Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- rješenje homogene jednadžbe stanja može se dobiti pretpostavkom da eksponencijalne funkcije $w_1 = W_1 e^{pt}$, $w_2 = W_2 e^{pt}$ zadovoljavaju skup od dvije jednadžbe:

$$\dot{w}_1 = a_{11} w_1 + a_{12} w_2$$
$$\dot{w}_2 = a_{21} w_1 + a_{22} w_2$$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- dobije se sustav karakterističnih algebarskih jednadžbi:

$$\begin{matrix} \dot{w}_1 = a_{11} w_1 + a_{12} w_2 \\ \dot{w}_2 = a_{21} w_1 + a_{22} w_2 \end{matrix} \xrightarrow[w_2 = W_2 e^{pt}]{w_1 = W_1 e^{pt}} \begin{matrix} pW_1 e^{pt} = \left(a_{11} W_1 + a_{12} W_2\right) e^{pt} \\ pW_2 e^{pt} = \left(a_{21} W_1 + a_{22} W_2\right) e^{pt} \end{matrix}$$

$$pW_1 = a_{11} W_1 + a_{12} W_2$$
$$pW_2 = a_{21} W_1 + a_{22} W_2$$
$$(a_{11} - p) W_1 + a_{12} W_2 = 0$$
$$a_{21} W_1 + (a_{22} - p) W_2 = 0$$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- da bi sustav karakterističnih jednadžbi dao rješenja za amplitude W_1, W_2 različite od nule, mora determinanta sustava biti jednaka nuli,

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - p) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22} - p) \end{vmatrix} = 0.$$

- to daje polinom drugog stupnja:

$$p^2 - \mathrm{T} p + \Delta = 0.$$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- odakle slijede prirodne frekvencije p_1 i p_2 za koje e^{pt} zadovoljava jednadžbu.
- rješenje se može napisati u obliku:

$$w_1(t) = W_{11} e^{p_1 t} + W_{12} e^{p_2 t},$$
$$w_2(t) = W_{21} e^{p_1 t} + W_{22} e^{p_2 t}.$$

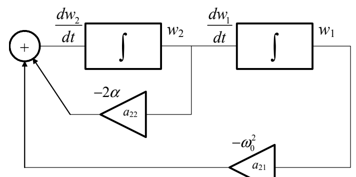
Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- nezavisne su samo dvije konstante i one se odrede iz dva početna uvjeta
- druge dvije konstante proizlaze iz prvih uvrštenjem u jednadžbe stanja za $t = 0$

$$W_{11} = \frac{(a_{11} - p_2) w_1(0) + a_{12} w_2(0)}{p_1 - p_2} \qquad W_{12} = \frac{(p_1 - a_{11}) w_1(0) - a_{12} w_2(0)}{p_1 - p_2}$$

$$W_{21} = \frac{a_{21} w_1(0) + (a_{22} - p_2) w_2(0)}{p_1 - p_2} \qquad W_{22} = \frac{-a_{21} w_1(0) + (p_1 - a_{22}) w_2(0)}{p_1 - p_2}$$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda - primjeri



$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega_0^2 & -2\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} T = -2\alpha \\ \Delta = \Omega_0^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} \text{karakteristična jednadžba} \\ p^2 + 2\alpha p + \Omega_0^2 = 0 \end{matrix}$$

- za

$$\alpha < \Omega_0 \Rightarrow p_{1,2} = -\alpha \pm j \underbrace{\sqrt{\Omega_0^2 - \alpha^2}}_{\omega_d}$$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

$$p_1 = -\alpha + j\Omega_d$$
$$p_2 = -\alpha - j\Omega_d$$

- neka je $w_2(0) = 0$, za zadani primjer slijedi

$$W_{11} = \frac{-p_2 w_1(0) + w_2(0)}{p_1 - p_2} = \frac{(\alpha + j\Omega_d) w_1(0)}{2 j\Omega_d}$$

$$W_{12} = \frac{(p_1 - a_{11}) w_1(0) - w_2(0)}{p_1 - p_2} = \frac{(-\alpha + j\Omega_d) w_1(0)}{2 j\Omega_d}$$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- pa je

$$w_1(t) = \frac{(\alpha + j\Omega_d) w_1(0)}{2 j\Omega_d} e^{(-\alpha + j\Omega_d)t} + \frac{(-\alpha + j\Omega_d) w_1(0)}{2 j\Omega_d} e^{(-\alpha - j\Omega_d)t}$$

$$w_1(t) = w_1(0) e^{-\alpha t} \left(\frac{\alpha}{2 j\Omega_d} e^{j\Omega_d t} + \frac{1}{2} e^{j\Omega_d t} - \frac{\alpha}{2 j\Omega_d} e^{-j\Omega_d t} + \frac{1}{2} e^{-j\Omega_d t} \right)$$

$$w_1(t) = e^{-\alpha t} \left(\frac{\alpha}{\Omega_d} \sin(\Omega_d t) + \cos(\Omega_d t) \right) w_1(0)$$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- kako je $w_2(t) = \dot{w}_1(t) \Rightarrow$

$$w_2(t) = -\frac{\alpha^2}{\Omega_d} e^{-\alpha t}\sin(\Omega_d t)w_1(0) - \Omega_d e^{-\alpha t}\sin(\Omega_d t)w_1(0)$$

- za $\dfrac{\alpha}{\Omega_d} \ll 1$

$$w_1(t) = e^{-\alpha t}\cos(\Omega_d t)w_1(0)$$

$$w_2(t) = -\omega_d e^{-\alpha t}\sin(\Omega_d t)w_1(0)$$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

$$w_1(t) = e^{-\alpha t}\cos(\Omega_d t)w_1(0) \Rightarrow \cos(\Omega_d t) = \frac{w_1(t)}{w_1(0)e^{-\alpha t}}$$

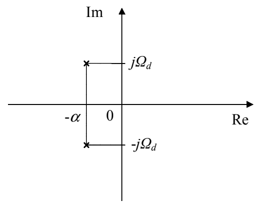
$$w_2(t) = -\Omega_d e^{-\alpha t}\sin(\Omega_d t)w_1(0) \Rightarrow \sin(\Omega_d t) = \frac{w_2(t)}{-\Omega_d e^{-\alpha t}w_1(0)}$$

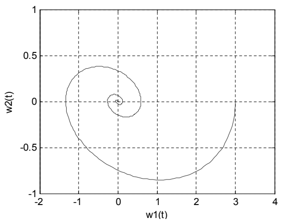
- pa je

$$\left(\frac{w_1(t)}{e^{-\alpha t}w_1(0)}\right)^2 + \left(\frac{w_2(t)}{-\Omega_d e^{-\alpha t}w_1(0)}\right)^2 = 1$$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

