Signali i sustavi

AUDITORNE VJEŽBE 12

LS&S
FER – ZESOI

Z -transformacija, $\sin(k\omega_0 T)$

7.) Z - transformacija niza:

$$f(k)=\begin{cases}0 & \text{za } k<0\\ k\sin(k\omega_0 T) & \text{za } k\geq 0\end{cases}$$

- Najprije ćemo odrediti Z - transformaciju niza $\sin(k\omega_0 T)$.

$$Z[\sin k\omega_0 T]=\sum_{k=0}^{\infty}(\sin k\omega_0 T)z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{jk\omega_0 T}-e^{-jk\omega_0 T}}{2j}z^{-k}=$$

$$=\frac{1}{2j}\left[\sum_{k=0}^{\infty}e^{jk\omega_0 T}z^{-k}-\sum_{k=0}^{\infty}e^{-jk\omega_0 T}z^{-k}\right]=$$

Z -transformacija, $\sin(k\omega_0 T)$

$$=\frac{1}{2j}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(e^{j\omega_0 T}z^{-1})^k-\sum_{k=0}^{\infty}(e^{-j\omega_0 T}z^{-1})^k\right]=\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{1-e^{j\omega_0 T}z^{-1}}-\frac{1}{1-e^{-j\omega_0 T}z^{-1}}\right]=$$

za $\left|e^{j\omega_0 T}z^{-1}\right|<1$ i $\left|e^{-j\omega_0 T}z^{-1}\right|<1$

pa je transformacija konvergentna za $|z|>1.$

$$=\frac{1}{2j}\left[\frac{z}{z-e^{j\omega_0 T}}-\frac{z}{z-e^{-j\omega_0 T}}\right]=\frac{1}{2j}\cdot\frac{z(z-e^{-j\omega_0 T})-z(z-e^{j\omega_0 T})}{(z-e^{j\omega_0 T})(z-e^{-j\omega_0 T})}=$$

$$=\frac{1}{2j}\cdot\frac{z(e^{j\omega_0 T}-e^{-j\omega_0 T})}{z^2-2z\cos\omega_0 T+1}=\frac{z\cdot\sin\omega_0 T}{z^2-2z\cos\omega_0 T+1},\quad |z|>1.$$

Dakle ... $Z[\sin k\omega_0 T]=\dfrac{z\cdot\sin\omega_0 T}{z^2-2z\cos\omega_0 T+1},\quad |z|>1.$

Z - transformacija, nastavak ...

- Dalje slijedi da $Z[k\sin(k\omega_0 T)]$ dobivamo deriviranjem $Z[\sin(k\omega_0 T)]$ i množenjem sa $-z$.

$$Z[k\sin k\omega_0 T] = -z\frac{d}{dz}\left[\frac{z\sin\omega_0 T}{z^2-2z\cos\omega_0 T+1}\right] =$$

$$= \frac{-z\sin\omega_0 T(z^2-2z\cos\omega_0 T+1) - z\sin\omega_0 T(2z-2\cos\omega_0 T)}{(z^2-2z\cos\omega_0 T+1)^2}$$

$$Z[k\sin k\omega_0 T] = \frac{z\sin\omega_0 T\cdot(z^2-1)}{(z^2-2z\cos\omega_0 T+1)^2}, \quad \text{za } |z|>1.$$

Z - transformacija, nastavak ...

8.) Koristeći svojstvo

$$Z[kf(k)] = -z\frac{dF(z)}{dz}$$

i poznavajući

$$Z[s(k)] = \frac{z}{z-1} \quad \text{odnosno} \quad Z[a^k] = \frac{z}{z-a}$$

jednostavno je odrediti

$Z[k]$; $Z[k^2]$; $Z[k^3]$ itd., odnosno

$Z[ka^k]$; $Z[k^2a^k]$; $Z[k^3a^k]$ itd. odnosno $Z[(kT)^2]$; $Z[(kT)^3]$ itd.

