## Podsjetimo se…

- zadnji puta:
  - nedeterminističke automate
  - ekvivalenciju automata
  - kaskadu automata
  - povratnu vezu automata



## a danas ……

- danas ćemo razmotriti:
  - automate s beskonačnim brojem stanja
  - uvod u vremenski diskretne linearne sustave
  - diskretne signale



## Automati s beskonačnim brojem stanja

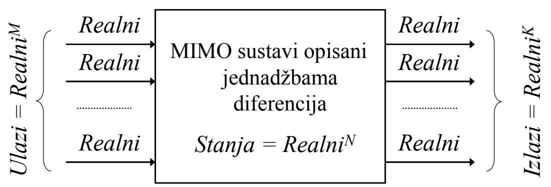
- u analizi konačnih automata pokazano je kako je moguće potpuno opisati ponašanje sustava uz poznavanje ulaznog niza znakova te konačnog broja stanja sustava (koje predstavlja prošlost sustava)
- važnu ulogu imaju sustavi s beskonačnim brojem stanja
- razmatramo sustave za koje:
  - *prostor stanja te ulazni i izlazni alfabeti su numerički skupovi*
  - *FunkcijaPrijelaza je linerarna*



## Automati

- posebno se razmatraju sustavi s

$$Stanja = Realni^N$$
$$Ulazi = Realni^M$$
$$Izlazi = Realni^K$$






## Automati

- dakle, sustav ima $M$ različitih ulaza i $K$ različitih izlaza
- ovakvi sustavi nazivaju se MIMO sustavi – Multiple-Input, Multiple-Output
- kada je $M = K = 1$ sustav se naziva SISO sustav – Single-Input, Single-Output
- stanje je $N$-torka s $N$ realnih elemenata
- $N$ se naziva dimenzijom sustava



## Automati

- primjer: stereo audio sustav je MIMO sustav s M=K=2 a novi audio sustavi kućnog kina su MIMO sustavi s M=K=5



## Automati

- važno:

za $n \in Prirodni_0$

$$x(n) \in Realni^M \quad s(n) \in Realni^N \quad y(n) \in Realni^K$$

ali su ovo nizovi

$$x \in \left[ Prirodni_0 \to Realni^M \right]$$
$$s \in \left[ Prirodni_0 \to Realni^N \right]$$
$$y \in \left[ Prirodni_0 \to Realni^K \right]$$



## Automati

- definiramo MIMO diskretni sustav kao beskonačni automat

$$D = (Stanja, Ulazi, Izlazi, FunkcijaPrijelaza, pocetnoStanje)$$

uz *Stanja* - prostor stanja

*Ulazi* - ulazni prostor

*Izlazi* – izlazni prostor

*pocetnoStanje* – početno stanje

$$FunkcijaPrijelaza : Stanja \times Ulazi \to Stanja \times Izlazi$$



## Automati

- ovdje je *FunkcijaPrijelaza*

$$FunkcijaPrijelaza : Realni^N \times Realni^M \to Realni^N \times Realni^K$$

- *FunkcijaPrijelaza* se razlaže na dvije funkcije *narednoStanje* i *izlaz*

$$narednoStanje : Realni^N \times Realni^M \to Realni^N$$
$$izlaz : Realni^N \times Realni^M \to Realni^K$$

$$\forall s \in Realni^N, \forall x \in Realni^M,$$
$$FunkcijaPrijelaza(s,x) = (narednoStanje(s,x), izlaz(s,x))$$

## Automati

- za dani ulazni niz $x(0)$, $x(1)$, …. $M$-torki iz skupa $Realni^M$, sustav rekurzivno generira odziv stanja, dakle niz, $s(0)$, $s(1)$, …. $N$-torki iz skupa $Realni^N$ i odziv izlaza $y(0)$, $y(1)$, …. $K$-torki iz skupa $Realni^K$ kako slijedi

$$s(0) = pocetnoStanje$$

jednadžba prijelaza u naredno stanje je

$$\forall n \in Cjelobrojni, n \geq 0, \quad s(n+1) = narednoStanje(s(n), x(n))$$

izlazna jednadžba je

$$\forall n \in Cjelobrojni, n \geq 0, \quad y(n) = izlaz(s(n), x(n))$$



## Automati

- u dosadašnjim razmatranjima automata $n$ je predstavljao korak u kojem promatramo automat
- ako se korak $n$ promotri kao neki trenutak vremena $nT$, gdje je $T$ razmak između koraka tada $n$ nazivamo vremenskim indeksom (ili opet korakom)
- govorimo o vremenski diskretnim sustavima
- $x(n)$, $y(n)$ imaju realne, fizikalne vrijednosti za svaki korak $n$ i ovdje se ne koristi znak *odsutan*



## Oznake

- vremenski indeks (ili korak) $n$ je iz skupa cjelobrojnih brojeva pa je x($n$) vremenski diskretan signal
- većina autora i vizualno naglašava diskretnost signala označavajući ga kao $x[n]$
- precizna definicija domene potpuno definira signal (i sustav) no ovaj vizualni dodatak daje bolju preglednost u izrazima u kojima domena može biti i diskretna i realna



## Automati

- ako *FunkcijaPrijelaza* ovisi o vremenskom indeksu $n$ tada govorimo o *vremenski promjenljivom sustavu,* inače se radi o vremenski stalnom sustavu
- isto tako *FunkcijaPrijelaza* određuje *linearnost* odnosno *nelinearnost* sustava