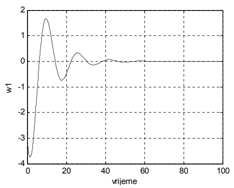
- za $\alpha = -0,1; \quad \Omega_0 = 0,4; \Rightarrow \Omega_d = 0,3873;$
  $w_1(0) = 3; \quad w_2(0) = 0;$

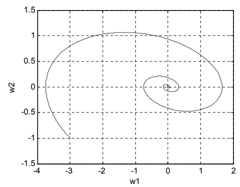




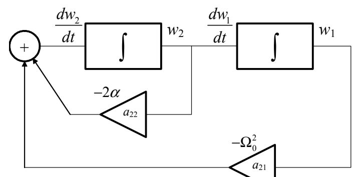
Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- za $\alpha = -0,1; \quad \Omega_0 = 0,4; \Rightarrow \Omega_d = 0,3873;$
  $w_1(0) = -3; \quad w_2(0) = -1;$





Vladanje i svojstva sustava drugog reda



$$\begin{bmatrix}\dot{w}_1\\ \dot{w}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\end{bmatrix}$$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

$$\begin{bmatrix}\dot{w}_1\\ \dot{w}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\Omega_0^2 & -2\alpha\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\end{bmatrix}$$

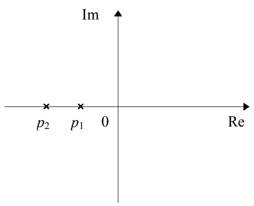
$$\left.\begin{aligned}T &= -2\alpha\\ \Delta &= \Omega_0^2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{gathered}\text{karakteristična jednadžba}\\ p^2 + 2\alpha p + \Omega_0^2 = 0\end{gathered}$$

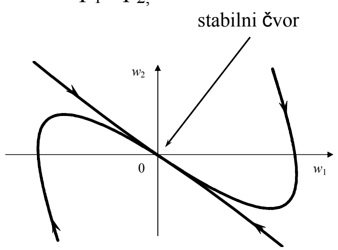
- za $\alpha > \Omega_0 \Rightarrow p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \Omega_0^2}$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- slučaj realnih i različitih p_1 i p_2,

a) $p_1, p_2 < 0$





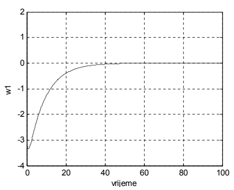
Vladanje i svojstva sustava drugog reda

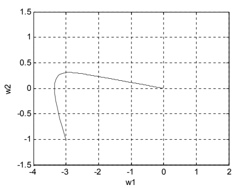
$\alpha = 0,75; \quad \Omega_0 = 0,4; \quad w_1(0) = -3; \quad w_2(0) = -1;$

$$\alpha > \Omega_0 \Rightarrow p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \Omega_0^2} = -0,75 \pm 0,6344$$

$$p_1 = -0,1156$$

$$p_2 = -1,3844$$

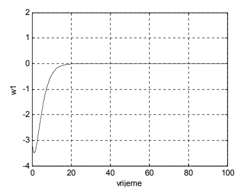


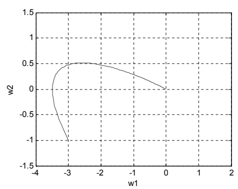


Vladanje i svojstva sustava drugog reda

$$\alpha = \Omega_0 = 0,4 \Rightarrow p_{1,2} = -\alpha = -0,4$$

$$w_1(0) = -3; \quad w_2(0) = -1;$$

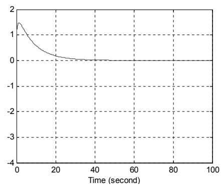


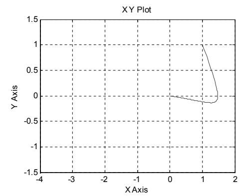


Vladanje i svojstva sustava drugog reda

$$\alpha = \Omega_0 = 0,4 \Rightarrow p_{1,2} = -\alpha = -0,4$$

$$w_1(0) = 1; \quad w_2(0) = 1;$$

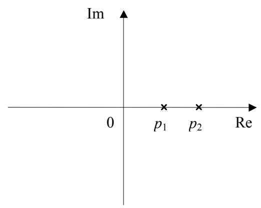


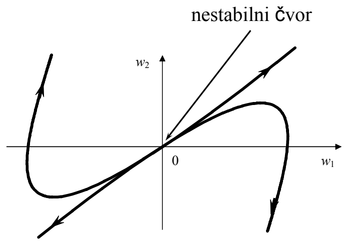


Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- slučaj realnih i različitih p_1 i p_2

b) $p_1, p_2 > 0$

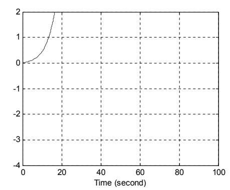


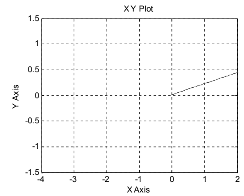


Vladanje i svojstva sustava drugog reda

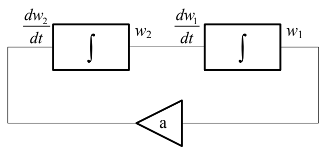
$$p_1 = 0,1; \quad p_1 = 0,2;$$

$$w_1(0) = 0.01; \quad w_2(0) = 0.01;$$





Vladanje i svojstva sustava drugog reda



$$\frac{dw_1}{dt} = w_2$$

$$\frac{dw_2}{dt} = aw_1$$

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} a_{11} = 0 \quad a_{12} = 1 \\ a_{21} = a \quad a_{22} = 0 \\ T = 0 \quad \Delta = -a \end{matrix}$$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- karakteristična jednadžba je

$$\begin{vmatrix} -p & 1 \\ a & -p \end{vmatrix} = p^2 - a = 0 \qquad p_{12} = \pm\sqrt{a} = \pm\alpha$$

$$\text{za } a > 0$$

$$\vdots$$

$$\begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{ch}(\alpha t) & \dfrac{\mathrm{sh}(\alpha t)}{\alpha} \\ \alpha\,\mathrm{sh}(\alpha t) & \mathrm{ch}(\alpha t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1(0) \\ w_2(0) \end{bmatrix}$$

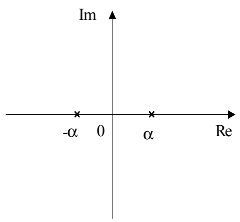
- $\mathbf{w}(t) = \Phi(t)\mathbf{w}_0$, gdje je $\Phi(t)$ – prijelazna matrica.

