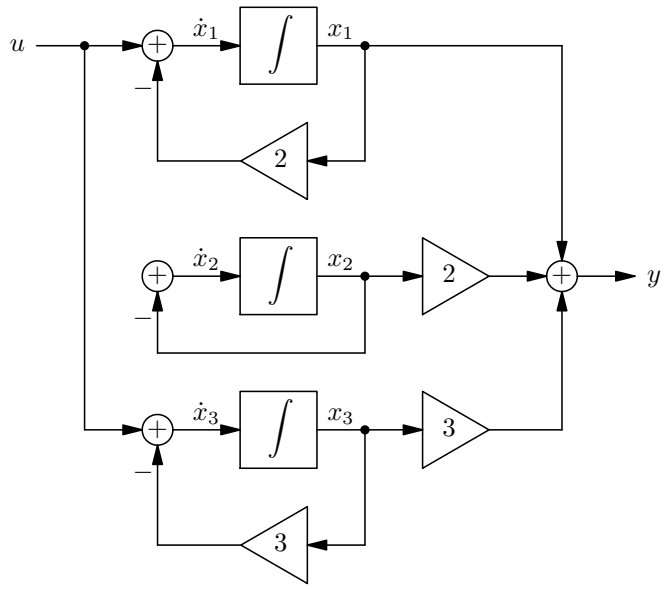
Zadatak 6.17. Kontinuirani linearni sustav je opisan prijenosnom funkcijom $H(s)$,

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}.$$

Nacrtajte direktnu realizaciju sustava te napišite jedndžbe stanja u matričnom obliku. Ispitajte upravljivost i osmotrivost sustava.

Rješenje: Simulacijski blok-dijagram prikazan je na slici 6.26., dok su jednadžbe sustava

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}\mathbf{u}$$

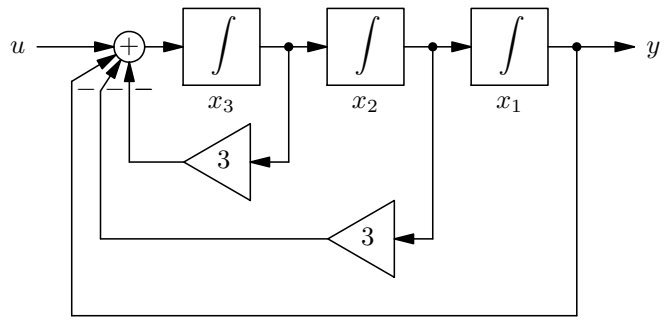


Slika 6.25.: Simulacijski dijagram

Matrice paralelne realizacije su

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix},$$

pa je sustav upravljiv jer zadnjem retku Jordanova bloka u $\mathbf{A}^*$ odgovara ne-nul redak u $\mathbf{B}^*$ i osmotriv jer prvom stupcu Jordanova bloka u $\mathbf{A}^*$ odgovara ne-nul redak u $\mathbf{C}^*$.



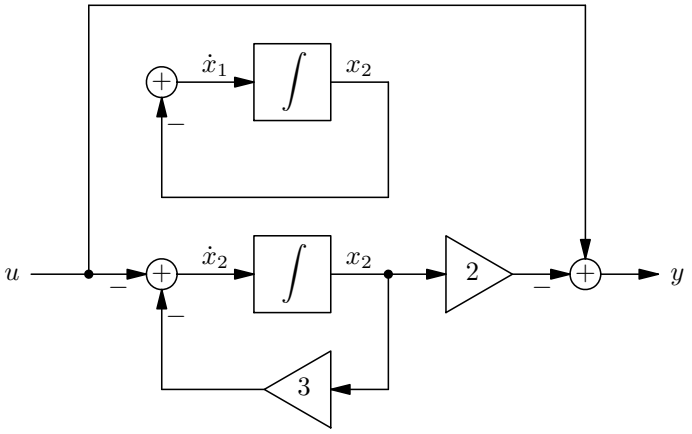
Slika 6.26.: Simulacijski blok-dijagram direktne realizacije

Zadatak 6.18. Na slici 6.27. nacrtan je kontinuirani linearni sustav. Ispitajte upravljivost i osmotrivost zadanog sustava. Odredite i nacrtajte direktnu realizaciju te objasnite strukturu matrice $\mathbf{A}$ za direktnu realizaciju.

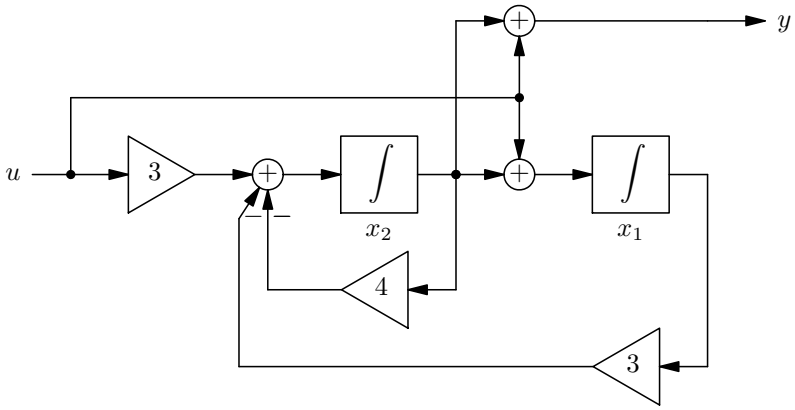
Rješenje: Na slici 6.27. je zadana paralelna realizacija iz koje je odmah vidljivo da sustav nije upravljiv i da nije osmotriv. Direktna realizacija prikazana je na slici 6.28., a matrice direktne realizacije su

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}.$$

Matrica $\mathbf{A}$ je tipična matrica direktne realizacije koja ima zadnji redak različit od nul-retka te jedinice na gornjoj sporednoj dijagonali.



Slika 6.27.: Linearni kontinuirani sustav



Slika 6.28.: Direktna realizacija sustava sa slike 6.27.

Zadatak 6.19. Matrice **A**, **B**, **C** i **D** kontinuiranog sustava su

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

Ispitajte upravljivost i osmotrivost zadanog sustava te nacrtajte direktnu realizaciju.

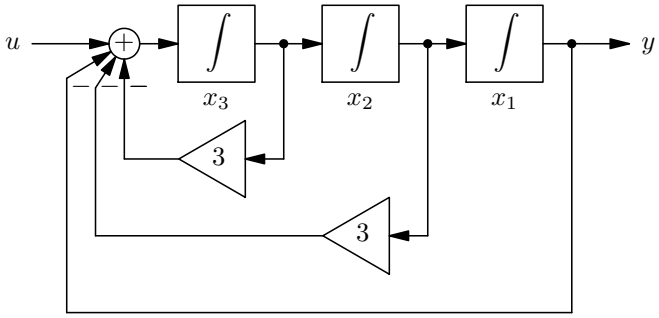
Rješenje: Sustav je upravljiv i osmotriv jer zadnjem retku Jordanova bloka u **A** odgovara ne-nul redak u **B** i osmotriv jer prvom stupcu Jordanova bloka u **A** odgovara ne-nul redak u **C**. Direktna realizacija prikazana je na slici 6.29., dok su matrice direktne realizacije

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 6.20. Kontinuirani sustav ima dvije nule, $n_1 = -2$ i $n_2 = -3$, te tri pola, $p_{1,2}$=-2 i $p_3 = -3$, a osim toga prijenosna funkcija sustava zadovoljava uvjet $H(0) = \frac{1}{2}$. Ispitajte upravljivost i osmotrivost zadanog sustava. Nacrtajte paralelnu realizaciju sustava i na njoj provjerite da li ste ispravno zaključili o upravljivosti i osmotrivosti sustava.

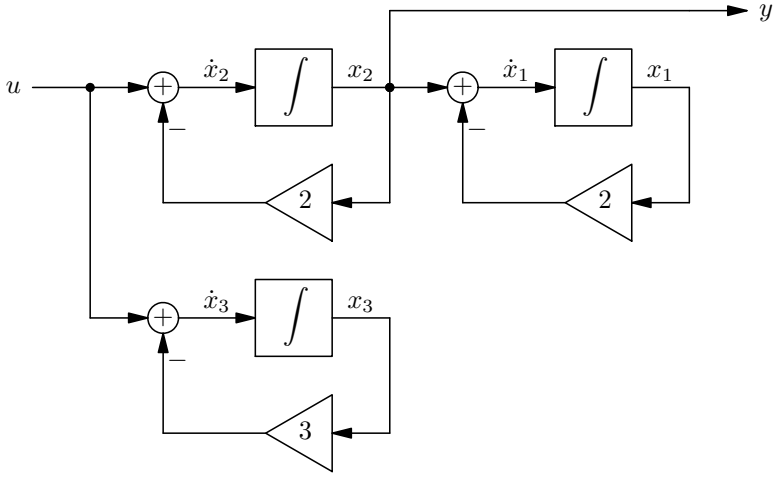
Rješenje: Paralelna realizacija prikazana je na slici 6.30., dok su matrice sustava

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$



Slika 6.29.: Direktna realizacija sustava

Sustav je upravljiv jer jednostrukom polu -3 u $\mathbf{A}$ odgovara ne-nul redak u $\mathbf{B}$ i zadnjem retku Jordanova bloka za dvostruki pol -2 odgovara ne-nul redak u $\mathbf{B}$. Sustav nije osmotriv jer prvom stupcu Jordanova bloka za dvostruki pol -2 odgovara nul stupac u $\mathbf{C}$.



Slika 6.30.: Paralelna realizacija sustava

Zadatak 6.21. Za sustav na slici 6.31. odredite matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ direktne realizacije te ispitajte upravljivost i osmotrivost sustava.

Rješenje: Na slici 6.31. je paralelna realizacija čije su matrice

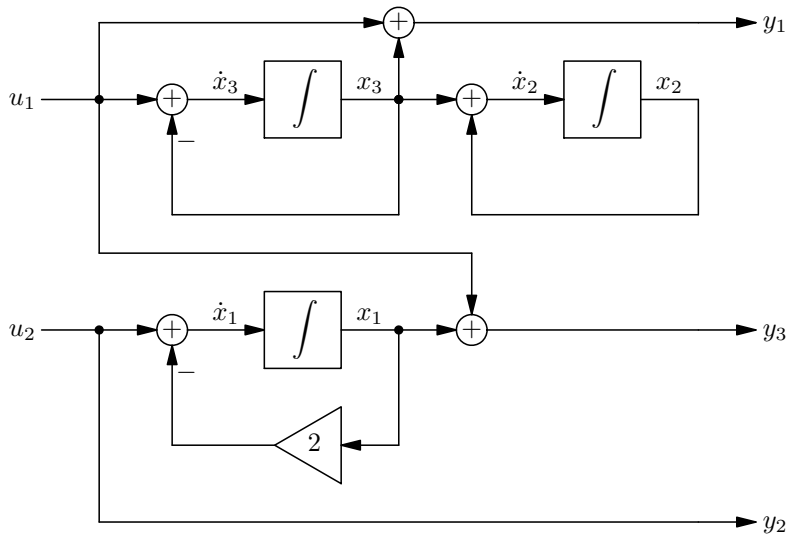
$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

i sustav je upravljiv ali nije osmotriv. Matrice direktne realizacije određujemo preko modalne matrice M,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

i dobivamo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$



Slika 6.31.: Linearni kontinuirani sustav

Zadatak 6.22. Matrice **A**, **B**, **C** i **D** kontinuiranog sustava su

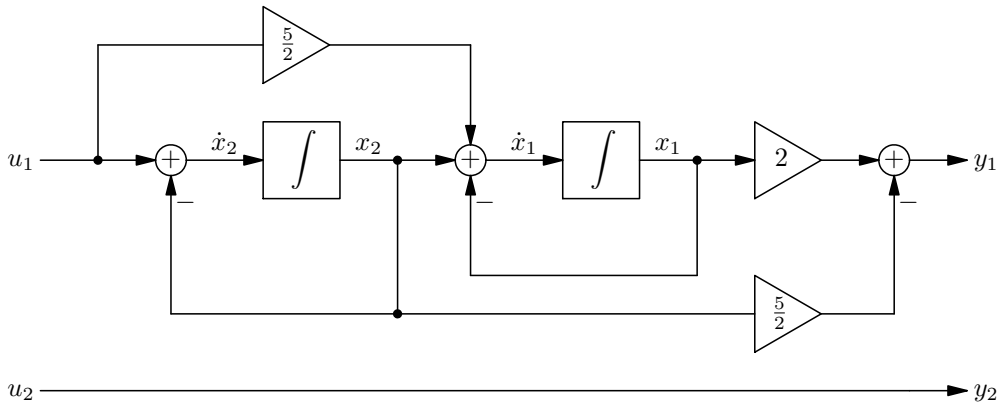
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ispitajte upravljivost i osmotrivost zadanog sustava. Nacrtajte paralelnu realizaciju sustava.

Rješenje: Matrice paralelne realizacije su

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

te je sustav upravljiv i osmotriv. Paralelna realizacija je nacrtana na slici 6.32..



Slika 6.32.: Paralelna realizacija sustava

Zadatak 6.23. Ispitaj upravljivost i osmotrivost sustava određenog s

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{i} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

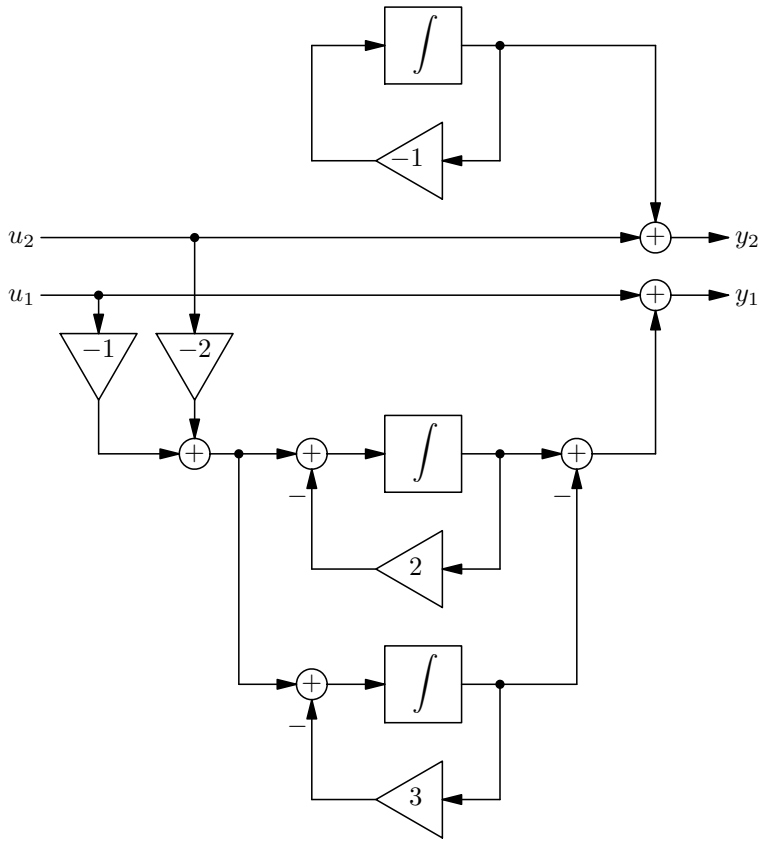
Nacrtajte paralelnu realizaciju sustava i na njoj provjerite da li ste ispravno zaključili o uprav-

ljivosti i osmotrivosti zadanog sustava.

RJEŠENJE: Matrice paralelne realizacije su

$$\mathbf{A}^* = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^* = -\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

te je sustav nije upravljiv, ali je osmotriv. Paralelna realizacija je nacrtana na slici 6.33..



Slika 6.33.: Paralelna realizacija sustava

Zadatak 6.24. Kontinuirani sustav zadan je jednadžbama

$$\dot{y}_1(t) + y_2(t) = u_1(t)$$
$$y_1(t) + \dot{y}_2(t) = u_2(t)$$

Odredite matrice $\mathbf{A}^*$, $\mathbf{B}^*$, $\mathbf{C}^*$ i $\mathbf{D}^*$ paralelne realizacije. Ispitajte upravljivost i osmotrivost sustava. Nacrtajte paralelnu realizaciju i na njoj provjerite da li ste ispravno zaključili o upravljivosti i osmotrivosti sustava.

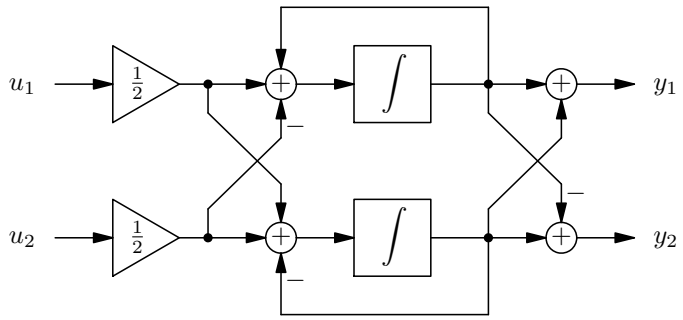
RJEŠENJE: Matrice paralelne realizacije su

$$\mathbf{A}^* = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^* = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

te je sustav upravljiv i osmotriv. Paralelna realizacija je nacrtana na slici 6.34..

Zadatak 6.25. Ispitajte upravljivost i osmotrivost kontinuiranog sustava zadanog matricama

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$



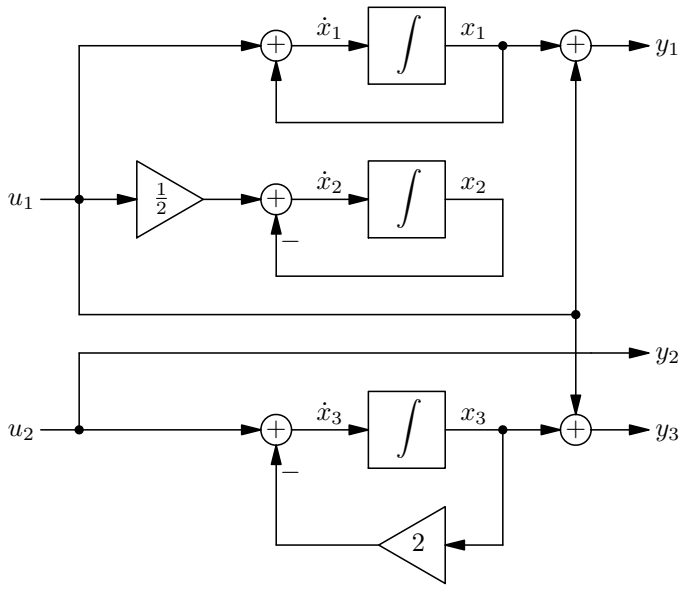
Slika 6.34.: Paralelna realizacija sustava

Nacrtajte paralelnu realizaciju.

Rješenje: Sustav je upravljiv i nije osmotriv. Matrice paralelne realizacije su

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

a sama realizacija je prikazana na slici 6.35..



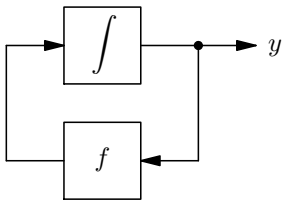
Slika 6.35.: Paralelna realizacija sustava

7. Nelinearni sustavi

Primjer 7.1. Zadan je nelinearni vremenski nepromjenjiv sustav prvog reda prikazan na slici 7.1.. Nelinearnost u povratnoj grani je

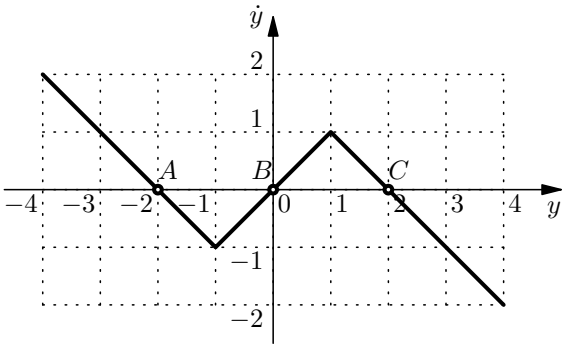
$$f(y) = \begin{cases} -y+2, & \text{za } y \geq 1 \\ y, & \text{za } |y| < 1 \\ -y-2, & \text{za } y \leq -1 \end{cases}$$

Odredite odziv sustava ako je početno stanje $y_0 = 0{,}5$ za $t = 0$.



Slika 7.1.: Nelinearni sustav prvog reda

Rješenje: Zadana funkcija $f(y)$ je prikazana na slici 7.2. i linearna je po odsječcima. Tu linearnost po odsječcima možemo iskoristiti te promatrati jednadžbu kao skup jednostavnih linearnih diferencijalnih jednadžbi ovisno o odsječku na kojem se trenutno nalazimo.



Slika 7.2.: U/I karakteristika nelinearnosti

Razmotrimo sada detaljnije prikaz funkcije $\dot{y} = f(y)$ na slici 7.2.. y nam predstavlja stanje sustava, $\dot{y}$ brzinu promjene stanja, a predznak $\dot{y}$ nam pokazuje smjer promjene stanja. Diferencijalna jednadžba koju rješavamo je

$$\dot{y} = f(y).$$

Za slučaj kada je $\dot{y} = 0$ nema promjene te kažemo da je sustav u ravnoteži. Prema jednadžbi točke ravnoteže su one za koje je

$$f(y) = 0.$$

Rješavanjem jednadžbe, odnosno tražanjem nultočaka funkcije $f(y)$ dobivamo točke ravnoteže

$$y_A = -2, \quad y_B = 0 \quad \text{i} \quad y_C = 2$$

koje su i prikazane na slici 7.2.. Točke ravnoteže mogu biti stabilne ili nestabilne. Ravnoteža je stabilna ako se za neki pomak iz točke ravnoteže sustav opet vrati u istu točku. Ravnoteža je nestabilna ako se sustav i za neki najmanji pomak ne može vratiti u prvotnu točku ravnoteže.

Promotrimo najprije točku ravnoteže A. Izlaz zadanog sustava je y i u točci A je $y = -2$. Povećamo li malo y derivacija $\dot{y}$ je negativna te se y smanjuje s vremenom dok opet ne postane -2. Analogno, smanjimo li y derivacija $\dot{y}$ je pozitivna te y raste dok ne postane -2. Općenito je točka ravnoteže y_e stabilna ako je

$$\begin{aligned} y > y_e: &\quad \dot{y} < 0 \\ y < y_e: &\quad \dot{y} > 0 \end{aligned}$$

Prema izrečenom zaključujemo da su A i C točke stabilne ravnoteže, dok B nije stabilna točka.

Kao početno stanje je zadano $y_0 = 0{,}5$. Početno stanje nalazi se između stabilnih točaka B i C, no kako je derivacija $\dot{y}$ pozitivna y će se povećavati dok sustav ne stigne u stabilnu točku C. Kod računanja odziva moramo razlikovati dva slučaja koji odgovaraju dvama linearnim odsječcima nelinearne karakteristike $f(y)$. Shodno tome potrebno je riješiti dvije diferencijalne jednadžbe, prvu

$$\dot{y} = y, \quad y < 1,$$

koja opisuje sustav sve dok ne dostigne točku loma karakteristike u točci $y = 1$, te drugu,

$$\dot{y} = -y + 2, \quad 1 \leq y,$$

koja opisuje sustav sve dok ne dođe u ravnotežnu točku C. Rješenje prve jednadžbe uz početni uvjet $y_0 = 0{,}5$ je

$$y(t) = 0{,}5e^t, \quad y < 1.$$

Umjesto uvjet $y < 1$ važniji je vrijeme u kojem smo dosegnuli točku loma. Uvrštavanjem $y = 1$ u jednadžbu dobivamo $t_1 = \ln(2)$, te je odziv

$$y(t) = 0{,}5e^t, \quad t < \ln(2).$$

Opće rješenje druge jednadžbe je

$$y(t) = Ce^{-t} + 2, \quad 1 \leq y.$$

Konstantu C određujemo iz početnog uvjeta, odnosno vrijednosti izlaza y u trenutku $t = \ln(2)$. Kako je $y\big(\ln(2)\big) = 1$ za odziv dobivamo

$$y(t) = 2 - e^{-t+ln(2)}, \quad t \geq \ln(2).$$

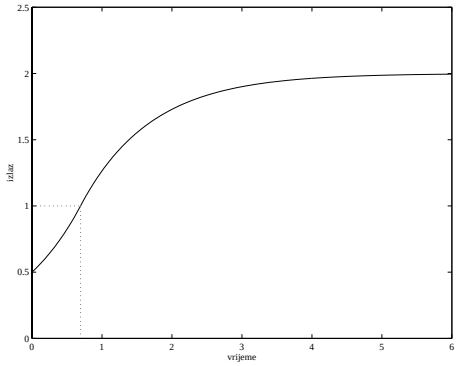
Odziv sustava je stoga

$$y(t) = \begin{cases} 0{,}5e^t, & t < \ln(2) \\ 2 - e^{-t+ln(2)}, & t \geq \ln(2) \end{cases}$$

Odziv je prikazan na slici 7.3., gdje je označena i točka loma.

Primjer 7.2. Zadan je nelinearni vremenski nepromjenjiv sustav prvog reda prikazan na slici 7.5.. Nelinearnost u povratnoj grani je

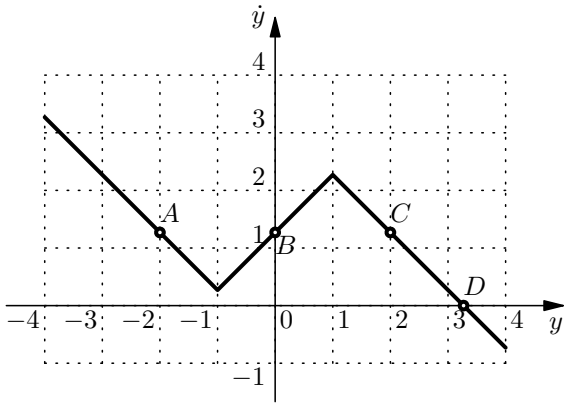
$$f(y) = \begin{cases} -y + 2, & \text{za } y \geq 1 \\ y, & \text{za } |y| < 1 \\ -y - 2, & \text{za } y \leq -1 \end{cases}$$



Slika 7.3.: Odziv nelinearnog sustava sa slike 7.1.

Zadani sustav ima dva stabilna stanja. Odredite uvjete na tranjaje i amplitudu impulsa da bi sustav prebacili iz stabilnog stanja $y = -2$ u stabilno stanje $y = 2$.

Rješenje: Zadana nelinarna karakteristika zajedno s označenim točkama ravnoteže prikazana je na slici 7.2.. Kada na ulaz dovedemo impuls umjesto zasebnog promatranja utjecaja impulsa možemo zamisliti da impuls uzrokuje pomak nelinearne karaketeristike, odnosno da promatramo novi sustav s novom nelinearnom karakterisitkom. Ta nova karakteristika je za slučaj pozitivne amlitude impulsa prikazana na slici 7.4..



Slika 7.4.: Pomaknuta U/I karakteristika nelinearnosti

Na slici 7.4. su označene stare točke ravnoteže A, B i C za slučaj kada na ulazu u sustav nema impulsa. No kada se na ulazu nalazi impuls vidimo da točke A, B i C više nisu točke ravnoteže. Umjesto tih točaka dobili smo novu ravnotežnu točku D. Nova toča ravnoteže je stabilna točka. Kako je početno stanje bilo $y = -2$ izlaz y će rasti sve dok sustav ne stigne u stabilnu točku D. Primijetite da bi za neku drugu vrijednost amplitude impulsa imali druge ravnotežne točke.

Potrebno je odrediti parametre impulsa tako da sustav prebacimo iz $y = -2$ u $y = 2$. Da bi to postigli amplituda impulsa mora biti takva da nema stabilnih točki između vrijednosti $y = -2$ i $y = 2$, dok trajanje impulsa mora biti takvo da izlaz y prijeđe točku B. Uvjeti prebacivanja iz A u C su

$$U_i > |\min_{AB} f(y)| \quad \text{i} \quad t_i > t_{AB},$$

gdje su U_i i t_i minimalna amplituda i minimalno trajanje impulsa, dok je t_{AB} vrijeme potrebno da izlaz dosegne toču B uz minimalnu amplitudu impulsa.

Minimalna aplituda je $U_i > 1$, no da bi odredili minimalno trajanje impulsa moramo riješiti dvije diferencijalne jednadžbe jer nelinearna karakteristika ima dva linearna segmenta između točaka A i B. Za prvi segment vrijedi

$$\dot{y} = -y - 2 + U_i,$$

te je uz početni uvjet $y = -2$ rješenje

$$y(t) = U_i(1 - e^{-t}) - 2.$$

Vrijeme potrebno sustavu da dosegne prvu toču loma određenu s $y(t_1) = U_i - 1$ je

$$t_1 = \ln \frac{U}{U_i - 1}.$$

Za drugi linearni segment je

$$\dot{y} = y + U_i$$

te je odziv

$$y(t) = (U_i - 1)e^{t - t_1}.$$

Vrijeme potrebno sustav da dosegne drugu točku određenu s $y(t_2) = U_i$ je

$$t_2 - t_1 = \ln \frac{U_i}{U_i - 1}.$$

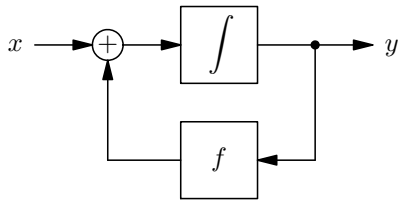
Minimalno trajanje impulsa je

$$t_i > 2 \ln \frac{U_i}{U_1 - i}.$$

Zadatak 7.1. Zadan je nelinearni sustav prvog reda prikazan na slici 7.5.. Na ulaz sustava dovodimo okidni impuls amplitude $U = 1{,}5$. Nelinearnost u povratnoj grani je

$$f(y) = \begin{cases} -y + 2, & \text{za } y \geq 1 \\ y, & \text{za } |y| < 1 \\ -y - 2, & \text{za } y \leq -1 \end{cases}$$

Sustav ima dvije stabilne točke. Kolika je trajanje ulaznog impulsa potrebno da se sustav prebaci iz stabilnog stanja određenog s $y = -2$ u stabilno stanje određeno s $y = 2$?



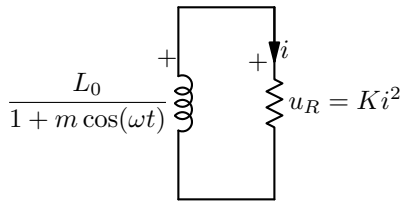
Slika 7.5.: Nelinearni sustav 1. reda

Rješenje: $t > 2 \ln \dfrac{U}{U - 1} = 2 \ln(3).$

Primjer 7.3. Nelinearna vremenski promjenjiva električna mreža prikazana je na slici 7.6.. Induktivitet zavojnice se mijenja po zakonu

$$l = \frac{L_0}{1 + m \cos(\omega t)}.$$

Odredi izraz za struju i ako je napon na nelinearnom elementu proporcionalan kvadratu struje prema izrazu $u_R = Ki^2$.