## Linearnost

- funkcija $f: Realni^N \to Realni^M$ je *linearna* ako

$\forall a \in Realni, \forall u \in Realni^N, \forall v \in Realni^N$ vrijedi

$f(au) = af(u)$ homogenost

$f(u+v) = f(u) + f(v)$ aditivnost

- ova dva svojstva zajedno su ekvivalentni svojstvu *superpozicije*

$\forall a, b \in Realni, \forall u, v \in Realni^N$ vrijedi

$$f(au+bv) = af(u) + bf(v)$$



## Linearnost

- svaka matrica definira linearnu funkciju na slijedeći način

neka je A matrica dimenzije $M \times N$ tada je funkcija

$f: Realni^N \to Realni^M$ definirana s

$$\forall x \in Realni^N, \quad f(x) = Ax$$

- pokažimo da svaka linearna funkcija može biti prikazana s ovakvom matričnom multiplikacijom kao što to vrijedi za skalarni slučaj $\forall x \in Realni, \quad f(x) = ax$



## Linearnost

- definiraju se vektori

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots\dots, e_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

- uz pomoć njih možemo prikazati bilo koji vektor $x \in Realni^N$ kao sumu

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots\dots + x_N e_N$$

gdje je $x_i$ (skalar) $i$-ti element vektora $x$



## Linearnost

- koristeći svojstvo superpozicije

$$y = f(x) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \dots\dots + x_N f(e_N)$$

- pišemo stupčani vektor $f(e_j) \in Realni^M$ kao

$$f(e_j) = \begin{bmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \dots \\ a_{M,j} \end{bmatrix}$$



## Linearnost

- pa gornja jednadžba

$$y = f(x) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \dots\dots + x_N f(e_N)$$

prelazi u

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_M \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \dots \\ a_{M,1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \dots \\ a_{M,2} \end{bmatrix} + \dots\dots + x_N \begin{bmatrix} a_{1,N} \\ a_{2,N} \\ \dots \\ a_{M,N} \end{bmatrix}$$

## Linearnost

$$y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_M \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{M,1} & a_{M,2} & \dots & a_{M,N} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{bmatrix}$$

odnosno $y = Ax$

gdje je $A$ matrica dimenzije $M\times N$

$$A=\left[a_{i,j}, 1\le i\le M, 1\le j\le N\right]$$



## Linearni vremenski diskretni sustavi

- razmotrimo diskretni sustav opisan s

$$Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K$$

i jednadžbama

$\forall n\in Cjelobrojni_+$

$$s[n+1]=narednoStanje(s[n],x[n])$$

$$y[n]=izlaz(s[n],x[n])$$

- za sustav kažemo da je linearan ako je početno stanje $N$-torka nula i ako su funkcije *narednoStanje* i *izlaz* linearne



## Linearni vremenski diskretni sustavi

- ako su funkcije *narednoStanje* i *izlaz* linearne i vremenski stalne (ne mijenjaju se s vremenom) govorimo o vremenski stalnom linearnom diskretnom sustavu – LTI (linear time – invariant system)



## Linearni vremenski diskretni sustavi

- razmotrimo ponovo jednadžbu stanja

$$s[n+1]=narednoStanje(s[n],x[n])$$

- ako uređeni par ($s[n]$,$x[n]$) zamislimo kao ($N$+$M$)-torku u kojoj prvih $N$ elemenata predstavlja $s[n]$ i preostalih $M$ elemenata predstavljaju $x[n]$ tada bilo koju linearnu funkciju narednoStanje možemo prikazati kao

$$narednoStanje(s[n],x[n])=P(s[n],x[n])$$

gdje je $P$ matrica dimenzije $N\times(N+M)$



## Linearni vremenski diskretni sustavi - [*A*,*B*,*C*,*D*] prikaz

- kako se prvih $N$ stupaca od $P$ (označimo ih s $A$) množi sa $s[n]$ a preostalih $M$ stupaca (označimo ih s $B$) s $x[n]$ vrijedi

$$narednoStanje(s[n],x[n])=As[n]+Bx[n]$$

gdje je $A$ matrica dimenzije $N\times N$ a B dimenzije $N\times M$

- slično vrijedi za izlaznu funkciju

$$izlaz(s[n],x[n])=Cs[n]+Dx[n]$$

gdje je C dimenzije $K\times N$ a $D$ dimenzije $K\times M$



## Linearni vremenski diskretni sustavi - [*A*,*B*,*C*,*D*] prikaz

- model s varijablama stanja diskretnog vremenski stalnog linearnog sustava je dakle

$$Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K$$

$$s[n+1]=As[n]+Bx[n]$$

$$y[n]=Cs[n]+Dx[n]$$

- ovaj način prikaza sustava naziva se i $[A,B,C,D]$ prikaz



## Linearni vremenski diskretni sustavi [*A*,*B*,*C*,*D*] prikaz - primjer

- neka je zadan diskretni sustav s [*A*,*B*,*C*,*D*] prikazom

$$\begin{aligned}&Stanja = Realni^3, Ulazi = Realni,\\ &Izlazi = Realni\\ &s[n+1]=As[n]+Bx[n]\\ &y[n]=Cs[n]+Dx[n]\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases}\begin{bmatrix} s_1[n+1] \\ s_2[n+1] \\ s_3[n+1]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_1[n] \\ s_2[n] \\ s_3[n]\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0\end{bmatrix}x[n] \\ y[n]=\begin{bmatrix}-a_3 & -a_2 & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_1[n] \\ s_2[n] \\ s_3[n]\end{bmatrix}+[b_0]x[n]\end{cases}$$

- dakle $N$=3, $M$=1, $K$=1 tj. sustav je trećeg reda i ima jedan ulaz i jedan izlaz
- raspišimo jednadžbu narednog stanja i izlaznu jednadžbu



## Linearni vremenski diskretni sustavi [*A*,*B*,*C*,*D*] prikaz - primjer

$$s_1[n+1]=s_2[n]$$

$$s_2[n+1]=s_3[n]$$

$$s_3[n+1]=-a_3s_1[n]-a_2s_2[n]-a_1s_3[n]+b_0x[n]$$

$$y[n]=-a_3s_1[n]-a_2s_2[n]-a_1s_3[n]+b_0x[n]$$

- prikažimo zadani sustav uz pomoć modela ulaz izlaz što postižemo eliminacijom $s_1$, $s_2$ i $s_3$
- iz treće i četvrte jednadžbe slijedi

