Rješenje jednadžbi diferencija upotrebom z - transformacije

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$$

Iz $\quad Z\{x[n-1]\} = z^{-1}\ \{X(z) + x[-1]z\} = z^{-1} X(z) + x[-1]$

i iz $\quad Z\ \{x[n-2]\} = z^{-2} X(z) + x[-1]\, z^{-1} + x[-2]$

$$\{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}\}\, Y(z) =$$
$$= \{b_0 + b_1 z^{-1}\}\, X(z) + b_1 x[-1] - a_2 x\,[-2] - (a_1 + a_2 z^{-1})\, y[-1]$$

$$Y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} X(z) + E(z)$$

uz početne uvjete jednake nuli $\quad Y(z) = \dfrac{b_0 + b_1 z^{-1}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} X(z) = H(z) X(z)$

Rješenje jednadžbi diferencija uporabom z - transformacije

$H(z)$ - transfer funkcija vremenski diskretnog sustava

Za pobudu jediničnim uzorkom $\quad x[n] = \delta[n] \;\rightarrow\; X(z) = 1$

dobivamo $\quad Y(z) = H(z)$

Transfer funkcija je z - transformacija odziva na pobudu $\{\delta[n]\}$ uz početne uvjete jednake nuli

primjer: Pobuđeni mirni sustav drugog reda

$$y[n] - 0.8\sqrt{2}\, y[n-1] + 0.64\, y[n-2] = x[n] + 2x[n-1]$$

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 - 0.8\sqrt{2}\cdot z^{-1} + 0.64 z^{-2}} = \frac{z^2 + 2z}{z^2 - 0.8\sqrt{2}\cdot z + 0.64}$$

program za rastav na parcijalne razlomke:

```
%program za rastav na parcijalne razlomke
num = input('unesi koeficijente brojnika =');
den = input('unesi koeficijente nazivnika =');
[r,p,k] = residuez(num,den);
disp('residuumi'); disp(r');
disp('polovi'); disp(p');
disp('konstante'); disp(k);
```


primjer: Pobuđeni mirni sustav drugog reda

```
>>parcrazl
unesi koeficijente brojnika =[1 2 0]
unesi koeficijente nazivnika =[1 -.8*sqrt(2) .64]
residuumi
   0.5000 - 2.2678i   0.5000 + 2.2678i

polovi
   0.5657 + 0.5657i   0.5657 - 0.5657i

konstante
```


primjer: Pobuđeni mirni sustav drugog reda

$$x[n] = \delta[n] \Rightarrow X(z) = 1$$

$$Y(z) = H(z)\cdot 1 = H(z)$$

$$Y(z) = \frac{0.5 - 2.2678j}{1 - (0.5657 + 0.5657j)z^{-1}} + \frac{0.5 + 2.2678j}{1 - (0.5657 - 0.5657j)z^{-1}}$$

$$y[n] = (0.5 - 2.2678j)\cdot(0.5657 + 0.5657j)^n$$
$$+ (0.5 + 2.2678j)\cdot(0.5657 - 0.5657j)^n$$

primjer: Pobuđeni mirni sustav drugog reda

$$y[n] = (0.5 - 2.2678j)\cdot(0.5657 + 0.5657j)^n$$
$$+ (0.5 + 2.2678j)\cdot(0.5657 - 0.5657j)^n$$

$$y[n] = 2.3223\cdot e^{j1.3538}\cdot(0.8\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}})^n$$
$$+ 2.3223\cdot e^{-j1.3538}\cdot(0.8\cdot e^{j\frac{\pi}{4}})^n$$

$$y[n] = 2\cdot 2.3223\cdot(0.8)^n \cos(\frac{\pi}{4} n - 1.3538) \ \text{ za } \ n \ge 0$$

Impulsni odziv i konvolucija kontinuiranih sustava

- poznavanje impulsnog odziva nekog sustava je dovoljno za potpun opis njegovog vladanja.
- odziv linearnog vremenski stalnog sustava na opću pobudu opisuje se konvolucijskim integralom:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\, x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau) d\tau$$

gdje je $h(t)$ odziv sustava na jedinični impuls

Pobuda sustava kompleksnom eksponencijalom

- pokazano je da je odziv linearnog sustava pobuđenog kompleksnom eksponencijalom opet kompleksna eksponencijala:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= Xe^{st} \\ y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau) d\tau \end{aligned}\right\} y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\ Xe^{s(t-\tau)} d\tau$$

$$y(t) = Xe^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau} d\tau$$

Pobuda sustava kompleksnom eksponencijalom

$$y(t) = \underbrace{Xe^{st}}_{x(t)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau} d\tau}_{H(s)}$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau}\, d\tau.$$

- to nam kazuje da je kompleksna eksponencijala svojstvena funkcija (*eigenfunction*) konvolucije!