Z -transformacija, množenje s eksponencijalom

9.) Odrediti transformaciju $Z[a^k{\cdot}f(k)]$ znajući da je $Z[f(k)] = F(z)$.

$$Z[a^k f(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k f(k) z^{-k}.$$

- Izvršimo li supstituciju $z = az_1$

$$Z[a^k f(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} \cancel{a^k} f(k)\cdot z_1^{-k}\cancel{a^{-k}} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z_1^{-k} = F(z_1) = F(a^{-1}z)$$

$$Z[a^k f(k)] = F(a^{-1}z)$$

Z -transformacija, pomak ulijevo

10.) Z – transformacija niza pomaknutog u lijevo, tj. $Z[f(k+1)] = ?$

$$G(z) = Z[f(k+1)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k+1)z^{-k}$$

$$G(z) = f(1)z^{-0} + f(2)z^{-1} + f(3)z^{-2} + \ldots \quad \Big| \cdot z^{-1}$$

$$z^{-1}G(z) = f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + f(3)z^{-3} + \ldots$$

$$z^{-1}G(z) = F(z) - f(0) \quad \Big| \cdot z$$

$$G(z) = zF(z) - zf(0)$$

$$Z[f(k+1)] = zF(z) - zf(0)$$

Z -transformacija, pomak udesno

- Na sličan način možemo pokazati i sljedeće:

$$Z[f(k+m)] = z^m F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k) z^{m-k}.$$

11.) Z - transformacija niza pomaknutog u desno, tj $Z[f(k - m)] = ?$ znajući da je:

$$f(k) = \begin{cases} 0 & \text{za k} < 0 \\ \neq 0 & \text{za k} \geq 0 \end{cases}$$

$f(k)$ –> kauzalan

Z -transformacija, pomak udesno

$$Z[f(k)] = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$$

$$G(z) = Z[f(k-m)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k-m) z^{-k} =$$

$$= f(-m)z^{-0} + f(1-m)z^{-1} + \ldots + f(-1)z^{-m+1} + f(0)z^{-m} + f(1)z^{-m-1} + \ldots$$

- Budući da je $f(k) = 0$ za $k < 0$ slijedi:

$$G(z) = f(0)z^{-m} + f(1)z^{-m-1} + \ldots$$

Z -transformacija, pomak udesno

$$G(z) = z^{-m}\left[f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \ldots\right]$$

$$Z\left[f(k-m)\right] = z^{-m}F(z) \quad \text{za} \quad m \geq 0$$

- Ako se gornje svojstvo koristi za transformaciju nizova za koje je $f(k) \neq 0$ za $k < 0$, doći ćemo do pogrešnih rezultata!
- Zato se Z – transformacija niza $f(k-m)$ računa na sljedeći način:

$$Z\left[f(k-m)\right] = z^{-m}F(z) + \sum_{i=0}^{m-1} f(i-m)z^{-i}$$

Z - transformacija, nastavak ...

12.) Transformacija niza $x(k) = (k+1)a^k$

$$Z\left[(k+1)a^k\right] = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} k a^k z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} =$$

$$= -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-a}\right) + \frac{z}{z-a} = -z \cdot \frac{z-a-z}{(z-a)^2} + \frac{z}{z-a} =$$

$$= \frac{za}{(z-a)^2} + \frac{z}{z-a} = \frac{z^2}{(z-a)^2}$$

$$Z\left[(k+1)a^k\right] = \frac{z^2}{(z-a)^2}$$

Z - transformacija, konvolucijska sumacija

13.) Transformacija niza $y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} f_1(i) f_2(k-i)$ tj. konvolucijske sumacije uzimajući u obzir $Z[f_1(k)]=F_1(z)$ i $Z[f_2(k)]=F_2(z)$.

$$Z\left[y(k)\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} f_1(i) f_2(k-i) z^{-k} = \sum_{i=0}^{\infty} f_1(i) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} f_2(k-i) z^{-k} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} f_1(i) z^{-i} \cdot F_2(z) = F_2(z) \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} f_1(i) z^{-i}}_{F_1(z)} = F_1(z) \cdot F_2(z)$$

Z - transformacija, konvolucijska sumacija

- Odnosno, Z – transformacija konvolucijske sumacije iznosi:

$$Z\left[\sum_{i=0}^{\infty} f_1(i)\cdot f_2(k-i)\right] = F_1(z)\cdot F_2(z).$$

Inverzna Z transformacija

- Z transformacija definirana je kao:

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}.$$

- Inverznu Z transformaciju koristimo pri određivanju niza $f(k)$ čiju Z–transformaciju $F(z)$ poznajemo

$$f(k)=Z^{-1}[F(z)].$$

Inverzna Z transformacija

- Nama zanimljive $F(z)$ su oblika:

$$F(z)=\frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}.$$

- Očito je da je nemoguće direktno prepoznati niz $f(z)$ čija je ovo Z–transformacija.
- Zato se, slično kao kod inverzne Laplaceove transformacije, prvo nađu polovi $F(z)$, te se funkcija rastavi na parcijalne razlomke koji su Z–transformacija poznatih elementarnih nizova.

