Signali i sustavi

mr. sc. Karmela Aleksić-Maslać
Zvonko Kostanjčar, dipl. ing.
Tomislav Petković, dipl. ing.

FER-ZESOI

Prirodan put razvoja ...

Signali

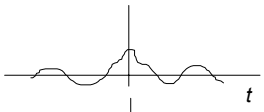
- Funkcije su preslikavanja definirana na skupovima
- Signali su funkcije koje predstavljaju informacije

Signali

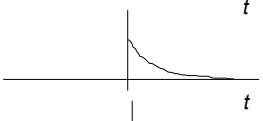
- Audio signali su preslikavanja vremena u tlak
- Audio signali predstavljaju zvuk koji percipiraju ljudi
- Slika je preslikavanje područja prostora u svjetlosni intezitet
- Slike predstavljaju informacije koje ljudi percipiraju kroz vid
- Radio signal je preslikavanje vremena u elektromagnetski val
- Radio signali predstavljaju informacije različitih tipova, ali moraju biti transformirani tako da ih ljudi mogu percipirati.
- Slijed događaja je preslikavanje indeksa u događaje.
- Slijed događaja nosi informaciju o diskretnim akcijama

Podjela signala obzirom na vremenski interval u kojem je signal definiran:

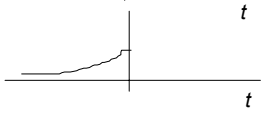
1.) Nekauzalni signali $t \in (-\infty, +\infty)$.



2.) Kauzalni signali $t \in [0, +\infty)$.

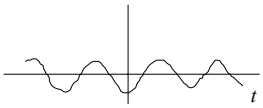


3.) Antikauzalni signali $t \in (-\infty, 0]$.

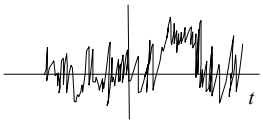


Podjela signala obzirom na predvidljivost:

- Deterministički (predvidljivi).

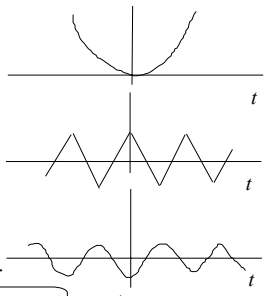


- Stohastički (nepredvidljivi).



Podjela signala obzirom na periodičnost:

- Aperiodični signali.
- Periodični signali
  $f(k) = f(k + T)$.
- Harmonijske funkcije
  $x(t) = X \cos(\omega t + \varphi)$.



amplituda frekvencija fazni pomak

- $\phi = \omega t + \varphi$ –> faza

Sustavi

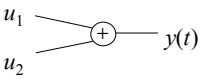
- Skup svih funkcija sa X u Y označava se [X→Y]. Takav skup zovemo prostor funkcija
- Sustav je funkcija koja preslikava jedan prostor funkcija u drugi prostor funkcija

Sustavi

- *Equalizer* je sustav koji preslikava jedan audio signal u neki drugi. Naravno, prostor funkcija je skup svih audio signala, domena i kodomena su identične.
- Prostorija je također jedan sustav i to sa istim prostorom funkcija kao i u gornjem primjeru.
- *Equalizeri* ponajviše i služe tome da uklone zvučne nedostatke neakustičnih prostorija.

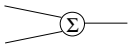
Sustavi ≡ Operacije nad signalima

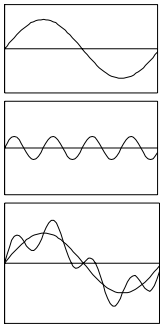
- Zbrajanje:



$y(t) = u_1(t) + u_2(t)$.

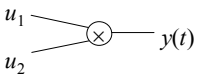
- Alternativni simbol:





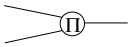
Sustavi ≡ Operacije nad signalima

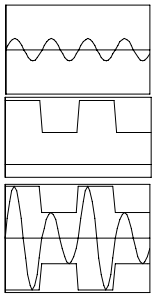
- Množenje:



$y(t) = u_1(t) \cdot u_2(t)$.

- Alternativni simbol:





Ovdje to zovemo ...

Razna područja

- Struja
- Cijena

SIS

- Signal

Matematika

- Funkcija

- Mikrofon
- Pojačalo
- ...

- Sustav
- ...

- Funkcija
- Operator
- …

Zadatak 1.

- Potrebno je svaki od sljedećih signala predstaviti u obliku, f: X→Y te skicirati pripadni graf. Pažljivo odredite domenu i kodomenu u svakom slučaju.