Slika 7.6.: Nelinearna električna mreža

Rješenje: Tok kroz zavojnicu je

$$\Psi = li = \frac{L_0 i}{1 + m\cos(\omega t)}.$$

Napon na krajevima zavojnice jednak je negativnoj promjeni toka u vremenu te vrijedi

$$u_L = -\frac{d\Psi}{dt}.$$

Pišemo Kirchoffov zakon za petlju te dobivamo

$$\frac{d\Psi}{dt} + u_R = 0,$$

što nakon uvrštavanja $u_R = Ki^2$ te izražavanja struje preko toka daje diferencijalnu jednadžbu po Ψ,

$$\frac{d\Psi}{dt} + \frac{K}{L_0^2}\big(1 + m\cos(\omega t)\big)^2\Psi^2 = 0.$$

Separacijom varijabli dobivamo

$$\frac{1}{\Psi^2}\,d\Psi = -\frac{K}{L_0^2}\big(1 + m\cos(\omega t)\big)^2\,dt.$$

Integracijom dobivamo

$$\int_{\Psi_0}^{\Psi}\frac{1}{\Psi^2}\,d\Psi = -\frac{K}{L_0^2}\int_{t_0}^{t}\big(1 + m\cos(\omega t)\big)^2\,dt,$$

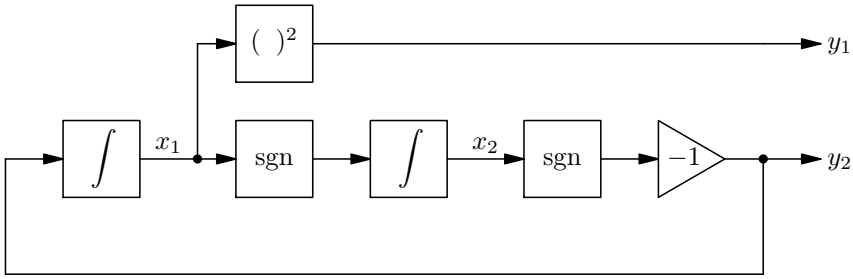
što nakon sređivanja daje izraz za tok

$$\Psi(t) = \frac{\Psi_0}{1 + \frac{K\Psi_0}{L_0^2}\left(\left(1 + \frac{m^2}{2}\right)(t - t_0) + \frac{2m}{\omega}\sin(\omega t) + \frac{m^2}{4\omega}\sin(2\omega t) - \frac{2m}{\omega}\sin(\omega t_0) - \frac{m^2}{4\omega}\sin(2\omega t_0)\right)}.$$

Struja je sada

$$i(t) = \frac{\Psi_0\big(1 + m\cos(\omega t)\big)}{L_0 + \frac{K\Psi_0}{L_0}\left(\left(1 + \frac{m^2}{2}\right)(t - t_0) + \frac{2m}{\omega}\sin(\omega t) + \frac{m^2}{4\omega}\sin(2\omega t) - \frac{2m}{\omega}\sin(\omega t_0) - \frac{m^2}{4\omega}\sin(2\omega t_0)\right)}.$$

Primjer 7.4. Za sustav na slici 7.7. odredite trajektoriju u ravnini stanja te vremenske promjene varijabli stanja i izlaznih varijabli. Neka su početna stanja u trenutku t_0 pozitivna, $x_1(t_0) > 0$ i $x_2(t_0) > 0$.



Slika 7.7.: Nelinearan vremenski stalni sustav

Rješenje: Prema slici 7.7. možemo izravno napisati izraze za izlazne varijable:

$$y_1(t) = \Big(x_1(t_0) + \int_{t_0}^{t} y_2(\tau)\, d\tau\Big)^2$$
$$y_2(t) = -\operatorname{sgn}\Big(x_2(t_0) + \int_{t_0}^{t} \operatorname{sgn}\Big(x_2(t_0) + \int_{t_0}^{\tau} y_2(\lambda)\, d\lambda\Big)\, d\tau\Big)$$

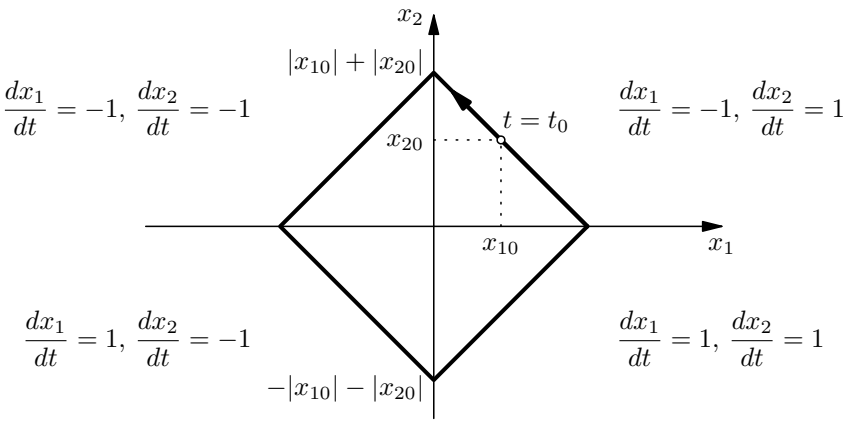
Dobiveni izrazi bez sumnje predstavljaju složenu zadaću za analitičko rješavanje. Umjesto rješavanja tih izraza stoga pišemo jednadžbe stanja

$$\frac{dx_1}{dt} = -\operatorname{sgn}(x_2)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \operatorname{sgn}(x_1)$$

i izlazne jednadžbe

$$y_1 = x_1^2$$
$$y_2 = -\operatorname{sgn}(x_2)$$

Za jednadžbe stanja postoje četiri važna slučaja koja odgovaraju kvadrantima u ravnini stanja $\{(x_1, x_2) : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\}$. U svakom od kvadranata $\dot{x}_1$ i $\dot{x}_2$ poprimaju vrijednost 1 ili -1. Eliminacijom vremena t dobivamo da za 2. i 4. kvadrant vrijedi $dx_1/dx_2 = 1$, dok za 1. i 3. kvadrant vrijedi $dx_1/dx_2 = -1$. Prema tome u svakom od kvadranata rješenje je pravac.

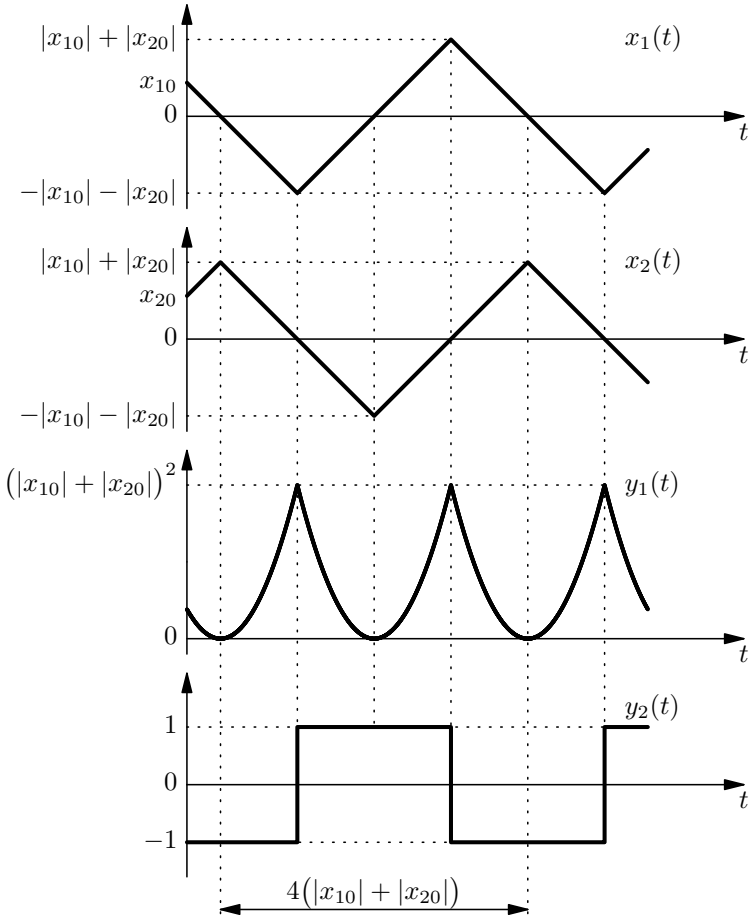


Slika 7.8.: Trajektorija u ravnini stanja

Početno stanje je prema zadatku u prvom kvadrantu. Trajektorija je nacrtana na slici 7.8., te vidimo da u ravnini stanja imamo periodičko kruženje po stranicama kvadrata. Pri tom je maksimum koji dosežu varijable stanja x_1 i x_2 jednak i iznosi $|x_{10}| + |x_{20}|$, dok je minimum također jednak za obje varijable i

iznosi $-|x_{10}| - |x_{20}|$. Pri tome kad jedna varijabla stanja doseže svoj ekstrem druga prolazi kroz nulu. Period kruženja je $4|x_{10}| + |x_{20}|$.

Varijable stanja x_1 i x_2 su linearne po odsječcima kako je prikazano na slici 7.9.. Na istoj slici su prikazane i izlazne varijable y_1 i y_2.



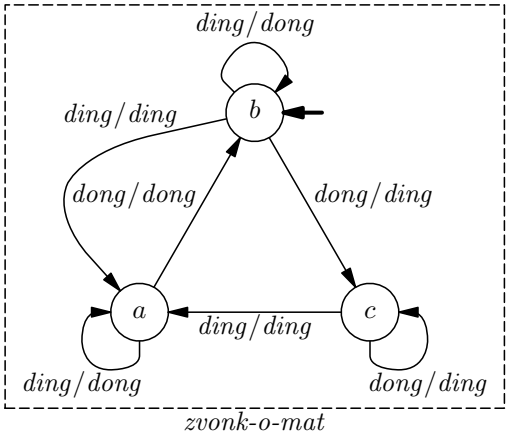
Slika 7.9.: Vremenske promjene varijabli stanja i odziv sustava

Dio II

Diskretni signali i sustavi

8. Konačni automati

Primjer 8.1. Zadan je konačni automat *zvonk-o-mat* čija je funkcija prijelaza dana slikom 8.1.. Razmotrire spoj zadanog automata u povratnu vezu gdje za ulaz uvodimo nadomjesni znak *djeluj*. Napišite uređenu petorku za tako dobiveni automat (funkciju prijelaza možete navesti dijagramom ili tablično). Ako postoje nedostupna stanja navedite ih!



Slika 8.1.: Diskretni konačni automat *zvonk-o-mat*

Rješenje: Zadani automat *zvonk-o-mat* određen je s uređenom petorkom

$$(Stanja, Ulazi, Izlazi, FunkcijaPrijelaza, PočetnoStanje)$$

Funkcija prijelaza je dana slikom, a ostali elementi uređene petorke su

$$\begin{aligned} Stanja &= \{a, b, c\}, \\ Ulazi &= \{ding, dong, odsutan\}, \\ Izlazi &= \{ding, dong, odsutan\}, \\ PočetnoStanje &= b. \end{aligned}$$

Kako je skup *Ulazi* jednak skupu *Izlazi* spoj u povratnu vezu za koji uvodimo nadomjesni znak *djeluj* je moguć. Za tako spojeni automat je

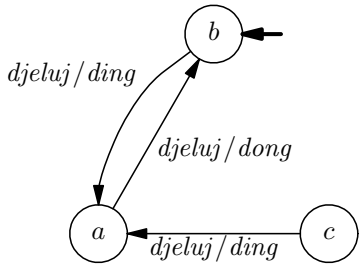
$$\begin{aligned} Stanja &= \{a, b, c\}, \\ Ulazi &= \{djeluj, odsutan\}, \\ Izlazi &= \{ding, dong, odsutan\}, \\ PočetnoStanje &= b. \end{aligned}$$

Izlaz tako spojenog diskretnog konačnog automata je određen samo za slučaj kada je ulaz jednak izlazu te je funkcija prijelaza dana tablicom 8.1. i slikom 8.2..

Primjer 8.2. Zadana su dva konačna automata, *zek-o-mat* i *lovc-o-mat* s funkcijama prijelaza danim slikom 8.3.. Kada *lovc-o-mat* puca, *zek-o-mat* bježi od njega u malim skokovima. Za

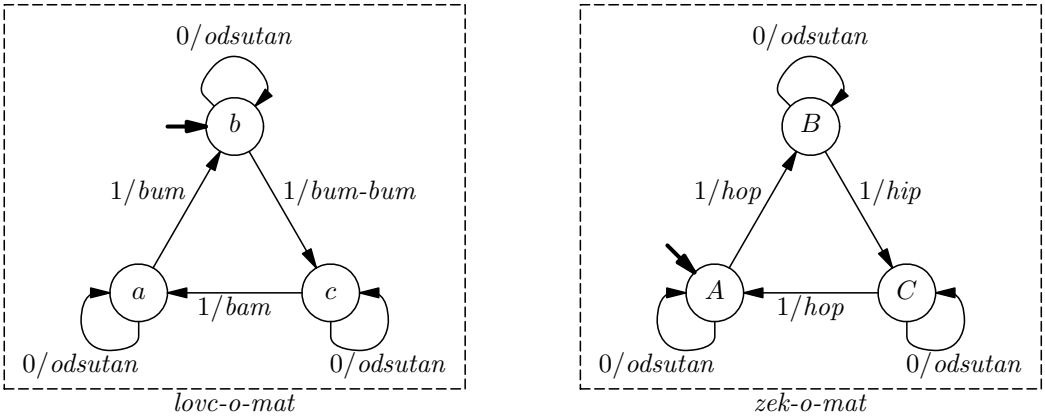
Stanje	Ulazni simbol: *djeluj*	*odsutan*
a	$(b, dong)$	$(a, odsutan)$
b	$(a, ding)$	$(b, odsutan)$
c	$(a, ding)$	$(c, odsutan)$

Tablica 8.1.: Funkcija prijelaza.



Slika 8.2.: Funkcija prijelaza

svaki od automata napiši skupove ulaznih i izlaznih simbola te navedi njihova početna stanja. Razmotri spoj zadanih automata u paralelu, ali tako da su ulazi u *zeko-o-mat* i *lovc-o-mat* uvijek jednaki. Napiši uređenu petorku koja definira tako dobiveni automat. Ako postoje nedostupna stanja, navedi ih!



Slika 8.3.: Diskretni konačni automati *zek-o-mat* i *lovc-o-mat*

Rješenje: Zadani automat *lovco-o-mat* određen je s uređenom petorkom

$$(Stanja_L, Ulazi_L, Izlazi_L, FunkcijaPrijelaza_L, PočetnoStanje_L)$$

Funkcija prijelaza je dana slikom 8.3., a ostali elementi uređene petorke su

$$\begin{aligned} Stanja_L &= \{a, b, c\}, \\ Ulazi_L &= \{0, 1, odsutan\}, \\ Izlazi_L &= \{bum, bam, bum\text{-}bum, odsutan\}, \\ PočetnoStanje_L &= b. \end{aligned}$$

Zadani automat *zek-o-mat* određen je s uređenom petorkom

$$(Stanja_Z, Ulazi_Z, Izlazi_Z, FunkcijaPrijelaza_Z, PočetnoStanje_Z)$$

Funkcija prijelaza je dana slikom 8.3., a ostali elementi uređene petorke su

$$\begin{aligned} Stanja_Z &= \{A, B, C\}, \\ Ulazi_Z &= \{0, 1, odsutan\}, \\ Izlazi_Z &= \{hip, hop, odsutan\}, \\ PočetnoStanje_Z &= B. \end{aligned}$$

Spoj u paralelu je moguć jer su skupovi $Ulazi_L$ i $Ulazi_Z$ jednaki. Pri spajanju u paralelu skup ulaza novog automata jednak je kartezijevom produktu skupova pojedinih automata. U našem slučaju je

$$Ulazi_{L||Z} = Ulazi_L \times Ulazi_Z,$$

no uz dodatni uvjet da su ulazi uvijek jednaki. S time skup ulaznih simbola paralele postaje

$$Ulazi_{L||Z} = \{(0,0), (1,1), (Odsutan, Odsutan)\}.$$

Skup mogućih izlaza paralele je

$$\begin{aligned} Izlazi_{L||Z} &= Izlazi_L \times Izlazi_Z \\ &= \{(bum, hip), (bum, hop), (bum, odsutan), \\ &\quad (bam, hip), (bam, hop), (bam, odsutan), \\ &\quad (bum\text{-}bum, hip), (bum\text{-}bum, hop), (bum\text{-}bum, odsutan), \\ &\quad (odsutan, hip), (odsutan, hop), (odsutan, odsutan)\} \end{aligned}$$

Primijetite da uz ograničeni skup $Ulazi_{L||Z}$ neke vrijednosti izlaza neće nikada biti dosegnute. Skup stanja je

$$\begin{aligned} Stanja_{L||Z} &= Stanja_L \times Stanja_Z \\ &= \{(a, A), (a, B), (a, C), (b, A), (b, B), (b, C), (c, A), (c, B), (c, C)\} \end{aligned}$$

uz početno stanje

$$PočetnoStanje_{L||Z} = (b, A).$$

Funkcija prijelaza dana je u tablici 8.2.. Ispitivanjem tablice vidimo da automat kruži kroz stanja (b, A), (c, B) i (a, C) pa su nedostupna stanja (a, A), (b, B), (c, C), (a, B), (b, C) i (c, A).

	Ulazni simboli		
Stanje	$(0,0)$	$(1,1)$	$(odsutan, odsutan)$
(a, A)	$((a, A), (odsutan, odsutan))$	$((b, B), (bum, hop))$	$((a, A), (odsutan, odsutan))$
(a, B)	$((a, B), (odsutan, odsutan))$	$((b, C), (bum, hip))$	$((a, B), (odsutan, odsutan))$
(a, C)	$((a, C), (odsutan, odsutan))$	$((b, A), (bum, hop))$	$((a, C), (odsutan, odsutan))$
(b, A)	$((b, A), (odsutan, odsutan))$	$((c, B), (bum\text{-}bum, hop))$	$((b, A), (odsutan, odsutan))$
(b, B)	$((b, B), (odsutan, odsutan))$	$((c, C), (bum\text{-}bum, hip))$	$((b, B), (odsutan, odsutan))$
(b, C)	$((b, C), (odsutan, odsutan))$	$((c, A), (bum\text{-}bum, hop))$	$((b, C), (odsutan, odsutan))$
(c, A)	$((c, A), (odsutan, odsutan))$	$((a, B), (bam, hop))$	$((c, A), (odsutan, odsutan))$
(c, B)	$((c, B), (odsutan, odsutan))$	$((a, C), (bam, hip))$	$((c, B), (odsutan, odsutan))$
(c, C)	$((c, C), (odsutan, odsutan))$	$((a, A), (bam, hop))$	$((c, C), (odsutan, odsutan))$

Tablica 8.2.: Funkcija prijelaza.

Zadatak 8.1. Konstruirajte konačni automat koji prepoznaje paran broj pojavljivanja niza *SIS* u ulaznom nizu koji je sastavljen iz slučajno odabranih elemenata skupa $Ulazi = \{S, I, odsutan\}$. Skup izlaznih simbola neka bude $Izlazi = \{1, odsutan\}$, odnosno neka automat na izlazu daje jedinicu svaki put kada prepozna paran broj pojavljivanja riječi *SIS*, kao na primjer *SISSIS*.

Rješenje: Za dani automat je

$$\begin{aligned} Stanja &= \{A, B, C, D, E, F\}, \\ Ulazi &= \{S, I, odsutan\}, \\ Izlazi &= \{1, odsutan\}, \\ PočetnoStanje &= A, \end{aligned}$$

dok je funkcija prijelaza dana u tablici 8.3..

	Ulazni simboli		
Stanje	S	I	$odsutan$
A	$(B, odsutan)$	$(A, odsutan)$	$(A, odsutan)$
B	$(B, odsutan)$	$(C, odsutan)$	$(B, odsutan)$
C	$(D, odsutan)$	$(A, odsutan)$	$(C, odsutan)$
D	$(E, odsutan)$	$(C, odsutan)$	$(D, odsutan)$
E	$(B, odsutan)$	$(F, odsutan)$	$(E, odsutan)$
F	$(A, 1)$	$(A, odsutan)$	$(F, odsutan)$

Tablica 8.3.: Funkcija prijelaza.

Zadatak 8.2. Konstuirajte konačni automat koji prepoznaje niz *SIS* u ulaznim podacima sastavljenim od slučajno odabranih simbola iz skupa $Ulazi = \{S, I, odsutan\}$. Neka skup izlaznih simbola bude $Izlazi = \{1, odsutan\}$, odnosno automat na izlazu daje jedinicu svaki put kada prepozna niz *SIS*.

Rješenje: Za dani automat je

$$\begin{aligned} Stanja &= \{A, B, C\}, \\ Ulazi &= \{S, I, odsutan\}, \\ Izlazi &= \{1, odsutan\}, \\ PočetnoStanje &= A, \end{aligned}$$

dok je funkcija prijelaza dana u tablici 8.4..

	Ulazni simboli		
Stanje	S	I	$odsutan$
A	$(B, odsutan)$	$(A, odsutan)$	$(A, odsutan)$
B	$(B, odsutan)$	$(C, odsutan)$	$(B, odsutan)$
C	$(A, 1)$	$(A, odsutan)$	$(C, odsutan)$

Tablica 8.4.: Funkcija prijelaza.

9. Diskretni signali

Ako govorimo o vremenskim signalima nezavisnu varijablu uvijek označavamo s t_n. Takva nezavisna varijabla poprima diskretne vrijednosti pa je signal definiran samo u diskretnim trenutcima t_n. Uobičajena interpretacija vremenski diskretnog signala jest niz $\{u(t_n)|n \in \mathbb{Z}\}$, obično poredanih kako to određuje nezavisna varijabla:

$$\ldots, u(t_{-2}), u(t_{-1}), u(t_0), u(t_1), u(t_2), \ldots$$

Često diskretni signali nastaju otipkavanjem kontinuiranih signala. Trenutna vrijednost diskretnog signala $u(t_n)$ naziva se uzorkom signala u trenutku t_n. Ti uzorci ne moraju biti jednoliko raspodijeljeni po osi t_n. Ako trenutci t_n nisu jednoliko raspodijeljeni uzduž vremenske osi govorimo o *proizvoljnoj diskretizaciji vremena*, a ukoliko su jednoliko raspodijeljeni govorimo o *ekvidistantnoj diskretizaciji vremena*. Radi jednostavnosti obično se koriste signali čiji su uzorci ekvidistantni. U tom slučaju diskretni signal označavamo s $u[n]$ umjesto $u(t_n)$. Varijablu n nazivamo diskretna vremenska varijabla. Čest je i naziv varijabla koraka pa se kaže da je $u[n]$ vrijednost diskretnog signala u koraku n.

Važni diskretni signali su:

1. jedinični impuls ili Kroneckerov delta (slika 9.1.)

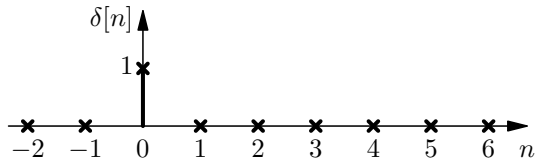
$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & \text{za } n = 0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \tag{9.1}$$

2. jedinična stepenica ili Heavisideov niz (slika 9.2.)

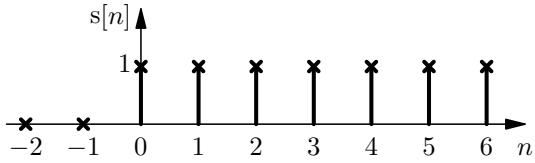
$$\mathrm{s}[n] = \begin{cases} 1, & \text{za } n \geq 0 \\ 0, & \text{za } n < 0 \end{cases} \tag{9.2}$$

3. jedinična kosina ili rampa (slika 9.3.)

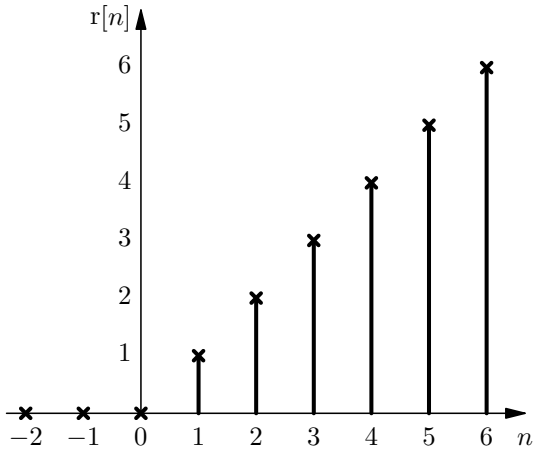
$$\mathrm{r}[n] = \begin{cases} n, & \text{za } n \geq 0 \\ 0, & \text{za } n < 0 \end{cases} \tag{9.3}$$



Slika 9.1.: Korneckerova delta funckija



Slika 9.2.: Jedninična stepenica



Slika 9.3.: Jedinična kosina

9.1. Otipkavanje kontinuiranih signala

Primjer 9.1. Diskretne signale možemo dobiti otipkavanjem kontinuiranih što se formalno može provesti zamijenom varijable t s nT, gdje je T period otipkavanja. Optikajte funkcije $\mathrm{s}(t)$ i $\mathrm{r}(t)$ s periodima $T_1 = 1$ i $T_2 = 2$.

Rješenje: Za jediničnu stepenicu je

$$\mathrm{s}(t) = \mathrm{s}(nT_1) = \mathrm{s}(1 \cdot n) = \begin{cases} 1, & \text{za } n \geq 0 \\ 0, & \text{za } n < 0 \end{cases}$$

i

$$\mathrm{s}(t) = \mathrm{s}(nT_2) = \mathrm{s}(2 \cdot n) = \begin{cases} 1, & \text{za } n \geq 0 \\ 0, & \text{za } n < 0 \end{cases},$$

dok je za jediničnu kosinu

$$\mathrm{r}(t) = \mathrm{r}(nT_1) = \mathrm{r}(1 \cdot n) = \begin{cases} n, & \text{za } n \geq 0 \\ 0, & \text{za } n < 0 \end{cases}$$

i

$$\mathrm{r}(t) = \mathrm{r}(nT_2) = \mathrm{r}(2 \cdot n) = \begin{cases} 2n, & \text{za } n \geq 0 \\ 0, & \text{za } n < 0 \end{cases}$$

Uobičajeno se pri prelasku na diskretno vrijeme argument funkcije piše unutar uglatih zagrada. Također primijetite za različita vremena otpikavanja kontinuiranih signala dobivamo različite nizove brojeva.

Primjer 9.2. Diskretna kompleksna eksponencijala je funkcija oblika

$$f[n] = z^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Odredite diskretne kompleksne eksponencijale za $z_1 = 0{,}7$, $z_2 = 0{,}7e^{j\pi}$, $z_3 = e^{j\pi}$ i $z_4 = 1$ te složene eksponencijale za konjugirano kompleksne parove $z_{5,6} = e^{\pm j\pi/6}$ i $z_{7,8} = 0{,}8e^{\pm j\pi/6}$. Odredite kontinuirani signal čijim otipkavanjem je nastala zadana diskretna eksponencijala ako je $T = 1$.

Rješenje: Za $z_1 = 0{,}7$ je

$$x_1[n] = z_1^n = 0{,}7^n.$$

Da bi odredili kontinuiranu kompleksnu eksponencijalu odredimo najprije što se događa kod otpikavanja. Otipkana kontinuirana eksponencijala je

$$e^{st} = e^{snT} = (e^{sT})^n.$$

Očito je

$$z = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T}$$

odnosno

$$|z| = \rho = e^{\sigma T} \quad \text{i} \quad \arg(z) = \omega T + 2k\pi.$$

Vidimo da postoji više kontinuiranih eksponencijala čijim otpikavanjem bi nastala zadana diskretna eksponencijala. Te kontinuirane eksponencijale se međusobno razlikuju za $e^{j2k\pi}$. Vrijedi

$$\rho_1 = 0{,}7 = e^{\sigma_1 t} \quad \text{i} \quad \theta_1 = 0 = \omega_1 T + 2k\pi.$$

Kontinuirana eksponencijala je sada

$$x_1(t) = e^{t \ln 0{,}7 + 2k\pi}.$$

Za $z_2 = 0{,}7e^{j\pi}$ je

$$x_2[n] = z_2^n = (0{,}7e^{j\pi})^n = 0{,}7^n \cos(\pi n) = 0{,}7^n(-1)^n = (-0{,}7)^n.$$

Jedna od kontinuiranih eksponencijala čijim otipkavanjem nastaje niz $x_2[n]$ je $x_2(t) = (-0{,}7)^t$. Za $z_3 = e^{j\pi}$ je

$$x_3[n] = z_3^n = (e^{j\pi})^n = \cos(\pi n) = (-1)^n.$$

Opet, jedna od kontinuiranih eksponencijala čijim otipkavanjem nastaje niz $x_3[n]$ je $x_3(t) = (-1)^t$. Za $z_4 = 1$ je

$$x_4[n] = z_4^n = 1^n.$$

Kontinuirane eksponencijale čijim otipkavanjem nastaje niz $x_3[n]$ su oblika $x_4(t) = (e^{j2k\pi})^t$. Prvo rješenje je $x_4(t) = 1^t$, no zanimljivo je još primijetiti da isti niz nastaje i otipkavanjem kosinusa s $x_4(t) = \cos(2\pi t)$ s periodom 2π radijana. Za $z_{5,6} = e^{\pm j\pi/6}$ je

$$x_5[n] = z_5^n + z_6^n = e^{jn\pi/6} + e^{-jn\pi/6} = 2\cos\Big(n\frac{\pi}{6}\Big).$$

Radi se o diskretnoj kosinusoidi koja je nastala otipkavanjem kontinuirane svakih $\pi/6$ radijana, dakle $x_5(t) = \cos(t\pi/6)$. Za $z_{7,8} = 0{,}8e^{\pm j\pi/6}$ je

$$x_6[n] = z_7^n + z_8^n = 0{,}8^n(e^{jn\pi/6} + e^{-jn\pi/6}) = 2 \cdot 0{,}8^n \cos\Big(n\frac{\pi}{6}\Big).$$

Radi se o diskretnoj prigušenoj kosinusoidi koja je nastala otipkavanjem kombinacije kontinuiranih eksponencijala

$$x_6(t) = \exp\big(t \ln 0{,}8 + jt(\pi/6 + 2k\pi)\big) + \exp\big(t \ln 0{,}8 - jt(\pi/6 + 2k\pi)\big).$$

9.2. Osnovne operacije nad nizovima

Ako su zadani nizovi $\{x_1[n]|n \in \mathbb{Z}\}$ i $\{x_2[n]|n \in \mathbb{Z}\}$ definiramo osnovne operacije na članovima niza:

1. zbroj nizova je novi niz $\{y[n]|n \in \mathbb{Z}\}$ čiji članovi su jednaki zbroju odgovarajućih članova niza $x_1[n]$ i $x_2[n]$ prema
$$y[n] = x_1[n] + x_2[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{9.4}$$
2. produkt nizova je novi niz $y[n]|n \in \mathbb{Z}$ čiji članovi su jednaki produktu odgovarajućih članova niza $x_1[n]$ i $x_2[n]$ prema
$$y[n] = x_1[n] \cdot x_2[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{9.5}$$

Niz množimo s konstantom tako da svaki član pomnožimo s konstantom.