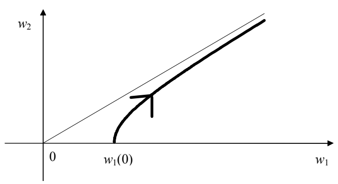
Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- Veza između $w_1(t)$ i $w_2(t)$.
- Jednadžbu krivulje $F(w_1, w_2) = 0$ možemo dobiti eliminacijom vremena.
- Uzmimo početno stanje $w_1(0)$, $(w_2(0) = 0)$:

$$\left(\frac{w_1}{w_1(0)}\right)^2 - \left(\frac{w_2}{\alpha w_1(0)}\right)^2 = 1.$$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda





$$w_1 \to \infty \quad \text{za} \quad t \to \infty$$

$$w_2 \to \infty \quad \text{za} \quad t \to \infty$$

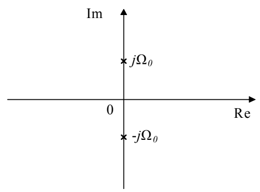
- Nestabilan sustav. Ravnoteža $\mathbf{w} = 0$ se ne dosegne – sedlo

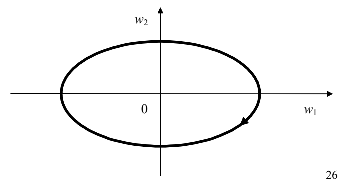
Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- *Primjer:* za $a < 0$ $\qquad p_{12} = \pm\sqrt{-\Omega_0^2} = \pm j\Omega_0$

$$\left(\frac{w_1}{w_1(0)}\right)^2 + \left(\frac{w_2}{\Omega_0 w_1(0)}\right)^2 = 1$$

- Zatvorena krivulja – periodičan proces. Trajektorija obilazi oko točke ravnoteže – fokus.

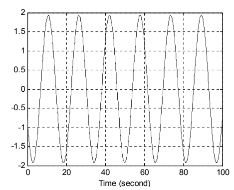


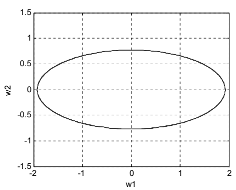


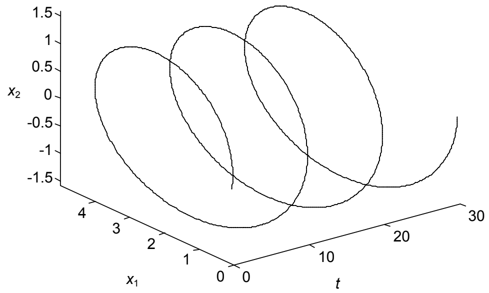
Vladanje i svojstva sustava drugog reda

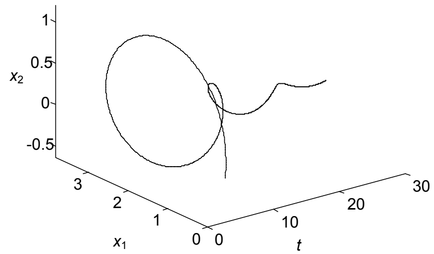
- *Primjer:* za $a < 0$ $\qquad p_{12} = \pm\sqrt{-\Omega_0^2} = \pm j0,4$

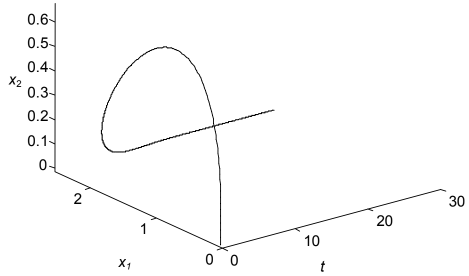
$$w_1(0) = -0.8; \quad w_2(0) = -0.7;$$











SIMULINK primjer

iired1

Prisilni odziv sustava

- prisilni odziv sustava predstavlja partikularno rješenje nehomogene jednadžbe.
  - općenito se može dobiti Lagrangeovom metodom varijacije parametara.
- za pobudu eksponencijalnom funkcijom računanje odziva je jednostavno jer se $y_p(t)$ može predstaviti eksponencijalom (deriviranjem se mijenja samo kompleksna amplituda eksponencijale).
- određivanje kompleksne amplitude temelji se na metodi neodređenih koeficijenata.

Prisilni odziv sustava

- opći oblik diferencijalne jednadžbe:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) =$$
$$= b_m x^{(m)}(t) + b_{m-1} x^{(m-1)}(t) \ldots + b_0 x(t)$$

- pobudni signal $x(t)$ u obliku eksponencijale

$$x(t) = Xe^{st}, \qquad X = |X| e^{j\varphi}$$

X kompleksna amplituda ($|X|$ amplituda, φ faza),
s - kompleksna frekvencija, $s = \sigma + j\Omega$,

Prisilni odziv sustava

- pretpostavljeno rješenje (Y neodređeni koeficijent):
- uvrštavanjem u polaznu jednadžbu

$$\left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots a_0\right) Ye^{st} = \left(b_m s^m + \ldots + b_0\right) Xe^{st}$$

$$Y = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0} X = H(s) X$$

- amplituda partikularnog rješenja Y određena je amplitudom pobude, svojstvima sustava te kompleksnom frekvencijom s.

Prijenosna funkcija

- Transfer ili prijenosna funkcija sustava $H(s)$ - veličina koja određuje odnos kompleksne amplitude prisilnog odziva Ye^{st} i kompleksne amplitude pobude Xe^{st} .

$$H(s) = \frac{b_m s^m + \ldots + b_0}{a_n s^n + \ldots a_0} = \frac{Y}{X}$$

- $H(s)$ ima značenje faktora kojim treba množiti kompleksnu amplitudu ulaza da se dobije amplituda izlaza

$$Y = H(s)X$$

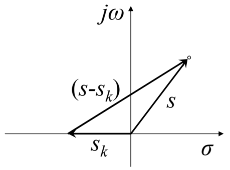
Prijenosna funkcija

- općenito je transfer ili prijenosna funkcija sustava $H(s)$ racionalna funkcija koju možemo prikazati kao

$$H(s) = K \frac{(s - s_1)(s - s_2)\cdots(s - s_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_n)}$$

- K je realni faktor a s_i (i=1,..,m) i p_i (i=1,..,n) su nule odnosno polovi prijenosne funkcije
- svaki od članova (s-s_k) može biti predstavljen kao vektor u kompleksnoj s ravnini