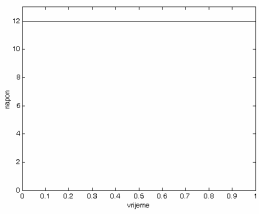
Zadatak 1.1. Napon na ćelijama akumulatora

- NaponNaAkumulatoru: Realni → Realni
- Domena predstavlja vrijeme
- Kodomena predstavlja napon

$\forall t \in \text{Realni}, NaponNaAkumulatoru(t) = 12.$

- Naravno, mogli smo kodomenu definirati drugačije, npr. kao singleton {12} ili …
- Razlika je u fleksibilnosti, zahtjevima i kvaliteti modela!

Zadatak 1.1. Napon na ćelijama akumulatora



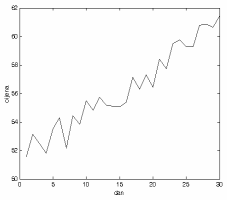
To se može dobiti sljedećim Matlab naredbama:

```
>> plot([0 1], [12 12])
>> axis([0 1 0 13])
```

Zadatak 1.2. Vrijednost dionica tvrtke nakon dnevnog trgovanja

- Jedan od mogućih modela jest:
  Cijena: Prirodni → Novac
- Domena predstavlja skup krajeva (završetaka) dana u kojima se trgovalo
- Kodomena predstavlja skup vrijednosti novca, npr.
  {1, 2, 3, 4, 5, ….}

Zadatak 1.2. Vrijednost dionica tvrtke nakon dnevnog trgovanja



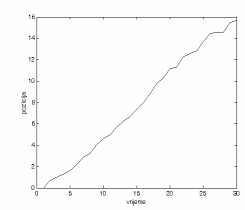
To se može dobiti sljedećim Matlab naredbama:

```
>> dani = 1:30;
>> for dan = dani
cijena(dan) = 50 + dan*0.3 + 3*rand(1);
end
>> plot(dani,cijena)
```

Zadatak 1.3. Pozicija kotača auta na ravnoj cesti duljine L

- Mogući model je Pozicija: Realni → [0, L]
- Domena predstavlja vrijeme
- Kodomena predstavlja poziciju na cesti (udaljenost od polazne točke)

Zadatak 1.3. Pozicija kotača auta na ravnoj cesti duljine L

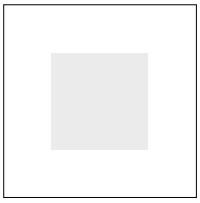


To se može dobiti sljedećim Matlab naredbama:

```
>> numUzorci = 30;
>> vremena = 2:numUzorci;
>> pozicija(1)=0;
>> for t = vremena
pozicija(t)=pozicija(t-1)+rand(1);
end
>> plot([1 vremena], pozicija)
```

Zadatak 2.

- Slika koja se sastoji od žutog kvadrata stranice 8cm u centru i kvadratne bijele pozadine stranice 12cm zove se *alber*. Izrazite *alber* kao funkciju, tj. odredite domenu, kodomenu te funkcijsko pridruživanje.



Zadatak 2.

- Definiramo domenu: $[0,12] \times [0,12]$, sa centrom u (0,0).
- Definiramo kodomenu: Intezitet^3

  gdje je Intezitet = [0, maxIntezitet], a maxIntezitet je neka konstantna vrijednost.

  Tri intenziteta u kodomeni predstavljaju iznose intenziteta triju boja crvene, zelene i plave (R,G,B) respektivno.

Zadatak 2.

- Definiramo pridruživanje:

$$\forall (x,y) \in [0,12]^2,$$

$$Alber(x,y) = \begin{cases} (r_y, g_y, b_y), (x,y) \in [2,10]^2 \\ (r_w, g_w, b_w), inače \end{cases}$$

gdje uređen par (r_y,g_y,b_y) predstavlja RGB komponente žute boje, a par (r_w,g_w,b_w) predstavlja RGB komponente bijele boje

Zadatak 3.

- Potrebno je sljedeće slučajeve predstaviti kao nizove događaja. Pažljivo definirajte domenu i kodomenu u svakom slučaju.
- Zadatak 3.1. Bacanje novčića 100 puta.
- Zadatak 3.2. Slijed glavnih aktivnosti prilikom naručivanja nekog napitka iz automata.
- Zadatak 3.3. Potezi igrača pri igranju šaha

Zadatak 3.1. Bacanje novčića 100 puta

- Definiramo domenu: {1,2, …,100}
- Definiramo kodomenu: {Glava, Pismo}
- Jedan od mogućih nizova događaja je;
  Glava, Pismo, Pismo, Glava, …

Zadatak 3.2. *Slijed glavnih aktivnosti prilikom naručivanja nekog napitka iz automata.*

- Definiramo domenu: Skup prirodnih brojeva N. Naime, automat počne radit u nekom vremenskom trenutku i nikada ne stane …
- Definiramo kodomenu: {1, 2, 5, kava, čokolada, cola, fanta, sprite},

  gdje brojevi prikazuju moguće primljene kovanice. Bilo koji niz iz ovog skupa je mogući slijed događaja.