Osim algerbarskih operacija definiramo i operacije s pamćenjem. Prva takva operacija je pomak. Operator pomaka unaprijed označavamo s E i definiramo ga kao

$$E\big[y[n]\big] = y[n+1]. \tag{9.6}$$

Operator pomaka niza unaprijed ili predikicija nije kauzalna operacija te takav operator nije ostvariv. Osim pomaka unaprijed definiramo i pomak unatrag E^{-1} kao

$$E^{-1}\big[y[n]\big] = y[n-1]. \tag{9.7}$$

Operator E^{-1} nam predstavlja kašnjenje ili pamćenje te je ostvariv. Općenito definiramo da je

$$E^m\big[y[n]\big] = y[n+m].$$

Osim operatora E definiramo i operator diferencije Δ kao

$$\Delta\big[y[n]\big] = y[n+1] - y[n]. \tag{9.8}$$

Vrijedi

$$\Delta = E - 1. \tag{9.9}$$

Ako su zadani nizovi $\{x_1[n]|n \in \mathbb{Z}\}$ i $\{x_2[n]|n \in \mathbb{Z}\}$ vrijedi

$$\Delta\big[x_1[n] + x_2[n]\big] = \Delta\big[x_1[n]\big] + \Delta\big[x_2[n]\big] \tag{9.10}$$

i

$$\Delta\big[x_1[n]x_2[n]\big] = x_1[n+1]\Delta\big[x_2[n]\big] + x_2[n]\Delta\big[x_1[n]\big] \tag{9.11}$$
$$= x_2[n+1]\Delta\big[x_1[n]\big] + x_1[n]\Delta\big[x_2[n]\big] \tag{9.12}$$

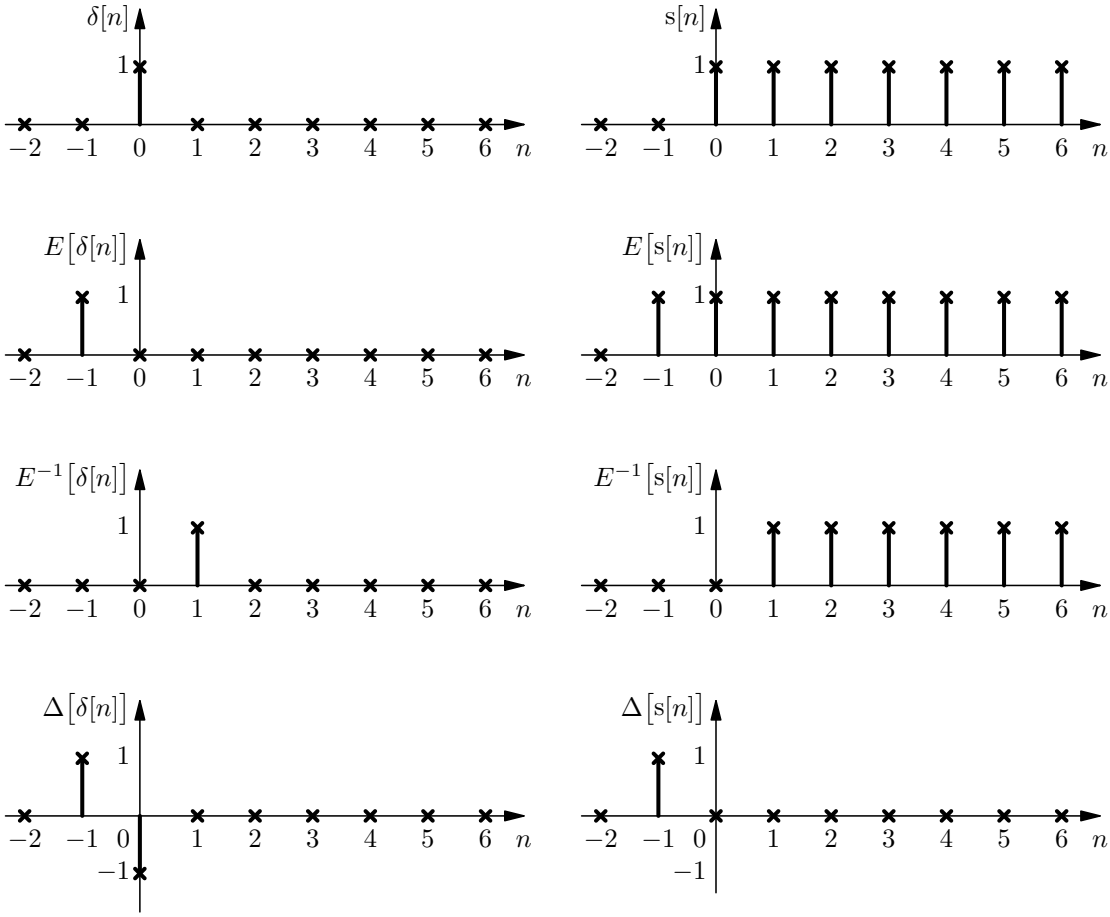
Primjer 9.3. Odredite rezultat operatora E, E^{-1} te Δ za jedinični impuls i jediničnu stepenicu.

Rješenje: Operatori E i E^{-1} pomiču niz unaprijed i unatrag te je

$$E\big[\delta[n]\big] = \delta[n+1] \qquad E\big[\mathrm{s}[n]\big] = \mathrm{s}[n+1]$$
$$E^{-1}\big[\delta[n]\big] = \delta[n-1] \qquad E^{-1}\big[\mathrm{s}[n]\big] = \mathrm{s}[n-1]$$

Što se dogodilo s nizovima se jasnije vidi iz slike 9.4.. Zanimljivije je djelovanje operatora diferencije. Vrijedi

$$\Delta\big[\delta[n]\big] = E\big[\delta[n]\big] - \delta[n] = \delta[n+1] - \delta[n]$$
$$\Delta\big[\mathrm{s}[n]\big] = E\big[\mathrm{s}[n]\big] - \mathrm{s}[n] = \mathrm{s}[n+1] - \mathrm{s}[n] = \delta[n+1]$$



Slika 9.4.: Djelovanje operatora E, E^{-1} i Δ

10. Z transformacija

10.1. Z transformacija

$\mathcal{Z}$ transformacija niza brojeva $\{f[n]\}$ za koje vrijedi

$$f[n] = 0, \quad n < 0 \tag{10.1}$$

je

$$\mathcal{Z}\big[f[n]\big] = \sum_{n=0}^{+\infty} f[n]z^{-n} = F(z). \tag{10.2}$$

Ovom transformacijom nizu brojeva $\{f[n]\}$ pridružuje se funkcija kompleksne varijable z. Koeficijenti razvoja te kompleksne funkcije su upravo elementi niza $\{f[n]\}$.

Sama vrijednost reda $\mathcal{Z}\big[f[n]\big]$ može biti konačna ili beskonačna. Skup vrijednosti kompleksne varijable z za koje je red $\mathcal{Z}\big[f[n]\big]$ konačan naziva se *područje konvergencije*, dok se skup vrijednosti od z za koje je red $\mathcal{Z}\big[f[n]\big]$ beskonačan naziva *područje divergencije*.

Neka je $\mathcal{Z}\big[f[n]\big] = F(z)$ i $\mathcal{Z}\big[g[n]\big] = G(z)$. Uz te oznake $\mathcal{Z}$ transformacija zadovoljava sljedeća svojstva:

1. Linearnost:
$$af[n] + bg[n] \circ\!\!-\!\!\bullet\ aF(z) + bF(z)$$

2. Množenje s diskretnom eksponencijalom:
$$a^n f[n] \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(\frac{z}{a})$$

3. Deriviranje slike:
$$nf[n] \circ\!\!-\!\!\bullet\ -z\frac{dF(z)}{dz}$$

4. Pomak lijevo:
$$f[n+1] \circ\!\!-\!\!\bullet\ zF(z) - zf[0]$$
$$f[n+m] \circ\!\!-\!\!\bullet\ z^m F(z) - \sum_{i=0}^{m-1} f[i]z^{m-i}$$

5. Pomak desno:
$$f[n-1] \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{z}F(z) + f[-1]$$
$$f[n-m] \circ\!\!-\!\!\bullet\ z^{-m}F(z) + \sum_{i=0}^{m-1} f[i-m]z^{-i}$$

6. Konvolucija:
$$\sum_{i=0}^{+\infty} f[i]g[n-i] \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(z)G(z)$$

Primjer 10.1. Odredi $\mathcal{Z}$ transformaciju δ niza.

RJEŠENJE: Računamo prema definiciji (10.2):

$$\mathcal{Z}\big[f[n]\big] = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta[n] z^{-n} = z^{-0} = 1.$$

Primjer 10.2. Odredi $\mathcal{Z}$ transformaciju jedinične stepenice $s[n]$.

RJEŠENJE: Jednična stepenica $s[n]$ je definirana kao

$$s[n] = \begin{cases} 0, & \text{za } n < 0 \\ 1, & \text{za } n \geq 0 \end{cases}.$$

Računamo prema definiciji (10.2):

$$\mathcal{Z}\big[s[n]\big] = \sum_{n=0}^{+\infty} s[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\frac{1}{z}\Big)^n = \frac{1}{1 - z^{-1}}.$$

Pri tome zadnja jednakost vrijedi samo na području konvergencije dobivenog reda. Kako se radi o geometrijskom redu, područje konvergencije je određeno s $|z^{-1}| < 1$, odnosno s

$$|z| > 1.$$

Područje konvergencije je dio z ravnine izvan jedninične kružnice (slika 10.1.).

Primjer 10.3. Odredi $\mathcal{Z}$ transformaciju diskretne eksponencijale.

RJEŠENJE: Diskretna eksponencijala je definirana kao

$$f[n] = \begin{cases} 0, & \text{za } n < 0 \\ a^n, & \text{za } n \geq 0 \end{cases}.$$

Računamo prema definiciji (10.2):

$$\mathcal{Z}\big[f[n]\big] = \sum_{n=0}^{+\infty} f[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\frac{a}{z}\Big)^n = \frac{1}{1 - a z^{-1}}.$$

Pri tome zadnja jednakost vrijedi samo na području konvergencije dobivenog reda. Kako se radi o geometrijskom redu, područje konvergencije je određeno s $|az^{-1}| < 1$, odnosno s

$$|z| > |a|.$$

Područje konvergencije je dio z ravnine izvan kružnice polumjera $|a|$.

Primjer 10.4. Odredi $\mathcal{Z}$ transformaciju jedinične kosine.

RJEŠENJE: Jedinična kosina je definirana kao

$$f[n] = \begin{cases} 0, & \text{za } n < 0 \\ n, & \text{za } n \geq 0 \end{cases}.$$

Red definiran prema (10.2) može se proizvoljno mnogo puta derivirati i njegove derivacije ostaju konvergentne. Deriviranjem dobivamo

$$\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\big[f[n]\big] = \sum\nolimits_{n=0}^{+\infty} f[n] \frac{d}{dz} z^{-n}$$
$$\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\big[f[n]\big] = \sum\nolimits_{n=0}^{+\infty} f[n] n z^{-n-1}$$

odnosno

$$-z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\big[f[n]\big] = \sum_{n=0}^{+\infty} nf[n]z^{-n}. \tag{10.3}$$

Izraz (10.3) nam povezuje $\mathcal{Z}$ transformaciju niza $\{f[n]\}$ s $\mathcal{Z}$ transformacijom istog niza pomnoženog s n. Da bi odredili transformaciju jedninčne kosine promatramo jediničnu kosinu kao jediničnu stepenicu $s[n]$ pomnoženu s n. Sada je

$$\mathcal{Z}\big[f[n]\big] = \mathcal{Z}\big[ns[n]\big] = -z\frac{d}{dz}\frac{z}{z-1} = -z\frac{z-1-z}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Područje konvergencije je opet dio z ravnine izvan jedinične kružnice.

Primjer 10.5. Pomoću definicije $\mathcal{Z}$ transformacije odredi trasformaciju niza

$$f[n] = \begin{cases} 0, & \text{za } n < 0 \\ \sin(an), & \text{za } n \geq 0 \end{cases}.$$

Rješenje: Primjetite da funkciju $f[n]$ možemo zapisati i kao

$$f[n] = \sin(an)s[n].$$

Vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\big[f[n]\big] &= \mathcal{Z}\big[\sin(an)s[n]\big] = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(an)s[n]z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(an)z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{j2}\Big(e^{jan} - e^{-jan}\Big)z^{-n} \\
&= \frac{1}{j2}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{jan}z^{-n} - \frac{1}{j2}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-jan}z^{-n} \\
&= \frac{1}{j2}\sum_{n=0}^{+\infty} \big(e^{ja}z^{-1}\big)^n - \frac{1}{j2}\sum_{n=0}^{+\infty} \big(e^{-ja}z^{-1}\big)^n
\end{aligned}$$

Dobivene sume konvergiraju za

$$|e^{ja}z^{-1}| = |e^{ja}||z^{-1}| = |z^{-1}| < 1 \quad \text{i} \quad |e^{-ja}z^{-1}| = |e^{-ja}||z^{-1}| = |z^{-1}| < 1,$$

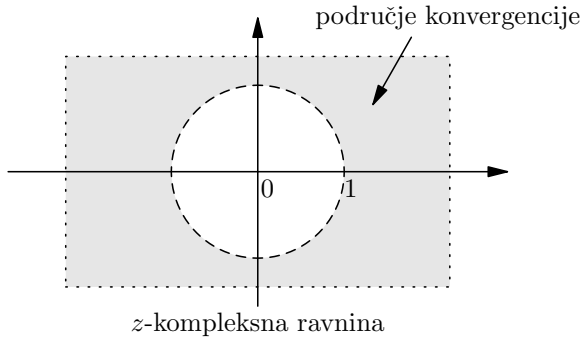
pa obje sume konvergiraju za

$$|z| > 1.$$

Područje kovergencije $\mathcal{Z}$ transformacije funkcije $f[n] = \sin(an)s[n]$ je područje kompleksne ravnine z izvan jedinične kružnice (slika 10.1.).

Za $|z| > 1$ možemo svaku od suma promatrati kao konvergentni geometrijski red. Tada je

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\big[f[n]\big] &= \frac{1}{j2}\sum_{n=0}^{+\infty} \big(e^{ja}z^{-1}\big)^n - \frac{1}{j2}\sum_{n=0}^{+\infty} \big(e^{-ja}z^{-1}\big)^n \\
&= \frac{1}{j2}\frac{1}{1-e^{ja}z^{-1}} - \frac{1}{j2}\frac{1}{1-e^{-ja}z^{-1}} \\
&= \frac{1}{j2}\frac{1-e^{-ja}z^{-1}-1+e^{ja}z^{-1}}{1-e^{ja}z^{-1}-e^{-ja}z^{-1}+z^{-2}} \\
&= \frac{z^{-1}\sin(a)}{1-2z^{-1}\cos(a)+z^{-2}} = \frac{z\sin(a)}{z^2-2z\cos(a)+1}
\end{aligned}$$



Slika 10.1.: Područje konvergencije

pa je konačno rješenje

$$\mathcal{Z}\big[f[n]\big] = \frac{z\sin(a)}{z^2 - 2z\cos(a) + 1}, \quad |z| > 1.$$

Primjer 10.6. Koristeći rješenje prethodnog zadatka odredi $\mathcal{Z}$ transformaciju niza

$$f[n] = \begin{cases} 0, & \text{za } n < 0 \\ n\sin(an), & \text{za } n \geq 0 \end{cases}.$$

pomoću svojstva deriviranja slike $\mathcal{Z}$ transformacije

$$\mathcal{Z}\big[nf[n]\big] = -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\big[f[n]\big].$$

Rješenje: Polazimo od svojstva deriviranja slike:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\big[nf[n]\big] &= -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\big[f[n]\big] \\
&= -z\frac{d}{dz}\frac{z\sin(a)}{z^2 - 2z\cos(a) + 1} \\
&= -z\frac{\sin(a)\big(z^2 - 2z\cos(a) + 1\big) - z\sin(a)\big(2z - 2\cos(a)\big)}{\big(z^2 - 2z\cos(a) + 1^2\big)^2} \\
&= -z\sin(a)\frac{z^2 - 2z\cos(a) + 1 - 2z^2 + 2z\cos(a)}{\big(z^2 - 2z\cos(a) + 1^2\big)^2}.
\end{aligned}$$

Nakon sređivanja dobivamo konačno rješenje

$$\mathcal{Z}\big[n\sin(an)\big] = \frac{z(z^2 - 1)\sin(a)}{\big(z^2 - 2z\cos(a) + 1^2\big)^2}, \quad |z| > 1.$$

Zadatak 10.1. Koristeći svojstvo deriviranja slike i poznavajući transformacije

$$\mathcal{Z}\big[s[n]\big] = \frac{z}{z-1} \quad \text{i} \quad \mathcal{Z}\big[a^n\big] = \frac{z}{z-a}$$

odredite $\mathcal{Z}$ transformacije

$$\mathcal{Z}[n], \mathcal{Z}[n^2], \mathcal{Z}[n^3] \quad \text{i}$$
$$\mathcal{Z}[na^n], \mathcal{Z}[n^2a^n], \mathcal{Z}[n^3a^n].$$

Primjer 10.7. Odredite $\mathcal{Z}$ transformaciju $\mathcal{Z}\big[a^n f[n]\big]$ ako je poznato da je $\mathcal{Z}\big[f[n]\big]= F(z)$.

Rješenje: Vrijedi

$$\mathcal{Z}\big[a^n f[n]\big] = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n f[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} f[n](z/a)^n$$
$$\mathcal{Z}\big[f[n]\big] = F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f[n] z^{-n}$$

Uvođenjem supstitucije $z' = z/a$ (ili jednostavnom usporedbom izraza) dobivamo

$$\mathcal{Z}\big[a^n f[n]\big] = F(z/a).$$

Primjer 10.8. Odredite $\mathcal{Z}$ transformaciju niza pomaknutog lijevo za jedan, tj. odredite $\mathcal{Z}\big[f[n+1]\big]$ ako je poznato da je $\mathcal{Z}\big[f[n]\big]= F(z)$.

Rješenje: Znamo da je

$$\mathcal{Z}\big[f[n+1]\big] = \sum_{n=0}^{+\infty} f[n+1] z^{-n} \quad \text{i} \quad \mathcal{Z}\big[f[n]\big] = F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f[n] z^{-n}.$$

Vrijedi

$$\mathcal{Z}\big[f[n+1]\big] = \sum_{n=0}^{+\infty} f[n+1] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} f[n+1] z^{-(n+1)} z = z \sum_{n=0}^{+\infty} f[n+1] z^{-(n+1)}.$$

Uvođenjem supstitucije $n' = n+1$ uočavamo da nedostaje jedan član (i to prvi) da bi dobili $F(z)$:

$$\mathcal{Z}\big[f[n+1]\big] = z \sum_{n=0}^{+\infty} f[n+1] z^{-(n+1)} = z \sum_{n'=1}^{+\infty} f[n'] z^{-n'}.$$

Uvodimo član $zf[0]$ na slijedeći način:

$$z \sum_{n'=1}^{+\infty} f[n'] z^{-n'} = zf[0] - zf[0] + z \sum_{n'=1}^{+\infty} f[n'] z^{-n'}.$$

Sada je

$$\mathcal{Z}\big[f[n+1]\big] = -zf[0] + z \sum_{n'=0}^{+\infty} f[n'] z^{-n'} = zF(z) - zf[0].$$

Zadatak 10.2. Ako je poznato da je $\mathcal{Z}\big[f[n]\big]= F(z)$ pokažite da vrijedi

$$\mathcal{Z}\big[f[n+m]\big] = z^m F[z] - \sum_{n'=0}^{m-1} f[n] z^{n-m}.$$

Primjer 10.9. Odredite $\mathcal{Z}$ transformaciju niza pomaknutog desno, tj. odredite $\mathcal{Z}\big[f[n-m]\big]$ ako je poznato da je $\mathcal{Z}\big[f[n]\big]= F(z)$.

Rješenje: Znamo da je

$$\mathcal{Z}\big[f[n-m]\big] = \sum_{n=0}^{+\infty} f[n-m] z^{-n} \quad \text{i} \quad \mathcal{Z}\big[f[n]\big] = F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f[n] z^{-n}.$$

Vrijedi

$$\mathcal{Z}\big[f[n-m]\big] = \sum_{n=0}^{+\infty} f[n-m]z^{-n} = z^{-m}\sum_{n=0}^{+\infty} f[n-m]z^{-(n-m)}.$$

Uvođenjem supstitucije $n' = n - m$ vidmo da moramo odbaciti prvih m članova zbroja bi dobili $F(z)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\big[f[n-m]\big] &= z^{-m}\sum_{n=0}^{+\infty} f[n-m]z^{-(n-m)} = z^{-m}\sum_{n'=-m}^{+\infty} f[n']z^{-n'}\\ &= z^{-m}\sum_{n'=-m}^{-1} f[n']z^{-n'} + z^{-m}\sum_{n'=0}^{+\infty} f[n']z^{-n'}.\end{aligned}$$

Drugi član prepoznajemo kao $F(z)$ dok u prvom vraćamo stari indeks sumacije n. Dobivamo:

$$\mathcal{Z}\big[f[n-m]\big] = z^{-m}F(z) + \sum_{n=0}^{m-1} f[n-m]z^{-n}.$$

Primijetite da je za *kauzalne funkcije* $f[n] = 0$ za $n < 0$ pa dobiveni izraz za $\mathcal{Z}$ transformaciju niza pomaknutog desno postaje

$$\mathcal{Z}\big[f[n-m]\big] = z^{-m}F(z).$$

Primjer 10.10. Odredi $\mathcal{Z}$ transformaciju niza $f[n] = (n+1)a^n$.

Rješenje: $\mathcal{Z}$ transformacija je linearna pa je stoga

$$\mathcal{Z}\big[(n+1)a^n\big] = \mathcal{Z}\big[na^n\big] + \mathcal{Z}\big[a^n\big].$$

$\mathcal{Z}$ transformacija drugog člana je poznata iz tablica,

$$\mathcal{Z}\big[a^n\big] = \frac{z}{z-a},$$

dok $\mathcal{Z}$ transformaciju prvog člana odredimo uz pomoć svojstva deriviranja slike,

$$\mathcal{Z}\big[na^n\big] = -z\frac{d}{dz}\frac{z}{z-a} = -z\frac{z-a-z}{(z-a)^2} = \frac{az}{(z-a)^2}.$$

Konačno rješenje je tada

$$\mathcal{Z}\big[(n+1)a^n\big] = \frac{z^2}{(z-a)^2}.$$

Primjer 10.11. Ako su f i g kauzalne funkcije i ako je poznato da je $\mathcal{Z}\big[f[n]\big] = F(z)$ i $\mathcal{Z}\big[g[n]\big] = G(z)$ odredi $\mathcal{Z}$ transformaciju konvolucije

$$(f * g)[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f[i]g[n-i].$$

Rješenje: Prema definiciji $\mathcal{Z}$ transformacija konvolucije je

$$\mathcal{Z}\big[(f * g)[n]\big] = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} f[i]g[n-i].$$

Zamjenom redoslijeda sumacija dobivamo

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\big[(f*g)[n]\big] &= \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f[i]g[n-i] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f[i] \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} g[n-i] \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} f[i]z^{-i}G(z) = G(z)\sum_{i=0}^{+\infty} f[i]z^{-i} = F(z)G(z).\end{aligned}$$

$\mathcal{Z}$ transformacija konvolucije je

$$\mathcal{Z}\big[(f*g)[n]\big] = F(z)G(z)$$

10.2. Inverzna Z transformacija

$\mathcal{Z}$ transformacija definirana je kao

$$\mathcal{Z}\big[f[n]\big] = \sum_{n=0}^{+\infty} f[n]z^{-n} = F(z). \tag{10.4}$$

Inverznu $\mathcal{Z}$ transformaciju koristimo pri određivanju niza $f[n]$ čiju $\mathcal{Z}$ transformaciju $F(z)$ poznajemo. Pišemo

$$\mathcal{Z}^{-1}\big[F(z)\big] = f[n]. \tag{10.5}$$

10.2.1. Inverzna Z transformacija racionalnih funkcija

U primjeni su najvažnije racionalne funkcije oblika

$$F(z) = \frac{b_k z^k + b_{k-1}z^{k-1} + \cdots + b_0}{a_l z^l + a_{l-1}z^{l-1} + \cdots + a_0}. \tag{10.6}$$

Izravno prepoznavanje niza $f[n]$ za bilo koju racionalnu funkciju oblika (10.6) nije praktično.

Uobičajeno se racionalna funkcija $F(z)$ rastavlja na parcijalne razlomke. Jednom kada je poznat rastav funkcije $F(z)$ za određivanje inverzne $\mathcal{Z}$ transformacije koriste se tablice osnovnih funkcija. Prije rastava na parcijalne razlomke moramo odrediti polove racionalne funkcije $F(z)$. Tek kada su poznati polovi i njihova kratnost određuje se rastav funkcije. Svaki parcijalni razlomak u rastavu će odgovarati $\mathcal{Z}$ transformaciji nekog elementarnog niza, dok traženi niz $f[n]$ dobivamo kao zbroj tih elementarnih nizova.

Ako su stupanj brojnika i nazivnika jednaki te ako su svi polovi međusobno različiti i različiti od nule rastav na parcijalne razlomke je oblika:

$$\begin{aligned}F(z) &= \frac{b_k z^k + b_{k-1}z^{k-1} + \cdots + b_0}{a_k z^k + a_{k-1}z^{k-1} + \cdots + a_0} = \frac{b_k z^k + b_{k-1}z^{k-1} + \cdots + b_0}{a_k(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_k)} \\ &= \alpha_0 + \alpha_1\frac{z}{z-z_1} + \cdots + \alpha_k\frac{z}{z-z_k}\end{aligned}$$

Koeficijente u ovom rastavu određujemo na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= F(z)\Big|_{z=0} = \frac{b_0}{a_0} \\ \alpha_i &= \frac{z-z_i}{z}F(z)\Big|_{z=z_i} = \frac{z-z_i}{z}\frac{b_k z^k + b_{k-1}z^{k-1} + \cdots + b_0}{a_k(z-z_1)\ldots(z-z_i)\ldots(z-z_k)}\Bigg|_{z=z_i}, \quad i \neq 0\end{aligned}$$

Za slučaj višestrukih polova različitih od nule funkcija $F(z)$ ima rastav nešto drugačijeg oblika. Radi jednostavnosti pretpostavimo da je samo jedan od ukupno k polova različitih od nule pol višestrukosti m i neka to bude baš z_1. U tom slučaju je rastav oblika

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{b_k z^k + b_{k-1} z^{k-1} + \cdots + b_0}{a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \cdots + a_0} = \frac{b_k z^k + b_{k-1} z^{k-1} + \cdots + b_0}{a_k (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_k)} \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 \frac{z}{z - z_1} + \alpha_2 \frac{z^2}{(z - z_1)^2} + \cdots + \alpha_m \frac{z^m}{(z - z_1)^m} + \\ &\quad + \alpha_{m+1} \frac{z}{z - z_2} + \cdots + \alpha_k \frac{z}{z - z_{k-m+1}} \end{aligned}$$

Općenito svaki pol z_i kratnosti $m > 1$ uzrokuje pojavljivanje članova oblika

$$\frac{z}{z - z_i}$$

s višim potencijama sve do potencije m. Koeficijente α_i u ovom rastavu određujemo na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= F(z)\Big|_{z=0} = \frac{b_0}{a_0} \\ \alpha_i &= \frac{1}{(m-i)!} \frac{d^{m-i}}{dw^{m-i}} \left(\frac{(z - z_1)^m}{z^m} F(z)\Big|_{z=\frac{z_1}{1-w}} \right)\Bigg|_{w=0}, \quad i = 1, \ldots, m \\ \alpha_i &= \frac{z - z_i}{z} F(z)\Big|_{z=z_i} = \frac{z - z_i}{z} \frac{b_k z^k + b_{k-1} z^{k-1} + \cdots + b_0}{a_k (z - z_1) \ldots (z - z_i) \ldots (z - z_k)}\Bigg|_{z=z_i}, \quad i = m+1, \ldots, k \end{aligned}$$

Kako je izraz za koeficijente vezane uz višestruki pol dosta kompliciran obično te koeficijente računamo na slijedeći način. Najprije odredimo koeficijent α_m koji je vezan uz najveću potenciju,

$$\alpha_m = \frac{z - z_1}{z} F(z)\Big|_{z=z_1}.$$

Osim njega odredimo i sve ostale koeficijente vezane uz jednostruke polove. Sada je potrebno odrediti još preostalih $m - 1$ koeficijenata uz višestruki pol. Kako rastav funkcije $F(z)$ vrijedi za svaki z tako vrijedi i za neki odabrani z_j različit od nule i različit od polova funkcije $F(z)$. Ako odaberemo $m - 1$ različitih brojeva z_j koji su usto različiti od nule i polova funkcije $F(z)$ dobivamo sustav od $m - 1$ jednadžbi

$$\begin{aligned} F(z_j) = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{z_j}{z_j - z_1} + \alpha_2 \frac{z_j^2}{(z_j - z_1)^2} + \cdots + \alpha_m \frac{z_j^m}{(z_j - z_1)^m} + \\ + \alpha_{m+1} \frac{z_j}{z_j - z_2} + \cdots + \alpha_k \frac{z_j}{z_j - z_{k-m+1}}, \quad j = 1, \ldots, m-1 \end{aligned}$$

Rješenja ovog sustava jednadžbi su upravo traženi koeficijenti $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$.

U slučaju jednostrukog ili višestrukog pola u nuli postupak je sličan opisanom za višestruki pol različit od nule, samo što umjesto članova rastava oblika

$$\frac{z^j}{(z - z_i)^j}$$

imamo članove oblika

$$\frac{1}{z^j},$$

gdje potencije j idu od 1 do m. Pri tome valja primijetiti da sada više nije moguće jednostavno izračunati slobodni član rastava α_0.