Prijenosna funkcija



- vektor (s-s_k) je usmjeren od s_k do s i može biti prikazan u polarnom obliku

$$(s-s_k)=\left|s-s_k\right|e^{j\angle(s-s_k)}$$

- stoga se prijenosna funkcija sastoji od produkta i kvocijenta vektora

Prijenosna funkcija

$$H(s)=K\frac{\left|s-s_1\right|e^{j\angle(s-s_1)}\left|s-s_2\right|e^{j\angle(s-s_2)}\cdots\left|s-s_m\right|e^{j\angle(s-s_m)}}{\left|s-p_1\right|e^{j\angle(s-p_1)}\left|s-p_2\right|e^{j\angle(s-p_2)}\cdots\left|s-p_n\right|e^{j\angle(s-p_n)}}$$

tako da vrijedi

$$\left|H(s)\right|=K\frac{\left|s-s_1\right|\left|s-s_2\right|\cdots\left|s-s_m\right|}{\left|s-p_1\right|\left|s-p_2\right|\cdots\left|s-p_n\right|}$$

i

$$\angle H(s)=\angle K+\angle(s-s_1)+\angle(s-s_2)+\angle(s-s_m)$$
$$-\angle(s-p_1)-\angle(s-p_2)-\angle(s-p_n)$$

pa je $H(s)=\left|H(s)\right|e^{j\angle H(s)}$

Prisilni odziv sustava

- primjer:

$$\ddot{y}(t)+0,2\dot{y}(t)+0,16y(t)=x(t)$$

- za pobudu $x(t)=Xe^{st}$

  partikularno rješenje je oblika $y(t)=Ye^{st}$

- kompleksna amplituda partikularnog rješenja Y je

$$Y=\frac{1}{s^2+0,2s+0,16}X$$

Prisilni odziv sustava

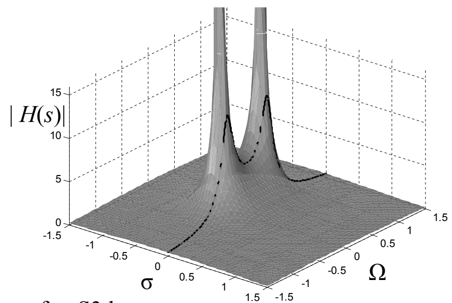
- partikularno rješenje je

$$y(t)=XH(s)e^{st}=\frac{1}{s^2+0,2s+0,16}Xe^{st}$$

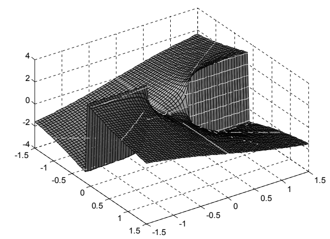
- prijenosna funkcija je

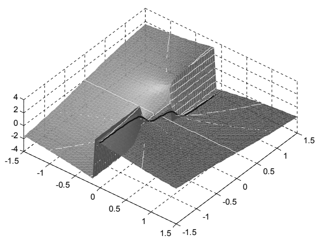
$$H(s)=\frac{1}{s^2+0,2s+0,16}$$

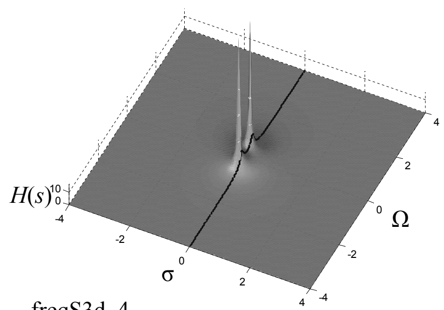
Prijenosna funkcija



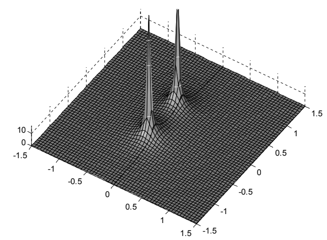
freqS3d







freqS3d_4



freqS3d_4

Prisilni odziv sustava

- specijalni slučajevi kompleksne frekvencije pobude s:
  - $s = 0$ - prisilni odziv na pobudu konstantom

$$x = Xe^{0t} = X, \quad H(0) = \frac{b_0}{a_0}$$

Prisilni odziv sustava

- $s = j\Omega$ – odziv na harmonijsku (ili sinusnu) pobudu

$$x(t) = e^{(0+j\Omega)t} = Xe^{j\Omega t} = X\cos(\Omega t) + jX\sin(\Omega t)$$

kompleksna amplituda odziva je

$$Y = \frac{b_m(j\Omega)^m + b_{m-1}(j\Omega)^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n(j\Omega)^n + a_{n-1}(j\Omega)^{n-1} + \ldots + a_0} X = H(j\Omega)X$$

a odziv $y(t) = XH(j\Omega)e^{j\Omega t}$

Prisilni odziv sustava

$$H(j\Omega) = H(\Omega) = H_r(\Omega) + jH_i(\Omega) = A(\Omega)e^{j\varphi(\Omega)},$$

$H(j\Omega)$ se naziva frekvencijska karakteristika sustava.

- $A(\Omega)$ – amplitudno frekvencijska karakteristika.
- $\varphi(\Omega)$ – fazno frekvencijska karakteristika.

Prisilni odziv sustava

- za pobudu $x(t) = Xe^{-j\Omega t}; \quad X \in Realni$

kompleksna amplituda odziva je

$$Y = \frac{b_m(-j\Omega)^m + b_{m-1}(-j\Omega)^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n(-j\Omega)^n + a_{n-1}(-j\Omega)^{n-1} + \ldots + a_0} X = H(-j\Omega)X$$

a odziv

$$y(t) = XH(-j\Omega)e^{-j\Omega t}$$

Prisilni odziv sustava

- za pobudu $x(t) = \dfrac{Xe^{j\Omega t} + Xe^{-j\Omega t}}{2} = X\cos(\Omega t)$

odziv je

$$y(t) = \frac{XH(j\Omega)e^{j\Omega t} + XH(-j\Omega)e^{-j\Omega t}}{2}$$

$$y(t) = \frac{XH(j\Omega)e^{j\Omega t}}{2} + \left(\frac{XH(j\Omega)e^{j\Omega t}}{2}\right)^*$$

Prisilni odziv sustava

$$y(t) = 2Re\left\{\frac{XH(j\Omega)e^{j\Omega t}}{2}\right\}$$

$$y(t) = Re\left\{X\left|H(j\Omega)\right|e^{\angle H(j\Omega)}e^{j\Omega t}\right\}$$

$$y(t) = X\left|H(j\Omega)\right|\cos(\Omega t + \angle H(j\Omega))$$

SIMULINK primjer

primjer1

Frekvencijska karakteristika kontinuiranog sustava

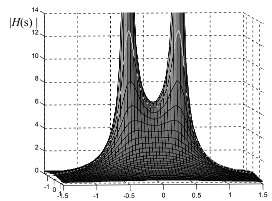
- za naš primjer

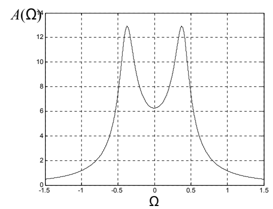
$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 0,2s + 0,16}$$

$$= \frac{1}{(s + 0,1 - j0,3873)(s + 0,1 + j0,3873)}$$

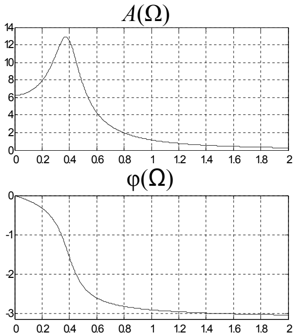
$$H(j\Omega) = \frac{1}{(j\Omega)^2 + 0,2(j\Omega) + 0,16}$$