Zadatak 3.3. *Potezi igrača pri igranju šaha*

- Definiramo domenu: Skup prirodnih brojeva N. Naime, šah je igra koja može teoretski beskonačno dugo trajati.
- Definiramo kodomenu: $\{1, \ldots, 32\} \times \{1, \ldots, 64\}$. Obrazloženje: Na ploči postoje 32 figure, te $8 \times 8 = 64$ pozicije, teoretski se svaka figura može postaviti na svaku poziciju.

  Znači, svaki potez igrača zapravo je jedan element iz skupa kodomene.

Zadatak 4.

- Postoji velika razlika između skupova X, Y i skupa [X → Y]. U ovom i sljedećem zadatku istražit će se neke od tih razlika.
- Zadatak 4.1. Pretpostavimo da su dani skupovi X i Y na sljedeći način: X = {a,b,c} i Y = {0,1}. Potrebno je pronaći i ispisati sve funkcije sa X u Y tj. pronaći sve elemente skupa [X → Y].
- Zadatak 4.2. Ako X ima m elemenata, a Y ima n elemenata koliko elemenata ima skup [X → Y]?
- Zadatak 4.3. Neka je dana funkcija KolormapSlika = [DiskretniVertikalniProstor x DiskretniHorizontalniProstor → KolormapIndex]. Ako je domena skup od 6000 piksela, a kodomena skup od 256 vrijednosti, koliko ima različitih slika?

Zadatak 4.

- Zadatak 4.4. Neka je dana funkcija Spoji = [broj cura → broj dečki]. Ako je broj cura m, a broj dečki n (cure biraju☺), koliko je različitih načina da se spoje cure i dečki tako da svaki dečko bude najviše s jednom curom? Što možete reći o takvoj funkciji pridruživanja? Što možete reći o slučaju da svaki dečko bude barem s jednom curom?

Zadatak 4.1.

- Jedan od načina da definiramo jedan element skupa $f \in [X \to Y]$ jest preko uređenih parova $(x, f(x))$, gdje je $x \in X$.
- Dobije se slijedeće: {(a,0), (b,0), (c,0)}, {(a,0), (b,0), (c,1)}, {(a,0), (b,1), (c,0)}, {(a,0), (b,1), (c,1)}, {(a,1), (b,0), (c,0)}, {(a,1), (b,0), (c,1)}, {(a,1), (b,1), (c,0)}, {(a,1), (b,1), (c,1)}.

Zadatak 4.2.

- Za svaki element iz X-a ima n mogućnosti u Y-u. Kako ima m elementa u X-u, traženi broje je n^m.
- Evidentno je da je ovaj broj poprilično velik i onda kad se radi o malim skupovima X i Y.

Zadatak 4.3.

- Prema prethodnom zadatku rezultat je 256^{6000}.
- Iz relacije $a^b = 10^{b\log(a)}$, možemo približno reći da je rezultat $256^{6000} \approx 10^{14449}$.

Zadatak 4.4.

- Očito svaka cura želi imati dečka, pitanje je samo da li će svaki dečko imati curu?
- Prva cura bira iz skupa od m dečki, drugoj ostane na raspolaganju njih (n-1) i tako sve do posljednje cure koja ima na raspolaganju (n-m+1) dečka. Očito je ukupan broj načina produkt n(n-1)(n-2)…(n-m+1)
- Evidentno je ovakva funkcija pridruživanja preslikavanje 1-1 tj. injektivno preslikavanje.
- Vrijedi općenito da je broj injektivnih preslikavanja s m-članog skupa na n-člani skup dan izrazom n(n-1)(n-2)…(n-m+1).
- U drugom slučaju kada svaki dečko ima barem jednu curu radi se o preslikavanju NA, tj. surjektivnom preslikavanju.
- Određivanje broja svih surjektivnih preslikavanja zahtijeva malo veća znanja iz diskretne matematike

Zadatak 5.

- Pretpostavimo da želite u živo, preko Interneta slušati prijenos nekog koncerta.