Inverzna Z transformacija

- $Z[a\delta(k)] = a$
- $Z[a^k] = z\,(z-a)^{-1}$
- Uzimajući u obzir ove transformacije, $F(z)$ rastavljamo kao:

$$F(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n}{(z-p_1)(z-p_2)\ldots(z-p_n)} = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{z}{z-p_1} + \ldots + \alpha_n \frac{z}{z-p_n}$$

- Ovdje pretpostavljamo da je $p_1 \neq p_2 \neq p_3 \neq \ldots \neq p_n$

Razlika u odnosu na inverznu Lapleceovu !

Inverzna Z transformacija

- Iz gornjeg je rastava očito:

$$\alpha_0 = F(z)\big|_{z=0} = \frac{b_n}{(-p_1)(-p_2)\ldots(-p_n)} = \frac{b_n}{a_n}.$$

- Koeficijente $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ određujemo sljedećim postupkom. Odredimo npr. α_1.

$$\alpha_1 = \left[\frac{z-p_1}{z}\cdot F(z)\right]_{z=p_1} = \left[\frac{\cancel{z-p_1}}{z}\cdot\frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n}{(\cancel{z-p_1})(z-p_2)\ldots(z-p_n)}\right]_{z=p_1}$$

Inverzna Z transformacija

- Općenito je: $\alpha_i = \left[\frac{z-p_i}{z}F(z)\right]_{z=p_i}.$

Inverzna Z transformacija, primjer

- Primjer 1: Odrediti niz čija je Z–transformacija zadana kao:

$$F(z)=\frac{z(z-a\cos\omega T)}{z^2-2az\cos\omega T+a^2}.$$

- Najprije ćemo rastaviti nazivnik na faktore:

$$z_{1,2}=\frac{2a\cos\omega T\pm\sqrt{4a^2\cos^2\omega T-4a^2}}{2}=$$

$$=\frac{\cancel{2}a\cos\omega T\pm\cancel{2}a\sqrt{\cos^2\omega T-1}}{\cancel{2}}=a\cos\omega T\pm ja\sin\omega T$$

Inverzna Z transformacija, primjer

- $z_1=ae^{j\omega T}$,
- $z_2=ae^{-j\omega T}$,
- pa pišemo:

$$F(z)=\frac{z(z-a\cos\omega T)}{(z-ae^{j\omega T})(z-ae^{-j\omega T})}=\quad \alpha_0+\alpha_1\frac{z}{z-ae^{j\omega T}}+\alpha_2\frac{z}{z-ae^{-j\omega T}}$$

- Odredimo koeficijente α_0, α_1 i α_2.
- $\alpha_0=F(z)|_{z=0}=0$

Inverzna Z transformacija, primjer

$$\alpha_1=\left[\frac{z-z_1}{z}\cdot F(z)\right]_{z=z_1}=$$

$$=\left[\frac{\cancel{z-ae^{j\omega T}}}{\cancel{z}}\cdot\frac{\cancel{z}(z-a\cos\omega T)}{(\cancel{z-ae^{j\omega T}})(z-ae^{-j\omega T})}\right]_{z=ae^{j\omega T}}=$$

$$=\left[\frac{z-a\cos\omega T}{z-ae^{-j\omega T}}\right]_{z=ae^{j\omega T}}=\frac{ae^{j\omega T}-\frac{ae^{j\omega T}}{2}-\frac{ae^{-j\omega T}}{2}}{ae^{j\omega T}-ae^{-j\omega T}}=\frac{1}{2}$$

Inverzna Z transformacija, primjer

$$\alpha_2 = \left[\frac{z-z_2}{z}\cdot F(z)\right]_{z=z_2} =$$

$$= \left[\frac{\cancel{z-ae^{-j\omega T}}}{\cancel{z}}\cdot\frac{z(z-a\cos\omega T)}{\cancel{(z-ae^{j\omega T})}(z-ae^{-j\omega T})}\right]_{z=ae^{-j\omega T}} =$$

$$= \frac{ae^{-j\omega T}-\frac{ae^{j\omega T}}{2}-\frac{ae^{-j\omega T}}{2}}{ae^{-j\omega T}-ae^{j\omega T}} = \frac{1}{2}$$