Frekvencijska karakteristika kontinuiranog sustava





Frekvencijske karakteristike



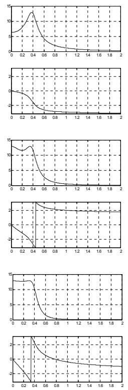
Ω	$A(\Omega)$	$\varphi(\Omega)$
0.0	6.2500	0.0000
0.2	7.9057	-0.3218
0.4	12.5000	-1.5708
0.6	4.2875	-2.6012
0.8	1.9764	-2.8198
1.0	1.1581	-2.9078
1.2	0.7679	-2.9562
1.4	0.5490	-2.9873
1.6	0.4130	-3.0090
1.8	0.3225	-3.0252
2.0	0.2590	-3.0378

Frekvencijske karakteristike

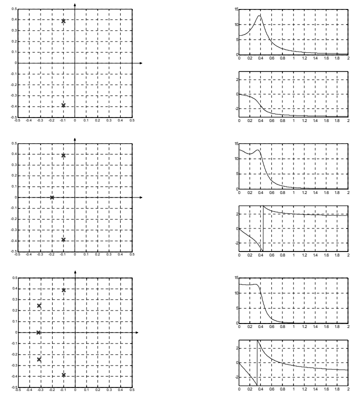
$$H(s)=\frac{1}{(s+0,1-j0,3873)(s+0,1+j0,3873)}$$

$$H(s)=\frac{0,413}{(s+0,2)(s+0,1-j0,3873)(s+0,1+j0,3873)}$$

$$H(s)=\frac{0.1059}{(s+0,322)(s+0,1-j0,3873)(s+0,1+j0,3873)}\cdot\frac{1}{(s+0.3162-j0.2450)(s+0.3162+j0.2450)}$$



Frekvencijske karakteristike



Diskretni sustavi – model s ulazno izlaznim varijablama

- opis linearnog sustava jednadžbom diferencija

$$a_0y[n]+a_1y[n-1]+a_2y[n-2]+....+a_Ny[n-N]=$$
$$=b_0x[n]+b_1x[n-1]+b_2x[n-2]+....+b_Mx[n-M]$$

- rješenje ove jednadžbe je:

$$y[n]=y_h[n]+y_p[n]$$

- dakle, zbroj rješenja homogene jednadžbe i partikularnog rješenja

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija

- Određivanje partikularnog rješenja
  - Lagrangeova metoda varijacije parametara
    - rješenje se dobiva u eksplicitnom obliku
    - primjena rezultira složenim sumacijama
  - Metoda neodređenog koeficijenta
    - ograničena na pobude oblika polinoma i eksponencijalnih nizova
    - veliki broj pobuda može se aproksimirati gore navedenim nizovima
    - češće se upotrebljava u analizi sustava

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...

- razmotrimo partikularno rješenje za kompleksni eksponencijalni ulazni niz:
- pobuda eksponencijalog oblika

$$x[n]=Xe^{\varepsilon n}=Xz^n;\quad e,\varepsilon\in \mathit{Kompleksni}$$

- partikularno rješenje možemo napisati u obliku

$$y_p[n]=Y\,z^n$$

- X i Y su kompleksne amplitude pobude i odziva

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...

- uvrštenjem pretpostavljenog rješenja Yz^n u jednadžbu

$$(a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+....+a_Nz^{-N})Yz^{\,n}=$$
$$=(b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+....+b_Mz^{-M})Xz^{\,n}$$

$$A(z)\;Y\,z^n=B(z)\;X\,z^n$$

pa je kompleksna amplituda odziva

$$Y=\frac{B(z)}{A(z)}X=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\ldots+b_Mz^{-M}}{a_0+a_1z^{-1}+\ldots+a_Nz^{-N}}X=H(z)X$$

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...

- partikularno rješenje (prisilni odziv) je dakle
  $y_p[n]=H(z)Xz^n$
- odziv nehomogene jednadžbe diferencija uz pobudu $x[n]=Xz^n$ je prema tome

$$y[n]=y_h[n]+y_p[n]$$
$$=C_1q_1^n+C_1q_2^n+.....+C_1q_N^n+H(z)Xz^n$$

Prijenosna funkcija diskretnog sustava

- transfer funkcija se definira kao

$$H(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\ldots+b_Mz^{-M}}{a_0+a_1z^{-1}+\ldots+a_Nz^{-N}}$$

a može se formalno napisati iz jednadžbe diferencija zamjenom operatora E^{-1} s brojem z^{-1}

- jednadžbu diferencija

$$a_0y[n]+a_1y[n-1]+a_2y[n-2]+....+a_Ny[n-N]=$$
$$=b_0x[n]+b_1x[n-1]+b_2x[n-2]+....+b_Mx[n-M]$$

Prijenosna funkcija diskretnog sustava

možemo prikazati uz pomoć operatora za pomak E^{-1}

$$\left\{a_0 + a_1E^{-1} + a_2E^{-2} + \dots + a_NE^{-N}\right\} y[n] =$$
$$= \left\{b_0 + b_1E^{-1} + b_2E^{-2} + \dots + b_ME^{-M}\right\} x[n]$$

gdje je $\quad (a_NE^{-N}y)[n] \triangleq a_N y[n-N]$

jednadžba diferencija se može prikazati i kao

$$A(\mathrm{E})\,y = B(\mathrm{E})\,x$$

Prijenosna funkcija diskretnog sustava

odnosno $\quad y = H(E)x \quad$ gdje je

$$H(E) = \frac{B(E)}{A(E)} = \frac{b_0 + b_1E^{-1} + b_2E^{-2} + \dots + b_ME^{-M}}{a_0 + a_1E^{-1} + a_2E^{-2} + \dots + a_NE^{-N}}$$

složeni operator kojeg treba interpretirati kao jednadžbu diferencija

- prema prije kazanom slijedi

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \ldots + b_Mz^{-M}}{a_0 + a_1z^{-1} + \ldots + a_Nz^{-N}}$$

Primjer rješavanja nehomogene jednadžbe diferencija

- Primjer: naći odziv diskretnog sustava opisanog jednadžbom diferencija

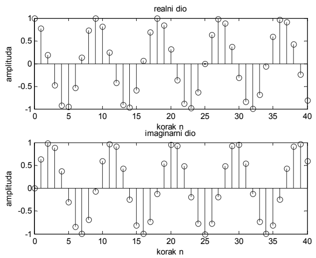
$$y[n] - 0.8\quad 2y[n-1] + 0.64y[n-2] = x[n]$$
uz $\; y[-1] = y[-2] = 0$

- neka je pobuda neprigušena kompleksna eksponencijala:

$$x[n] = Xz^n = Xe^{j\omega_0 n} = 1e^{j0{,}22\pi n} = (0.7705 + j0.6374)^n$$
$$= \cos(0.22\pi n) + j\sin(0.22\pi n)$$

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...

$$x[n] = e^{j0{,}22\pi n} = (0.7705 + j0.6374)^n = \cos(0.22\pi n) + j\sin(0.22\pi n)$$



Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...