$s_3[n+1] = y[n]$



## Linearni vremenski diskretni sustavi [*A*,*B*,*C*,*D*] prikaz - primjer

- iz $s_3[n+1] = y[n]$ slijedi

$$s_3[n]=y[n-1]\Rightarrow s_2[n+1]=y[n-1]\Rightarrow$$

$$s_2[n]=y[n-2]\Rightarrow s_1[n+1]=y[n-2]\Rightarrow$$

$$s_1[n]=y[n-3]$$

- uvrstimo li $s_1$, $s_2$ i $s_3$ u četvrtu jednadžbu slijedi

$$y[n]=-a_3y[n-3]-a_2y[n-2]-a_1y[n-1]+b_0x[n]$$

- odnosno

$$y[n]+a_1y[n-1]+a_2y[n-2]+a_3y[n-3]=b_0x[n]$$

## *Linearni vremenski diskretni sustavi* [*A*,*B*,*C*,*D*] prikaz - primjer

- za dani primjer pokazano je da sustav može biti zadan modelom s varijablama stanja dakle jednadžbom stanja i izlaznom jednadžbom

$$\begin{bmatrix} s_1[n+1] \\ s_2[n+1] \\ s_3[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1[n] \\ s_2[n] \\ s_3[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = \begin{bmatrix} -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1[n] \\ s_2[n] \\ s_3[n] \end{bmatrix} + [b_0]x[n]$$

- ili modelom ulaz-izlaz dakle jednadžbom diferencija

$$y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + a_3 y[n-3] = b_0 x[n]$$



## *Linearni vremenski kontinuirani sustavi* [*A*,*B*,*C*,*D*] prikaz - primjer

- pokazano je da vremenski kontinuirani sustav možemo prikazati s diferencijalnom jednadžbom (model ulaz – izlaz)

$$\dddot{y}(t) + d_2\ddot{y}(t) + d_1\dot{y}(t) + d_0 y(t) = c_0 x(t)$$

- da bi riješili ovu jednadžbu trebamo poznavati

$$y(0), \dot{y}(0) \text{ i } \ddot{y}(0)$$

- ako početne uvjete interpretiramo kao početna stanja moguć je slijedeći izbor stanja zadanog kontinuiranog sustava



## *Linearni vremenski kontinuirani sustavi* [*A*,*B*,*C*,*D*] prikaz - primjer

$$w_1(t) = y(t), \quad w_2(t) = \dot{y}(t), \quad w_3(t) = \ddot{y}(t)$$

- deriviranjem $w_1$, $w_2$, $w_3$

$$\dot{w}_1(t) = \dot{y}(t) \Rightarrow \dot{w}_1(t) = w_2(t)$$
$$\dot{w}_2(t) = \ddot{y}(t) \Rightarrow \dot{w}_2(t) = w_3(t)$$
$$\dot{w}_3(t) = \dddot{y}(t) \Rightarrow \dot{w}_3(t) = -d_0 w_1(t) - d_1 w_2(t) - d_2 w_3(t) + c_0 x(t)$$
$$\dddot{y}(t) = -d_0 w_1(t) - d_1 w_2(t) - d_2 w_3(t) + c_0 x(t)$$



## *Linearni vremenski kontinuirani sustavi* [*A*,*B*,*C*,*D*] prikaz - primjer

- pišemo pomoću matrica

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1(t) \\ \dot{w}_2(t) \\ \dot{w}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -d_0 & -d_1 & -d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_0 \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -d_0 & -d_1 & -d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \end{bmatrix} + [c_0]x(t)$$



## *Linearni vremenski kontinuirani sustavi* [*A*,*B*,*C*,*D*] prikaz - primjer

- dakle jednadžba stanja i izlazna jednadžba

$$Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K$$
$$\dot{w}(t) = Aw(t) + Bx(t)$$
$$y(t) = Cw(t) + Dx(t)$$



## *Usporedba diskretnih i kontinuiranih sustava* [*A*,*B*,*C*,*D*] prikaz - primjer

- usporedimo

$$y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + a_3 y[n-3] = b_0 x[n] \qquad \dddot{y}(t) + d_2\ddot{y}(t) + d_1\dot{y}(t) + d_0 y(t) = c_0 x(t)$$

$$\begin{bmatrix} s_1[n+1] \\ s_2[n+1] \\ s_3[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1[n] \\ s_2[n] \\ s_3[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} x[n] \qquad \begin{bmatrix} \dot{w}_1(t) \\ \dot{w}_2(t) \\ \dot{w}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -d_0 & -d_1 & -d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_0 \end{bmatrix} x(t)$$

$$y[n] = \begin{bmatrix} -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1[n] \\ s_2[n] \\ s_3[n] \end{bmatrix} + [b_0]x[n] \qquad y(t) = \begin{bmatrix} -d_0 & -d_1 & -d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \end{bmatrix} + [c_0]x(t)$$

$$s[n+1] = As[n] + Bx[n] \qquad \dot{w}(t) = Aw(t) + Bx(t)$$
$$y[n] = Cs[n] + Dx[n] \qquad y(t) = Cw(t) + Dx(t)$$



## *Linearni vremenski diskretni sustavi - primjer*

- primjer generiranja jeke (eho efekta) signala koja se može postići realizacijom jednadžbe diferencija

$$y[n] = x[n] + \alpha y[n-N]$$

- neka je

$$N = 4, \quad \alpha = 0.6, \quad x[n] = \begin{cases} 0 & \text{za } n<0 \\ 1 & \text{za } n = 0,1 \\ 0 & \text{za } n > 1 \end{cases}$$