  Osim toga, pretpostavimo da je potrebno 16 bita za predstavljanje svakog audio uzorka.
- Zadatak 5.1. Nalazite se kod kuće i spojeni ste sa modemom (56-kbps) na Internet. Kojom maksimalnom frekvencijom uzorkovanja (*sampling rate*) može biti diskretiziran audio signal koji slušate?
- Zadatak 5.2. Koja je frekvencija u pitanju ako se nalazite na 100Mbps LAN-u (recimo na faksu)?

Zadatak 5.

- Zadatak 5.1. Moja veza dopušta mi da primim 56000 bita u sekundi. Jedan uzorak je predstavljen sa 16 bita. To znači da ja mogu primiti 56000(bita/s) / 16(bita/uzorku) = 3500(uzorka/s). Prema tome maksimalna frekvencija uzorkovanja iznosi 3500 uzorka/s.
- Zadatak 5.2. Analogno prema prethodnom zadatku … 100000000(bita/s) / (16bita/uzorku) = 6250000(uzorka/s)
- Vidimo da u prijenosu signala imamo dva velika ograničenja: Kvantizaciju po amplitudi i diskretizaciju po vremenu. Želimo li imati više (bita/uzorku) prisiljeni smo imati manje (uzorka/s), a vrijedi i obrnuto.

Zadatak 6. Što je rezultat množenja dvaju harmonijskih signala?

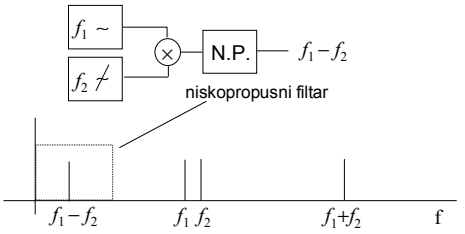
- $u_1(t) = A_1 \cos \omega_1 t,$
- $u_2(t) = A_2 \cos \omega_2 t,$
- $y(t) = u_1(t) \cdot u_2(t) =$

  $= A_1 A_2 \cos \omega_1 t \cdot \cos \omega_2 t,$

  $= A_1 A_2 \cdot [\cos(\omega_1 - \omega_2)t + \cos(\omega_1 + \omega_2)t] / 2.$
- Pojavile su se nove frekvencije:

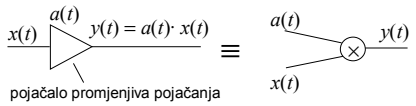
  $\omega_1' = \omega_1 - \omega_2$ i $\omega_2' = \omega_1 + \omega_2.$

Zadatak 7. Korištenjem množila potrebno je projektirati jednostavan sustav za "miješanje" frekvencija



Zadatak 8. Potrebno je projektirati sustav za modulaciju harmonijskog signala

- Kako se još može ostvariti sustav za miješanje?
- Modulacija harmonijskog signala:



- $x(t) = \cos \omega t$,
- $a(t) = 1 + m \cos \omega_m t$.

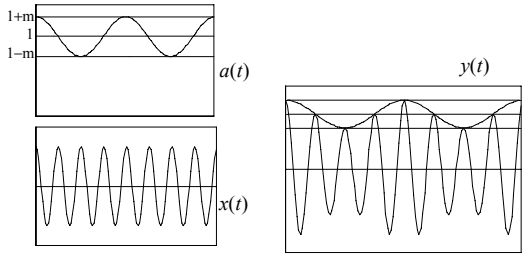
Zadatak 8, nastavak

- Neka je ω_m "niska" frekvencija,
- Neka je ω znatno veći od ω_m ("visoka" frekv.),
- Neka je $m < 1$.

$$y(t) = x(t) \cdot a(t) =$$
$$= \cos \omega t \, (1 + m \cos \omega_m t),$$
$$y(t) = \cos \omega t + m \cos \omega t \cdot \cos \omega_m t,$$
$$= \cos \omega t + m / 2 \cos (\omega - \omega_m)t,$$
$$+ m / 2 \cos (\omega + \omega_m)t.$$

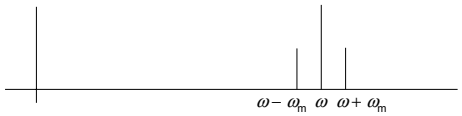
Zadatak 8, nastavak

- Nacrtamo li rezultate, dobit ćemo:



Zadatak 8, nastavak

- U frekvencijskoj domeni to izgleda ovako:



- $x(t)$ - val nositelj, m - koeficijent modulacije,
- $a(t)$ - modulirajući signal, $y(t)$ - modulirani signal.
- Jedna primjena modulacije: istovremeni prijenos većeg broja informacija istim komunikacijskim putem.