Svaki pol doprinosi rastavu kako je prikazano u tablici 10.1. dok se koeficijenti rastava određuju prema izrazima danim u tablici 10.2.. Osim koeficijenata u tablici 10.2. u rastavu se nalazi još jedan slobodan koeficijent.

jednostruki pol z_1 različit od nule	$\alpha \dfrac{z}{z-z_1}$
m-struki pol z_1 različit od nule	$\alpha_1 \dfrac{z}{z-z_1} + \alpha_2 \dfrac{z^2}{(z-z_1)^2} + \cdots + \alpha_m \dfrac{z^m}{(z-z_1)^m}$
jednostruki pol jednak nuli	$\alpha \dfrac{1}{z}$
m-struki pol jednak nuli	$\alpha_1 \dfrac{1}{z} + \alpha_2 \dfrac{1}{z^2} + \cdots + \alpha_m \dfrac{1}{z^m}$

Tablica 10.1.: Doprinos pola rastavu na parcijalne razlomke

jednostruki pol z_1 različit od nule	$\alpha = \dfrac{z-z_1}{z} F(z)\Big\vert_{z=z_1}$
m-struki pol z_1 različit od nule	$\alpha_i = \dfrac{1}{(m-i)!} \dfrac{d^{m-i}}{dw^{m-i}} \left(\dfrac{(z-z_1)^m}{z^m} F(z)\Big\vert_{z=\frac{z_1}{1-w}} \right)\Big\vert_{w=0}$
jednostruki pol jednak nuli	$\alpha = zF(z)\big\vert_{z=0}$
m-struki pol jednak nuli	$\alpha_i = \dfrac{1}{(m-i)!} \dfrac{d^{m-i}}{dz^{m-i}} \big(z^m F(z)\big)\Big\vert_{w=0}$

Tablica 10.2.: Koeficijenti u rastavu na parcijalne razlomke

Primjer 10.12. Odredi niz $f[n]$ čija je $\mathcal{Z}$ transformacija

$$\mathcal{Z}\big[f[n]\big] = \frac{z\big(z - a\cos(b)\big)}{z^2 - 2az\cos(b) + a^2}.$$

Rješenje: Funkcija $F(z)$ ima dva pola. Ako su polovi međusobno različiti očekujemo rastav oblika

$$F(z) = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{z}{z-z_1} + \alpha_2 \frac{z}{z-z_2}.$$

Najprije određujemo polove:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{2a\cos(b) \pm \sqrt{4a^2\cos^2(b) - 4a^2}}{2} \\ &= a\cos(b) \pm ja\sin(b) = ae^{\pm jb} \end{aligned}$$

Kako smo dobili dva različita korijena rastav je oblika kojeg smo pretpostavili. Određujemo koeficijente rastava α_0, α_1 i α_2:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= F(z)\Big\vert_{z=0} = \frac{0\big(0 - a\cos(b)\big)}{0^2 - 2a0\cos(b) + a^2} = 0 \\ \alpha_1 &= \frac{z - ae^{jb}}{z} F(z)\Big\vert_{z=ae^{jb}} = \frac{z - ae^{jb}}{z} \frac{z\big(z - a\cos(b)\big)}{(z - ae^{jb})(z - ae^{-jb})}\Bigg\vert_{z=ae^{jb}} \\ &= \frac{ae^{jb} - a\cos(b)}{ae^{jb} - ae^{-jb}} = \frac{e^{jb} - \frac{1}{2}(e^{jb} + e^{-jb})}{e^{jb} - e^{-jb}} = \frac{1}{2} \\ \alpha_2 &= \frac{z - ae^{-jb}}{z} F(z)\Big\vert_{z=ae^{-jb}} = \frac{z - ae^{-jb}}{z} \frac{z\big(z - a\cos(b)\big)}{(z - ae^{jb})(z - ae^{-jb})}\Bigg\vert_{z=ae^{-jb}} \\ &= \frac{ae^{-jb} - a\cos(b)}{ae^{-jb} - ae^{jb}} = \frac{e^{-jb} - \frac{1}{2}(e^{jb} + e^{-jb})}{e^{-jb} - e^{jb}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Uvrštavamo dobivene α_0, α_1 i α_2 u rastav i dobivamo

$$F(z) = \frac{z\big(z - a\cos(b)\big)}{z^2 - 2az\cos(b) + a^2} = 0 + \frac{1}{2}\frac{z}{z - ae^{jb}} + \frac{1}{2}\frac{z}{z - ae^{-jb}}.$$

Sada odredimo traženi niz

$$f[n] = \frac{1}{2}(ae^{jb})^n + \frac{1}{2}(ae^{-jb})^n = a^n\cos(bn), \quad n \geq 0$$

Primjer 10.13. Odredi inverznu $\mathcal{Z}$ transformaciju

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^m}{(z-a)^m}\right]$$

za $m = 2$ i $m = 3$ koristeći poznatu relaciju za transformaciju konvolucije $\mathcal{Z}\big[(f * g)[n]\big] = F(z)G(z)$ ako je poznato da je

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-a}\right] = a^n.$$

Rješenje: Računajmo prvo inverznu transformaciju za $m = 1$:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^2}{(z-a)^2}\right] &= \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-a}\frac{z}{z-a}\right] = a^n * a^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} a^i a^{n-i} = a^n \sum_{i=0}^{n} 1 = (n+1)a^n\end{aligned}$$

Kod računanja inverzne transformacije za $m = 2$ koristimo prethodno dobiveni rezultat za $m = 1$:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^3}{(z-a)^3}\right] &= \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-a}\frac{z^2}{(z-a)^2}\right] = a^n * (n+1)a^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} a^i(n+1-i)a^{n-i} = a^n \sum_{i=0}^{n}(n+1-i) \\ &= a^n\Big((n+1)^2 - \frac{n(n+1)}{2}\Big) = \frac{(n+1)(n+2)}{2!}a^n.\end{aligned}$$

Zadatak 10.3. Pokaži da vrijedi

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^m}{(z-a)^m}\right] = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+m-1)}{(m-1)!}a^n.$$

Primjer 10.14. Odredi inverznu $\mathcal{Z}$ transformaciju

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^3 + 2z^2 + z + 1}{z^3 - z^2 - 8z + 12}\right].$$

Rješenje: Potrebno je odrediti rastav na parcijalne razlomke. Prvo tražimo polove:

$$\begin{aligned}z^3 - z^2 - 8z + 12 &= 0 \\ (z-2)^2(z+3) &= 0\end{aligned}$$

Zadana racionalna funkcija ima jedan dvostruki pol $z_{1,2} = 2$ i jedan jednostruki pol $z_3 = -3$. Rastav na parcijalne razlomke je oblika

$$F(z) = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{z}{z-2} + \alpha_2 \frac{z^2}{(z-2)^2} + \alpha_3 \frac{z}{z+3}.$$

Određujemo koeficijente α_0, α_2 i α_3 prema izrazima iz tablice 10.2.:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= F(z)\big|_{z=0} = \frac{0^3 + 2\cdot 0^2 + 0 + 1}{0^3 - 0^2 - 8\cdot 0 + 12} = \frac{1}{12} \\
\alpha_2 &= \frac{(z-2)^2}{z^2} \frac{z^3 + 2z^2 + z + 1}{(z-2)^2(z+3)}\bigg|_{z=2} = \frac{2^3 + 2\cdot 2^2 + 2 + 1}{2^2(2+3)} = \frac{19}{20} \\
\alpha_3 &= \frac{z+3}{z} \frac{z^3 + 2z^2 + z + 1}{(z-2)^2(z+3)}\bigg|_{z=-3} = \frac{-27 + 18 - 3 + 1}{-3(-3-2)^2} = \frac{11}{75}
\end{aligned}$$

Odredili smo α_0 i α_2 i α_3 te je još potrebno odrediti koeficijent α_1. Umjesto izraza iz tablice 10.2. odabrati ćemo neki z različit od nule i različit od polova $z_{1,2} = 2$ i $z_3 = -3$. Odaberimo npr. $z = 1$:

$$F(1) = \frac{1^3 + 2\cdot 1^2 + 1 + 1}{1^3 - 1^2 - 8\cdot 1 + 12} = \frac{1}{12} + \alpha_1 \frac{1}{1-2} + \frac{19}{20}\frac{1^2}{(1-2)^2} + \frac{11}{75}\frac{1}{1+3}$$

$$\frac{5}{4} = \alpha_1 + \frac{321}{300}$$

$$\alpha_1 = -\frac{9}{50}$$

Konačni rastav na parcijalne razlomke je

$$F(z) = \frac{1}{12} - \frac{9}{50}\frac{z}{z-2} + \frac{19}{20}\frac{z^2}{(z-2)^2} + \frac{11}{75}\frac{z}{z+3},$$

pa je tražena inverzna $\mathcal{Z}$ transformacija

$$f[n] = \frac{1}{12}\delta[n] - \frac{9}{50}2^n + \frac{19}{20}(n+1)2^n + \frac{11}{75}(-3)^n, \quad n \geq 0$$

što nakon grupiranja postaje

$$f[n] = \frac{1}{12}\delta[n] + \Big(\frac{19}{20}n + \frac{77}{100}\Big)2^n + \frac{11}{75}(-3)^n, \quad n \geq 0.$$

Primjer 10.15. Odredi inverznu $\mathcal{Z}$ transformaciju

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z+1}{z^2(z-1)}\right].$$

Rješenje: Opet je potrebno odrediti rastav na parcijalne razlomke. Zadana racionalna funkcija ima jedan dvostruki pol $z_{1,2} = 0$ i jedan jednostruki pol $z_3 = 1$ te je rastav oblika

$$F(z) = \frac{z+1}{z^2(z-1)} = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{1}{z} + \alpha_2 \frac{1}{z^2} + \alpha_3 \frac{z}{z-1}.$$

Zbog dvostrukog pola u nuli ne možemo jednostavno odrediti slobodni koeficijent α_0 u razvoju funkcije na parcijalne razlomke. Na jednostavan način je mguće odrediti samo koeficijente α_2 i α_3:

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= z^2 F(z)\big|_{z=0} = z^2 \frac{z+1}{z^2(z-1)}\bigg|_{z=0} = \frac{0+1}{0-1} = -1 \\
\alpha_3 &= \frac{z-1}{z} F(z)\bigg|_{z=1} = \frac{z-1}{z}\frac{z+1}{z^2(z-1)}\bigg|_{z=1} = \frac{1+1}{1\cdot 1^2} = 2
\end{aligned}$$

Da bi odredili preostale koeficijente razvoja α_0 i α_1 odabiremo dvije različite vrijednost z koje su uz to različite od polova zadane racionalne funkcije. Neka to budu vrijednosti -1 i 2. Sada rješavamo sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} F(-1) = \dfrac{-1+1}{(-1)^2(-1-1)} = \alpha_0 + \alpha_1 \dfrac{1}{-1} - \dfrac{1}{(-1)^2} + 2\dfrac{-1}{-1-1} \\ F(2) = \dfrac{2+1}{2^2(2-1)} = \alpha_0 + \alpha_1 \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^2} + 2\dfrac{2}{2-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = \alpha_0 - \alpha_1 \\ -3 = \alpha_0 + \alpha_1 \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\alpha_0 = \alpha_1 = -2$$

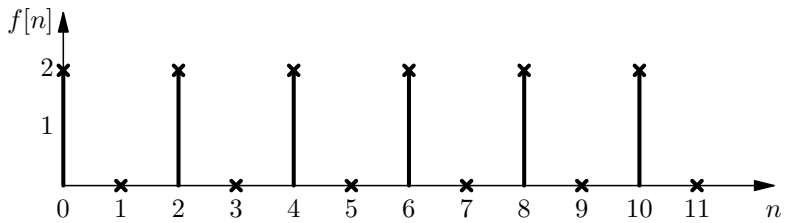
Odredili smo sve koeficijente te je konačni rastav

$$F(z) = \frac{z+1}{z^2(z-1)} = -2 - 2\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + 2\frac{z}{z-1}.$$

Inverznu $\mathcal{Z}$ transformaciju sada jednostavno očitamo iz tablica

$$f[n] = -2\delta[n] - 2\delta[n-1] - \delta[n-2] + 2 \cdot 1^n, \quad n \geq 0.$$

Primjer 10.16. Odredi analitički izraz za periodički niz zadan slikom 10.2..



Slika 10.2.: Periodički niz

Rješenje: Niz $f[n]$ možemo prikazati kao niz impulsa

$$f[n] = 2\delta[n] + 2\delta[n-2] + 2\delta[n-4] + \dots$$

Zbog periodičnosti možemo odrediti izraz za ovaj niz u $\mathcal{Z}$ domeni:

$$F(z) = 2 + 2z^{-2} + 2z^{-4} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} 2z^{-2n} = \frac{2}{1-z^{-2}}.$$

Određivanje analitičkog izraza za niz $f[n]$ sada se svodi na određivanje inverzne $\mathcal{Z}$ transformacije. Rastav racionalne funkcije $F(z)$ na parcijalne razlomke je oblika

$$F(z) = \frac{2z^2}{z^2-1} = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{z}{z-1} + \alpha_2 \frac{z}{z+1}.$$

Određujemo koeficijente rastava:

$$\alpha_0 = \left.\frac{2z^2}{(z-1)(z+1)}\right|_{z=0} = 0$$

$$\alpha_1 = \left.\frac{z-1}{z}\frac{2z^2}{(z-1)(z+1)}\right|_{z=1} = 1$$

$$\alpha_2 = \left.\frac{z+1}{z}\frac{2z^2}{(z-1)(z+1)}\right|_{z=-1} = 1$$

Konačan rastav je

$$F(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z+1},$$

pa je traženi analitički izraz za niz $f[n]$

$$f[n] = 1^n + (-1)^n, \quad n \geq 0.$$

10.2.2. Inverzna Z transformacija dijeljenjem

$\mathcal{Z}$ transformacija je definirana kao

$$\mathcal{Z}\big[f[n]\big] = \sum_{n=0}^{+\infty} f[n]z^{-n} = F(z) \tag{10.7}$$

što možemo raspisati na način

$$F(z) = f[0] + f[1]z^{-1} + f[2]z^{-2} + \dots \tag{10.8}$$

Ukoliko je potrebno pronaći inverznu $\mathcal{Z}$ transformaciju neke racionalne funkcije oblika (10.6) možemo se koristiti djeljenjem polinoma. Naime, djeljenjem brojnika racionalne funkcije s nazivnikom dobivamo polinom oblika (10.8) koji predstavlja upravo naš traženi niz. Najveći nedostatak ove metode jest u tome što ne dobivamo opći izraz za diskretni niz, već računamo taj niz član po član počevši od prvoga.

Primjer 10.17. Dijeljenjem odredi prvih pet članova niza $f[n]$ za zadanu racionalnu funkciju

$$F(z) = \frac{z^3 + 2z^2 + z + 1}{z^3 - z^2 - 8z + 12}.$$

Rješenje: Da bi odredili prvih pet članova niza potrebno je podijeliti brojinik s nazivnikom te izračunati prvih pet članova rezultata:

$$\begin{array}{l}
(z^3 + 2z^2 + z + 1) : (z^3 - z^2 - 8z + 12) = 1 + 3z^{-1} + 12z^{-2} + 25z^{-3} + \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad + 85z^{-4} + \dots \\
\underline{-\ z^3 - z^2 - 8z + 12} \\
\quad\quad + 3z^2 + 9z - 11 \\
\quad\quad \underline{+\ 3z^2 - 3z - 24 + 36z^{-1}} \\
\quad\quad\quad\quad + 12z + 13 - 36z^{-1} \\
\quad\quad\quad\quad \underline{+\ 12z - 12 - 96z^{-1} + 144z^{-2}} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad + 25 + 60z^{-1} - 144z^{-2} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad \underline{+\ 25 - 25z^{-1} - 200z^{-2} + 300z^{-3}} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad + 85z^{-1} + 56z^{-2} + 300z^{-3}
\end{array}$$

Kao rezultat dobivamo

$$F(z) = 1 + 3z^{-1} + 12z^{-2} + 25z^{-3} + 85z^{-4} + \dots$$

te su prvih pet članova niza $f[n]$ $f[0] = 1$, $f[1] = 3$, $f[2] = 12$, $f[3] = 25$ i $f[4] = 85$. Ovaj rezultat obično zapisujemo kao

$$f[n] = \delta[n] + 3\delta[n-1] + 12\delta[n-2] + 25\delta[n-3] + 85\delta[n-4] + \dots$$

11. Jednadžbe diferencija

Jednadžbe diferencija koriste se u opisu diskretnog sustava. Određivanje odziva sustava u tom slučaju se svodi na rješavanje jednadžbe diferencija, odnosno, na rješavanje sustava jednadžbi diferencija.

11.1. Rješavanje jednadžbi metodom korak-po-korak

Najjednostavniji način rješavanja jednadžbi diferencija jest rješavanje jednadžbe korak po korak. Kod korištenja te metode odziv za svaki korak se računa iz poznatog ulaza i prehodnih stanja sustava. Najveći nedostatak metode je nemogućnost dobivanja analitičkog izraza za odziv, no metoda je ipak interesantna jer se primijenjuje u sklopovskim ili programskim simulacijama sustava. Sama metoda je primjenjiva samo za rješavanje diskretnih sustava i ne postoji ekvivalentna metoda kod diferencijalnih jednadžbi.

Primjer 11.1. Riješite jednadžbu diferencija

$$y[n] + y[n-2] = u[n]$$

uz

$$u[n] = \begin{cases} 0 & \text{za } n < 0 \\ 1 & \text{za } n \geq 0 \end{cases}$$

i početne uvjete $y[-1] = 0$ i $y[-2] = 0$.

Rješenje: Potrebno je odrediti odziv zadanog diskretnog sustava opisanog jednadžbom diferencija na jediničnu stepenicu. Modificiramo početnu jednadžbu u

$$y[n] = u[n] - y[n-2].$$

Sada računamo odziv sustava korak po korak:

$$\begin{aligned}
n = 0: &\quad y[0] = u[0] - y[-2] = 1 - 0 = 1 \\
n = 1: &\quad y[1] = u[1] - y[-1] = 1 - 0 = 1 \\
n = 2: &\quad y[2] = u[2] - y[0] \quad = 1 - 1 = 0 \\
n = 3: &\quad y[3] = u[3] - y[1] \quad = 1 - 1 = 0 \\
n = 4: &\quad y[4] = u[4] - y[2] \quad = 1 - 0 = 1 \\
n = 5: &\quad y[5] = u[5] - y[3] \quad = 1 - 0 = 1 \\
n = 6: &\quad y[6] = u[6] - y[4] \quad = 1 - 1 = 0 \\
n = 7: &\quad y[7] = u[7] - y[5] \quad = 1 - 1 = 0
\end{aligned}$$

Odziv zadanog diskretong sustava na jediničnu stepenicu je niz

$$y[n] = \{\ldots 0, \underline{1}, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0 \ldots\}.$$

11.2. Klasičan način rješavanja jednadžbi diferencija

Linearna jednadžba diferencija s konstantnim koeficijentima je oblika

$$\begin{aligned} a_0y[n] + a_1y[n-1] + \cdots + a_{k-1}y[n-k+1] + a_ky[n-k] = \\ b_0u[n] + b_1u[n-1] + \cdots + b_{l-1}u[n-l+1] + b_lu[n-l] \end{aligned} \tag{11.1}$$

Kod rješavanja jednadžbe diferencija oblika (11.1) prvo riješavamo odgovarajuću homogenu jednadžbu diferencija

$$a_0y[n] + a_1y[n-1] + \cdots + a_{k-1}y[n-k+1] + a_ky[n-k] = 0. \tag{11.2}$$

Rješenje te jednadžbe je oblika $y_h[n] = q^n$, a uvrštavanjem istog u jednadžbu dobivamo karakterističnu jednadžbu jednadžbe diferencija

$$q^{n-k}(a_0q^k + a_1q^{k-1} + \cdots + a_{k-1}q + a_k) = 0. \tag{11.3}$$

Rješenja jednadžbe (11.3) su ili realna ili konjugirano-kompleksna, pa je ovisno o vrsti korijena doprinos homogenom rješenju:

1. Za jednostruki realni korijen $q = q_1$ doprinos je

$$y_h[n] = C_1q_1^n.$$

2. Za k-struki realni korijen $q = q_1 = \cdots = q_k$ doprinos je

$$y_h[n] = (C_1 + C_2n + \cdots + C_{k-1}n^{k-2} + C_kn^{k-1})q_1^n.$$

3. Za jendostruki konjugirano-kompleksni par $q_1 = \overline{q}_2 = |q_1|e^{j\phi}$ doprinos je

$$y_h[n] = C_1q_1^n + C_2q_2^n = |q_1|^n\big(A\cos(\phi n) + B\sin(\phi n)\big).$$

4. Za k-struki konjugirano-kompleksni par $q_1 = \overline{q}_2 = \cdots = q_{2k-1} = \overline{q}_{2k} = |q_1|e^{j\phi}$ doprinos je

$$\begin{aligned} y_h[n] = |q_1|^n\big((A_1 + A_2n + \cdots + A_{k-1}n^{k-2} + A_kn^{k-1})\cos(\phi n) + \\ (B_1 + B_2n + \cdots + B_{k-1}n^{k-2} + B_kn^{k-1})\sin(\phi n)\big) \end{aligned}$$

Tek kada smo odredili opći oblik rješenje homogene jednadžbe riješavamo nehomogenu jednadžbu odnosno tražimo partikularno rješenje $y_p[n]$. Partikularno rješenje možemo jednostavno odrediti samo za pobude određenog tipa:

1. Pobuda je eksponencijalna funkcija oblika $u[n] = Aa^n$. Ako a nije korijen karakteristične jednadžbe tada je

$$y_p[n] = C_1a^n,$$

a ako je a k-struki korijen tada je

$$y_p[n] = C_1n^ka^n.$$

2. Pobuda je polinom k-tog stupnja $u[n] = A_kn^k + A_{k-1}n^{k-1} + ... + A_1n + A_0$. Partikularno rješenje je također polinom k-tog stupnja,

$$y_p[n] = C_kn^k + C_{k-1}n^{k-1} + ... + C_1n + C_0.$$

Primjer 11.2. Riješite homogenu jednadžbu diferencija

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] - \frac{1}{2}y[n-2] = 0 \tag{11.4}$$

uz početne uvjete $y[-1] = 1$ i $y[-2] = 2$.

RJEŠENJE: Homogenu diferencijalnu jednadžbu diferencija zadovoljava funkcija oblika $y[n] = q^n$. Uvrštavanjem $y[n] = q^n$ u zadanu jednadžbu dobivamo karakterističnu jednadžbu

$$q^n - \frac{1}{2}q^{n-1} - \frac{1}{2}q^{n-2} = 0.$$

Sređivanjem dobivamo

$$q^{n-2}\Big(q^2 - \frac{1}{2}q - \frac{1}{2}\Big) = 0. \tag{11.5}$$

Trivijalno rješenje jednadžbe (11.5) je $q = 0$, dok su netrivijalna rješenja određena korijenima kvadratne jednadžbe i iznose

$$q_{1,2} = \frac{-(-\frac{1}{2}) \pm \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 - 4(-\frac{1}{2})}}{2},$$

odnosno $q_1 = 1$ i $q_2 = -\frac{1}{2}$. Netrivijalna rješenja karakteristične jednadžbe nazivaju se vlastite frekvencije sustava. Homogenu jednadžbu zadovoljavaju nizovi $(q_1)^n$ i $(q_2)^n$ te njihova linerana kombinacija. Opće rješenje homogene jednadžbe (11.4) je oblika

$$y_h[n] = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n = C_1(1)^n + C_2\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Konstante C_1 i C_2 određuju se iz početnih uvjeta $y[-1] = 1$ i $y[-2] = 2$. Vrijedi

$$\begin{cases} y_h[-2] = 2 = C_1(1)^{-2} + C_2\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{-2} \\ y_h[-1] = 1 = C_1(1)^{-1} + C_2\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{-1} \end{cases}$$

Rješavanjem sustava dvije jednadžbe s dvije nepoznanice dobivamo konstante $C_1 = \frac{4}{3}$ i $C_2 = \frac{1}{6}$. Rješenje homogene jednadžbe (11.4) je

$$y_h[n] = \frac{4}{3}(1)^n + \frac{1}{6}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Primjer 11.3. Nađi opće rješenje homogene jednadžbe diferencija

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-2] - \frac{1}{4}y[n-3] = 0.$$

RJEŠENJE: Karakteristična jednadžba zadane jednadžbe diferencija je

$$q^n - \frac{3}{4}q^{n-2} - \frac{1}{4}q^{n-3} = 0,$$

odnosno

$$q^{n-3}\Big(q^3 - \frac{3}{4}q - \frac{1}{4}\Big) = 0.$$

Vlastite frekvencije sustava su korijeni polinoma trećeg reda. Sređivanjem dobivamo

$$q^3 - \frac{3}{4}q - \frac{1}{4} = \Big(q + \frac{1}{2}\Big)\Big(q + \frac{1}{2}\Big)(q-1) = 0.$$

Vlastite frekvencije sustava su sada $q_1 = -\frac{1}{2}$, $q_2 = -\frac{1}{2}$ i $q_3 = 1$. U ovom slučaju jedna vlasita frekvencija je višestruka (dvostruka) pa je opće rješenje homogene jednadžbe diferencija oblika

$$y_h[n] = C_1 q_1^n + C_2 n q_2^n + C_3 q_3^n = (C_1 + C_2 n) q_1^n + C_3 q_3^n,$$

odnosno općenito se za k-struku vlastitu frekvenciju q eksponencijala q^n množi s polinomom stupnja $k-1$ oblika $C_0 + C_1 n + \ldots + C_{k-1} n^{k-1}$. Opće rješenje zadane jednadžbe stoga je

$$y_h[n] = (C_1 + C_2 n)\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n + C_3 1^n.$$

Primjer 11.4. Nađi opće rješenje homogene jednadžbe diferencija

$$y[n] - \frac{1}{2} y[n-1] + \frac{1}{4} y[n-2] = 0.$$

Rješenje: Karakteristična jednadžba je

$$q^n - \frac{1}{2} q^{n-1} + \frac{1}{4} q^{n-2} = q^{n-2}\Big(q^2 - \frac{1}{2} q + \frac{1}{4}\Big) = 0.$$

Vlastite frekvencije sustava su rješenja kvadratne jednadžbe i iznose

$$q_{1,2} = \frac{1}{4} \pm j\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Rješenja možemo zapisati preko modula i argumenta kao

$$q_1 = \frac{1}{4} + j\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} e^{j\pi/3} \quad \text{i} \quad q_2 = \frac{1}{4} - j\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} e^{-j\pi/3}.$$

Opće rješenje je prema tome

$$y_h[n] = C_1\Big(\frac{1}{2} e^{j\pi/3}\Big)^n + C_2\Big(\frac{1}{2} e^{-j\pi/3}\Big)^n.$$

Kompleksne eksponencijalne funkcije koje se javljaju u rješenju možemo napisati pomoću funkcija $\sin[n]$ i $\cos[n]$ kao

$$\begin{aligned} y_h[n] &= C_1\Big(\frac{1}{2} e^{j\pi/3}\Big)^n + C_2\Big(\frac{1}{2} e^{-j\pi/3}\Big)^n = \Big(\frac{1}{2}\Big)^n \Big(C_1 e^{j\pi n/3} + C_2 e^{-j\pi n/3}\Big) \\ &= \Big(\frac{1}{2}\Big)^n \Big(C_1 \cos\frac{\pi n}{3} + jC_1 \sin\frac{\pi n}{3} + C_2 \cos\frac{\pi n}{3} - jC_2 \sin\frac{\pi n}{3}\Big) \\ &= \Big(\frac{1}{2}\Big)^n \Big((C_1 + C_2)\cos\frac{\pi n}{3} + j(C_1 - C_2)\sin\frac{\pi n}{3}\Big). \end{aligned}$$

Uvodimo nove konstante A i B kao

$$A = C_1 + C_2 \quad \text{i} \quad B = j(C_1 - C_2).$$

Konačno rješenje je

$$y_h[n] = \Big(\frac{1}{2}\Big)^n \Big(A\cos\frac{\pi n}{3} + B\sin\frac{\pi n}{3}\Big).$$

Prvi dio homogenog rješenja $(\frac{1}{2})^n$, tj. dio koji ne sadrži trigonometrijske funkcije, naziva se modul vlastite frekvencije, dok se dio rješenja koji sadrži trigonometrijske funkcije naziva faza vlastite frekvencije.

Primjer 11.5. Riješi jednadžbu diferencija

$$y[n] + 2y[n-1] + y[n-2] = u[n]$$

uz pobudu

$$u[n] = \begin{cases} 0, & \text{za } n < 0 \\ n(-1)^n, & \text{za } n \geq 0 \end{cases}$$

te uz početne uvjete $y[-1] = 0$ i $y[-2] = 1$.

Rješenje: Kako je zadana nehomogena jednadžba diferencija prvo rješavamo pripadnu homogenu jednadžbu, pa zatim metodom neodređenih koeficijenata tražimo partikularno rješenje. Odgovarajuća homogena jednadžba je

$$y[n] + 2y[n-1] + y[n-2] = 0.$$

Karakteristična jednadžba je

$$q^{n-2}(q^2 + 2q + 1) = 0,$$

a njeni korijeni su $q_1 = q_2 = -1$. Kako se radi je jednom dvostrukom korijenu homogeno rješenje je oblika

$$y_h[n] = (C_1 + nC_2)(-1)^n.$$

Za zadanu pobudu $u[n] = n(-1)^n$, $n \geq 0$ partikularno rješenje bi trebalo biti oblika

$$y_p[n] = (An + B)(-1)^n,$$

no budući da je frekvencija kompleksne eksponencijale jednaka vlastitoj frekvenciji sustava koja je uz to i dvostruka, partikularno rješenje treba pomnožiti s nizom n^k, gdje je k stupanj višestrukosti vlastite frekvencije. Partikularno rješenje stoga postaje

$$y_p[n] = n^2(An + B)(-1)^n.$$

Uvrštenjem partikularnog rješenja u nehomogenu jednadžbu i primjenom metode neodređenih koeficijenata određujemo konstante A i B. Najprije računamo $y_p[n]$, $y_p[n-1]$ i $y_p[n-2]$:

$$\begin{aligned} y_p[n] &= n^2(An + B)(-1)^n = (An^3 + Bn^2)(-1)^n \\ y_p[n-1] &= (-An^3 + 3An^2 - 3An + A - Bn^2 + 2Bn - B)(-1)^n \\ y_p[n-2] &= (An^3 - 6An^2 + 12An - 8A + Bn^2 - 4Bn + 4B)(-1)^n \end{aligned}$$

Dobivene izraze uvrstimo u jednadžbu diferencija te grupiramo pojedine potencije od n

$$\begin{array}{rlllllllll} & (& An^3 & & & & + Bn^2 & & &)(-1)^n \\ +2 & (& -An^3 & + 3An^2 & - & 3An & + A & - Bn^2 & + 2Bn & - B\ )(-1)^n \\ + & (& An^3 & - 6An^2 & + & 12An & - 8A & + Bn^2 & - 4Bn & + 4B\ )(-1)^n \\ = & (& & & & n & & & &)(-1)^n \end{array}$$

Nakon grupiranja možemo napisati četiri jednadžbe koje određuju koeficijente A i B

$$\begin{aligned} \text{uz } n^3: &\quad A - 2A + A = 0 \\ \text{uz } n^2: &\quad 6A - 6A + B - 2B + B = 0 \\ \text{uz } n^1: &\quad -6A + 12A + 4B - 4B = 6A = 1 \\ \text{uz } n^0: &\quad 2A - 8A - 2B + 4B = -6A + 2B = 0 \end{aligned}$$

Dobivamo $A = 1/6$ i $B = 1/2$. Partikularno rješenje je

$$y_p[n] = \Big(\frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2\Big)(-1)^n, \quad n \geq 0.$$

Ukupno rješenje je zbroj homogenog i partikularnog rješenja

$$y[n] = (C_1 + nC_2)(-1)^n + \Big(\frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2\Big)(-1)^n, \quad n \geq 0.$$

Još je potrebno iz zadanih početnih uvjeta $y[-1]$ i $y[-2]$ odrediti konstante C_1 i C_2. No kako je dobiveno rješenje valjano samo za $n \geq 0$ nije moguće odrediti konstante iz $y[-1]$ i $y[-2]$. Moramo izračunati $y[0]$ i $y[1]$ korak-po-korak

$$\begin{aligned} y[0] &= 0 \cdot (-1)^0 - 2 \cdot 0 - 1 = -1 \\ y[1] &= 1 \cdot (-1)^1 - 2 \cdot (-1) - 1 = 1 \end{aligned}$$

Sada određujemo C_1 i C_2:

$$\begin{aligned} y[0] &= (C_1 + 0C_2)(-1)^0 + \Big(\frac{1}{6}0^3 + \frac{1}{2}0^2\Big)(-1)^0 \\ y[1] &= (C_1 + 1C_2)(-1)^1 + \Big(\frac{1}{6}1^3 + \frac{1}{2}1^2\Big)(-1)^1 \end{aligned}$$

Dobivamo $C_1 = -1$ i $C_2 = -2/3$. Konačno rješenje uz zadane početne uvjete je

$$y[n] = \Big(-1 - \frac{2}{3}n\Big)(-1)^n + \Big(\frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2\Big)(-1)^n, \quad n \geq 0.$$

Primjer 11.6. Riješi jednadžbu diferencija

$$8y[n] - 6y[n-1] + y[n-2] = \delta[n] + 2\delta[n-125]$$

uz početne uvjete $y[-1] = 2^{125} + 2^{250}$ i $y[-2] = 1 + 2^{126} + 2^{252}$.