## *Linearni vremenski diskretni sustavi primjer*

- jednadžba je dakle

$$y[n] = x[n] + 0.6y[n-4]$$

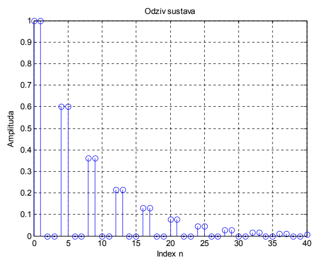
- računamo korak po korak

$$n=0 \quad y[0] = x[n] + 0.6y[-4] = 1 + 0,6*0 = 1$$
$$n=1 \quad y[1] = x[1] + 0.6y[-3] = 1 + 0,6*0 = 1$$
$$n=2 \quad y[2] = x[2] + 0.6y[-2] = 0 + 0,6*0 = 0$$
$$n=3 \quad y[3] = x[3] + 0.6y[-1] = 0 + 0,6*0 = 0$$
$$n=4 \quad y[4] = x[4] + 0.6y[0] = 0 + 0,6*1 = 0.6$$
$$n=5 \quad y[5] = x[5] + 0.6y[1] = 0 + 0,6*1 = 0.6$$
$$n=6 \quad y[6] = x[6] + 0.6y[2] = 0 + 0,6*0 = 0$$



## *Linearni vremenski diskretni sustavi primjer*

- odziv možemo prikazati slikom



## Linearni vremenski diskretni sustavi primjer

- konstruirajmo model s varijablama stanja
- polazna jednadžba je

$$y[n] = x[n] + 0.6y[n-4]$$

- napišimo je u ovom obliku

$$y[n] = 0.6y[n-4] + 0y[n-3] + 0y[n-2] + 0y[n-1] + x[n]$$

- pogodno je izabrati

$$s_1[n] = y[n-4],\ s_2[n] = y[n-3]$$
$$s_3[n] = y[n-2],\ s_4[n] = y[n-1]$$



## Linearni vremenski diskretni sustavi primjer

- slijedi

$$y[n] = 0.6s_1[n] + x[n]$$
$$s_1[n] = y[n-4] \Rightarrow s_1[n+1] = y[n-3] = s_2[n]$$
$$s_2[n] = y[n-3] \Rightarrow s_2[n+1] = y[n-2] = s_3[n]$$
$$s_3[n] = y[n-2] \Rightarrow s_3[n+1] = y[n-1] = s_4[n]$$
$$s_4[n] = y[n-1] \Rightarrow s_4[n+1] = y[n] = 0.6s_1[n] + x[n]$$

- iz ovoga slijede jednadžbe stanja i izlazna jednadžba



## Linearni vremenski diskretni sustavi primjer

- dakle iz

$$\left.\begin{array}{l} s_1[n] = y[n-4] \Rightarrow s_1[n+1] = y[n-3] = s_2[n] \\ s_2[n] = y[n-3] \Rightarrow s_2[n+1] = y[n-2] = s_3[n] \\ s_3[n] = y[n-2] \Rightarrow s_3[n+1] = y[n-1] = s_4[n] \\ s_4[n] = y[n-1] \Rightarrow s_4[n+1] = y[n] = 0.6s_1[n] + x[n] \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s_1[n+1] = s_2[n] \\ s_2[n+1] = s_3[n] \\ s_3[n+1] = s_4[n] \\ s_4[n+1] = 0.6s_1[n] + x[n] \\ y[n] = 0.6s_1[n] + x[n] \end{cases}$$



## Linearni vremenski diskretni sustavi primjer

- dakle opet su moguća dva prikaza

model s varijablama stanja

$$\begin{bmatrix} s_1[n+1] \\ s_2[n+1] \\ s_3[n+1] \\ s_4[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1[n] \\ s_2[n] \\ s_3[n] \\ s_4[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n]$$

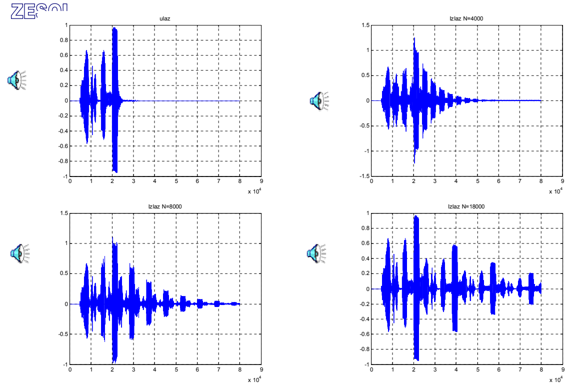
$$y[n] = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1[n] \\ s_2[n] \\ s_3[n] \\ s_4[n] \end{bmatrix} + [1]x[n]$$

model ulaz - izlaz

$$y[n] - 0.6y[n-4] = x[n]$$



## jeka govornog signala $y(n) = x(n) + 0.6y(n-N)$






## Vremenski diskretni signali

- vremenski diskretni signali definirani su samo u diskretnim trenucima vremena
- neka je signal *nekiDiskretanSignal* vremenski diskretni signal i možemo ga prikazati

$$nekiDiskretanSignal : DiskretnoVrijeme \rightarrow Realni$$

gdje je *DiskretnoVrijeme*=[0,1/11025, .... , 99225/11025] skup diskretnih trenutaka vremena u kojem je definiran signal



## Diskretni signali i otipkavanje (uzorkovanje)

- vremenski kontinuirani signal *Glazba* otipkan frekvencijom otipkavanja 10 kHz (interval otipkavanja T=0.0001 sekundi) definiran je samo u diskretnim trenucima vremena

$$OtipkanaGlazba : \{0, 0.0001, 0.0002, ...., 9.9999, 10\} \rightarrow Tlak$$

s pridruživanjem

$$OtipkanaGlazba(t) = Glazba(t)$$
$$\forall t \in \{0, 0.0001, 0.0002, ...., 9.9999, 10\}$$



## Diskretni signali

- bez obzira na način generiranja vremenski diskretnog signala on je definiran u diskretnim trenucima vremena $t = nT$, dakle $n$-ti uzorak signala pojavljuje se u trenutku $nT$ sekundi u odnosu na vrijeme 0