Inverzna Z transformacija, rješenje primjera

- Pa pišemo:

$$F(z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{z}{z-ae^{j\omega T}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{z}{z-ae^{-j\omega T}}$$

$$f(k) = \frac{1}{2}a^k e^{j\omega Tk} + \frac{1}{2}a^k e^{-j\omega Tk} \qquad k \geq 0$$

$$f(k) = a^k \cos\omega Tk \qquad k \geq 0$$

Inverzna Z transformacija, višestruki polovi

- Inverzna Z–transformacija u slučaju višestrukih polova funkcije $F(z)$
- Neka je $F(z)$ zadana kao:

$$F(z) = \frac{b_n z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \ldots + b_0}{(z-z_1)^{n_1}\cdot(z-z_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(z-z_q)^{n_q}}.$$

- Gdje je $n_1 + n_2 + \ldots + n_q = n$ ukupni broj polova.
- U ovom slučaju $F(z)$ rastavljamo na sljedeći način:

Inverzna Z transformacija, višestruki polovi

$$F(z)=\alpha_0+\alpha_1\frac{z}{z-z_1}+\alpha_{21}\frac{z^2}{(z-z_1)^2}+\ldots+\alpha_{n1}\frac{z^{n1}}{(z-z_1)^{n1}}+$$

$$+\beta_1\frac{z}{z-z_2}+\beta_2\frac{z^2}{(z-z_2)^2}+\ldots+\beta_{n2}\frac{z^{n2}}{(z-z_2)^{n2}}+\ldots$$

$$\ldots+\mu_1\frac{z}{z-z_q}+\mu_2\frac{z^2}{(z-z_q)^2}+\ldots+\mu_{nq}\frac{z^{nq}}{(z-z_q)^{nq}} \qquad (1)$$

- Da bi odredili inverznu transformaciju ovako rastavljene $F(z)$ treba poznavati inverzne transformacije: $\frac{z^2}{(z-a)^2},\frac{z^3}{(z-a)^3},\frac{z^4}{(z-a)^4},\ldots$

Inverzna Z transformacija, višestruki polovi

- Pokažimo ove inverzne transformacije poznavajući:

$$Z^{-1}\left[\frac{z}{z-a}\right]=a^k$$

i koristeći izraz za transformaciju konvolucijske sumacije:

$$Z\left[\sum_{i=0}^{\infty}f_1(i)\cdot f_2(k-i)\right]=F_1(z)\cdot F_2(z).$$

Inverzna Z transformacija

- Pišemo:

$$Z^{-1}\left[\frac{z}{z-a}\cdot\frac{z}{z-a}\right]=\sum_{i=0}^{k}a^i\cdot a^{k-i}=a^k\sum_{i=0}^{k}1=a^k(k+1)$$

- Pa je

$$Z^{-1}\left[\frac{z^2}{(z-a)^2}\right]=(k+1)\cdot a^k$$

- Slično bi odredili:

$$Z^{-1}\left[\frac{z^3}{(z-a)^3}\right]=Z^{-1}\left[\frac{z}{z-a}\cdot\frac{z}{z-a}\cdot\frac{z}{z-a}\right]=$$

Inverzna Z transformacija

$$= \sum_{i=0}^{k} a^{k-i} \sum_{j=0}^{i} a^{i-j} \cdot a^{j} = \sum_{i=0}^{k} a^{k-i} \cdot a^{i} \sum_{j=0}^{i} 1 = \sum_{i=0}^{k} a^{k} (i+1) =$$

$$= a^{k} \left[\sum_{i=0}^{k} i + \sum_{i=0}^{k} 1 \right] = a^{k} \left[\frac{k}{2} \cdot (k+1) + (k+1) \right] =$$

$$= a^{k} \cdot \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

- Pa pišemo:

$$Z^{-1}\left[\frac{z^{3}}{(z-a)^{3}} \right] = \frac{(k+1)(k+2)}{2!} \cdot a^{k}$$