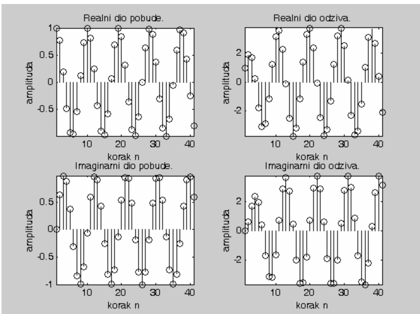
- jednadžbu diferencija se može riješiti korak po korak n=0,1,2,..30 :

$$y[0] = 1\cdot e^{0} + 0.8\sqrt{2}\cdot 0 - 0.64\cdot 0 = 1$$
$$y[1] = 1\cdot e^{j0.22\pi} + 0.8\sqrt{2}\cdot 1 - 0.64\cdot 0 = 1.902 + j0.637$$
$$y[2] = \dots\dots$$

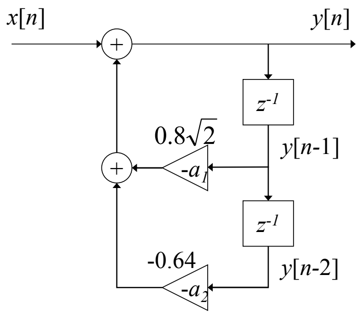
Primjer rješavanja jednadžbe diferencija

korak 0:	x[0] = 1	y[0] = 1
korak 1:	x[1] = 0.77051+j0.63742	y[1] = 1.9019+j0.6374
korak 2:	x[2] = 0.18738+j0.98229	y[2] = 1.6991+j1.7035
korak 3:	x[3] = -0.48175+j0.87631	y[3] = 0.2233+j2.3956
korak 4:	x[4] = -0.92978+j0.36812	y[4] = -1.7645+j1.9882
korak 5:	x[5] = -0.95106- j0.30902	y[5] = -3.0903+j0.4072
korak 6:	x[6] = -0.53583- j0.84433	y[6] = -2.9028- j1.6561
korak 7:	x[7] = 0.12533- j0.99211	y[7] = -1.1811- j3.1264
korak 8:	x[8] = 0.72897- j0.68455	y[8] = 1.2506- j3.1617
korak 9:	x[9] = 0.99803- j0.06279	y[9] = 3.1688- j1.6390

Primjer rješavanja jednadžbe diferencija



Blok dijagram sustava



Primjer rješavanja nehomogene jednadžbe diferencija

- riješimo sada istu jednadžbu analitički
- rješenje homogene jednadžbe :

$$y[n] - 0.8\sqrt{2}y[n-1] + 0.64y[n-2] = 0$$
$$\Downarrow \quad y_h[n] = Cq^n$$
$$1 - 0.8\sqrt{2}q^{-1} + 0.64q^{-2} = 0$$

Primjer rješavanja jednadžbe diferencija

Korijeni su : $q_{1,2} = 0.8e^{\pm j\frac{\pi}{4}} = 0.4\sqrt{2}(1\pm j)$, pa izlazi :

$$y_h[n]=C_1q_1^{\,n}+C_2q_2^{\,n}=0.8^n\left[C_1e^{j\frac{\pi}{4}n}+C_2e^{-j\frac{\pi}{4}n}\right]$$

Partikularno rješenje oblika $y_p[n]=H(e^{j0,22\pi})e^{j0,22\pi n}$

$$H(z)=\frac{1}{1-0.8\ \ 2z^{-1}+0.64z^{-2}} \Rightarrow$$

$$H(e^{j0,22\pi})=\frac{1}{1-0.8\ \ 2e^{-j0,22\pi}+0.64\left(e^{j0,22\pi}\right)^{-2}}=3.54\ -\ j1.32=3.78e^{-j0.114\pi}$$

$$Y=H(e^{j0,22\pi})\cdot 1=3.54\ -\ j1.32=3.78e^{-j0.114\pi}$$

Primjer rješavanja nehomogene jednadžbe diferencija

pa je partikularno rješenje

$$y_p[n]=(3.54\ -\ j1.32)e^{j0,22\pi n}$$

Kompletno rješenje tj. totalni odziv je :

$$y[n]=y_h[n]+y_p[n]=$$

$$=0.8^n\left[C_1e^{j\frac{\pi}{4}n}+C_2e^{-j\frac{\pi}{4}n}\right]+(3.54\ -\ j1.32)e^{j0,22\pi n}\quad \text{za } n\geq 0$$

Primjer rješavanja nehomogene jednadžbe diferencija

- iz polazne jednadžbe:

  $y[n]-0.8\sqrt{2}\,y[n-1]+0.64\,y[n-2]=1\cdot e^{j\omega_0 n}$

  za n=0,1 slijedi

  $y[0]=1\cdot e^{0}+0.8\sqrt{2}\cdot 0-0.64\cdot 0=1$

  $y[1]=1\cdot e^{j0.22\pi}+0.8\sqrt{2}\cdot 1-0.64\cdot 0=1.902+j0.637$

  vrijednost kompletnog rješenja za n=0,1 :

$$y[0]=1=C_1+C_2+3.54-j\cdot 1.32$$

$$y[1]=1.902+j\cdot 0.637=0.8\left[C_1e^{j\frac{\pi}{4}}+C_2e^{-j\frac{\pi}{4}}\right]+(3.54-j\cdot 1.32)\cdot e^{j0.22\cdot\pi}$$

Primjer rješavanja nehomogene jednadžbe diferencija

dobivamo:

$$C_1=-2.46+j\cdot 0.86=2.6060\cdot e^{j2.8053}$$

$$C_2=-0.08+j\cdot 0.46=0.4669\cdot e^{j1.743}$$

$$y[n]=y_h[n]+y_p[n]=$$

$$=0.8^n\left[C_1e^{j\frac{\pi}{4}n}+C_2e^{-j\frac{\pi}{4}n}\right]+\underbrace{(3.54\ -\ j1.32)}_{3.78e^{-j0.114\pi}}e^{j0,22\pi n}\quad \text{za } n\geq 0$$