## Diskretni signali

- primjer

$$x : Cjelobrojni \rightarrow Realni$$
gdje $\forall n \in Cjelobrojni, \quad x[n] = \cos(2\pi FnT)$

ili npr. za $F$ = 2000 Hz i T=1/10000 sekundi

$$x : Cjelobrojni \rightarrow Realni$$
gdje $\forall n \in Cjelobrojni, \quad x[n] = \cos(0.4\pi n)$

## Vremenski diskretni signali

- vremenski diskretni signali mogu biti prikazani i kao niz brojeva - uzorcima

$$\{x[n]\} = \{\ldots, 1.41, 1.78, \underline{2.05}, 2.19, 2.18, \ldots\}$$

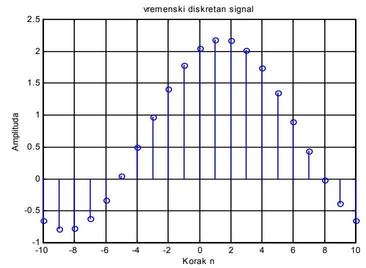
- ovdje su prikazani uzorci

$$x[-2] = 1.41, \quad x[-1] = 1.78,$$
$$x[0] = 2.05,$$
$$x[1] = 2.19, \quad x[2] = 2.18,$$

- podcrtani uzorak označava uzorak za $n = 0$



## Grafički prikaz vremenski diskretnog signala






## Vremenski diskretni signali

- $x[n]$ označava $n$-ti uzorak niza $\{x[n]\}$ bez obzira na način generiranja diskretnog signala
- $\{x[n]\}$ je realni niz ako je $n$-ti uzorak x[n] realan za svaki $n$
- inače je $\{x[n]\}$ kompleksni niz



## Kompleksni diskretni signal

- kompleksni niz $\{x[n]\}$ se može napisati kao:

  $\{x[n]\}=\{x_{re}[n]\} + j\{x_{im}[n]\}$

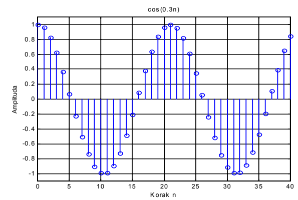
  gdje su $x_{re}[n]$ i $x_{im}[n]$ realni i imaginarni dio od $x[n]$
- konjugirano kompleksni niz je

  $\{x^*[n]\}=\{x_{re}[n]\} - j\{x_{im}[n]\}$
- često se vitičaste zagrade ispuštaju u označavanju niza



## Primjeri diskretnih signala

- $\{x[n]\}=\{\cos(0.3n)\}$ je realni niz






## Primjeri diskretnih signala

- $\{z[n]\}=\{e^{j0.3n}\}$ je kompleksan niz
- može se napisati:

  $\{z[n]\}=\{\cos(0.3n)+j\sin(0.3n)\}=$

  $=\{\cos(0.3n)\}+j\{\sin(0.3n)\},$

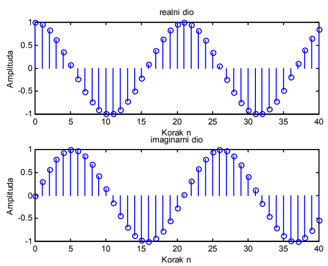
  gdje je $\{z_{re}[n]\}=\{\cos(0.3n)\}$

  $\{z_{im}[n]\}=\{\sin(0.3n)\}$



## Primjeri diskretnih signala

- $\{z[n]\}=\{e^{j0.3n}\} =\{\cos(0.3n)\}+j\{\sin(0.3n)\}$






## Diskretni signali

- vremenski diskretan signal je konačne duljine (finite length) ako je definiran za konačni vremenski interval

$$N_1 < n < N_2$$

gdje je $-\infty < N_1$ i $N_2 < +\infty$ i $N_1 \le N_2$

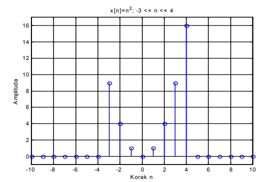
- Duljina ili trajanje niza konačne duljine je:

$$N = N_2 - N_1 + 1$$



## Diskretni signali

- niz $\{x[n]\}=\{\cos(0.3n)\}$ je beskonačnog trajanja
- $x[n]=n^2$ ; $-3 \le n \le 4$ je niz konačne duljine 4-(-3)+1=8



## Osnovne operacije na nizovima i elementi diskretnog sustava

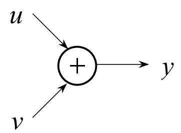
- zbrajanje nizova

  zbroj dva niza $y = u + v$ ili

  $\{y[n]\} = \{u[n]\} + \{v[n]\}$

  je niz s općim članom

  $y[n] = u[n] + v[n]$ za svaki $n \in \mathbf{Z}$.



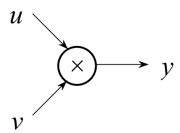

- produkt nizova

  produkt dva niza $y = uv$ ili

  $\{y[n]\} = \{u[n]\} * \{v[n]\}$

  je niz s općim članom

  $y[n] = u[n]v[n]$ za svaki $n \in \mathbf{Z}$.





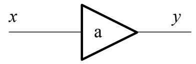

## Osnovne operacije na nizovima i elementi diskretnog sustava

- množenje s konstantom

  $y = a\,x$ ili

  $\{y[n]\} = a\{x[n]\} = \{a\,x[n]\}$

  $y[n] = a\,x[n]$ za svaki $n \in \mathbf{Z}$.