Pobuda sustava kompleksnom eksponencijalom

- izraz za $H(s)$ je ujedno izraz za dvostranu *Laplaceovu* transformaciju impulsnog odziva h

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau}\, d\tau.$$

- izraz za jednostranu *Laplaceovu* transformaciju dobivamo uz kauzalnu pobudu $x(t) = Xe^{st} \cdot \mu(t)$!!!

Model sustava s ulazno izlaznim varijablama

- diferencijalni sustavi su oni koji se daju opisati jednom ili više diferencijalnih jednadžbi.
- linearni sustav s jednim ulazom i jednim izlazom:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = f(t) =$$
$$= b_m x^{(m)} + b_{m-1} x^{(m-1)} + \ldots + b_0 x$$

- desna strana od $f(t)$ – funkcija smetnje ili funkcija pobude, općenito funkcija ulaznog signala $x(t)$ i njegovih derivacija do m – tog reda, $m \le n$

Transfer funkcija linearnog, vremenski stalnog sustava

- linearne, vremenski invarijantne sustave možemo proučavati pomoću Laplaceove transformacije:
  - diferencijalne jednadžbe prelaze u algebarske,
  - sustav je predstavljen u domeni kompleksne frekvencije.
- za određivanje transfer funkcije poći ćemo od Laplaceove transformacije ulazno izlaznog modela:

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}, \quad Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}.$$

Transfer funkcija linearnog, vremenski stalnog sustava

- transformacija derivacije ulaza i izlaza je:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^m x}{dt^m}\right\} = s^m X(s) - s^{m-1} x(0) - \ldots - x^{(m-1)}(0),$$
$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n y}{dt^n}\right\} = s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - \ldots - y^{(n-1)}(0).$$

- na temelju linearnosti Laplaceove transformacije može se napisati:

$$\left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0\right) Y(s) = \left(b_m s^m + \ldots + b_0\right) X(s) + E(s).$$

Transfer funkcija linearnog, vremenski stalnog sustava

- ako vrijedi:

$$y^{(\nu)}(0) = 0 \quad \text{za} \quad \nu = 0,1,2,3,4,\ldots,n-1$$
$$x^{(\mu)}(0) = 0 \quad \text{za} \quad \mu = 0,1,2,3,4,\ldots,m-1$$

dobivamo odziv mirnog sustava:

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + \ldots + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_0} X(s).$$

- dobiveni izraz možemo napisati:

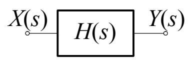
$$Y(s) = H(s) X(s).$$

Transfer funkcija linearnog, vremenski stalnog sustava

- funkcija H(s) zove se transfer funkcija ili prijenosna funkcija sustava.
- definirana je za miran sustav kao:

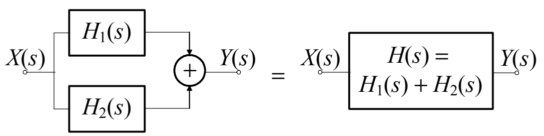
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{x(t)\}} \qquad x(\text{t})=0 \text{ za } t<0 .$$

- ako znamo H(s), sustav možemo predstaviti kao blok:



Transfer funkcija složenih sustava

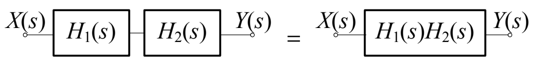
- paralelni spoj podsustava:



$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = \left[H_1(s) + H_2(s)\right] X(s) = H(s) X(s)$$
$$H(s) = H_1(s) + H_2(s)$$