Rješenje: Problem nam predstavljaju dva dosta razmaknuta impulsa kao pobuda. Pri rješavanju zadatka stoga prvo određujemo odziv na prvi impuls uz zadane početne uvjete. Taj odziv je valjan sve do pojave drugog impulsa, te nam on onda određuje nove početne uvjete za drugi impuls.

Da bi odredili odziv najprije rješavamo pripadnu homogenu jednadžbu. Karakteristična jednadžba je

$$q^{n-2}(8q^2 - 6q + 1) = 0,$$

te su polovi sustava

$$q_1 = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad q_2 = \frac{1}{4}.$$

Rješenje homogene jednadžbe je stoga oblika

$$y_h[n] = C_1\Big(\frac{1}{2}\Big)^n + C_2\Big(\frac{1}{4}\Big)^n.$$

Za prvi impuls konstante C_1 i C_2 ne možemo odrediti iz $y[-1]$ i $y[-2]$ koji su zadani, već moramo najprije izračunati $y[0]$ i $y[1]$ iz

$$\begin{aligned} 8y[0] - 6(2^{125} + 2^{250}) + 1 + 2^{126} + 2^{252} &= 1 \\ 8y[1] - 6y[0] + 2^{125} + 2^{250} &= 0 \end{aligned}$$

Dobivamo $y[0] = 2^{124} + 2^{248}$ i $y[1] = 2^{123} + 2^{246}$. Sada određujemo konstante C_1 i C_2 iz

$$C_1\left(\frac{1}{2}\right)^0 + C_2\left(\frac{1}{4}\right)^0 = 2^{124} + 2^{248}$$
$$C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1 + C_2\left(\frac{1}{4}\right)^1 = 2^{123} + 2^{246}$$

Za konstante dobivamo $C_1 = 2^{124}$ i $C_2 = 4^{124}$ te je prvi dio odziva koji vrijedi do pojavljivanja impulsa $2\delta[n-125]$

$$y[n] = 2^{124}\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4^{124}\left(\frac{1}{4}\right)^n, \quad 0 \leq n < 125.$$

Taj odziv nam sada određuje početne uvjete za drugi impuls. No, ti početni uvjeti su uzorci odziva $y[123]$ i $y[124]$, dok nama za određivanje konstanti C_1 i C_2 za drugi impuls trebaju $y[125]$ i $y[126]$. Stoga najprije moramo odrediti $y[124]$ i $y[123]$, te onda iz njih korak-po-korak $y[125]$ i $y[126]$. Vrijedi

$$y[123] = 2^{124}\left(\frac{1}{2}\right)^{123} + 4^{124}\left(\frac{1}{4}\right)^{123} = 6$$
$$y[124] = 2^{124}\left(\frac{1}{2}\right)^{124} + 4^{124}\left(\frac{1}{4}\right)^{124} = 2$$

te

$$8y[125] - 6 \cdot 2 + 6 = 2$$
$$8y[126] - 6y[125] + 2 = 0$$

pa je $y[125] = 1$ i $y[126] = \frac{1}{2}$. Konstante C_1 i C_2 za drugi impuls određujemo iz

$$C_1\left(\frac{1}{2}\right)^{125} + C_2\left(\frac{1}{4}\right)^{125} = 1$$
$$C_1\left(\frac{1}{2}\right)^{126} + C_2\left(\frac{1}{4}\right)^{126} = \frac{1}{2}$$

Za konstante dobivamo $C_1 = 2^{125}$ i $C_2 = 0$ te je odziv nakon drugog impulsa

$$y[n] = 2^{125}\left(\frac{1}{2}\right)^n + 0\left(\frac{1}{4}\right)^n, \quad 125 \leq n.$$

Konačno rješenje možemo zapisati kao

$$y[n] = \begin{cases} 2^{124}\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4^{124}\left(\frac{1}{4}\right)^n, & 0 \leq n < 125 \\ 2^{125}\left(\frac{1}{2}\right)^n + 0\left(\frac{1}{4}\right)^n, & 125 \leq n \end{cases}$$

Primjer 11.7. Riješi jednadžbu diferencija

$$y[n] + 2y[n-1] + y[n-2] = u[n]$$

uz supstituciju $n - 2 = n'$ ako je zadana pobuda

$$u[n] = \begin{cases} 0, & \text{za } n < 0 \\ n(-1)^n, & \text{za } n \geq 0 \end{cases}.$$

Rješenje: Uvedimo supstituciju $n - 2 = n'$. Dobivamo jednadžbu

$$y[n'+2] + 2y[n'+1] + y[n'] = u[n'+2].$$

Karakteristična jednadžba je

$$q^{n'}(q^2+2q+1)=0.$$

Vlastite frekvencije sustava su $q_1=q_2=-1$. Nehomogena jednadžba je

$$y[n'+2]+2y[n'+1]+y[n']=(n'+2)(-1)^{n'},$$

a partikularno rješenje je oblika

$$y_p[n']={n'}^2(Cn'+D)(-1)^{n'}.$$

Uvrštenjem partikularnog rješenja u nehomogenu jednadžbu i primjenom metode neodređenih koeficijenata određujemo konstante C i D. Najprije računamo $y_p[n']$, $y_p[n'+1]$ i $y_p[n'+2]$:

$$\begin{aligned}
y_p[n'] &= {n'}^2(Cn'+D)(-1)^{n'} = (C{n'}^3+D{n'}^2)(-1)^{n'}\\
y_p[n'+1] &= (-C{n'}^3-3C{n'}^2-3Cn'-C-D{n'}^2-2Dn'-D)(-1)^{n'}\\
y_p[n'+2] &= (C{n'}^3+6C{n'}^2+12Cn'+8C+D{n'}^2+4Dn'+4D)(-1)^{n'}
\end{aligned}$$

Dobivene izraze uvrstimo u jednadžbu diferencija te grupiramo pojedine potencije od n

$$\begin{array}{rlllllllll}
 & (& C{n'}^3 & & & & + D{n'}^2 & & &)(-1)^n\\
+2 & (- & C{n'}^3 & + 3C{n'}^2 & - & 3Cn' - C & - D{n'}^2 & - 2Dn' & - D &)(-1)^n\\
+ & (& C{n'}^3 & + 6C{n'}^2 & + & 12Cn' + 8C & + D{n'}^2 & + 4Dn & + 4D &)(-1)^n\\
= & (& & & & n' & & & + 2 &)(-1)^n
\end{array}$$

Nakon grupiranja možemo napisati četiri jednadžbe koje određuju koeficijente A i B

$$\begin{aligned}
\text{uz } n^3: &\quad C-2C+C=0\\
\text{uz } n^2: &\quad -6C+6C+D-2D+D=0\\
\text{uz } n^1: &\quad -6C+12C+4D-4D=6C=1\\
\text{uz } n^0: &\quad -2C+8C-2D+4D=6C+2D=2
\end{aligned}$$

Dobivamo $C=1/6$ i $D=1/2$, te je partikularno rješenje

$$y_p[n']=\Big(\frac{1}{6}{n'}^3+\frac{1}{2}{n'}^2\Big)(-1)^{n'},\quad n'\geq 2.$$

Konačno rješenje jednadžbe je

$$y[n']=(C_1+n'C_2)(-1)^{n'}+\Big(\frac{1}{6}{n'}^3+\frac{1}{2}{n'}^2\Big)(-1)^{n'},\quad n'\geq 2,$$

gdje konstante C_1 i C_2 ovise o početnim uvjetima.

Primjer 11.8. Riješite jednadžbu diferencija

$$y[n]-0{,}9y[n-1]+0{,}2y[n-2]=u[n]-0{,}5u[n-1]+0{,}06u[n-2]$$

s time da posebno odredite rješenje pripadne homogene jednadžbe i partikularno rješenje. Neka su početni uvjeti $y[-1]$ i $y[-2]$ jednaki nuli i neka je pobuda

$$u[n]=\begin{cases} 0, & \text{za } n<0\\ (-0{,}6)^n, & \text{za } n\geq 0\end{cases}$$

Rješenje: Najprije određujemo opće rješenje homogene jednadžbe. Karakteristična jednadžba je

$$yq^n - 0{,}9q^{n-1} + 0{,}2q^{n-2} = 0$$

i njeni korijeni su $q_1 = 0{,}5$ i $q_2 = 0{,}4$. Rješenje homogene jednadžbe je stoga oblika

$$y_h[n] = C_1 0{,}5^n + C_2 0{,}4^n.$$

Kako je zadana pobuda oblika $u[n] = Uz_1^n$ partikularno rješenje je također tog oblika, dakle

$$y_p[n] = Yz_1^n.$$

Pri tome su U i Y kompleksne amplitude. Y određujemo uvrštavanjem partikularnog rješenja u zadanu jednadžbu,

$$Yz_1^n - 0{,}9Yz_1^{n-1} + 0{,}2Yz_1^{n-2} = Uz_1^n - 0{,}5Uz_1^{n-1} + 0{,}06Uz_1^{n-2},$$

te dobivamo

$$\frac{Y}{U} = \frac{1 - 0{,}5z_1^{-1} + 0{,}06z_1^{-2}}{1 - 0{,}9z_1^{-1} + 0{,}2z_1^{-2}} = H(z_1).$$

$H(z_1)$ predstavlja vrijednost prijenosne funkcije sustava

$$H(z) = \frac{1 - 0{,}5z^{-1} + 0{,}06z^{-2}}{1 - 0{,}9z^{-1} + 0{,}2z^{-2}}$$

izračunate na frekvenciji z_1, dakle

$$H(z_1) = H(-0{,}6) = \frac{1 - 0{,}5(-0{,}6)^{-1} + 0{,}06(-0{,}6)^{-2}}{1 - 0{,}9(-0{,}6)^{-1} + 0{,}2(-0{,}6)^{-2}} = 0{,}6\dot{5}\dot{4}.$$

Partikularno rješenje je

$$y_p[n] = 0{,}6\dot{5}\dot{4}(-0{,}6)^n, \quad n \geq 0.$$

Ukupno rješenje je zbroj partikularnog i homogenog rješenja,

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n] = C_1 0{,}5^n + C_2 0{,}4^n + 0{,}6\dot{5}\dot{4}(-0{,}6)^n, \quad n \geq 0.$$

Konstante C_1 i C_2 određujemo iz početnih uvjeta $y[0]$ i $y[1]$, no kako su zadani samo $y[-2]$ i $y[-1]$ prvo moramo odrediti $y[0]$ i $y[1]$:

$$y[0] = 0{,}9y[-1] - 0{,}2y[-2] + u[0] - 0{,}5u[-1] + 0{,}06u[-2] = 1$$
$$y[1] = 0{,}9y[0] - 0{,}2y[-1] + u[1] - 0{,}5u[0] + 0{,}06u[-1] = 0{,}9 - 0{,}6 - 0{,}5 = -0{,}2$$

Uvrštavanjem početnih uvjeta i ukupnog rješenja u zadanu jednadžbu dobivamo sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice C_1 i C_2:

$$C_1 + C_2 = 0{,}34\dot{5}\dot{4}$$
$$0{,}5C_1 + 0{,}4C_2 = 0{,}19\dot{2}\dot{7}$$

Dobivamo $C_1 = 0{,}54\dot{5}\dot{4}$ i $C_1 = -0{,}2$, te je konačno rješenje

$$y[n] = 0{,}54\dot{5}\dot{4} \cdot 0{,}5^n - 0{,}2 \cdot 0{,}4^n + 0{,}6\dot{5}\dot{4}(-0{,}6)^n, \quad n \geq 0.$$

Partikularno rješenje nazivamo titranjem frekvencijom pobude, dok ostatak rješenja opisuje titranje vlastitim frekvencijama zbog neskalda između početnog i konačnog stanja sustava.

Zadatak 11.1. Postupkom u vremenskom području izračunajte odziv diskretnog sustava

$$y[n] + y[n-1] = u[n]$$

na pobudu

$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \sin(n\frac{\pi}{6}), & n \geq 0 \end{cases}.$$

Početni uvjeti su jednaki nuli.

RJEŠENJE: Partikularno rješenje je

$$y_p[n] = \frac{1}{2}\sin\Big(\frac{n\pi}{6}\Big) + \frac{2-\sqrt{3}}{2}\cos\Big(\frac{n\pi}{6}\Big),$$

dok je ukupni odziv

$$y[n] = \frac{-2+\sqrt{3}}{2}(-1)^n + \frac{1}{2}\sin\Big(\frac{n\pi}{6}\Big) + \frac{2-\sqrt{3}}{2}\cos\Big(\frac{n\pi}{6}\Big), \quad n \geq 0.$$

11.3. Konvolucijska suma

Pomoću konvolucijske sume možemo odrediti odziv sustava odnosno rješenje jednadžbe diferencija na bilo kakvu pobudu ako znamo odziv na jedinični δ impuls. Za linearan vremenski nepromjenjiv sustav vrijedi

$$y[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} u[i]h[n-i], \tag{11.6}$$

odnosno

$$y[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h[i]u[n-i]. \tag{11.7}$$

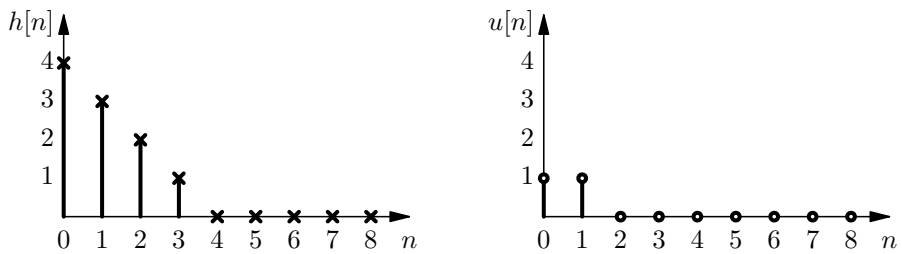
Kako uobičajeno promatramo samo kauzalne sustave te nas zanima odziv na pobudu zadanu za $n \geq 0$ relacije (11.6) i (11.7) prelaze u

$$y[n] = \sum_{i=0}^{n} u[i]h[n-i], \tag{11.8}$$

i

$$y[n] = \sum_{i=0}^{n} h[i]u[n-i]. \tag{11.9}$$

Primjer 11.9. Korištenjem konvolucijske sume odredi odziv diskretnog sustava s impulsnim odzivom $h[n]$ ako je sustav pobuđen signalom $u[n]$. $h[n]$ i $u[n]$ su prikazani na slici 11.1..



Slika 11.1.: Impulsni odziv $h[n]$ i pobuda $u[n]$

RJEŠENJE: Rješenje određujemo prema izrazu (11.8). Za $n = 0$ je

$$y[0] = \sum_{i=0}^{0} u[i]h[-i] = u[0]h[0] = 1 \cdot 4 = 4$$

što je prikazano na slici 11.2.. Za $n = 1$ je

$$y[1] = \sum_{i=0}^{1} u[i]h[1-i] = u[0]h[1] + u[1]h[0] = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 7,$$

za $n = 2$ je

$$y[2] = \sum_{i=0}^{2} u[i]h[2-i] = u[0]h[2] + u[1]h[1] = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 5,$$

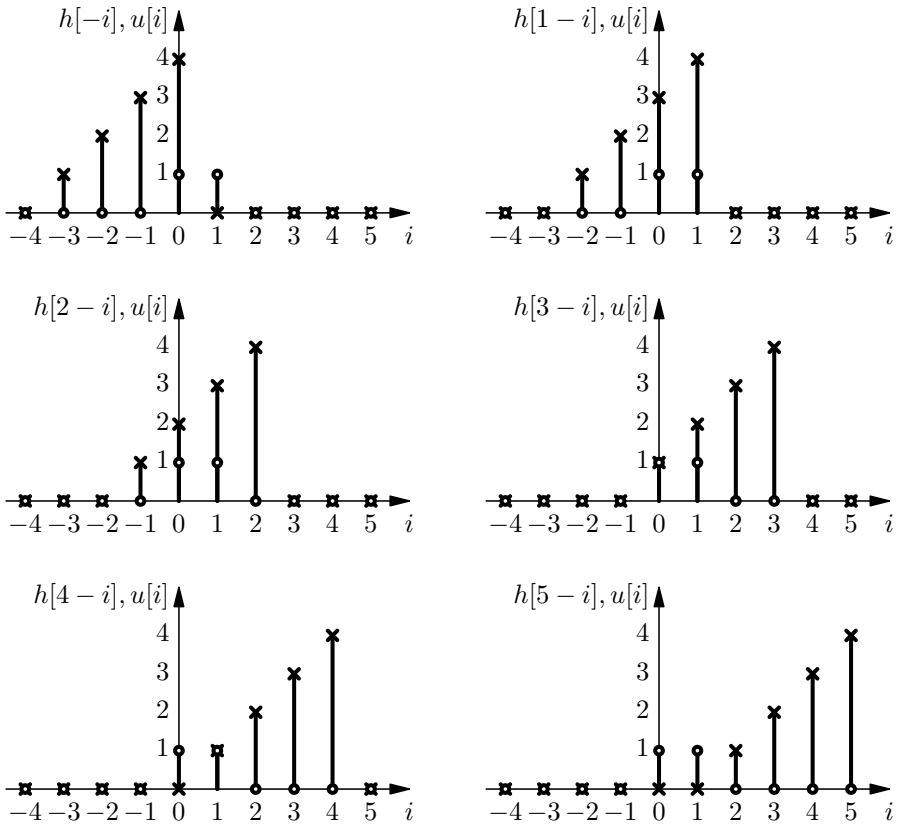
za $n = 3$ je

$$y[3] = \sum_{i=0}^{3} u[i]h[3-i] = u[0]h[3] + u[1]h[2] = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3,$$

za $n = 4$ je

$$y[4] = \sum_{i=0}^{4} u[i]h[4-i] = u[1]h[3] = 1 \cdot 1 = 1,$$

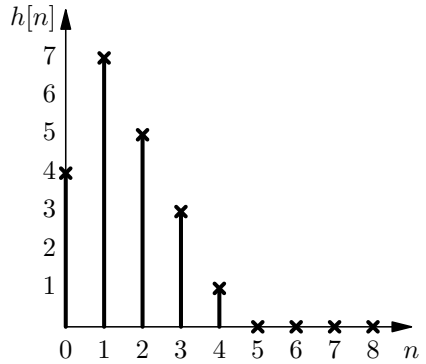
dok je za sve ostale $n \geq 5$ rezultat nula. Grafičko računanje prikazano na slici 11.2. se vrši tako da okrenemo impulsni odziv oko y-osi (točnije, crtamo $h[-n]$) pa ga onda pomičemo udesno te množimo s pobudom. Konačan odziv je prikazan na slici 11.3..



Slika 11.2.: Grafičko računanje konvolucije

Primjer 11.10. Koristeći konvoluciju odredi odziv diskretnog sustava zadanog jednadžbom diferencija

$$\sqrt{6}y[n] + (\sqrt{2} - \sqrt{3})y[n-1] - y[n-2] = u[n]$$



Slika 11.3.: Odziv

na pobudu

$$u[n] = \begin{cases} (\sqrt{2}+\sqrt{3})\Big(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\Big)^n, & \text{za } n \geq 0 \\ 0, & \text{za } n < 0 \end{cases}.$$

Rješenje: Da bi pomoću konvolucije odredili odziv sustava najprije moramo izračunati impuslni odziv $h[n]$. Korijeni karakteristične jednadžbe su

$$q_{1,2} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{4} \pm \sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 + 4\sqrt{6}}}{2\sqrt{6}},$$

odnosno

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{i} \quad q_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Impulsni odziv je odziv mrtvog sustava na jedinični impuls i za $n > 0$ je oblika

$$h[n] = C_1\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^n + C_2\Big(-\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)^n.$$

Da bi odredili konstante moramo odrediti vrijednosti $h[1]$ i $h[2]$. No primijetite da je u ovom slučaju iz početnih uvjeta $h[-2] = h[-1] = 0$ dovoljno odrediti $h[0]$ te jedinični impuls u nuli interpretirati kao početni uvjet $h[0]$. S takvom interpretacijom vidimo da ustvari tražimo rješenje homogene jednadžbe s zadanim početnim uvjetima $h[0]$ i $h[-1]$. Da bi odredili konstante C_1 i C_2 sada rješavamo sustav

$$h[-1] = 0 = C_1\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^{-1} + C_2\Big(-\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)^{-1}$$
$$h[0] = \frac{1}{\sqrt{6}} = C_1\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^{0} + C_2\Big(-\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)^{0}$$

odnosno

$$\sqrt{2}C_1 - \sqrt{3}C_2 = 0$$
$$C_1 + C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}$$

te dobivamo

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \quad \text{i} \quad C_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}.$$

Impulsni odziv je

$$h[n] = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^n + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\Big(-\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)^n.$$

Odziv je konvolucija pobude i impulsnog odziva:

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \sum\nolimits_{i=1}^{n} h[i]u[n-i] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\Big(-\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)^{i}\Big)(\sqrt{2}+\sqrt{3})\Big(-\frac{1}{\sqrt{5}}\Big)^{n-i} \\
&= \Big(-\frac{1}{\sqrt{5}}\Big)^{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\Big)^{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\Big)^{i}\Big) \\
&= \Big(-\frac{1}{\sqrt{5}}\Big)^{n}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1-\big(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\big)^{n+1}}{1+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1-\big(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\big)^{n+1}}{1-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}}\Big)
\end{aligned}
$$

Nakon sređivanja kao konačni odziv sustava na zadanu pobudu dobivamo

$$
y[n] = \frac{\sqrt{5}}{2+\sqrt{10}}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^{n} - \frac{\sqrt{5}}{3-\sqrt{15}}\Big(-\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)^{n} + \frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})}\Big(-\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)^{n}.
$$

Zadatak 11.2. Koristeći konvoluciju odredi odziv diskretnog sustava zadanog jednadžbom diferencija

$$
15y[n] - 2y[n-1] - y[n-2] = u[n]
$$

na pobudu

$$
u[n] = \begin{cases} (-\frac{1}{7})^{n}, & \text{za } n \geq 0 \\ 0, & \text{za } n < 0 \end{cases}.
$$

Rješenje: $y[n] = \frac{7}{240}\Big(\frac{1}{3}\Big)^{n} + \frac{7}{80}\Big(-\frac{1}{5}\Big)^{n} - \frac{1}{20}\Big(-\frac{1}{7}\Big)^{n}$

Primjer 11.11. Diskretni sustav opisan je jednadžbom diferencija

$$
y[n] - \frac{1}{16}y[n-2] = u[n-1] - u[n-2].
$$

Korištenjem konvolucije odredite odziv na pobudu

$$
u[n] = \begin{cases} 0, & \text{za } n < 0 \\ \Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n}, & \text{za } n \geq 0 \end{cases}
$$

Rješenje: Za računanje konvolucijske suma prema izrazu (11.8) moramo najprije odrediti impulsni odziv sustava. Za pobudu $\delta[n]$ zadana jednadžba prelazi u homogenu za $n \geq 3$, pa rješavanjem te homogene jednadžbe određujemo impulsni odziv $h[n]$ za sve $n \geq 3$. Prva tri elementa impulsnog odziva $h[0]$, $h[1]$ i $h[2]$ određujemo izravno iz jednadžbe. Odredimo prvo impulsni odziv za $n \geq 3$ rješavanjem jednadžbe

$$
h[n] - \frac{1}{16}h[n-2] = 0.
$$

Karakteristična jednadžba je

$$
q^{n} - \frac{1}{16}q^{n-2} = q^{n-1}\Big(q^{2} - \frac{1}{16}\Big) = 0,
$$

te su vlastite frekvencije sustava $q_{1,2} = \pm 1/4$. Impulsni odziv je oblika

$$
h[n] = C_1\Big(\frac{1}{4}\Big)^{n} + C_2\Big(-\frac{1}{4}\Big)^{n}, \quad n \geq 3.
$$

Za određivanje konstatni C_1 i C_2 potrebno je odrediti $h[3]$ i $h[4]$. Njih određujemo iz polazne jednadžbe, a usput određujemo i prva tri elementa impulsnog odziva. Polaznu jednadžbu zapisujemo kao

$$h[n] = \frac{1}{16}h[n-2] + \delta[n-1] - \delta[n-2],$$

pa računamo korak-po-korak:

$$\begin{aligned}
n = 0: &\quad h[0] = \frac{1}{16}h[-2] + \delta[-1] - \delta[-2] = 0 \\
n = 1: &\quad h[1] = \frac{1}{16}h[-1] + \delta[0] - \delta[-1] = 1 \\
n = 2: &\quad h[2] = \frac{1}{16}h[0] + \delta[1] - \delta[0] = -1 \\
n = 3: &\quad h[3] = \frac{1}{16}h[1] + \delta[2] - \delta[1] = \frac{1}{16} \\
n = 4: &\quad h[4] = \frac{1}{16}h[2] + \delta[3] - \delta[2] = -\frac{1}{16}
\end{aligned}$$

Sada određujemo C_1 i C_2

$$\begin{aligned}
h[3] &= \frac{1}{16} = C_1\Big(\frac{1}{4}\Big)^3 + C_2\Big(-\frac{1}{4}\Big)^3 \\
h[4] &= -\frac{1}{16} = C_1\Big(\frac{1}{4}\Big)^4 + C_2\Big(-\frac{1}{4}\Big)^4
\end{aligned}$$

Dobivamo $C_1 = -6$ i $C_2 = -10$. Impulsni odziv je stoga:

$$h[n] = \begin{cases} 0, & \text{za } n = 0 \\ 1, & \text{za } n = 1 \\ -1, & \text{za } n = 2 \\ -6\Big(\frac{1}{4}\Big)^n - 10\Big(-\frac{1}{4}\Big)^n, & \text{za } n \geq 3 \end{cases}.$$

Odziv sustava na pobudu dobivamo kao kovoluciju pobude u impulsnog odziva prema (11.9):

$$\begin{aligned}
y[n] &= h[0]u[n] + h[1]u[n-1] + h[2]u[n-2] + \sum\nolimits_{i=3}^{n} h[i]u[n-i] \\
&= \Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1} - \Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-2} + \sum_{i=3}^{n}\Big(-6\Big(\frac{1}{4}\Big)^i - 10\Big(-\frac{1}{4}\Big)^i\Big)\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-i} \\
&= -2\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n - 4\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n + \Big(-\frac{1}{2}\Big)^n\Big(-6\sum_{i=3}^{n}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^i - 10\sum_{i=3}^{n}\Big(\frac{1}{2}\Big)^i\Big) \\
&= \Big(-\frac{1}{2}\Big)^n\Big(-2 - 4 - 6\sum_{i=3}^{n}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^i - 10\sum_{i=3}^{n}\Big(\frac{1}{2}\Big)^i\Big) \\
&= \Big(-\frac{1}{2}\Big)^n\Big(-6 - 6\sum_{i=0}^{n-3}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{i+3} - 10\sum_{i=0}^{n-3}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{i+3}\Big) \\
&= \Big(-\frac{1}{2}\Big)^n\Big(-6 + \frac{3}{4}\sum_{i=0}^{n-3}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^i - \frac{5}{4}\sum_{i=0}^{n-3}\Big(\frac{1}{2}\Big)^i\Big) \\
&= \Big(-\frac{1}{2}\Big)^n\Big(-6 + \frac{3}{4}\frac{1-(-\frac{1}{2})^{n-2}}{1-(-\frac{1}{2})} - \frac{5}{4}\frac{1-(\frac{1}{2})^{n-2}}{1-\frac{1}{2}}\Big) \\
&= \Big(-\frac{1}{2}\Big)^n\Big(-6 + \frac{1}{2} - 2\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n - \frac{5}{2} + 10\Big(\frac{1}{2}\Big)^n\Big)
\end{aligned}$$

te je konačno rješenje

$$y[n] = -8\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n - 2\Big(\frac{1}{4}\Big)^n + 10\Big(-\frac{1}{4}\Big)^n, \quad n \geq 0.$$

Zadatak 11.3. Pomoću konvolucijske sume odredite analitički odziv sustava

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = u[n] + u[n-1]$$

na pobudu $u[n] = (\frac{1}{2})^n$.

Rješenje: Impulsni odziv sustava je $h[n] = 3(\frac{1}{2})^n - 2\delta[n]$ što uz pobudu $u[n] = (\frac{1}{2})^n$ daje odziv $y[n] = (\frac{1}{2})^n(1+3n)$.

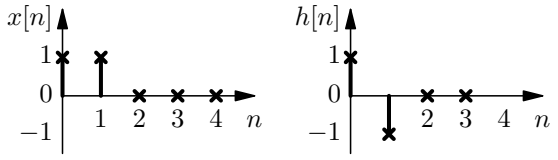
Primjer 11.12. Neka je diskretni signal

$$x[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$$

i neka je impulsni odziv diskretnog sustava

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

kako je prikazano na slici 11.4.. Odredite odziv sustava $y[n]$ u vremenskoj domeni korištenjem konvolucije i korištenjem Fouirerove transformacije.



Slika 11.4.: Impulsni odziv $h[n]$ i pobuda $x[n]$

Rješenje: Konvolucijskom sumom dobivamo

$$\begin{aligned}
y[0] &= \sum\nolimits_{i=0}^{0} x[i]h[-i] = 1 \cdot 1 = 1 \\
y[1] &= \sum\nolimits_{i=0}^{1} x[i]h[1-i] = -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0 \\
y[2] &= \sum\nolimits_{i=0}^{2} x[i]h[2-i] = 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 = -1
\end{aligned}$$

dok je za sve $n > 2$ odziv $y[n] = 0$. Rješenje je stoga

$$y[n] = \delta[n] - \delta[n-2].$$

Odziv u frekvencijskoj domeni određujemo kao produkt

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}),$$

što odgovara konvoluciji u vremenskoj domeni. Fourireova transformacija signala $x[n]$ je

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}_{\mathrm{vd}}\big[x[n]\big] = \sum\nolimits_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{j\omega n} = 1 + e^{-j\omega},$$

dok je prijenosna funkcija zadanog sustava

$$H(e^{j\omega} = \mathcal{F}_{\mathrm{vd}}\big[h[n]\big] = \sum\nolimits_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{j\omega n} = 1 - e^{-j\omega}.$$

Odziv u frekvencijskoj domeni je

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = (1 + e^{-j\omega})(1 - e^{-j\omega}) = 1 - e^{-2j\omega}.$$

Za određivanje odziva u vremenskoj domeni određujemo inverznu Fourierovu transformaciju

$$\begin{aligned}
y[n] &= \mathcal{F}_{\text{vd}}^{-1}\left[1 - e^{-2j\omega}\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1 - e^{-2j\omega})\, e^{-j\omega n} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega n}\, d\omega - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-2)}\, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{jn} e^{j\omega n}\Big|_{-\pi}^{pi} - \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{j(n-2)} e^{j\omega(n-2)}\Big|_{-\pi}^{pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{e^{j\pi n} - e^{-j\pi n}}{jn} - \frac{1}{2\pi}\frac{e^{j\pi(n-2)} - e^{-j\pi(n-2)}}{j(n-2)}
\end{aligned}$$

Oba člana prepoznajemo kao $\text{sinc}(n)$ funkcije te je

$$y[n] = \text{sinc}(n) - \text{sinc}(n-2).$$

Kako je za cijelobrojni n

$$\text{sinc}(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases},$$

odziv možemo zapisati kao

$$y[n] = \delta[n] - \delta[n-2],$$

što odgovara rezultatu dobivenom konvolucijom.