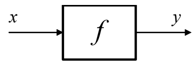



- funkcijski blok

  $y = f[x]$ ili

  $\{y[n]\} = f[\{x[n]\}]$

  $y[n] = f[x[n]]$ za svaki $n \in \mathbf{Z}$.




  reverzija vremena

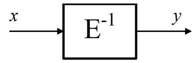
  $y[n]=x[-n]$



## Osnovne memorijske i predikcijske operacije

- pomak niza – jedinični pomak daje iz ulaznog niza, niz pomaknut za jedan korak.

unatrag (kašnjenje i pamćenje)




$y = E^{-1}x$ ili $\{y[n]\} = E^{-1}\{x[n]\}$,

$y[n] = (E^{-1}x)[n]$,

$y[n] = x[n - 1]$ $n > 0$.

unaprijed (predikcija)


$y = E\,x$ ili $\{y[n]\} = E\,\{x[n]\}$,

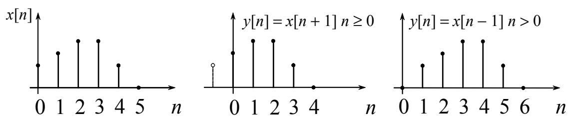
$y[n] = (Ex)[n]$,

$y[n] = x[n + 1]$ $n \geq 0$.



## Pomak niza

- operacija pomaka niza unaprijed traži nekauzalan sustav pa je neostvariva u realnim sustavima.
- zato se služimo redovito jedinicama za kašnjenje, odnosno operacijom $E^{-1}$.






## Pomak niza

- u literaturi je uobičajeno označavati blok za jedinično kašnjenje sa $z^{-1}$ umjesto s $E^{-1}$
- kašnjenje za $N$ koraka je operacija

$$y[n]=u[n-N]$$



## Primjer osnovnih operacija

- zadana su dva niza duljine 5 zadana za $0 \leq n \leq 4$

$\{a[n]\}=\{5\ 6\ -2\ 0\ -1\}$

$\{b[n]\}=\{4\ -2\ -2\ 4\ 1\}$

- generiranje novih nizova primjenom osnovnih operacija

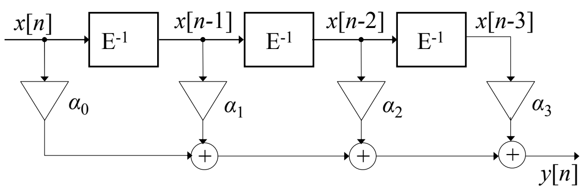
$\{c[n]\}=\{a[n]*b[n]\}=\{20\ -12\ 4\ 0\ -1\}$

$\{d[n]\}=\{a[n]+b[n]\}=\{9\ 4\ -4\ 4\ 0\}$

$\{e[n]\}=0.5*\{a[n]\}=\{2.5\ 3\ -1\ 0\ -0.5\}$



## Primjer prikaza sustava uz pomoć osnovnih operacija




$$y[n]=\alpha_0 x[n]+\alpha_1 x[n-1]+\alpha_2 x[n-2]+\alpha_3 x[n-3]$$

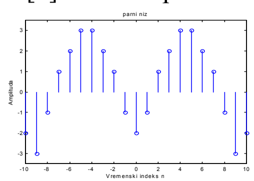


## Klasifikacija nizova prema simetričnosti

- konjugirano simetrični niz

$$x[n]=x^*[-n]$$

za realni $x[n]$ radi se o parnom nizu



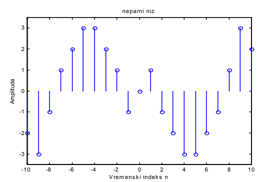



## Klasifikacija nizova prema simetričnosti

- konjugirano antisimetrični niz

$$x[n]= -x^*[-n]$$

za realni $x[n]$ radi se o neparnom nizu



## Klasifikacija nizova prema simetričnosti

- svaki kompleksan niz može biti prikazan kao zbroj njegovog konjugiranog simetričnog i konjugiranog antisimetričnog dijela

$$x[n]=x_{cs}[n]+x_{ca}[n]$$

gdje su

$$x_{cs}[n]=0.5(x[n]+x^*[-n])$$
$$x_{ca}[n]=0.5(x[n]-x^*[-n])$$



## Klasifikacija nizova prema simetričnosti

- svaki pak realan niz može biti prikazan kao zbroj njegovog parnog i neparnog dijela

$$x[n]=x_p[n]+x_n[n]$$

gdje su

$$x_p[n]=0.5(x[n]+x[-n])$$
$$x_n[n]=0.5(x[n]-x[-n])$$



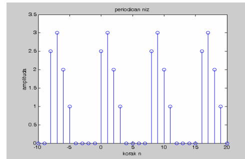
## Periodični nizovi

- za periodičan niz vrijedi

$$\tilde{x}[n]=\tilde{x}[n+kN]$$

$N$ je period ponavljanja, $k\in Z$

- najmanji $N$ koji zadovoljava $\tilde{x}[n]=\tilde{x}[n+kN]$ je osnovni period

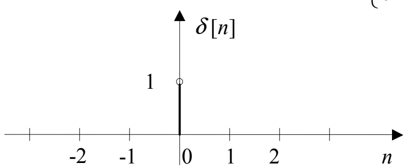




## *Osnovni nizovi*

- jedinični niz (niz s jediničnim članom ili uzorkom, Kroneckerov delta, δ – niz).
- δ = ..., 0, 0, <u>1</u>, 0, 0, ...

$$\forall n\in Cjelobrojni,\quad \delta[n]=\begin{cases}1 & \text{za}\quad n=0\\ 0 & \text{za}\quad n\neq 0\end{cases}$$

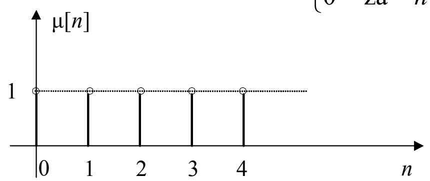





## *Osnovni nizovi*

- jedinična stepenica, jedinični skok
- $\mu$ = ..., 0, 0, <u>1</u>, 1, 1, ...

$$\forall n\in Cjelobrojni,\quad \mu[n]=\begin{cases}1 & \text{za}\quad n\geq 0\\ 0 & \text{za}\quad n< 0\end{cases}$$