Inverzna Z transformacija

- Slično bi odredili za:

$$\frac{z^{4}}{(z-a)^{4}}, \quad \frac{z^{5}}{(z-a)^{5}}, \ldots$$

- Općenito možemo pisati:

$$Z^{-1}\left[\frac{z^{m}}{(z-a)^{m}} \right] = \frac{(k+1)\cdot(k+2)\cdot\ldots\cdot(k+m-1)}{(m-1)!} \cdot a^{k}$$

za m > 3

Inverzna Z transformacija, koeficijenti

- Koeficijente u rastavu $F(z)$ na parcijalne razlomke određujemo na sljedeći način:
- $\alpha_0 = F(z)|_{z=0}$
- α_{n1}, β_{n2}, ..., μ_{nq} određujemo iz:

$$\alpha_{n1} = \left[\frac{(z-z_1)^{n1}}{z^{n1}} \cdot F(z) \right]_{z=z_1} \qquad \beta_{n2} = \left[\frac{(z-z_2)^{n2}}{z^{n2}} \cdot F(z) \right]_{z=z_2}$$

$$\mu_{nq} = \left[\frac{(z-z_q)^{nq}}{z^{nq}} \cdot F(z) \right]_{z=z_q}$$

Inverzna Z transformacija, primjer

- Na ovaj način odredili smo $q + 1$ koeficijenata.
- Preostalih $n–q$ koeficijenata u (1) moguće je odrediti izračunavanjem ovog izraza za $n–q$ različitih vrijednosti od z čime se dobiva $n–q$ linearnih jednadžbi čijim rješavanjem dobijamo tražene koeficijente
- Navedeni postupak ćemo ilustrirati sljedećim primjerom 2. u kojem ćemo odrediti inverznu Z transformaciju od: $F(z)=\dfrac{z^3+2z^2+z+1}{z^3-z^2-8z+12}$.

Inverzna Z transformacija, primjer

- Rastavimo nazivnik na faktore

$$F(z)=\frac{z^3+2z^2+z+1}{(z-2)^2(z+3)}.$$

- Uočavamo dvostruki pol u z = 2. Rastav na parcijalne razlomke provodimo na sljedeći način.

$$F(z)=\frac{z^3+2z^2+z+1}{(z-2)^2(z+3)}=\alpha_0+\alpha_1\frac{z}{z-2}+\alpha_2\frac{z^2}{(z-2)^2}+\beta_1\frac{z}{z+3} \quad (2)$$

Inverzna Z transformacija, koeficijenti

- Koeficijente α_0, α_2 i β_2 određujemo na sljedeći način:

$$\alpha_0=F(z)\big|_{z=0}=\frac{1}{(-2)^3\cdot 3}=\frac{1}{12}$$

$$\alpha_2=\left[\frac{\cancel{(z-2)^2}}{z^2}\cdot\frac{z^3+2z^2+z+1}{\cancel{(z-2)^2}\cdot(z+3)}\right]_{z=2}=\frac{8+8+2+1}{4\cdot 5}=\frac{19}{20}$$

$$\beta_1=\left[\frac{\cancel{z+3}}{z}\cdot\frac{z^3+2z^2+z+1}{(z-2)^2\cdot\cancel{(z+3)}}\right]_{z=-3}=\frac{-27+18-3+1}{(-3)\cdot 25}=\frac{11}{75}$$

Inverzna Z transformacija, koeficijenti

- Preostali koeficijent α_1 odredit ćemo na sljedeći način:
- Uvrstimo li u izraz (2) bilo koju vrijednost z (raličitu od 0, 2 i –3) dobit ćemo linearnu jednadžbu iz koje možemo odrediti α_1.
- Npr. za $z = 1$: $\frac{5}{4} = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{\beta_1}{4}.$
- Odnosno:

$$\frac{5}{4} = \frac{1}{12} - \alpha_1 + \frac{19}{20} + \frac{11}{300} \quad \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{9}{50}$$

Inverzna Z transformacija, rješenje primjera

- Definitivni rastav na parcijalne razlomke:

$$F(z) = \frac{1}{12} - \frac{9}{50} \cdot \frac{z}{z-2} + \frac{19}{20} \frac{z^2}{(z-2)^2} + \frac{11}{75} \frac{z}{z+3}.$$

- Sada možemo jednostavno provesti inverznu Z–transformaciju:

$$f(k) = \frac{1}{12}\delta(k) - \frac{9}{50}(2)^k + \frac{19}{20}(k+1)(2^k) + \frac{11}{75} \cdot (-3)^k \text{ za } k \geq 0.$$

- Odnosno, sređeno:

$$f(k) = \frac{1}{12}\delta(k) - \frac{19}{20} k \cdot 2^k + \frac{77}{100} 2^k + \frac{11}{75} \cdot (-3)^k \text{ za } k \geq 0.$$