Transfer funkcija složenih sustava

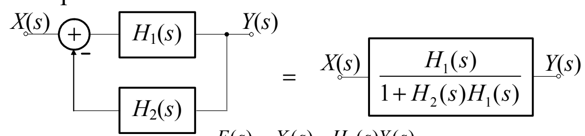
- kaskadni spoj podsustava:



$$Y(s) = H_2(s) V(s) = H_2(s) H_1(s) X(s)$$
$$H(s) = H_2(s) H_1(s)$$

Transfer funkcija složenih sustava

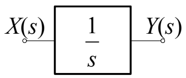
- prstenasti spoj podsustava – sustav s povratnom vezom:



$$E(s) = X(s) - H_2(s) Y(s)$$
$$Y(s) = H_1(s) E(s) = H_1(s)\left[X(s) - H_2(s) Y(s)\right] = Y(s)$$
$$Y(s)(1 + H_1(s) H_2(s)) = H_1(s) X(s)$$
$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s) H_2(s)}$$

Transfer funkcija složenih sustava

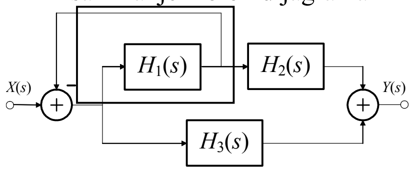
- jedan često korišten element sustava je integrator
- transfer funkcija integratora:



$$H(s) = \frac{1}{s}$$

Transfer funkcija složenih sustava

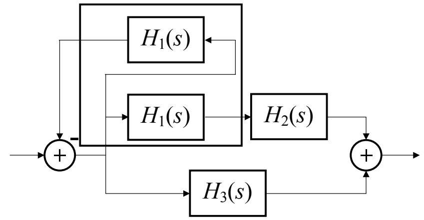
- korištenjem pokazanih pravila za kaskadu, prsten i paralelni spoj, složene blok dijagrame možemo sažeti i tako odrediti transfer funkciju cijelog sustava
- *primjer:* odrediti transfer funkciju sustava sažimanjem blok dijagrama



- transformiramo označeni dio blok dijagrama.

Transfer funkcija složenih sustava

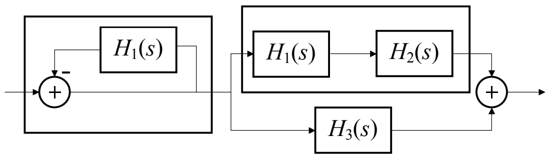
- dobivamo rezultat:



- nacrtajmo ponovo isti blok dijagram

Transfer funkcija složenih sustava

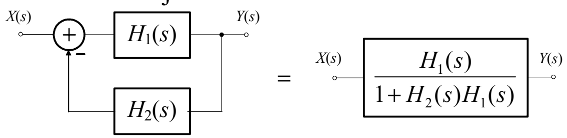
- dobivamo:



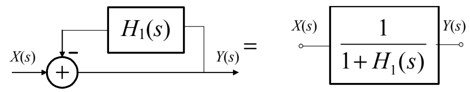
- na dobivenom blok dijagramu prepoznajemo:
  - kaskadu,
  - spoj s povratnom vezom.
- kaskada se može nadomjestiti blokom čija je transfer funkcija: H_1H_2,

Transfer funkcija složenih sustava

- ranije je pokazano da za spoj s povratnom vezom vrijedi:

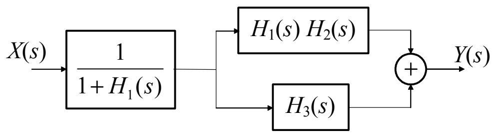


- u našem primjeru bit će:



Transfer funkcija složenih sustava

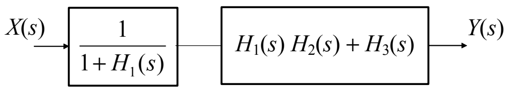
- prema tome, naš blok dijagram možemo sažeti:



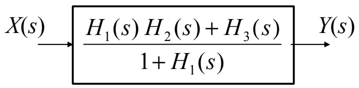
- desnu stranu blok dijagrama čini paralelni spoj podsustava pa ga možemo nadomjestit podsustavom čija je prijenosna funkcija: $H_1H_2 + H_3$.