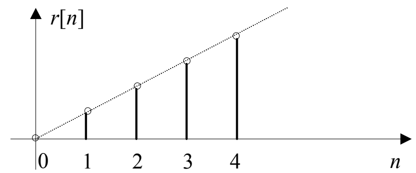





## *Osnovni nizovi*

- jedinična rampa
- $r$ = ..., 0, <u>0</u>, 1, 2, 3, 4, ...

$$\forall n\in Cjelobrojni,\quad r[n]=\begin{cases}n & \text{za}\quad n\geq 0\\ 0 & \text{za}\quad n< 0\end{cases}$$





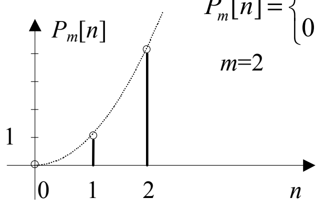

## *Osnovni nizovi*

- jedinična parabola $m$–tog stupnja

$P_m$ = ..., 0, <u>0</u>, $1^m$, $2^m$, $3^m$, ...

$$P_m[n]=\begin{cases}n^m & \text{za}\quad n\geq 0, n\in \mathbf{Z}\\ 0 & \text{za}\quad n< 0\end{cases}$$

$m$=2






## *Osnovni nizovi*

- realni sinusni (kosinusni) niz:

$$\forall n\in Cjelobrojni,\quad x[n]=X\cos(\omega_0 n+\varphi)$$

gdje je $X$ amplituda, $\omega_0$ [radijana/uzorku] kutna frekvencija a φ [radijana] faza od $x[n]$

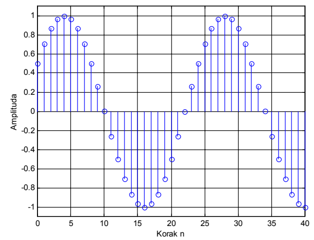
- koristi se i varijabla $f_0$ [perioda/uzorku] definirana kao:

$$\omega_0=2\pi f_0$$



## *Osnovni nizovi*

- grafički prikaz: $\cos\left(\frac{\pi}{12}n-\frac{\pi}{3}\right)$




$$\omega_0=\frac{\pi}{12}$$
$$f_0=\frac{1}{24}$$

## Osnovni nizovi

- kompleksna eksponencijala

  $\forall n \in Cjelobrojni, \quad x[n] = A\alpha^n$

  gdje su A i α realni i kompleksni brojevi

- ako označimo: $\alpha = e^{(\sigma_0 + j\omega_0)}, \; A = |A|e^{j\varphi}$

  tada možemo pisati

$$x[n] = |A|e^{j\varphi}e^{(\sigma_0 + j\omega_0)\,n} = x_{re}[n] + jx_{im}[n]$$

gdje je

$$x_{re}[n] = |A|e^{\sigma_0 n}\cos(\omega_0 n + \varphi)$$

$$x_{im}[n] = |A|e^{\sigma_0 n}\sin(\omega_0 n + \varphi)$$



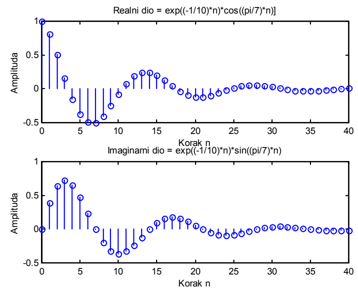
## Kompleksni eksponencijalni niz

- suglasno prethodnim izrazima za $x_{re}[n]$ i $x_{im}[n]$ kompleksne eksponencijale su sinusiodalni nizovi čija se amplituda prigušuje ($\sigma_0$<0), raspiruje ($\sigma_0$>0) ili je konstantna ($\sigma_0$=0).
- primjer kompleksne eksponencijale

$$x[n] = e^{\left(-\frac{1}{10} + j\frac{\pi}{7}\right)n}$$



## Primjer kompleksnog eksponencijalnog niza

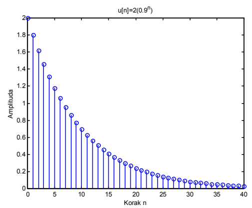


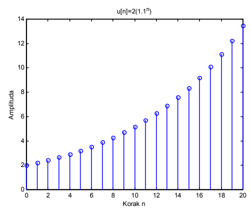



## Realni eksponencijalni niz

- primjer realnog eksponencijalnog niza:

  $\forall n \in Cjelobrojni_+, \quad u[n] = U\alpha^n$






## Periodičnost kosinusnog niza

- niz $u[n] = \cos(\omega_0 n + \varphi)$ je periodičan ako vrijedi $u[n] = \cos(\omega_0 n + \varphi) = \cos(\omega_0(n+N) + \varphi)$ pa slijedi:

$$\cos(\omega_0(n+N) + \varphi) =$$

$$= \cos(\omega_0 n + \varphi)\cos(\omega_0 N) - \sin(\omega_0 n + \varphi)\sin(\omega_0 N)$$

a ovo će biti jednako $\cos(\omega_0 n + \varphi)$ za $\sin(\omega_0 N) = 0$ i $\cos(\omega_0 N) = 1$ a to je za:

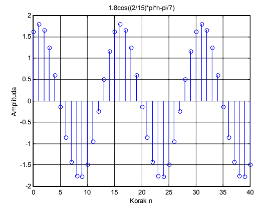
$$\omega_0 N = 2\pi k \quad \text{ili} \quad \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{N}{k} \quad ili \quad f_0 = \frac{k}{N}$$



## Periodičnost sinusnog niza:primjer

- za niz $u[n] = 1.8\cos(\frac{2\pi}{15}n - \frac{\pi}{7})$

$$\omega_0 = \tfrac{2\pi}{15} \Rightarrow N = \frac{2\pi k}{\frac{2}{15}\pi} = 15 \quad \text{za} \quad k = 1$$