Zadatak 11.4. Na ulaz diskretnog sustava narinut je signal

$$u_1[n] = \left\{\underline{\frac{1}{2}}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \dots\right\}.$$

Odziv mrtvog sustava na narinuti signal je

$$y_1[n] = \left\{\underline{0}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \dots\right\}.$$

Odredite impulsni odziv sustava i odziv sustava na pobudu

$$u_2[n] = \{\underline{1}, -3, 1, 0, 0, 0, \dots\}$$

koristeći konvoluciju.

Rješenje: Impulsni odziv sustava je

$$h[n] = \{\underline{0}, -1, 3, -1, 0, 0, \dots\} = -\delta[n-1] + 3\delta[n-2] - \delta[n-3],$$

a odziv na zadanu pobudu $u_2[n]$ je

$$y_2[n] = \{\underline{0}, -1, 6, -11, 6, -1, 0, 0, 0, \dots\}.$$

11.4. Rješavanja jednadžbi diferencija pomoću Z transformacije

Primjer 11.13. Pomoću $\mathcal{Z}$ transformacije nađi rješenje jednadžbe diferencija

$$y[n+2] - 3y[n+1] + 2y[n] = 2u[n+1] - 2u[n]$$

uz pobudu

$$u[n] = \begin{cases} 0, & \text{za } n < 0 \\ n, & \text{za } n \geq 0 \end{cases}$$

i uz zadane početne uvjete $y[-1] = 0$ i $y[-2] = 0$.

Rješenje: Zanima nas samo rješenje od koraka nula jer tek u tom trenutku počinje djelovati pobuda $u[n]$. Najprije je potrebno prebaciti jednadžbu diferencija u $\mathcal{Z}$ domenu:

$$z^2Y(z) - z^2y[0] - zy[1] - 3zY(z) + 3zy[0] + 2Y(z) = 2zU(z) - 2zu[0] - 2U(z)$$

Sređivanjem jednadžbe dobivamo rješenje u $\mathcal{Z}$ domeni:

$$(z^2 - 3z + 2)Y(z) - (z^2 - 3z)y[0] - zy[1] = (2z - 2)U(z) - 2zu[0]$$

$$Y(z) = \frac{2z-2}{z^2-3z+2}U(z) - \frac{2zu[0]}{z^2-3z+2} + \frac{(z^2-3z)y[0] + zy[1]}{z^2-3z+2}$$

Kao što smo i očekivali, rješenje ovisi o pobudi $u[n]$ te o početnim uvjetima $y[0]$ i $y[1]$. Kako nisu zadani $y[0]$ i $y[1]$ već samo $y[-1]$ i $y[-2]$ potrebno je odrediti $y[0]$ i $y[1]$ iz zadanih početnih uvjeta. Rješavamo sustav:

$$\begin{cases} y[0] - 3y[-1] + 2y[-2] = 2u[-1] - 2u[-2] \\ y[1] - 3y[0] + 2y[-1] = 2u[0] - 2u[-1] \end{cases}$$

Kako pobuda $u[n]$ postoji samo za $n \geq 0$ otpadaju članovi $u[-1]$ i $u[-2]$:

$$\begin{cases} y[0] = -2y[-2] + 3y[-1] \\ y[1] = -2y[-1] + 3y[0] + 2u[0] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y[0] = -2y[-2] + 3y[-1] \\ y[1] = 7y[-1] - 6y[-2] + 2u[0] \end{cases}$$

Nakon uvrštavanja odziv u $\mathcal{Z}$ domeni postaje

$$\begin{aligned} Y(z) = &\frac{2z-2}{z^2-3z+2}U(z) - \frac{2zu[0]}{z^2-3z+2} \\ &+ \frac{(z^2-3z)(-2y[-2] + 3y[-1]) + z(7y[-1] - 6y[-2] + 2u[0])}{z^2-3z+2}, \end{aligned}$$

odnosno nakon sređivanja

$$Y(z) = \frac{2z-2}{z^2-3z+2}U(z) + \frac{(3z^3-2z)y[-1] - 2z^2y[-2]}{z^2-3z+2}.$$

Odziv u vremenskoj domeni određujemo inverznom $\mathcal{Z}$ transformacijom uz uvrštavanje početnih uvjeta $y[-1] = 0$ i $y[-2] = 0$

$$y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{2z-2}{z^2-3z+2}U(z)\right],$$

dok $\mathcal{Z}$ transformaciju pobude očitamo iz tablica

$$U(z) = \mathcal{Z}\left[ns[n]\right] = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Sada za $Y(z)$ dobivamo

$$Y(z) = \frac{2z-2}{z^2-3z+2}\frac{z}{(z-1)^2} = \frac{2z}{(z-1)^2(z-2)}.$$

Kako dobivena racionalna funkcija ima tri pola od kojih je jedan dvostruki, rastav na parcijalne razlomke je oblika:

$$Y(z) = \alpha_0 + \alpha_1\frac{z}{z-1} + \alpha_2\frac{z^2}{(z-1)^2} + \alpha_3\frac{z}{z-2}.$$

Određujemo koeficijente α_0, α_2 i α_3:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \left.\frac{2z}{(z-1)^2(z-2)}\right|_{z=0} = \frac{2\cdot 0}{(0-1)^2(0-2)} = 0\\
\alpha_2 &= \left.\frac{(z-1)^2}{z^2}\frac{2z}{(z-1)^2(z-2)}\right|_{z=1} = \frac{2}{1(1-2)} = -2\\
\alpha_3 &= \left.\frac{z-2}{z}\frac{2z}{(z-1)^2(z-2)}\right|_{z=2} = \frac{2}{(2-1)^2} = 2
\end{aligned}$$

Još preostaje odrediti koeficijent α_1. Taj koeficijent određujemo iz rastava funkcije $Y(z)$ za neki odabrani z, npr. $z = 3$:

$$Y(3) = \frac{2\cdot 3}{(3-1)^2(3-2)} = 0 + \alpha_1\frac{3}{3-1} - 2\frac{3^2}{(3-1)^2} + 2\frac{3}{3-2}$$

$$\frac{6}{4} = \alpha_1\frac{3}{2} + \frac{3}{2}$$

$$\alpha_1 = 0$$

Konačni rastav u $\mathcal{Z}$ domeni je

$$Y(z) = -2\frac{z^2}{(z-1)^2} + 2\frac{z}{z-2}$$

dok je rješenje jednadžbe diferencija na zadanu pobudu $u[n]$ uz početne uvjete $y[-1] = 0$ i $y[-2] = 0$

$$y[n] = -2(n+1)1^n + 2\cdot 2^n, \quad n \geq 0.$$

Primjer 11.14. Pomoću $\mathcal{Z}$ transformacije nađi rješenje jednadžbe diferencija

$$y[n+2] - 3y[n+1] + 2y[n] = 2u[n+1] - 2u[n]$$

uz supstituciju $n' = n + 2$. Neka je pobuda

$$u[n] = \begin{cases} 0, & \text{za } n < 0\\ n, & \text{za } n \geq 0 \end{cases}$$

i neka su početni uvjeti $y[-1] = 0$ i $y[-2] = 0$.

Rješenje: Najprije uvodimo supstituciju u zadanu jednadžbu diferencija. Dobivamo novu jednadžbu

$$y[n'] - 3y[n'-1] + 2y[n'-2] = 2u[n'-1] - 2u[n'-2].$$

Ovakav oblik jednadžbe diferencija je najčešći jer se može odmah prikazati preko operatora kašnjenja E^{-1}. Sada prebacujemo jednadžbu u $\mathcal{Z}$ domenu

$$\begin{aligned} Y(z) - 3z^{-1}Y(z) - 3y[-1] + 2z^{-2}Y(z) + 2y[-2] + 2z^{-1}y[-1] = \\ = 2z^{-1}U(z) + 2u[-1] - 2z^{-2}U(z) - 2u[-2] - 2z^{-1}u[-1] \end{aligned}$$

Nakon sređivanja dobivamo

$$\begin{aligned} Y(z) = \frac{2z-2}{z^2-3z+2}U(z) + \frac{(2z^2-2z)u[-1] - 2z^2u[-2]}{z^2-3z+2} \\ + \frac{(3z^2-2z)y[-1] - 2z^2y[-2]}{z^2-3z+2} \end{aligned}$$

Uvrštavanjem zadanih početnih uvjeta i pobude dobivamo rješenje u $\mathcal{Z}$ domeni

$$Y(z) = \frac{2z-2}{z^2-3z+2}U(z) = \frac{2z}{(z-1)^2(z-2)}.$$

Što nam nakon prebacivanja u vremensku domenu daje rješenje

$$y[n] = -2(n+1)1^n + 2 \cdot 2^n, \quad n \geq 0.$$

Primjer 11.15. Odredi odziv diskretnog sustava zadanog jednadžbom diferencija

$$y[n] + y[n-2] = u[n]$$

na pobudu

$$u[n] = \begin{cases} 0, & \text{za } n < 0 \\ 1, & \text{za } n \geq 0 \end{cases}$$

uz zadane početne uvjete $y[-1] = 0$ i $y[-2] = 0$.

Rješenje: Prebacujemo zadanu jednadžbu u $\mathcal{Z}$ domenu odmah uzimajući u obzir i zadane početne uvjete

$$Y(z) + z^{-2}Y(z) = \frac{z}{z-1}.$$

Nakon sređivanja dobivamo

$$Y(z) = \frac{1}{1+z^{-2}}\frac{z}{z-1} = \frac{z^3}{(z-1)(z-j)(z+j)}.$$

Dobivena racionalna funkcija ima tri različita pola te je rastav na parcijalne razlomke oblika

$$Y(z) = \alpha_0 + \alpha_1\frac{z}{z-1} + \alpha_2\frac{z}{z-j} + \alpha_3\frac{z}{z+j}$$

Odmah određujemo sve koeficijente rastava:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \left.\frac{z^3}{(z-1)(z-j)(z+j)}\right|_{z=0} = 0 \\ \alpha_1 &= \left.\frac{z-1}{z}\frac{z^3}{(z-1)(z-j)(z+j)}\right|_{z=1} = \frac{1^2}{(1-j)(1+j)} = \frac{1}{1-j+j+1} = \frac{1}{2} \\ \alpha_2 &= \left.\frac{z-j}{z}\frac{z^3}{(z-1)(z-j)(z+j)}\right|_{z=j} = \frac{j^2}{(j-1)2j} = \frac{-1}{2(-1-j)} = \frac{1-j}{4} \\ \alpha_3 &= \left.\frac{z+j}{z}\frac{z^3}{(z-1)(z-j)(z+j)}\right|_{z=-j} = \frac{(-j)^2}{(-j-1)(-2j)} = \frac{-1}{2(-1+j)} = \frac{1+j}{4} \end{aligned}$$

Sada je

$$Y(z) = 0 + \frac{1}{2}\frac{z}{z-1} + \frac{1-j}{4}\frac{z}{z-j} + \frac{1+j}{4}\frac{z}{z+j}$$

što nakon inverzne transformacije postaje

$$y[n] = \frac{1}{2}1^n + \frac{1-j}{4}j^n + \frac{1+j}{4}(-j)^n.$$

Kako je početna jednadžba jednadžba s realnim koeficijentima očekujemo čisto realno rješenje. Potrebno je još na odgovarajući način grupirati kompleksne eksponencijale:

$$y[n] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\big(e^{\frac{j\pi n}{2}} + e^{-\frac{j\pi n}{2}}\big) - \frac{j}{4}\big(e^{\frac{j\pi n}{2}} + e^{-\frac{j\pi n}{2}}\big).$$

Konačno rješenje zadanog sustava je

$$y[n] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi n}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi n}{2}, \quad n \geq 0.$$

Primjer 11.16. Fibbonaccijevi brojevi $\{c_n\}$ definirani su rekurzivno

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 1, \quad c_n = c_{n-1} + c_{n-2}, \quad n \geq 2$$

što možemo promatrati i kao jednadžbu diferencija. Riješi tu jednadžbu:

a) metodom korak-po-korak,

b) klasičnim načinom,

c) korištenjem funkcije izvodnice

d) korištenjem $\mathcal{Z}$ transformacije.

Rješenje: Metoda korak-po-korak je najjednostavnija metoda, no ne daje nam analitičko rješenje. Računa se svaki novi član c_n na temelju dva prethodna prema definicijskoj relaciji $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$, $n \geq 2$. Dobivamo niz

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89, \ldots$$

Metoda korak po korak obično se implementira na računalu, npr. pomoću jednostavnog programa prikazanog na slici 11.5..

```
long int fibbonaci(int n) {
        int i;
        long int c1, c2, cn;
        cn = 1; c1 = 1; c2 = 1;
        for(i = 3; i <= n; i++) {
                cn = c1 + c2;
                c1 = c2;
                c2 = cn;
        } /* for */

        return( cn );
} /* fibbonaci */
```

Slika 11.5.: C funkcija za računanje Fibbonacijevih brojeva

Kod rješavanja klasičnim načinom rješavamo jednadžbu

$$c_n = c_{n-1} + c_{n-2}.$$

Karakteristična jednadžba je

$$q^n = q^{n-1} + qn - 2,$$

odnosno nakon sređivanja

$$q^{n-2}(q^2 - q - 1) = 0.$$

Netrivijalni korijeni karakteristične jednadžbe su

$$q_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

te je rješenje jednadžbe diferencija oblika

$$c_n = C_1\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + C_2\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n.$$

Konstante C_1 i C_2 određujemo iz početnih uvjeta $c_0 = 1$ i $c_1 = 1$:

$$\begin{aligned} c_0 = 1 &= C_1\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^0 + C_2\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^0 = C_1 + C_2 \\ c_1 = 1 &= C_1\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^1 + C_2\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^1 = C_1\frac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Dobivamo

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{i} \quad C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

te možemo napisati konačno rješenje

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1}, \quad n \geq 0.$$

Funkcija $F(z,x)$ dvije kompleksne varijable z i x je izvodnica niza funkcija $f_n(x)$ ako za svaki z na nekom krugu $|z| < R$ vrijedi

$$F(z,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) z^n. \tag{11.10}$$

Funkcija izvodnica se koristi pri proučavanju svojstava niza $\{f_n\}$. Odredimo funkciju $F(z)$ za Fibonaccijeve brojeve:

$$\begin{aligned} \sum\nolimits_{n=0}^{+\infty} c_n z^n &= c_0 + zc_1 + \sum\nolimits_{n=2}^{+\infty} c_n z^n \\ &= 1 + z + \sum\nolimits_{n=2}^{+\infty} (c_{n-1} + c_{n-2}) z^n \\ &= 1 + z + \sum\nolimits_{n=2}^{+\infty} c_{n-1} z^n + \sum\nolimits_{n=2}^{+\infty} c_{n-2} z^n \\ &= 1 + \underbrace{z + z\sum\nolimits_{n=1}^{+\infty} c_n z^n}_{z\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n} + z^2 \sum\nolimits_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \end{aligned}$$

Nakon sređivanja dobivamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \frac{1}{1 - z - z^2}.$$

Time smo odredili funkciju izvodnicu za Fibbonacijeve brojeve. Da bi odredili izraz za opći član niza c_n potrebno je razviti funkciju izvodnicu $F(z)$ u Maclaurinov red, no prije toga je potrebno rastaviti $F(z)$ na parcijalne razlomke:

$$F(z) = \frac{1}{1 - z - z^2} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{z + \frac{1-\sqrt{5}}{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{z + \frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

Svaki od pribrojnika razvijamo u Maclaurinov red

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{z+\frac{1-\sqrt{5}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{2}{1-\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{-2}{1-\sqrt{5}}\Big)^n z^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n z^n$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{z+\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{2}{1+\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{-2}{1+\sqrt{5}}\Big)^n z^n = -\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1-\sqrt{5}}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n z^n$$

Dobiveni redovi su konvergentni za

$$\Big|\frac{1+\sqrt{5}}{2}z\Big| < 1 \Rightarrow |z| < \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,62$$

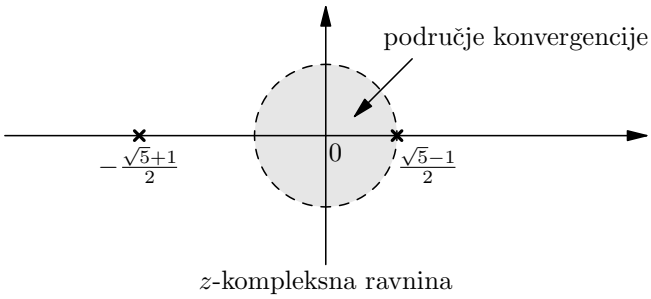
$$\Big|\frac{1-\sqrt{5}}{2}z\Big| < 1 \Rightarrow |z| < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,62$$

kao što je prikazano na slici 11.6., pa je razvoj u Maclaurinov red

$$F(z) = \frac{1}{1-z-z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\bigg(\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1} - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1}\bigg)z^n,$$

te je konačno rješenje

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1}, \quad n \geq 0.$$



Slika 11.6.: Područje konvergencije funkcije izvodnice

Na kraju rješimo jednadžbu

$$c[n] = c[n-1] + c[n]$$

upotrebom $\mathcal{Z}$ transformacijom. U $\mathcal{Z}$ domeni dobivamo

$$C(z) = z^{-1}C(z) + c[-1] + z^{-2}C(z) + c[-2] + z^{-1}c[-1]$$

Početni uvjeti $c[-1]$ i $c[-2]$ su jednaki nuli. Nakon sređivanja dobivamo

$$C(z) = \frac{1}{1-z^{-1}-z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2-z-1}.$$

Rastav na parcijalne razlomke je

$$C(z) = \frac{z^2}{z^2-z-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\frac{z}{z-\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1-\sqrt{5}}{2}\frac{z}{z-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}.$$

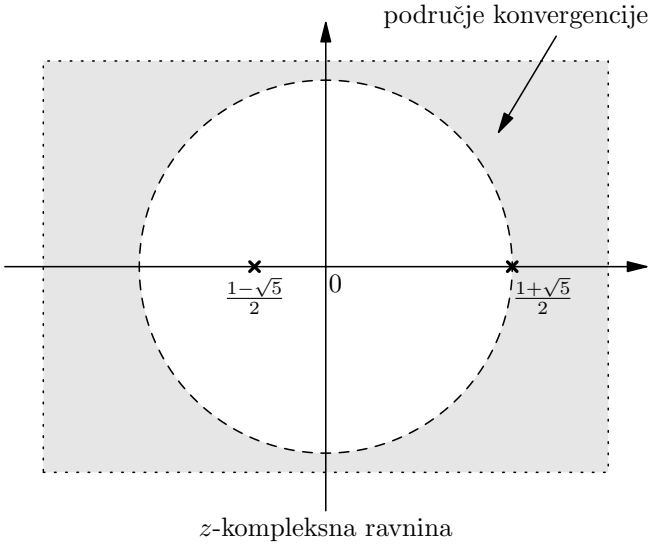
U ovom slučaju područje konvergencije je određeno s

$$\Big|\frac{1+\sqrt{5}}{2}z^{-1}\Big| < 1 \Rightarrow |z| > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,62$$

$$\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}z^{-1}\right| < 1 \Rightarrow |z| > \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,62$$

kao što je prikazano na slici 11.7.. Nakon inverzne $\mathcal{Z}$ transformacije dobivamo konačno rješenje

$$c[n] = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1}, \quad n \geq 0.$$



Slika 11.7.: Područje konvergencije $\mathcal{Z}$ transformacije

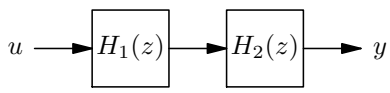
Zadatak 11.5. Složeni diskretni sustav sastoji se od dva podsustava spojena u kaskadu kako je prikazano na slici 11.8.. Ako je odziv cijelog sustava na jediničnu stepenicu uz početne uvjete jednake nuli

$$y[n] = \{\underline{0}, 0, 1, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, \dots\},$$

i ako je odziv drugog podsustava na jedinični impuls

$$h_2[n] = \{\underline{0}, 0, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots\}$$

odredite impulsni odziv prvog podsustava te prijenosnu funkciju cijelog sustava.



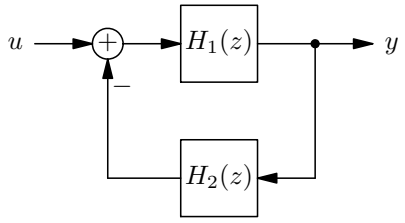
Slika 11.8.: Složeni diskretni sustav

Rješenje: Impulsni odziv prvog podsustava je $h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-2]$, dok su prijenosne funkcije

$$H_1(z) = \frac{z^2-1}{z^2}, \quad H_2(z) = \frac{z+2}{z(z^2-1)} \quad \text{i} \quad H(z) = \frac{z+2}{z^3}.$$

Zadatak 11.6. Složeni diskretni sustav sastoji se od dva podsustava kako je prikazano na slici 11.9.. Odziv prvog podsustava na jediničnu stepenicu je

$$y_1[n] = \{\underline{2}, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots\},$$



Slika 11.9.: Složeni diskretni sustav

dok je impulsni odziv drugog podsustava $h_2[n] = (\frac{1}{2})^{n+1}$. Odredite analitički izraz za pobudu $u[n]$ takvu da odziv cijelog sustava bude

$$y[n] = \{\underline{1}, 0, 1, -2, 1, -2, 1, -2, 1, -2, 1, -2, 1, -2 \dots\}.$$

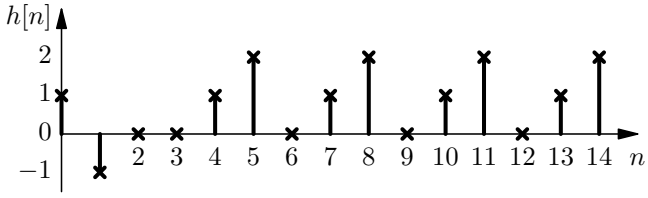
Početni uvjeti su jednaki nuli.

Rješenje: $\mathcal{Z}$ transformacija pobude i prijenosne funkcije su

$$Y(z) = \frac{z^3 - 2}{z(z^2 - 1)}, \quad H_1(z) = \frac{2z - 1}{z - 1}, \quad H_2(2) = \frac{z}{2z - 1} \quad \text{i} \quad H(z) = 1,$$

što daje za pobudu $u[n] = 2\delta[n-1] - \frac{1}{2}1^n + \frac{3}{2}(-1)^n$.

Zadatak 11.7. Impulsni odziv diskretnog sustava prikazan je na slici 11.10.. Odredite prijenosnu funkciju te prvih 5 uzoraka odziva na jediničnu stepenicu.



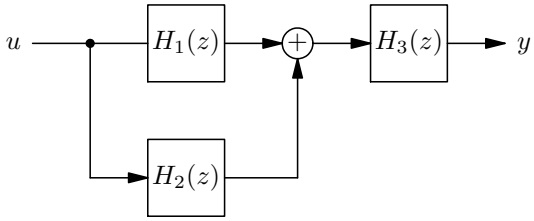
Slika 11.10.: Impulsni odziv diskretnog sustava

Rješenje: Prijenosna funkcija je

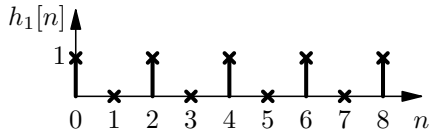
$$H(z) = 1 - z^{-1} + z^{-4}\frac{1}{1 - z^{-3}} + 2z^{-5}\frac{1}{1 - z^{-3}},$$

dok je prvih pet uzoraka odziva $y[n] = \{\underline{1}, 0, 0, 0, 1, \dots\}$.

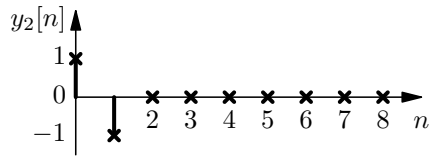
Zadatak 11.8. Zadan je složeni diskretni sustav prema slici 11.11.. Impulsni odziv prvog podsustava $h_1[n]$ prikazan je na slici 11.12., odziv na jediničnu stepenicu drugog podsustava prikazan je na slici 11.13., dok je impulsni odziv cijelog sustava $h[n]$ prikazan na slici 11.14.. Odredite odziv na jediničnu stepenicu trećeg podsustava u složenom sustavu.



Slika 11.11.: Složeni diskretni sustav



Slika 11.12.: Impulsni odziv prvog podsustava sustava sa slike 11.11.



Slika 11.13.: Odziv na s$[n]$ drugog podsustava sustava sa slike 11.11.

Rješenje: Odziv na jediničnu stepenicu trećeg podsustava je $y_3[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$.

Zadatak 11.9. Diskretni sustav je opisan jednadžbom diferencija

$$y[n] - 2y[n-1] + 2y[n-2] = u[n] - 2u[n-1].$$

Ako su početni uvjeti $y[-1] = y[-2] = 1$ kolika mora biti kauzalna pobuda $u[n]$ da odziv sustava bude $y[n] = 0$ za $n \geq 0$?

Rješenje: Pobuda je $u[n] = -\delta[n] + 2^n\,\mathrm{s}[n]$.

Zadatak 11.10. Diskretni sustav zadan je jednadžbom diferencija

$$y[n+2] + a_1 y[n+1] + a_2 y[n] = u[n] + u[n+2],$$

gdje su a_1 i a_2 realni koeficijenti. Slobodni odziv zadanog sustava uz početne uvjete $y[-1] = 0$ i $y[-2] = 1$ je

$$y_s[n] = 2(-1)^n - 4(-2)^n.$$

Izračunajte prisilni odziv sustava na pobudu

$$u[n] = \begin{cases} (-2)^n, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}.$$

Rješenje: Koeficijenti su $a_1 = 3$ i $a_2 = 2$, dok je prisilni odziv

$$y[n] = 2(-1)^n - \frac{7}{2}(-2)^n + \frac{5}{2}(k+1)(-2)^n.$$

Zadatak 11.11. Odziv diskretnog sustava na jediničnu stepenicu je $y[n] = -n(-1)^n$. Kakvu pobudu treba dovesti na ulaz sustava da bi odziv bio

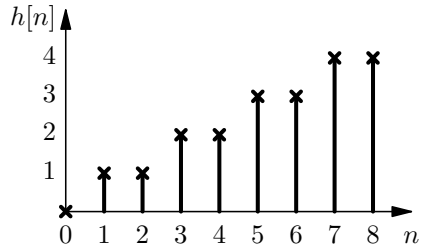
$$y[n] = \delta[n-1] - 2\delta[n-2] + \delta[n-3].$$

Svi početni uvjeti su jednaki nuli.

Rješenje: Prijenosna funkcija sustava je

$$H(z) = \frac{z-1}{(z+1)^2},$$

a tražena pobuda je $u[n] = \delta[n] + \delta[n-1] - \delta[n-2] - \delta[n-3]$.



Slika 11.14.: Impulsni odziv sustava sa slike 11.11.

Primjer 11.17. Složeni diskretni sustav sastoji se od dva podsustava vezana u paralelu. Koliki je impulsni odziv $h[n]$ cijelog sustava ako je odziv prvog podsustava na jediničnu kosinu

$$r_1[n] = \{\underline{1}, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, \dots\},$$

a odziv drugog podsustava na jediničnu stepenicu

$$s_2[n] = \{\underline{0}, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots\}?$$

Svi početni uvjeti su jednaki nuli.

Rješenje: Odredimo najprije prijenosne funkcije oba podsustava. Za prvi podsustav vrijedi

$$R_1(z) = \sum\nolimits_{n=0}^{+\infty} r_1[n] z^{-n}$$

te je

$$\begin{aligned}
R_1(z) &= 1 + z^{-1} + 2z^{-2} + 2z^{-3} + 3z^{-4} + 3z^{-5} + 4z^{-6} + 4z^{-7} + \dots \\
&= 1 + 2z^{-2} + 3z^{-4} + 4z^{-6} + \dots + z^{-1}\big(1 + 2z^{-2} + 3z^{-4} + 4z^{-6} + \dots\big) \\
&= (1 + z^{-1})\big(1 + 2z^{-2} + 3z^{-4} + 4z^{-6} + \dots\big) \\
&= (1 + z^{-1}) \sum\nolimits_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^{-2n} \\
&= (1 + z^{-1}) \sum\nolimits_{n=0}^{+\infty} n z^{-2n} + (1 + z^{-1}) \sum\nolimits_{n=0}^{+\infty} z^{-2n} \\
&= (1 + z^{-1}) \frac{z^2}{(z^2-1)^2} + (1 + z^{-1}) \frac{1}{1 - z^{-2}} = \frac{z^3}{(z-1)^2(z+1)}
\end{aligned}$$

Kako je

$$R_1(z) = H_1(z) \frac{z}{(z-1)^2}$$

za prijenosnu funkciju prvog podsustava dobivamo

$$H_1(z) = R_1(z) \frac{(z-1)^2}{z} = \frac{z^2}{z+1}.$$

Za drugi podsustav je pak

$$S_2(z) = H_2(z) \frac{1}{1 - z^{-1}} = \sum\nolimits_{n=0}^{+\infty} s_2[n] z^{-n}.$$

Kako je

$$\begin{aligned}
S_2(z) &= z^{-1} + z^{-3} + z^{-5} + z^{-7} + z^{-9} + z^{-11} + \dots \\
&= z^{-1}\big(1 + z^{-2} + z^{-4} + z^{-6} + z^{-8} + z^{-10} + \dots\big) \\
&= z^{-1} \sum\nolimits_{n=0}^{+\infty} z^{-2n} = z^{-1} \frac{1}{1 - z^{-2}} = \frac{z}{z^2 - 1}
\end{aligned}$$

za prijenosnu funkciju drugog podsustava dobivamo

$$H_2(z) = S_2(z)\frac{z-1}{z} = \frac{1}{z+1}.$$

Kako su zadani podsustavi spojeni u paralelu vrijedi

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) = \frac{z^2+1}{z+1} = z + 1 - 2\frac{z}{z+1}$$

te inverznom transformacijom dobivamo impulsni odziv sustava

$$h[n] = \delta[n+1] + \delta[n] - 2(-1)^n.$$

Zadatak 11.12. Zadan je složeni diskretni sustav prema slici 11.15.. Ako je odziv podsustava H_1 na jediničnu kosinu

$$r_1[n] = \{\underline{0}, 1, 4, 8, 12, 16, 20, 24, \dots\}$$

i ako je odziv drugog podsustava H_2 na jediničnu stepenicu

$$s_2[n] = (-1)^n, \quad n \geq 0$$

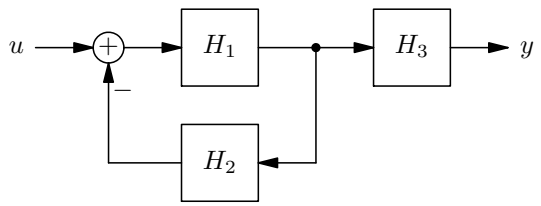
te ako je impulsni odziv trećeg sustava

$$h_3[n] = \delta[n] - \delta[n-1] + (-1)^n, \quad n \geq 0,$$

odredi pobudu $u[n]$ za koju je odziv

$$y[n] = \{\underline{0}, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, \dots\}.$$

Početni uvjeti neka su jednaki nuli.