Transfer funkcija složenih sustava

- daljnjim sažimanjem dobivamo kaskadu:



- cijeli sustav prikazan jednim blokom ima oblik:



Opis linearnih sustava i njihov odziv gdje smo do sada?

$$Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K$$

$$\forall n \in Cjelobrojni, \quad s[n+1] = As[n] + Bx[n]$$
$$y[n] = Cs[n] + Dx[n]$$

$$s[n] = A^n s[0] + \sum_{m=0}^{n-1} A^{n-1-m} Bx[m], \quad n > 0$$

$$y[n] = \begin{cases} Cs[0] + Dx[0], & n = 0 \\ CA^n s[0] + \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m} Bx[m] \right\} + Dx[n], & n > 0 \end{cases}$$

$$y[n] = \sum_{m=0}^{n} h[n-m]x[m], \quad n \geq 0$$

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + ... + a_N y[n-N] =$$
$$= b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + ... + b_M x[n-M]$$

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{\sum_{m=0}^{N} b_m z^{-m}}{1 + \sum_{m=1}^{N} a_m z^{-m}} X(z)$$

$$Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K$$

$$\forall t \in Realni, \quad \dot{w}(t) = Aw(t) + Bx(t)$$
$$y(t) = Cw(t) + Dx(t)$$

$$w(t) = e^{At} w(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bx(\tau) d\tau$$

$$y(t) = Ce^{At} w(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} Bx(\tau) d\tau + Dx(t)$$

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau,$$

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) =$$
$$= b_m x^{(m)}(t) + b_{m-1} x^{(m-1)}(t) \ldots + b_0 x(t)$$

$$\mathrm{Y(s)} = \mathrm{H}(s)X(s) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m s^m}{\sum_{m=0}^{N} a_m s^m} X(s)$$

Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja – diskretni sustavi

- diskretni sustav opisujemo jednadžbom diferencija

$$y[n] = -\sum_{m=1}^{N} a_m y[n-m] + \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m]$$

- ili z - transformacijom prijenosnom funkcijom:

$$\mathrm{H}(z) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{1 + \sum_{m=1}^{N} a_m z^{-m}}$$

- polinomi od z^{-1} u brojniku i nazivniku
- sustav ima nule i polove

Direktna realizacija diskretnih sustava

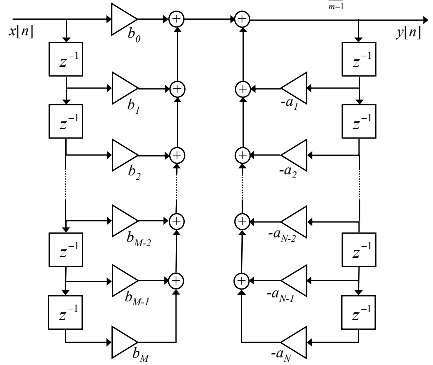
$$\mathrm{H}(z)=\frac{\sum_{m=0}^{\mathrm{M}} b_m z^{-m}}{1+\sum_{m=1}^{\mathrm{N}} a_m z^{-m}}=\mathrm{H}_1(z)\cdot \mathrm{H}_2(z)$$

- nule od H(z):
- polovi od H(z):

$$\mathrm{H}_1(z)=\sum_{m=0}^{\mathrm{M}} b_m z^{-m} \qquad \mathrm{H}_2(z)=\frac{1}{1+\sum_{m=1}^{\mathrm{N}} a_m z^{-m}}$$

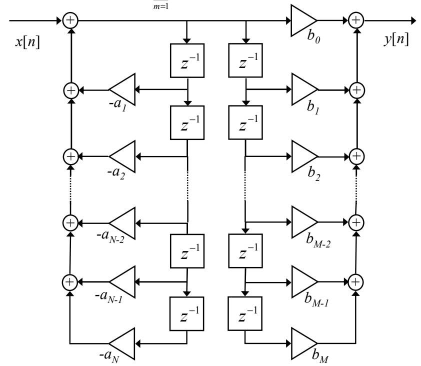
Direktna I realizacija

$$\mathrm{H}_1(z)=\sum_{m=0}^{\mathrm{M}} b_m z^{-m} \qquad \mathrm{H}_2(z)=\frac{1}{1+\sum_{m=1}^{\mathrm{N}} a_m z^{-m}}$$