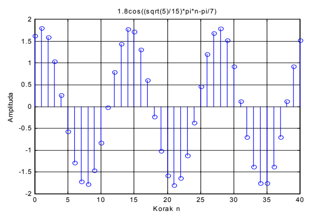





## Periodičnost sinusnog niza:primjer

- ako $2\pi/\omega_0 = N/k$ za cjelobrojne $k$ i $N$ tada će period biti višekratnik od $2\pi/\omega_0$
- inače je niz aperiodičan, primjer:

$$u[n] = 1.8\cos(\tfrac{\sqrt{5}\pi}{15}n - \tfrac{\pi}{7})$$






## Svojstva sinusnog niza

za ω = π + Δ izlazi

$$x(n) = \cos(\pi + \Delta)n = \cos(-2\pi + \pi + \Delta)n$$

$$= \cos(-\pi + \Delta)n = \cos(\pi - \Delta)n$$

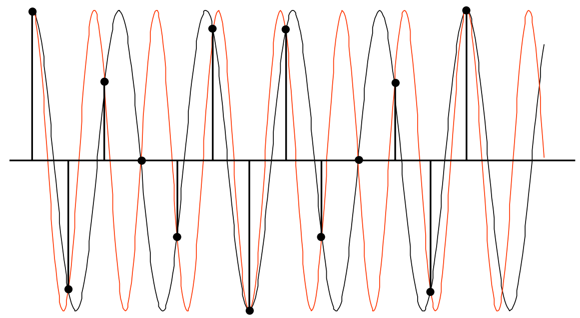
za ovaj niz se ne može razlikovati da li je kutna frekvencija niza

$\omega_1 = \pi + \Delta$ ili $\omega_2 = \pi - \Delta$



$x(n) = \cos(\omega n), \quad n \in \mathbb{Z}$

$\omega = \omega_1 = 7\pi/6 \qquad \omega = \omega_2 = 5\pi/6$



## Svojstva sinusnog niza

- za $\omega = 2\pi - \Delta$ izlazi

  $x(n) = \cos(2\pi - \Delta)n = \cos(-\Delta)n = \cos(\Delta n)$

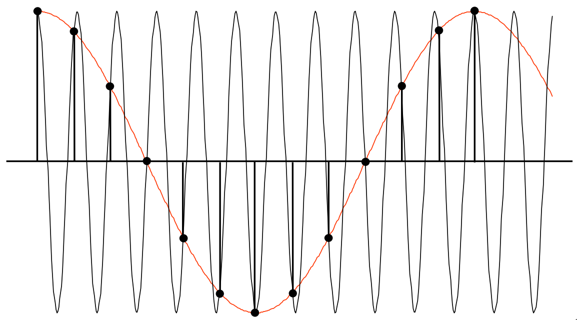
- za zadani niz se ne može razlikovati je li kutna frekvencija

  $\omega_1 = 2\pi - \Delta$ ili $\omega_2 = \Delta$



$x(n) = \cos(\omega n), \quad n \in \mathbb{Z}$

$\omega = \omega_1 = \pi / 6 \qquad \omega = \omega_2 = 11\pi / 6$





## Svojstva sinusnog niza

iz prethodnog slijedi da su sve sinusoide frekvencije $\omega_k = \omega_0 + 2k\pi \qquad -\pi < \omega_0 < \pi$ identične (i ne možemo ih razlikovati) jer vrijedi

$$\cos((\omega_0 + 2k\pi)n + \varphi) = \cos((\omega_0 n + \varphi) + 2k\pi n) = \cos(\omega_0 n + \varphi)$$

zato su sve $\cos((\omega_0 + 2k\pi)n + \varphi)$ "alias" kosinusoide $\cos(\omega_0 n + \varphi)$



## Svojstva sinusnog niza

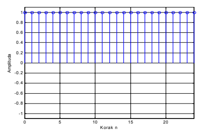
sve diskretne sinusoide s frekvencijom

$$|\omega| \le \pi \;\text{ ili }\; |f| \le \frac{1}{2}$$

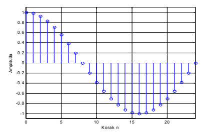
su jednoznačno definirane



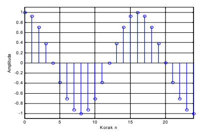
$\cos(\omega n), \quad \omega = 0$



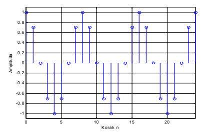
$\cos(\omega n), \quad \omega = \frac{\pi}{16}$



$\cos(\omega n), \quad \omega = \frac{\pi}{8}$

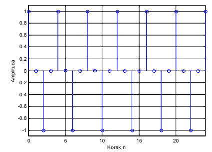


$\cos(\omega n), \quad \omega = \frac{\pi}{4}$

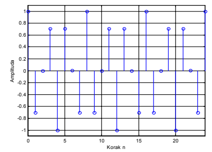




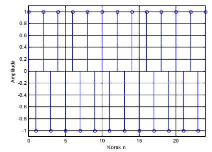
$\cos(\omega n), \quad \omega = \frac{\pi}{2}$



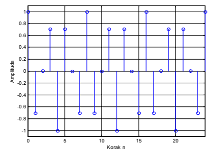
$\cos(\omega n), \quad \omega = \frac{3\pi}{4}$



$\cos(\omega n), \quad \omega = \pi$



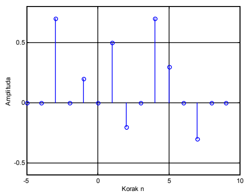
$\cos(\omega n), \quad \omega = \frac{5\pi}{4}$





## Prikaz niza uz pomoć $\delta[n]$

- svaki niz može biti prikazan uz pomoć sume jediničnih impulsa




$$x[n] = 0.7\delta[n+3] + 0.2\delta[n+1] + 0.5\delta[n-1] - 0.2\delta[n-2]$$
$$+0.7\delta[n-4] + 0.3\delta[n-5] - 0.3\delta[n-7]$$