Inverzna Z transformacija, pol = 0

- Inverzna Z–transformacija kada je pol $F(z)$ u $z = 0$
- Kada se pol nađe u točki z = 0, postupak za određivanje koeficijenata je malo drugačiji. Ovo ćemo ilustrirati primjerom 3 :
- Zadatak: Odrediti inverznu Z–transformaciju

$$F(z) = \frac{z+1}{z^2(z-1)}.$$

Inverzna Z transformacija, pol = 0

- Rastav na parcijalne razlomke provest ćemo na sljedeći način:

$$F(z) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot \frac{1}{z} + \alpha_2 \frac{1}{z^2} + \beta_1 \frac{z}{z-1}.$$

- Koeficijente α_2 i β_1 možemo jednostavno odrediti:

$$\alpha_2 = \left[\cancel{z^2} \cdot \frac{z+1}{z^{\cancel{2}}(z-1)} \right]_{z=0} = -1$$

$$\beta_1 = \left[\frac{\cancel{z-1}}{z} \cdot \frac{z+1}{z^2 \cancel{(z-1)}} \right]_{z=1} = 2$$

Inverzna Z transformacija, pol = 0

- Koeficijent α_0 ne možemo računati kao prije budući $F(z)$ ima pol u nuli.
- Zato α_0 i α_1 računamo rješavanjem dviju linearnih jednadžbi koje dobivamo kako slijedi:
- za $z = -1$

$$0 = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_0 - \alpha_1 = 0$$

- za $z = 2$

$$\frac{3}{4} = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot \frac{1}{2} + \alpha_2 \cdot \frac{1}{4} + \beta_1 \cdot 2 \quad |\cdot 4$$

$$3 = 4\alpha_0 + 2\alpha_1 - 1 + 16 \Rightarrow 4\alpha_0 + 2\alpha_1 = -12$$

Inverzna Z transformacija, pol = 0

- Rješavanjem jednadžbi dobivamo:

$$\alpha_0 - \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1$$

$$4\alpha_0 + 2\alpha_1 = -12 \Rightarrow 6\alpha_0 = -12 \Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = -2$$

- Rastav na parcijalne razlomke je prema tome:

$$F(z) = -2 - 2\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + 2\frac{z}{z+1}.$$

- Inverzna transformacija je:

$$f(k) = -2\delta(k) - 2\delta(k-1) - \delta(k-2) + 2(1)^k \; k \geq 0.$$

Inverzna Z transformacija, pol = 0

- Očito je:

$$f(k)=\begin{cases}0 \text{ za } k=0,\\ 0 \text{ za } k=1,\\ 1 \text{ za } k=2,\\ 2 \text{ za } k\geq 3.\end{cases}$$

Inverzna Z transformacija dijeljenjem

- Inverzna Z–transformacija postupkom dijeljenja.
- Znajući da je $F(z)$ definiran kao

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}.$$

- Odnosno:

$$F(z)=f(0)+f(1)z^{-1}+f(2)z^{-2}+\ldots$$

- Ovako izraženu $F(z)$ možemo jednostavno odrediti dijeljenjem polinoma u brojniku s polinomom u nazivniku

Inverzna Z transformacija dijeljenjem

- Kao ilustraciju razmotrimo prije korišteni primjer: Dijeljenjem brojnika nazivnikom odrediti inverznu Z–transformaciju.

$$F(z)=\frac{z^3+2z^2+z+1}{z^3-z^2-8z+12}.$$

Inverzna Z transformacija dijeljenjem

- Izvršimo li dijeljenje:

$$(z^3+2z^2+z+1):(z^3-z^2-8z+12)=1+3z^{-1}+12z^{-2}+25z^{-3}+\ldots$$

$$\underline{-z^3 \mp z^2 \mp 8z \pm 12}$$

$$3z^2+9z-11$$

$$\underline{-3z^2 \mp 3z \mp 24 \pm 36z^{-1}}$$

$$12z+13-36z^{-1}$$

$$\underline{-12z \mp 12 \mp 96z^{-1} \pm 144z^{-2}}$$

$$25+60z^{-1}-144z^{-2}$$

Inverzna Z transformacija dijeljenjem

- Dakle

$$F(z)=1+3z^{-1}+12z^{-2}+25z^{-3}+\ldots$$

- Pa je:

$$f(0)=1, f(1)=3, f(2)=12, f(3)=25$$

$$f(k)=\delta(k)+3\delta(k-1)+12\delta(k-2)+25\delta(k-3)+\ldots$$

za $k \geq 0$