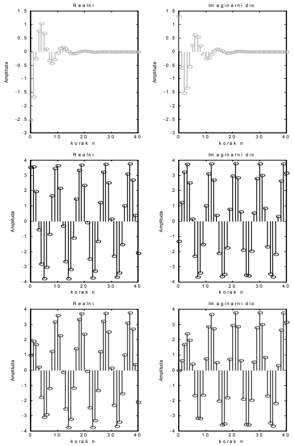
$$y[n]=0.8^n\left[2.61e^{j2.81}e^{j\frac{\pi}{4}n}+0.467e^{j1.74}e^{-j\frac{\pi}{4}n}\right]+3.78e^{-j0.114\pi}\cdot e^{j0.22\pi n}$$

Primjer rješavanja nehomogene jednadžbe diferencija

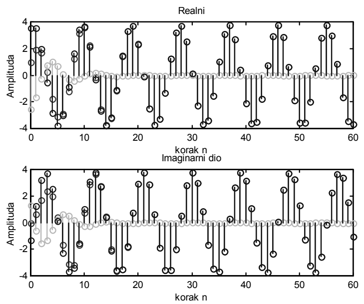
Pogledajmo sada razdvojene odzive:

partikularno rješenje: $y_p[n]=Y\cdot e^{j\omega_0 n}$

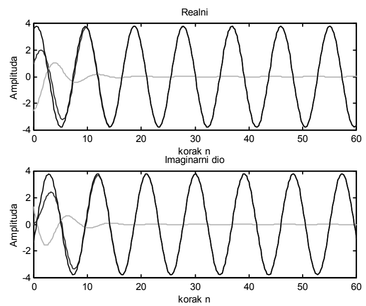
vlastito titranje sustava ili komplementarno rješenje: $y_v[n]=C_1q_1^{\,n}+C_2q_2^{\,n}$



Diskusija rješenja



Ukupno rješenje



Primjer rješavanja nehomogene jednadžbe diferencija

- obzirom da je $|q_1|=|q_2|=0.8$, vlastito titranje sustava trne u nulu proporcionalno sa 0.8^n
- za linearne sustave kod kojih su moduli svih korijena karakterističnog polinoma $|q_i|<1$,odziv sustava $y[n]$ na trajnu periodičku pobudu postaje jednak prisilnom odzivu $y_p[n]$ za veliki n
- ….. vlastito titranje $y_v[n]$ isčezava, i kažemo da je sustav ušao u stacionarno stanje.

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...

- $H(z)$ je prijenosna funkcija
- prijenosna ili transfer funkcija daje odnos kompleksnih amplituda prisilnog odziva i pobude, kad je pobuda Xz^n

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\left.\frac{y_p[n]}{x[n]}\right|_{x[n]=Xz^n}=\frac{Yz^n}{Xz^n}=\frac{Y}{X}$$

- pokazano je da se transfer funkcija može lako napisati iz jednadžbe diferencija formalnom zamjenom operatora E^{-1} s brojem z^{-1}

Prijenosna funkcija diskretnog sustava

- prijenosnu funkciju:

$$H(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\ldots+b_Mz^{-M}}{a_0+a_1z^{-1}+\ldots+a_Nz^{-N}}=\frac{\sum_{j=0}^{M}b_jz^{-j}}{\sum_{j=0}^{N}a_jz^{-j}}$$

možemo pisati i u obliku

$$H(z)=z^{(N-M)}\frac{b_0z^M+b_1z^{M-1}+\ldots+b_M}{a_0z^N+a_1z^{N-1}+\ldots+a_N}=z^{(N-M)}\frac{\sum_{j=0}^{M}b_jz^{M-j}}{\sum_{j=0}^{N}a_jz^{N-j}}$$

Prijenosna funkcija diskretnog sustava

- prijenosnu funkciju možemo pisati uz pomoć produkta korijenih faktora:

$$H(z)=\frac{\sum_{j=0}^{M}b_jz^{-j}}{\sum_{j=0}^{N}a_jz^{-j}}=\frac{b_0}{a_0}\cdot\frac{\prod_{j=1}^{M}(1-z_jz^{-1})}{\prod_{j=1}^{N}(1-p_jz^{-1})}$$

- odnosno u obliku

$$H(z)=z^{(N-M)}\frac{\sum_{j=0}^{M}b_jz^{M-j}}{\sum_{j=0}^{N}a_jz^{N-j}}=z^{(N-M)}\frac{b_0}{a_0}\frac{\prod_{j=1}^{M}(z-z_j)}{\prod_{j=1}^{N}(z-p_j)}$$

$z_1, z_2, \ldots, z_M$ su nule a $p_1, p_2, \ldots, p_N$ polovi prijenosne funkcije

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...

- partikularno rješenje (prisilni odziv) je dakle
  $y_p[n]=H(z)Xz^n$
- ovisno o z, partikularni niz može biti
  - rastući ili padajući aperiodičan ili valovit
  - stalan ili periodičan
- linearna kombinacija eksponencijala može dati realni kosinusni niz

$$re^{j\omega n}+re^{-j\omega n}=2r\cos(\omega n)$$

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...

- za pobudu $x[n]=Xz^n=X(1)^n$

  partikularno rješenje je

$$y_p[n]=Yz^n=\left(H(z)Xz^n\right)_{z=1}=H(1)\cdot X\cdot(1)^n$$

- za pobudu $x[n]=Xz^n=X(-1)^n$

  partikularno rješenje je

$$y_p[n]=Yz^n=\left(H(z)Xz^n\right)_{z=-1}=H(-1)\cdot X\cdot(-1)^n$$

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...

- za pobudu $x[n]=Xz^n=X(e^{j\omega})^n=e^{j\omega n}$ za $X=1$

  partikularno rješenje je

$$y_p[n]=Yz^n=\left(H(z)Xz^n\right)_{z=e^{j\omega}}=H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$$

- pa je

$$H(e^{j\omega})=\frac{b_0+b_1e^{-j\omega}+\ldots+b_Me^{-jM\omega}}{a_0+a_1e^{-j\omega}+\ldots+a_Ne^{-jN\omega}}$$

  frekvencijska karakteristika diskretnog sustava

Frekvencijska karakteristika

- frekvencijska karakteristika diskretnog sustava

$$H(e^{j\omega})=\frac{b_0+b_1e^{-j\omega}+\ldots+b_Me^{-jM\omega}}{a_0+a_1e^{-j\omega}+\ldots+a_Ne^{-jN\omega}}$$

$H(e^{j\omega})$ funkcija od $e^{j\omega}$ \
$e^{j\omega}=e^{j(\omega+2\pi i)}$ } vrijednost transfer funkcije za $z=e^{j\omega}$ je periodična s 2π

$H(e^{j\omega})=H_r(e^{j\omega})+H_i(e^{j\omega})$

$=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \longrightarrow A(\omega)=|H(e^{j\omega})|$

$\varphi(\omega)=\arg(H(e^{j\omega}))$

Frekvencijska karakteristika

- a frekvencijska karakteristika

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{(1-0.8\sqrt{2}e^{-j\omega}+0.64e^{-2j\omega})}$$

- frekvencijsku karakteristiku dakle izračunavamo iz

$$H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}=H(e^{j\omega})$$

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...