Slika 11.15.: Složeni diskretni sustav

Rješenje: Tražena pobuda je $u[n] = \sin(\frac{\pi}{2}n)$.

12. Prikaz u prostoru stanja

Primjer 12.1. Diskretni sustav opisan je jednadžbama

$$y_1[n] + y_2[n-1] = u_1[n-1] + 2u_2[n]$$
$$y_1[n-1] + y_2[n] = 2u_1[n] + u_2[n-1]$$

Neka su početna stanja jednaka nuli, $\mathbf{x}[0] = 0$, i neka je pobuda

$$\mathbf{u}[n] = \begin{bmatrix} u_1[n] \\ u_2[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta[n] \\ s[n] \end{bmatrix}$$

Potrebno je:

a) nacrtati model sustava,

b) odabrati varijable stanja te napisati jednadžbe sustava u matričnom obliku,

c) nacrtati model sustava prema jednadžbama stanja,

d) pronaći odziv sustava na zadanu pobudu,

e) odrediti transfer-matricu sustava,

f) odrediti impulsni odziv sustava,

g) transformirati sustav u kanonski oblik te narctati model,

h) ispitati da li je sustav osmotriv i upravljiv.

Rješenje: Model sustava crtamo izravno iz zadanih jednadžbi:

$$y_1[n] = -y_2[n-1] + u_1[n-1] + 2u_2[n]$$
$$y_2[n] = -y_1[n-1] + 2u_1[n] + u_2[n-1]$$

Model je prikazan na slici 12.1..

Za prikaz u pomoću varijabli stanja želimo od polaznih jednadžbi diskretnog sustava dobiti sustav opisan s dvije matrične jednadžbe diferencija

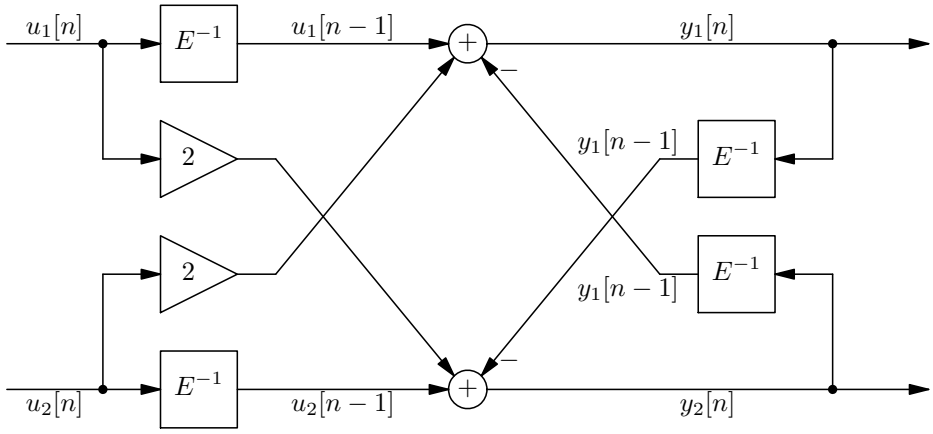
$$\begin{cases} \mathbf{x}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[n] + \mathbf{B}\mathbf{u}[n] \\ \mathbf{y}[n] = \mathbf{C}\mathbf{x}[n] + \mathbf{D}\mathbf{u}[n] \end{cases} \tag{12.1}$$

Zadane jednadžbe odgovaraju izlaznoj jednadžbi $\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}\mathbf{x}[n] + \mathbf{D}\mathbf{u}[n]$ ako uspijemo odabrati takve varijable stanja koje će eliminirati $y[n-1]$ i $u[n-1]$ iz zadanih jednadžbi. Kao najjednostavniji odabir se nameće

$$x_1[n] = -y_2[n-1] + u_1[n-1]$$
$$x_2[n] = -y_1[n-1] + u_2[n-1]$$

Uvrštavanjem u zadani sustav dobivamo izlaznu jednadžbu

$$\begin{cases} y_1[n] = x_1[n] + 2u_2[n] \\ y_2[n] = x_2[n] + 2u_1[n] \end{cases}$$



Slika 12.1.: Model diskretnog sustava

odnosno u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1[n] \\ u_2[n] \end{bmatrix}.$$

Potrebno je još odrediti jednadžbu stanja. Varijable stanja smo odabrali kao

$$\begin{aligned} x_1[n] &= -y_2[n-1] + u_1[n-1] \\ x_2[n] &= -y_1[n-1] + u_2[n-1] \end{aligned}.$$

Zamijenimo li n s $n+1$ dobivamo

$$\begin{aligned} x_1[n+1] &= -y_2[n] + u_1[n] \\ x_2[n+1] &= -y_1[n] + u_2[n] \end{aligned},$$

odnosno dobivamo izravan izraz za $y_1[n]$ i $y_2[n]$. Uvrštavanjem tih izraza u izlaznu jednadžbu dobivamo jednadžbu stanja

$$\begin{aligned} x_1[n+1] &= -x_2[n] - u_1[n] \\ x_2[n+1] &= -x_1[n] - u_2[n] \end{aligned}$$

odnosno u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} x_1[n+1] \\ x_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1[n] \\ u_2[n] \end{bmatrix}.$$

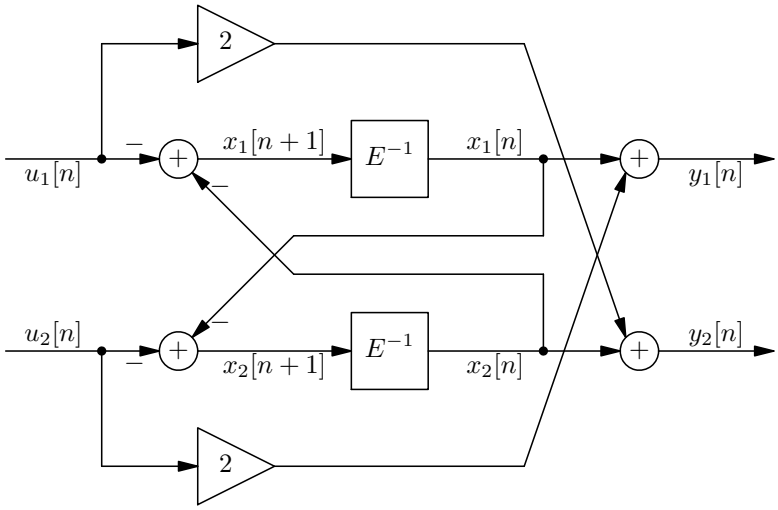
Model sustava prema jednadžbama stanja opet crtamo izravno iz jednadžbi

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[n+1] &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}[n] + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{u}[n] \\ \mathbf{y}[n] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}[n] + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}[n] \end{aligned}$$

Pri tome prvo crtamo jednadžbu stanja, a tek onda na crtež dodamo izlaznu jednadžbu. Model je prikazan na slici 12.2..

Odziv sustava na zadanu pobudu određujemo pomoću $\mathcal{Z}$ transformacije. Transformacijom jednadžbi (12.1) dobivamo jednadžbe sustava u $\mathcal{Z}$ domeni

$$\begin{cases} z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}[0] = \mathbf{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{B}\mathbf{U}(z) \\ \mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}\mathbf{X}(z) + \mathbf{D}\mathbf{U}(z) \end{cases} \tag{12.2}$$



Slika 12.2.: Model diskretnog sustava

Sređivanjem dobivamo odziv sustava

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}[0] + \big(\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\big)\mathbf{U}(z). \tag{12.3}$$

Izraz (12.3) se obično piše pomoću *fundamentalne* matrice sustava i *transfer*-matrice sustava. Fundamentalna matrica sustava $\Phi(z)$ je

$$\Phi(z) = z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}, \tag{12.4}$$

dok je transfer-matrica sustava $H(z)$

$$H(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}. \tag{12.5}$$

Da bi izračunali odziv sustava najprije je potrebno odrediti fundamentalnu matricu i transfer-matricu. No kako su zadani početni uvjeti $\mathbf{x}[0] = 0$ fundamentalnu matricu $\Phi(z)$ ne trebamo posebno računati. Da bi odredili $H(z)$ najprije računamo $(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ prema

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A})}\mathrm{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{A}).$$

Sada je

$$z\mathbf{I} - \mathbf{A} = z\mathbf{I} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 1 \\ 1 & z \end{bmatrix}$$

$$\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$$

$$\mathrm{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} z & -1 \\ -1 & z \end{bmatrix}$$

pa je

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{(z-1)(z+1)} \begin{bmatrix} z & -1 \\ -1 & z \end{bmatrix}.$$

Sada računamo $H(z)$ prema (12.5)

$$\mathbf{H}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{(z-1)(z+1)} \begin{bmatrix} z & -1 \\ -1 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

odnosno

$$\mathbf{H}(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)} \begin{bmatrix} -z & 2z^2 - 1 \\ 2z^2 - 1 & -z \end{bmatrix}.$$

Sada računamo odziv sustava prema

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}\mathbf{\Phi}(z)\mathbf{x}[0] + \mathbf{H}(z)\mathbf{U}(z).$$

Uz zadanu pobudu i početne uvjete odziv u $\mathcal{Z}$ domeni postaje

$$\mathbf{Y}(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)} \begin{bmatrix} -z & 2z^2-1 \\ 2z^2-1 & -z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{z}{z-1} \end{bmatrix},$$

odnosno nakon sređivanja

$$\mathbf{Y}(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z+1)} \begin{bmatrix} 2z^3 - z^2 \\ 2z^3 - 3z^2 - z + 1 \end{bmatrix}.$$

Potrebno je izračunati dvije inverzne $\mathcal{Z}$ transformacije, i to od

$$\begin{aligned} Y_1(z) &= \frac{2z^3 - z^2}{(z-1)^2(z+1)} \\ Y_2(z) &= \frac{2z^3 - 3z^2 - z + 1}{(z-1)^2(z+1)} \end{aligned}$$

Za $Y_1(z)$ je rastav na parcijalne razlomke oblika

$$Y_1(z) = \frac{2z^3 - z^2}{(z-1)^2(z+1)} = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{z}{z-1} + \alpha_2 \frac{z^2}{(z-1)^2} + \alpha_3 \frac{z}{z+1}.$$

Koeficijente α_0, α_2 i α_3 određujemo izravno:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \left.\frac{2z^3 - z^2}{(z-1)^2(z+1)}\right|_{z=0} = 0 \\ \alpha_2 &= \frac{(z-1)^2}{z^2} \left.\frac{2z^3 - z^2}{(z-1)^2(z+1)}\right|_{z=1} = \frac{2 \cdot 1 - 1}{1+1} = \frac{1}{2} \\ \alpha_3 &= \frac{z+1}{z} \left.\frac{2z^3 - z^2}{(z-1)^2(z+1)}\right|_{z=-1} = \frac{2(-1)^2 - (-1)}{(-1-1)^2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Za određivanje α_1 odaberemo npr. $z = 2$. Dobivamo

$$Y_1(2) = \frac{2 \cdot 2^3 - 2^2}{(2-1)^2(2+1)} 0 + \alpha_1 \frac{2}{2-1} + \frac{1}{2} \frac{2^2}{(2-1)^2} + \frac{3}{4} \frac{2}{2+1} = 2\alpha_1 + \frac{5}{2},$$

te je $\alpha_1 = 3/4$. Sada je odziv $Y_1(z)$ i $y_1[n]$:

$$\begin{aligned} Y_1(z) &= \frac{3}{4} \frac{z}{z-1} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{(z-1)^2} + \frac{3}{4} \frac{z}{z+1}, \\ y_1[n] &= \frac{3}{4} 1^n + \frac{1}{2}(n+1)1^n + \frac{3}{4}(-1)^n, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Za $Y_2(z)$ je rastav na parcijalne razlomke oblika

$$Y_2(z) = \frac{2z^3 - 3z^2 - z + 1}{(z-1)^2(z+1)} = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{z}{z-1} + \alpha_2 \frac{z^2}{(z-1)^2} + \alpha_3 \frac{z}{z+1}.$$

Koeficijente α_0, α_2 i α_3 određujemo izravno:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \left.\frac{2z^3 - 3z^2 - z + 1}{(z-1)^2(z+1)}\right|_{z=0} = \frac{1}{1^2 \cdot 1} = 1 \\ \alpha_2 &= \frac{(z-1)^2}{z^2} \left.\frac{2z^3 - 3z^2 - z + 1}{(z-1)^2(z+1)}\right|_{z=1} = \frac{2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 1 + 1}{1^2(1+1)} = -\frac{1}{2} \\ \alpha_3 &= \frac{z+1}{z} \left.\frac{2z^3 - 3z^2 - z + 1}{(z-1)^2(z+1)}\right|_{z=-1} = \frac{2(-1)^3 - 3(-1)^2 - (-1) + 1}{(-1)(-1-1)^2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Za određivanje α_1 odaberemo npr. $z = 2$. Dobivamo

$$Y_2(2) = \frac{2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 2 + 1}{(2-1)^2(2+1)} = 1 + \alpha_1 \frac{2}{2-1} - \frac{1}{2}\frac{2^2}{(2-1)^2} + \frac{3}{4}\frac{2}{2+1} = 2\alpha_1 - \frac{1}{2},$$

te je $\alpha_1 = 3/4$. Sada je odziv $Y_2(z)$ i $y_2[n]$:

$$Y_2(z) = 1 + \frac{3}{4}\frac{z}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{z^2}{(z-1)^2} + \frac{3}{4}\frac{z}{z+1},$$

$$y_2[n] = \delta[n] + \frac{3}{4}1^n - \frac{1}{2}(n+1)1^n + \frac{3}{4}(-1)^n, \quad n \geq 0.$$

Konačno rješenje, tj. odziv sustava pišemo u matričnom obliku

$$\mathbf{y}[n] = \begin{bmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}n + \frac{7}{4}\right)1^n + \frac{3}{4}(-1)^n \\ \delta[n] - \left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{4}\right)1^n + \frac{3}{4}(-1)^n \end{bmatrix}, \quad n \geq 0.$$

Transfer-matricu sustava smo već odredili, pa preostaje odrediti impulsni odziv $h[n]$. Potrebno je dakle odrediti inverznu $\mathcal{Z}$ transformaciju matrice

$$\mathbf{H}(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)} \begin{bmatrix} -z & 2z^2 - 1 \\ 2z^2 - 1 & -z \end{bmatrix}.$$

Kako je transfer-matrica $H(z)$ simetrična matrica nije potrebno računati četiri inverzne $\mathcal{Z}$ transformacije, već je dovoljno odrediti $\mathcal{Z}^{-1}\big[H_{11}(z)\big]$ i $\mathcal{Z}^{-1}\big[H_{12}(z)\big]$. Rastav $H_{11}(z)$ na parcijalne razlomke je oblika

$$H_{11}(z) = \frac{-z}{(z-1)(z+1)} = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{z}{z-1} + \alpha_2 \frac{z}{z+1}.$$

Određujemo α_0, α_1 i α_2:

$$\alpha_0 = \left.\frac{-z}{(z-1)(z+1)}\right|_{z=0} = 0$$

$$\alpha_1 = \left.\frac{z-1}{z}\frac{-z}{(z-1)(z+1)}\right|_{z=1} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha_2 = \left.\frac{z+1}{z}\frac{-z}{(z-1)(z+1)}\right|_{z=-1} = \frac{-1}{(-1-1)} = \frac{1}{2}$$

Rastav $H_{12}(z)$ na parcijalne razlomke je oblika

$$H_{12}(z) = \frac{2z^2 - 1}{(z-1)(z+1)} = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{z}{z-1} + \alpha_2 \frac{z}{z+1}.$$

Opet određujemo α_0, α_1 i α_2:

$$\alpha_0 = \left.\frac{2z^2 - 1}{(z-1)(z+1)}\right|_{z=0} = \frac{-1}{1 \cdot (-1)} = 1$$

$$\alpha_1 = \left.\frac{z-1}{z}\frac{2z^2 - 1}{(z-1)(z+1)}\right|_{z=1} = \frac{2 \cdot 1^2 - 1}{1 \cdot (1+1)} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_2 = \left.\frac{z+1}{z}\frac{2z^2 - 1}{(z-1)(z+1)}\right|_{z=-1} = \frac{2 \cdot (-1)^2 - 1}{(-1)(-1-1)} = \frac{1}{2}$$

Sada možemo napisati impulsni odziv $H(z)$ i $h[n]$:

$$\mathbf{H}(z) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\frac{z}{z-1} + \frac{1}{2}\frac{z}{z+1} & 1 + \frac{1}{2}\frac{z}{z-1} + \frac{1}{2}\frac{z}{z+1} \\ 1 + \frac{1}{2}\frac{z}{z-1} + \frac{1}{2}\frac{z}{z+1} & -\frac{1}{2}\frac{z}{z-1} + \frac{1}{2}\frac{z}{z+1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{h}[n] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}1^n + \frac{1}{2}(-1)^n & \delta[n] + \frac{1}{2}1^n + \frac{1}{2}(-1)^n \\ -\frac{1}{2}1^n + \frac{1}{2}(-1)^n & \delta[n] + \frac{1}{2}1^n + \frac{1}{2}(-1)^n \end{bmatrix}, \quad n \geq 0.$$

Kod prelaska na kanonski oblik potrebno je pronaći matricu transformacije $\mathbf{T}$ koja ortogonalizira matricu sustava $\mathbf{A}$. Već prije smo odredili $\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A})$ te znamo da su svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ različite i iznose $z_1 = 1$ i $z_2 = -1$. Matricu $\mathbf{T}$ u tom slučaju sastavljamo od redaka matrice $\mathrm{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})$ za npr. $z = z_1 = 1$ i $z = z_2 = -1$:

$$\mathrm{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} z & -1 \\ -1 & z \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sada određujemo $\mathbf{T}^{-1}$ pa zatim računamo matrice kanonskog oblika $\mathbf{A}^* = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$, $\mathbf{B}^* = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}$, $\mathbf{C}^* = \mathbf{C}\mathbf{T}$ i $\mathbf{D}^* = \mathbf{D}$:

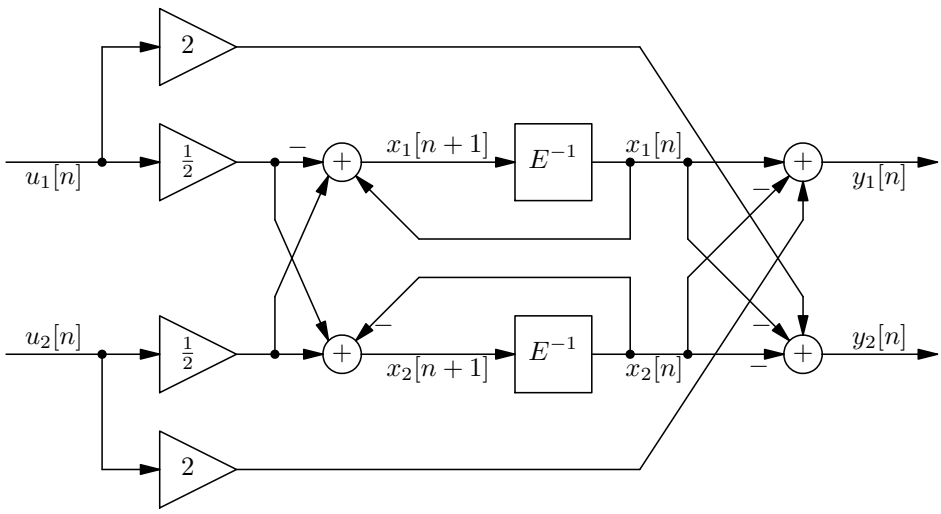
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^* &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}^* &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{C}^* &= \mathbf{C}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{D}^* &= \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Sada su jednadžbe stanja u kanonskom obliku

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}[n+1] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x}[n] + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}[n] \\
\mathbf{y}[n] &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x}[n] + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{u}[n]
\end{aligned}$$

Pri crtanju modela najprije crtamo jednadžbu stanja, a tek onda na crtež dodamo izlaznu jednadžbu. Model je prikazan na slici 12.3..



Slika 12.3.: Model diskretnog sustava

Za ovaj jednostavni sustav upravljivost i osmotrivost možemo očitati izravno iz kanonskog oblika. Kako za svaku varijablu stanja imamo elemente

različite od nule u retcima matrice **B** i stupcima matrice **C** sustav je upravljiv i osmotriv.

Zadatak 12.1. Diskretni sustav zadan je jednadžbom diferencija

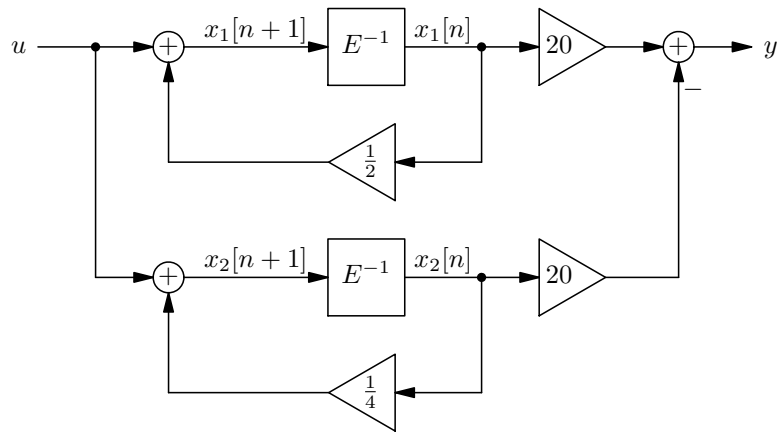
$$8y[n+2] - 6y[n+1] + y[n] = 40u[n].$$

Napišite u matričnom obliku jednadžbe stanja i izlaznu jednadžbu za paralelnu realizaciju i nacrtajte simulacijski blok dijagram. Ispitajte upravljivost i osmotrivost sustava.

Rješenje: Jednadžbe sustava su

$$\begin{bmatrix} x_1[n+1] \\ x_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u[n], \quad y[n] = \begin{bmatrix} 20 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u[n].$$

Sustav je upravljiv jer jednostrukim polovima u **A** odgovaraju ne-nul retci u **B** i osmotriv jer jednostrukim polovima u **A** odgovaraju ne-nul stupci u **C**. Simulacijski blok dijagram prikazan je na slici 12.4..



Slika 12.4.: Simulacijski blok dijagram diskretnog sustava

Zadatak 12.2. Prijenosna funkcija diskretnog sustava je

$$H(z) = \frac{z^3}{z^3 + 2\sqrt{3}z^2 + 3z}.$$

Nacrtajte simulacijski blok dijagram za kaskadnu realizaciju te napišite jednadžbe sustava u matričnom obliku.

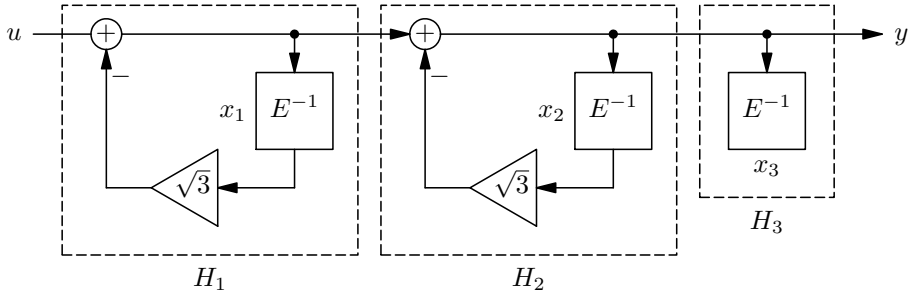
Rješenje: Simulacijski blok dijagram prikazan je na slici 12.5.. Jednadžbe sustava su

$$\begin{bmatrix} x_1[n+1] \\ x_2[n+1] \\ x_3[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ x_3[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u[n],$$

$$y[n] = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ x_3[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} u[n].$$

Zadatak 12.3. Matrice diskretnog sustava su

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$



Slika 12.5.: Kaskadna realizacija diskretnog sustava

Koliko iznosi parametar α ako je odziv sustava na pobudu $u[n] = 1^n$, $n \geq 0$ iznosi

$$y[n] = \frac{3}{10}1^n - \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{5}(-4)^n, \quad n \geq 0?$$

Ispitajte upravljivost i osmotrivost sustava.

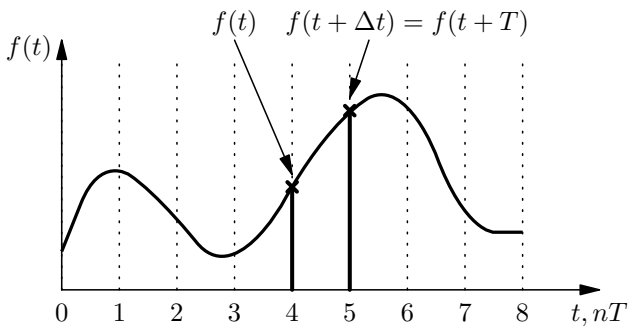
Rješenje: Parametar α je 4, a sustav je upravljiv i osmotriv.

13. Prijelaz s kontinuiranih na diskretne sustave

Svaki kontinuirani sustav se općenito može približno i relativno točno opisati pomoću linearnih diferencijalnih jednadžbi. Skup takvih linearnih diferencijalnih jednadžbi opet se može približno točno opisati pomoću skupa jednadžbi diferencija. Najjednostavnija metoda za prijelaz na odgovarajući diskretni sustav zahtijeva aproksimaciju derivacije diferencijom:

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \tag{13.1}$$

$$f'(t) \approx \frac{f(t + T) - f(t)}{T} \tag{13.2}$$



Slika 13.1.: Aproksimacija derivacije diferencijom

13.1. Eulerova transformacija

Uz odabrani vremenski korak T prvu derivaciju aproksimiramo kao

$$f'(nT) \approx \frac{f[n+1] - f[n]}{T} = \frac{E\big[f[n]\big] - f[n]}{T}, \tag{13.3}$$

dok m-tu derivaciju aproksimiramo s

$$f^{(m)}(nt) \approx \frac{1}{T^m}(E-1)^m\big[f[n]\big]. \tag{13.4}$$

Ova aproksimacija naziva se *Eulerova aproksimacija.* Osim ovih izraza uvodimo i odgovarajuće izraze za aproksimaciju u domeni transformacija ($\mathcal{L}$ i $\mathcal{Z}$ transformacija). U domeni transformacija vrijedi

$$\mathcal{L}\big[f'(t)\big] = sF(s) \tag{13.5}$$

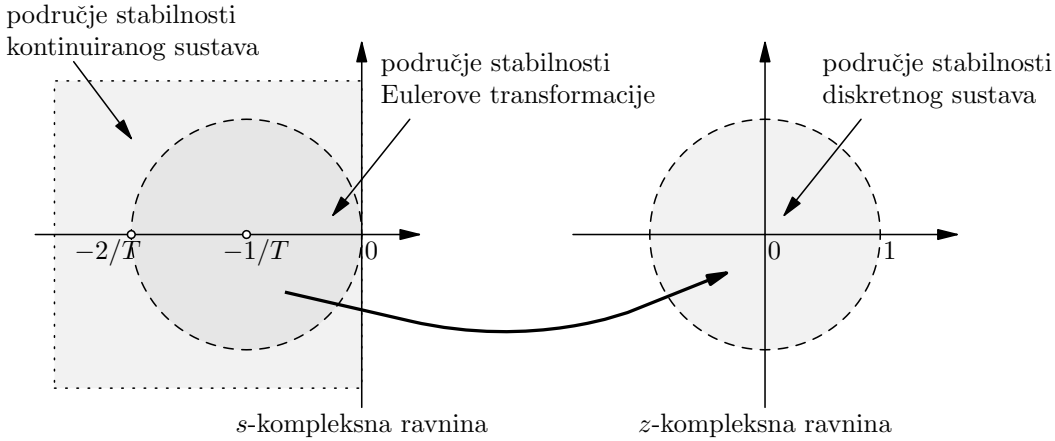
i

$$\mathcal{Z}\Big[\frac{f[n+1] - f[n]}{T}\Big] = \frac{z-1}{T}F(z). \tag{13.6}$$

Prema jednadžbama (13.5) i (13.6) za prijelaz s kontinuiranih na diskretne sustave uz Eulerovu aproksimaciju dovoljno je izvršiti zamjenu

$$s \mapsto \frac{z-1}{T}. \tag{13.7}$$

Za ovakav prijelaz još je važno pogledati što se događa sa stabilnošću sustava. Prisjetimo se da je područje stabilnosti linearnog diskretnog sustava određeno s položajem polova koji se moraju nalaziti unutar jedinične kružnice, dok se za linearne kontinuirane sustave polovi moraju nalaziti u desnoj poluravnini s-kompleksne ravnine. Prema (13.7) prijelaz s kontinuiranih na diskretne sustave se može promatrati kao Mobiusova transformacija kompleksne ravnine te će stabilnost biti očuvana ukoliko se polovi kontinuiranog sustava nalaze unutar kružnice polumjera 1/T sa središtem u točci $(-1/T, 0)$ kako je prikazano na slici 13.2..



Slika 13.2.: Eulerova aproksimacija i stabilnost sustava

Primjer 13.1. Pomoću Eulerove transformacije uz zadani $T = 1$ odredi diskretni sustav koji odgovara stabilnom kontinuiranom sustavu

$$H(s) = \frac{1}{s+3}$$

Ispitaj da li je diskretni sustav stabilan. Odredi za koje vrijednosti parametra T dobivamo stabilan, a za koje nestabilan diskretni sustav.

Rješenje: Odgovarajući diskretni sustav dobivamo izravno iz prijenosne funkcije $H(s)$ kontinuranog sustava upotrebom (13.7):

$$H(z) = \frac{1}{\frac{z-1}{T} + 3} = \frac{T}{z + 3T - 1}.$$

Za zadani period otipkavanja $T = 1$ je

$$H(z) = \frac{1}{z+2},$$

te tako dobiveni diskretni sustav ima jedan pol $z_1 = -2$ koji se nalazi izvan jedinične kružnice – diskretni sustav nije stabilan.