- za prije zadani sustav

  $y[n]-0.8\;\;2y[n-1]+0.64y[n-2]=x[n]$

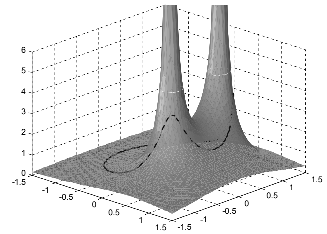
  uz $y[-1]=y[-2]=0$
- i pobudu

$$x[n]=Xz^n=e^{j\omega_0 n}=e^{j0,22\pi n}$$

  prijenosna funkcija je

$$H(z)=\frac{1}{(1-0.8\sqrt{2}z^{-1}+0.64z^{-2})}$$

Frekvencijska karakteristika



freqz3d

Frekvencijska karakteristika

- za konkretnu frekvenciju pobude omjer kompleksne amplitude odziva i pobude je

$\omega = 0,22\pi \Rightarrow$

$$H(e^{j0,22\pi}) = \frac{1}{1-0.8\ \ 2e^{-j0,22\pi}+0.64\left(e^{j0,22\pi}\right)^{-2}} = 3.54\ -\ j1.32$$

- odredimo omjer kompleksne amplitude odziva u stacionarnom stanju i pobude za još nekoliko frekvencija:

$$\omega = 0,\ 0.15\pi,\ 0.20\pi,\ 0.23\pi,\ 0.25\pi,\ 0.27\pi,$$
$$0.30\pi,\ 0.35\pi,\ 0.4\pi,\ 0.5\pi,\ 0.7\pi$$

9.mov
11.mov

Frekvencijska karakteristika

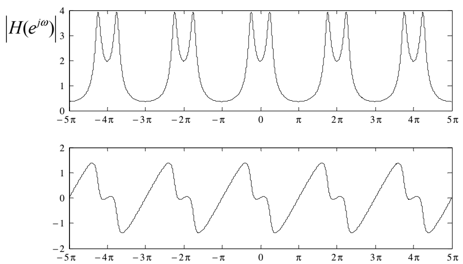
- frekvencijska karakteristika danog sustava je

primjer

12.mov

Frekvencijska karakteristika

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-0.8\sqrt{2}e^{-j\omega}+0.64e^{-2j\omega})}$$



Frekvencijska karakteristika

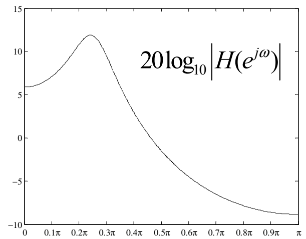
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-0.8\sqrt{2}e^{-j\omega}+0.64e^{-2j\omega})}$$

Koeficijent $\{a_i\}$ i $\{b_i\}$ su realni te vrijedi

$H(e^{-j\omega}) = H^*(e^{j\omega})$ ⇨ $H_r(e^{j\omega})$ i $A(\omega)$ parne funkcije od ω
$H_i(e^{j\omega})$ i $\varphi(\omega)$ neparne funkc. od ω

Frekvencijska karakteristika

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-0.8\sqrt{2}e^{-j\omega}+0.64e^{-2j\omega})}$$



Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava ...

- Frekvencijska karakteristika se može odrediti grafički iz:

$$H(z) = K\frac{\prod_{i=1}^{m}(z-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(z-q_i)}$$

praćenjem apsolutne vrijednosti $|H(e^{j\omega})|$ i argumenta $H(e^{j\omega})$ transfer funkcije na jediničnoj kružnici $z = e^{j\omega}$ ravnine z

Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava ...

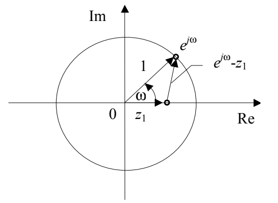
$$\left|H(e^{j\omega})\right| = K\frac{\prod_{i=1}^{m}\left|(e^{j\omega}-z_i)\right|}{\prod_{i=1}^{n}\left|(e^{j\omega}-q_i)\right|}$$

$$\arg H(e^{j\omega}) = \sum\left[\arg(e^{j\omega}-z_i)-\arg(e^{j\omega}-q_i)\right]$$

- svaki korijeni faktor transfer funkcije daje svoj individualni doprinos modulu (multiplikativno) i fazi (aditivno).

Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava ...

- grafički prikaz u polarnom koordinatnom sustavu



korjeni faktori → vektori

Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava ...

vrijednost transfer funkcije na frekvenciji ω

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = K\frac{\prod_{1}^{M} d_i}{\prod_{1}^{N} l_i}$$

$\{d_i\}$ - udaljenost točke na kružnici $e^{j\omega}$ do nultočki $\{z_i\}$

$\{l_i\}$ - udaljenost točke na kružnici $e^{j\omega}$ do polova $\{p_i\}$

fazni kut transfer funkcije

$$\arg H(e^{j\omega}) = \sum_{1}^{M}\varphi_i - \sum_{1}^{N}\psi_i$$

$\varphi_i = \arg(e^{j\omega}) - \arg(z_i)$

$\psi_i = \arg(e^{j\omega}) - \arg(p_i)$

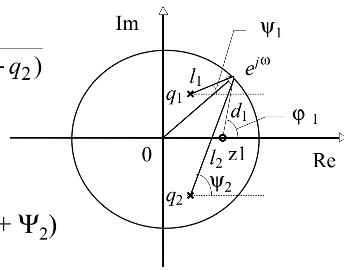
Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava ...

Primjer:

$$H(z) = K\frac{z-z_1}{(z-q_1)(z-q_2)}$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = K\frac{d_1}{l_1 l_2}$$

$$\arg H(e^{j\omega}) = \varphi_1 - (\Psi_1 + \Psi_2)$$



Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava ...

Za naš primjer

$$H(z) = \frac{1}{(z-q_1)(z-q_2)}$$

$\Downarrow$ $z=e^{j\omega}$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(e^{j\omega}-q_1)(e^{j\omega}-q_2)}$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \frac{1}{\left|(e^{j\omega}-0{,}8e^{j\pi/4})\right|\cdot\left|(e^{j\omega}-0{,}8e^{-j\pi/4})\right|}$$

12.mov