Uz period otipkavanja $T = 1$ korištenjem Eulerove aproksimacije iz stabilnog kontinuiranog sustava dobivamo nestabilan diskretni sustav. Za stabilan diskretni sustav potreban je period otipkavanja T takav da se pol $z_1 = 1 - 3T$ nalazi unutar jedinične kružnice, odnosno u općem slučaju da se svi polovi diskretnog sustava nalaze unutar jedinične kružnice. Dakle

$$|z_i| < 1, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{13.8}$$

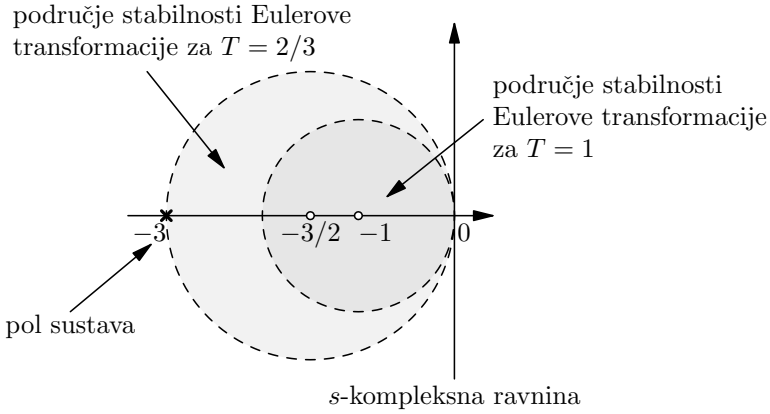
gdje je n broj polova. Za zadani sustav uvjet (13.8) postaje

$$|z_1| = |1 - 3T| < 1$$

i za stabilan sustav mora biti

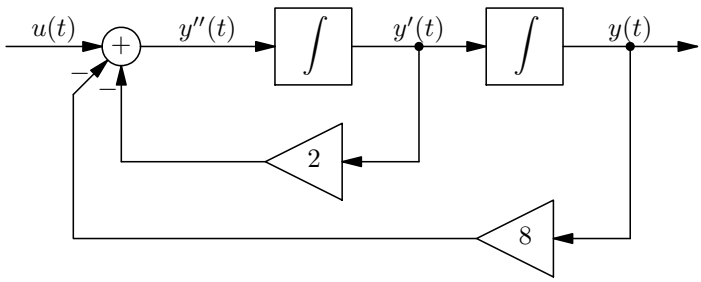
$$T < 2/3.$$

Primijetite da nas zanimaju samo strogo pozitivna rješenja uvjeta (13.8), odnosno uobičajeno se pretpostavlja $T > 0$. Za zadani sustav područja stabilnosti za različite parametre T su prikazana na slici 13.3..



Slika 13.3.: Područja stabilnosti za različite vrijendosti parametra T

Primjer 13.2. Za kontinuirani sustav zadan slikom 13.4. pronađite odgovarajući diskretni sustav koristeći Eulerovu transformaciju uz $T = 1$. Ispitajte stabilnost kontinuiranog i diskretnog sustava. Nacrtajte dobiveni diskretni sustav.



Slika 13.4.: Kontinuirani sustav drugog reda

Rješenje: Prijenosnu funkciju kontinuiranog sustava određujemo prema slici:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 8}.$$

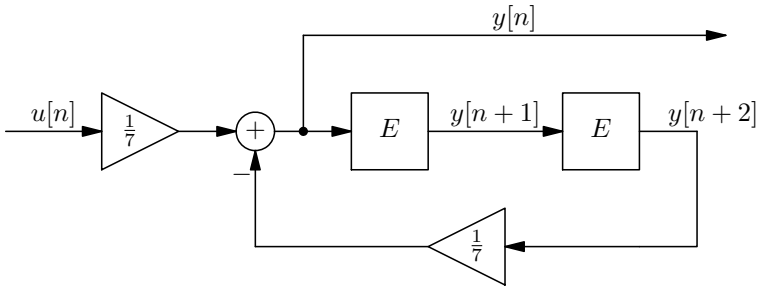
Polovi zadanog sustava su $s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{7}$ i nalaze se u lijevoj poluravnini s-kompleksne ravnine te je zadani kontinuirani sustav stabilan. Odredimo sada diskretni sustav korištenjem zamjene

$$s \mapsto \frac{z-1}{T} = z - 1.$$

Dobivamo

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{(z-1)^2 + 2(z-1) + 8} = \frac{1}{z^2 - 2z + 1 + 2z - 2 + 8} \\ &= \frac{1}{z^2 + 7} = \frac{1}{(z - j\sqrt{7})(z + j\sqrt{7})}. \end{aligned}$$

Tako dobiveni diskretni sustav ima polove $z_{1,2} = \pm j\sqrt{7}$. Oba pola se nalaze izvan jedinične kružnice te je diskretni sustav nestabilan. Razlog nestabilnosti je u tome što je odabran takav period uzorkovanja T za kojeg su polovi kontinuiranog sustava izvan područja stabilnosti Eulerove transformacije, odnosno period otipkavanja je predug. Diskretni sustav je prilazan na slici 13.5..



Slika 13.5.: Diskretni sustav uz $T = 1$

Zadatak 13.1. Impulsni odziv kontinuiranog sustava je

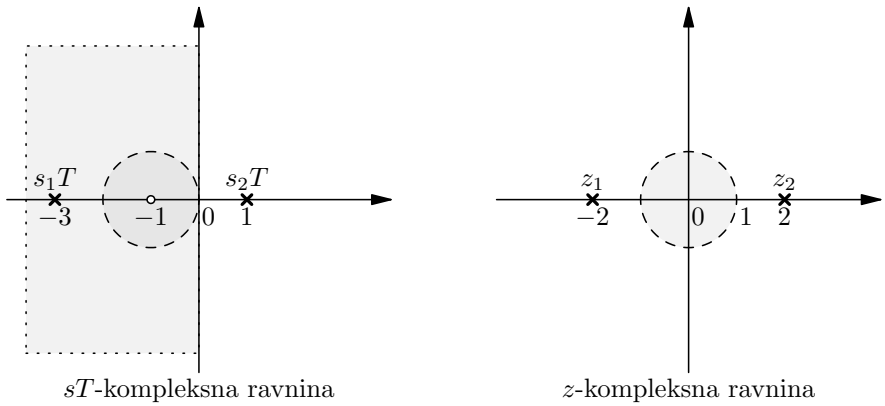
$$h(t) = \frac{1}{4}(e^{t} - e^{-3t})\,\mathrm{s}(t).$$

Koristeći Eulerov algoritam odredite impulsni odziv odgovarajućeg diskretnog sustava uz $T = 1$. Obrazložite stabilnost ili nestabilnost kontinuiranog i diskretnog sustava. Što se događa sa stabilnošću uz $T = \frac{1}{3}$?

Rješenje: Impulsni odziv diskretnog sustava je

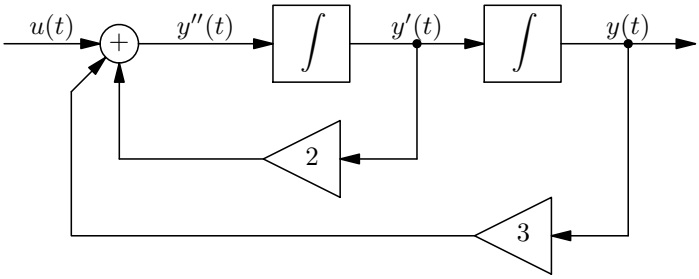
$$h[n] = -\frac{1}{4}\delta[n] + \frac{1}{8}2^{n} + \frac{1}{8}(-2)^{n}, \quad n \geq 0.$$

Kontinuirani sustav je nestabilan jer ima pol $s_1T = 1$ u desnoj poluravnini. Polovi kontinuiranog sustava su van područja stabilnosti Eulerova algoritma uz $T = 1$, pa je dobiveni diskretni sustav nestabilan, što se također vidi iz iz položaja polova diskretnog sustava koji su izvan jedinične kružnice u z-ravnini (slika 13.6.). Uz $T = \frac{1}{3}$ pol $s_1T = \frac{1}{3}$ ne upada u područje stabilnosti Eulerova algoritma pa će diskretni sustav opet biti nestabilan.



Slika 13.6.: Analiza stabilnosti

Zadatak 13.2. Za kontinuirani sustav na slici 13.7. odredite odgovarajući diskretni sustav koristeći Eulerov alogritam uz $T = 1$. Objasnite stabilnost ili nestabilnost kontinuiranog i diskretnog sustava. Što će se dogoditi sa stabilnošću uz $T = \frac{1}{3}$?

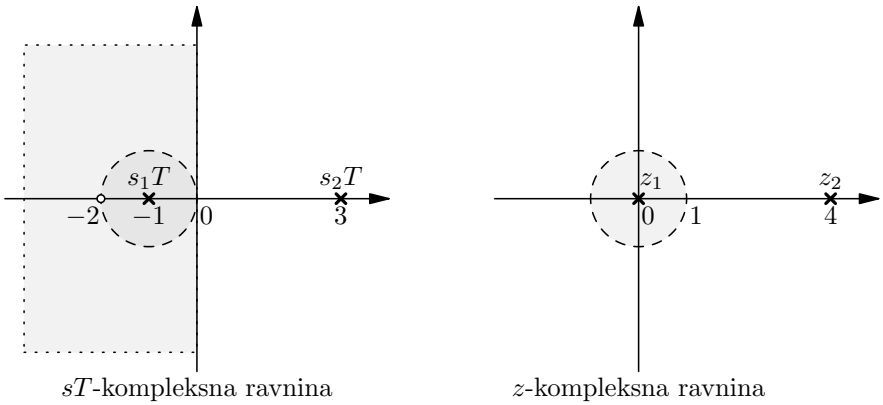


Slika 13.7.: Kontinuirani sustav drugog reda

Rješenje: Prijenosna funkcija diskretnog sustava je

$$H(z) = \frac{1}{z(z-4)}.$$

Kontinuirani sustav je nestabilan jer se pol $s_2T = 3$ nalazi u desnoj poluravnini i nije u području stabilnosti Eulerova algoritma te će dobiveni diskretni sustav biti nestabilan, što se jasno vidi na slici 13.8. gdje su polovi diskretnog sustava izvan jedinične kružnice. Za $T = \frac{1}{3}$ pol s_2T opet pada van područja stabilnosti Eulerova algoritma te će diskretni sustav ostati nestabilan.



Slika 13.8.: Analiza stabilnosti

Zadatak 13.3. Linearni kontinuirani sustav bez nula ima dva pola $s_{1,2} = -1 \pm j4$ te zadovoljava uvjet $H(0) = \frac{1}{17}$. Odredite prijenosnu funkciju i impulsni odziv odgovarajućeg diskretnog sustava koristeći Eulerovu transformaciju uz $T = 1$. Ispitajte stabilnost kontinuiranog i diskretnog sustava? Što će se dogoditi sa stabilnošću ako odaberemo $T = \frac{1}{6}$?

Rješenje: Prijenosna funkcija diskretnog sustava je

$$H(z) = \frac{1}{z^2 + 16},$$

a impulsni odziv je $h[n] = \frac{1}{16}\delta[n] - \frac{1}{32}(4j)^n - \frac{1}{32}(-4j)^n$, $n \geq 0$. Zadani kontinuirani sustav je stabilan, no dobiveni diskretni sustav je nestabilan. Odaberemo li $T = \frac{1}{6}$ diskretni sustav i dalje ostaje nestabilan.

13.2. Obrnuta Eulerova transformacija

Kod Eulerove transformacije derivaciju u točci smo aproksimirali diferencijom uzorka u toj točci te sljedećeg uzorka, dakle

$$f'(t) \approx \frac{f(t+T) - f(t)}{T}.$$

Ako umjesto toga derivaciju aproksimiramo korištenjem prethodnog uzorka

$$f'(t) \approx \frac{f(t) - f(t-T)}{T} \tag{13.9}$$

dobivamo *obrnutu Eulerovu transformaciju* (*Backward Euler*). Uz odabrani vremenski korak T prvu derivaciju aproksimiramo kao

$$f'(nT) \approx \frac{f[n] - f[n-1]}{T} = \frac{f[n] - E^{-1}\big[f[n]\big]}{T}, \tag{13.10}$$

dok m-tu derivaciju aproksimiramo s

$$f^{(m)}(nt) \approx \frac{1}{T^m}(1 - E^{-1})^m\big[f[n]\big]. \tag{13.11}$$

Osim ovih izraza opet uvodimo izraze za aproksimaciju u domeni transformacija. Kako vrijedi

$$\mathcal{L}\big[f'(t)\big] = sF(s) \tag{13.12}$$

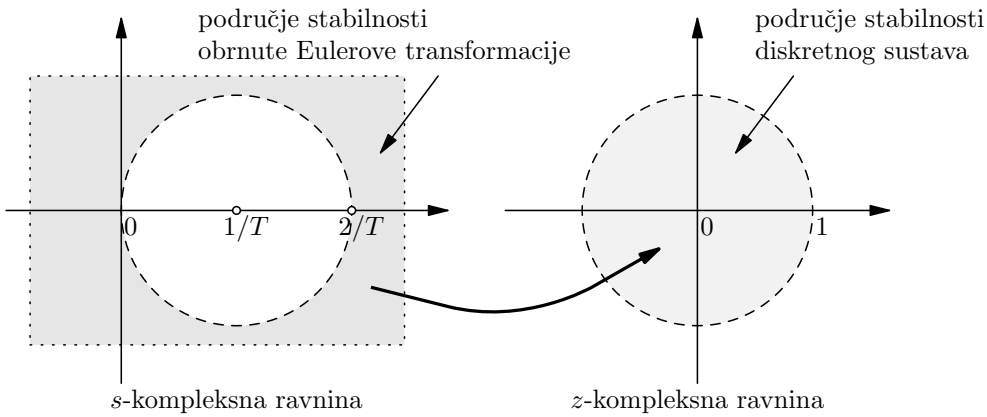
i

$$\mathcal{Z}\Big[\frac{f[n] - f[n-1]}{T}\Big] = \frac{1 - z^{-1}}{T}F(z). \tag{13.13}$$

Prema jednadžbama (13.12) i (13.13) za prijelaz s kontinuiranih na diskretne sustave uz obrnutu Eulerovu aproksimaciju dovoljno je izvršiti zamjenu

$$s \mapsto \frac{1 - z^{-1}}{T}. \tag{13.14}$$

Što se tiće stabilnosti sustava dobiveni linearni diskretni sustav će biti stabilan ako se njegovi polovi nalaze unutar jedinične kružnice. Prema (13.14) diskretni sustav će biti stabilan ako se polovi kontinuiranog sustava nalaze unutar kružnice polumjera 1/T sa središtem u točci $(1/T, 0)$ kako je prikazano na slici 13.9..



Slika 13.9.: Obrnuta Eulerova aproksimacija i stabilnost sustava

Primjer 13.3. Korištenjem obrnute Eulerove transformacije odredite prijenosnu funkciju odgovarajućeg diskretnog sustava za kontinuirani sustav

$$y''(t) + 3y(t) + 2y(t) = u(t)$$

uz period otipkavanja $T = 1$. Zadatak riješite na dva načina:

a) izravno korištenjem definicijskih izraza za obrnutu Eulerovu transformaciju i

b) preslikavanjem između domena $\mathcal{L}$ i $\mathcal{Z}$ transformacija.

Rješenje: Prvo prema definiciji obrnute Eulerove transformacije određujemo aproksimacijske izraze za prvu i drugu derivaciju:

$$y'(nT) \approx \frac{y[n] - E^{-1}\big[y[n]\big]}{T} = y[n] - E^{-1}\big[y[n]\big],$$

$$y''(nT) \approx \frac{1}{T^2}(1 - E^{-1})^2\big[y[n]\big] = y[n] - 2E^{-1}\big[y[n]\big] + E^{-2}\big[y[n]\big].$$

Diskretni sustav dobivamo uvrštavanjem tih izraza u zadanu linearnu diferencijalnu jednadžbu:

$$y''(nt) + 3y(nt) + 2y(nt) = u(nt)$$

$$y[n] - 2E^{-1}\big[y[n]\big] + E^{-2}\big[y[n]\big] + 3\big(y[n] - E^{-1}\big[y[n]\big]\big) + 2y[n] = u[n]$$

$$6y[n] - 5y[n-1] + y[n-2] = u[n]$$

Još preostaje na temelju dobivene jednadžbe diferencija odrediti prijenosnu funkciju diskretnog sustava:

$$H(z) = \frac{1}{6 - 5z^{-1} + z^{-2}} = \frac{z^2}{6z^2 - 5z + 1}.$$

Ovime je rješen a) dio zadatka.

Za b) dio zadatka najprije iz zadane jednadže kontinuiranog sustava određujemo njegovu prijenosnu funkciju

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

Sada vršimo zamjenu

$$s \mapsto \frac{1 - z^{-1}}{T} = 1 - z^{-1}.$$

Dobivamo

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{(1 - z^{-1})^2 + 3(1 - z^{-1}) + 2} = \frac{1}{1 - 2z^{-1} + z^{-2} + 5 - 3z^{-1}} \\ &= \frac{1}{6 - 5z^{-1} + z^{-2}} = \frac{z^2}{6z^2 - 5z + 1}. \end{aligned}$$

Primjer 13.4. Zadan je kontinuirani linearni sustav

$$y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = u(t).$$

Odredite odgovarajući diskretni sustav korištenjem obrnute Eulerove transformacije uz $T = 1$. Odredite impulsni odziv diskretnog sustava. Ispitajte stabilnost zadanog kontinuiranog sustava te dobivenog diskretnog.

Rješenje: Iz zadane jednadžbe kontinuiranog sustava određujemo prijenosnu funkciju sustava

$$H(s) = \frac{1}{s^2 - 2s - 3} = \frac{1}{(s+1)(s-3)}.$$

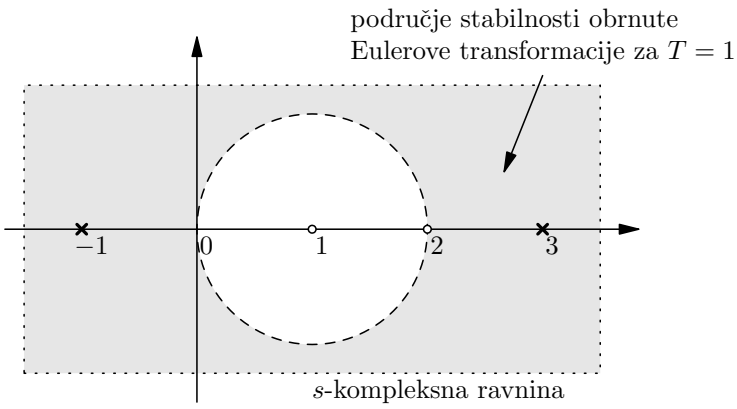
Polovi sustava su $s_1 = -1$ i $s_2 = 3$ pa je zadani sustav nestabilan. Sada računamo transformaciju uz $T = 1$ korištenjem

$$s \mapsto \frac{1 - z^{-1}}{T} = 1 - z^{-1}.$$

Dobivamo:

$$H(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^2 - 2(1-z^{-1}) - 3} = \frac{1}{1 - 2z^{-1} + z^{-2} - 5 + 2z^{-1}}$$
$$= \frac{1}{z^{-2} - 4} = \frac{z^2}{1 - 4z^2} = -\frac{1}{4}\frac{z^2}{(z-1/2)(z+1/2)}.$$

Vidimo da su polovi diskretnog sustava $z_{1,2} = \pm 1/2$ pa kako se svi polovi nalaze unutar jedinične kružnice dobiveni diskretni sustav je stabilan. Iako smo započeli s nestabilnim linearnim kontinuiranim sustavom dobiveni diskretni sustav je stabilan. Razlog tome je položaj polova kontinuiranog sustava koji se svi nalaze unutar područja stabilnosti obrnute Eulerove transformacije kako je prikazano na slici 13.10..



Slika 13.10.: Obrnuta Eulerova aproksimacija za $T = 1$ i stabilnost sustava

Da bi odredili impulsni odziv dobivenog diskretnog sustava najprije je potrebno rastaviti prijenosnu funkciju na parcijalne razlomke. Rastav je oblika:

$$H(z) = -\frac{1}{4}\frac{z^2}{(z-1/2)(z+1/2)} = \alpha_0 + \alpha_1\frac{z}{z-1/2} + \alpha_2\frac{z}{z+1/2}.$$

Očito je $\alpha_0 = 0$. Određujemo α_1 i α_2:

$$\alpha_1 = -\frac{1}{4}\frac{z-1/2}{z}\frac{z^2}{(z-1/2)(z+1/2)}\bigg|_{z=1/2} = -\frac{1}{8}$$

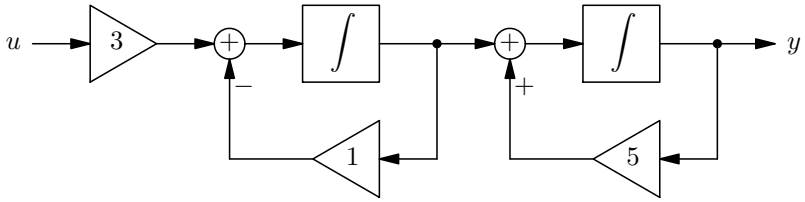
$$\alpha_2 = -\frac{1}{4}\frac{z+1/2}{z}\frac{z^2}{(z-1/2)(z+1/2)}\bigg|_{z=-1/2} = -\frac{1}{8}$$

Impulsni odziv sustava je

$$h[n] = -\frac{1}{8}2^{-n} - \frac{1}{8}(-2)^{-n}, \quad n \geq 0.$$

Zadatak 13.4. Kontinuirani sustav zadan je slikom 13.11.. Pređite na diskretni sustav pomoću obrnute Eulerove transformacije uz $T = 1$. Izračunajte impulsni odziv dobivenog diskretnog sustava. Ispitajte stabilnost kontinuiranog i diskretnog sustava. Što se događa sa stabilnošću odaberemo li $T = \frac{1}{3}$?.

Rješenje: Impulsni odziv diskretnog sustava je $h[n] = -\frac{1}{4}(\frac{1}{2})^n - \frac{1}{8}(-\frac{1}{4})^n$. Zadani kontinuirani sustav nije stabilan, dok je dobiveni diskretni sustav stabilan. Za slučaj $T = \frac{1}{3}$ diskretni sustav postaje nestabilan.



Slika 13.11.: Kontinuirani sustav

13.3. Bilinearna transformacija

Kod bilinearne transformacije prvu dervaciju aproksimiramo s

$$f'(nT) \approx \frac{2}{T}\frac{f[n+1]-f[n]}{f[n+1]+f[n]} = \frac{2}{T}\frac{E\big[f[n]\big]-f[n]}{E\big[f[n]\big]+f[n]},$$

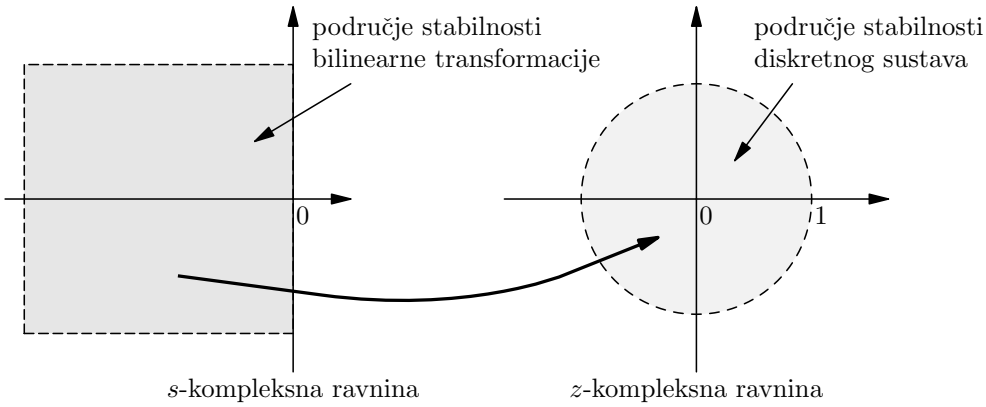
dok m-tu derivaciju aproksimiramo s

$$f^{(m)}(nT) \approx \frac{2}{T}\Big(\frac{E-1}{E+1}\Big)^m \big[f[n]\big].$$

Kao i kod prethodnih aproksimacija možemo uvesti preslikavanje u domeni transformacije

$$s \mapsto \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}. \tag{13.15}$$

Korištenjem izraza (13.15) također možemo odrediti kada će dobiveni diskretni sustav biti stabilan. Da bi dobiveni diskretni sustav bio stabilan polovi linearnog kontinuiranog sustava moraju se nalaziti unutar lijeve poluravnine s-kompleksne ravnine kako je prikazano na slici 13.12..



Slika 13.12.: Bilinearna aproksimacija i stabilnost sustava

Primjer 13.5. Zadan je kontinuirani sustav s prijenosnom funkcijom

$$H(s) = \frac{2}{s+1}.$$

Odredite impulsni odziv diskretnog sustava dobivenog bilinearnom transformacijom uz $T = 1$

Rješenje: Zamjenom

$$s \mapsto \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} = 2\frac{z-1}{z+1}$$

određujemo prijenosnu funkciju diskretnog sustava

$$H(z) = \frac{2}{2\dfrac{z-1}{z+1}+1} = \frac{2z+2}{2z-2+z+1} = \frac{2z+2}{3z-1}$$

Za određivanje impulsnog odziva potrebno je rastaviti $H(z)$ na parcijalne razlomke:

$$H(z) = \frac{2z+2}{3z-1} = \frac{8z-6z+2}{3z-1} = \frac{8z}{3z-1} + \frac{-2(3z-1)}{3z-1} = -2 + \frac{8}{3}\frac{z}{z-1/3}.$$

Iz rastavljene prijenosne funkcije sustava određujemo impulsni odziv

$$h[n] = -2\delta[n] + \frac{8}{3}3^{-n}.$$

Zadatak 13.5. Odziv kontinuiranog sustava na jediničnu stepenicu je

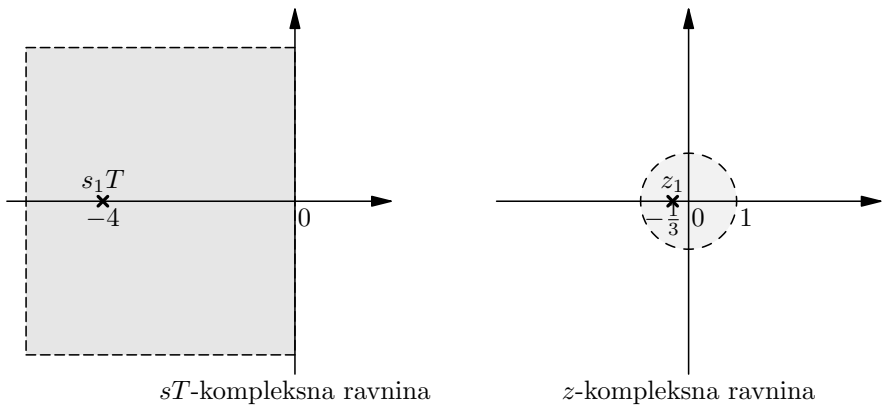
$$y(t) = \frac{3}{2}(1 - e^{-2t}).$$

Ako pomoću bilinearne transformacije uz period otipkavanja $T = 2$ transformiramo sustav u diskretni, kakav će biti impulsni odziv $h[n]$ dobivenog diskretnog sustava? Ispitajte stabilnost kontinuiranog i diskretnog sustava.

Rješenje: Impulsni odziv diskretnog sustava je

$$h[n] = 3\delta[n] - 2\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n.$$

Kontinuirani sustav je stabilan jer se pol $s_1T = -4$ nalazi u lijevoj poluravnini. Diskretni sustav će također biti stabilan jer bilinearna transformacija preslikava lijevu poluravninu unutar jedinične kružnice (slika 13.13.).



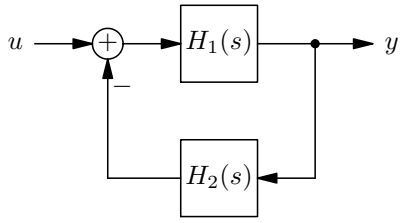
Slika 13.13.: Analiza stabilnosti

Zadatak 13.6. Linearni kontinuirani sustav ima dvostruki pol u točci $s = -1$ i nema nula. Maksimalna amplituda impulsnog odziva sustava je $3e^{-1}$. Kolika je maksimalna amplituda impulsnog odziva diskretnog sustava dobivenog bilinearnom transformacijom uz $T = 2$? Da li je dobiveni diskretni sustav stabilan?

Rješenje: Impulsni odziv dobivenog diskretnog sustava je $h[n] = \frac{3}{4}(\delta[n] + 2\delta[n] + \delta[n-2])$ i njegov maksimum je $\frac{3}{2}$. Dobiveni sustav je stabilan.

Zadatak 13.7. Za sustav prikazan na slici 13.14. prijenosna funkcija prvog podsustava H_1 je

$$H_1(s) = \frac{s+2}{s-1}.$$



Slika 13.14.: Složeni kontinuirani sustav

U grani povratne veze spojen je podsustav s prijenosnom funkcijom $H_2(s)$. Ako znate da bi prijenosna funkcija diskretnog sustava ekvivalentong sustavu $H_2(s)$ dobivenog bilinearnom transformacijom uz $T = 2$ bila

$$H_2(z) = \frac{3z+3}{3z+1}$$

odredite prijenosne funkcije $H(s)$ i $H_1(s)$.

Rješenje: $H_1(s) = \dfrac{s+2}{s-1}$ i $H(s) = 1$.

13.4. Metoda jednakih impulsnih odziva

Metoda jednakih impulsnih odziva temelji se na ideji da impulsni odziv diskretnog sustava bude jednak otipkanom impulsnom odzivu kontinuiranog sustava. Ako je poznat impulsni odziv linearnog kontinuiranog sustava $h(t)$ impulsni odziv diskretnog određujemo zamjenom $t \mapsto nT$. Dakle

$$h[n] = h(nT). \tag{13.16}$$

Primjer 13.6. Zadan je kontinuirani sustav s prijenosnom funkcijom

$$H(s) = \frac{2}{s+1}.$$

Odredite prijenosnu funkciju diskretnog sustava koji ima jednaki impulsni odziv kao zadani kontinuirani sustav u točkama $t = nT$.

Rješenje: Da bi odredili traženi diskretni sustav najprije moramo izračunati impulsni odziv zadanog linearnog kontinuiranog sustava. Koristimo inverznu Laplaceovu transformaciju

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\big[H(s)\big] = \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{2}{s+1}\Big] = 2e^{-t}.$$

Otipkavanjem impulsnog odziva kontinuiranog sustava dobivamo odziv diskretnog

$$h[n] = h(nT) = 2e^{-nT} = 2\big(e^{-T}\big)^n.$$

Potrebno je još odrediti prijenosnu funkciju diskretnog sustava. Koristimo $\mathcal{Z}$ transformaciju:

$$H(z) = \mathcal{Z}\big[h[n]\big] = \mathcal{Z}\big[2e^{-nT}\big] = 2\frac{z}{z-e^{-T}}.$$

Primjer 13.7. Prijenosna funkcija kontinuiranog sustava je

$$H(s) = \frac{2}{s+1}.$$

Odredite:

a) Prijenosnu funkciju $H(z)$ diskretnog sustava koji bi imao jednaki impulsni odziv kao i zadani kontinuirani sustav u trenutcima $t = kT$.

b) Impulsni odziv diskretnog sustava dobivenog bilinearnom transformacijom uz period uzorkovanja T.

RJEŠENJE: Prijenosna funkcija za zadatak a) je

$$H(z) = \frac{2z}{z - e^{-T}},$$

dok je impulsni odziv za zadatak b)

$$h(nT) = -\frac{2T}{2-T}\delta(nT) + \frac{8T}{4-T^2}\left(\frac{2-T}{2+T}\right)^{nT}.$$