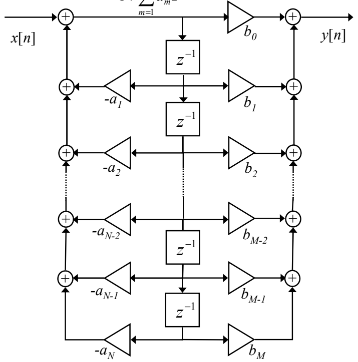
Direktna II realizacija

$$\mathrm{H}_2(z)=\frac{1}{1+\sum_{m=1}^{\mathrm{N}} a_m z^{-m}} \qquad \mathrm{H}_1(z)=\sum_{m=0}^{\mathrm{M}} b_m z^{-m}$$

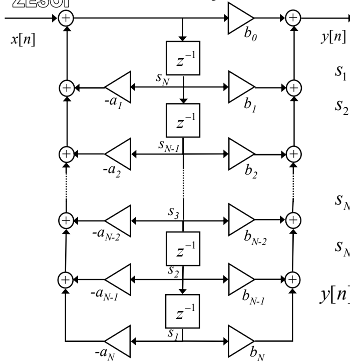


Direktna II realizacija

$$\mathrm{H}(z)=\frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{1+\sum_{m=1}^{N} a_m z^{-m}} \qquad N=M$$



Direktna II realizacija – jednadžbe stanja



$$s_1[n+1]=s_2[n]$$
$$s_2[n+1]=s_3[n]$$
$$\vdots$$
$$s_{N-1}[n+1]=s_N[n]$$
$$s_N[n+1]=x[n]-\sum_{j=1}^{N} a_{N+1-j} s_j[n]$$
$$y[n]=b_0 x[n]+\sum_{j=1}^{N}\left(b_{N+1-j}-b_0 a_{N+1-j}\right)s_j[n]$$

Direktna II realizacija – jednadžbe stanja

$$\begin{bmatrix} s_1[n+1] \\ s_2[n+1] \\ \vdots \\ s_{N-1}[n+1] \\ s_N[n+1] \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_N & -a_{N-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_1[n] \\ s_2[n] \\ \vdots \\ s_{N-1}[n] \\ s_N[n] \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n]=\begin{bmatrix}(b_N-b_0 a_N) & (b_{N-1}-b_0 a_{N-1}) & \cdots & (b_1-b_0 a_1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_1[n] \\ s_2[n] \\ \vdots \\ s_N[n] \end{bmatrix}+b_0 x[n]$$

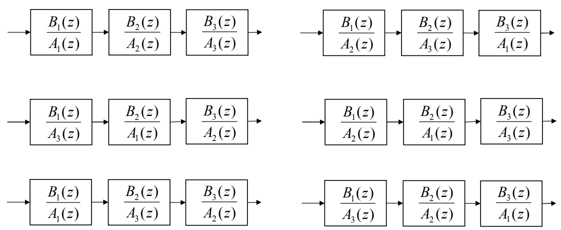
Kaskadna realizacija diskretnih sustava

- razlaganje transfer funkcije $H(z)$ na sekcije nižeg reda
- polinomi u brojniku i nazivniku prikazuju se kao produkti polinoma nižeg reda
- primjer:

$$\mathrm{H}(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{B_1(z)\cdot B_2(z)\cdot B_3(z)}{A_1(z)\cdot A_2(z)\cdot A_3(z)}$$

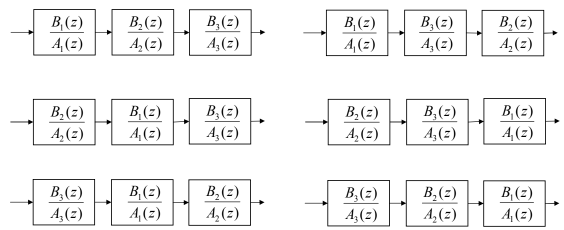
- različite kaskadne realizacije (36) postiže se različitim uparivanjem polova i nula ili/i izmjenom redoslijeda sekcija u kaskadi

Kaskadna realizacija diskretnih sustava



- različite ekvivalentne kaskadne realizacije različitim uparivanjem polova

Kaskadna realizacija diskretnih sustava



- različite ekvivalentne kaskadne realizacije promjenom redoslijeda sekcija

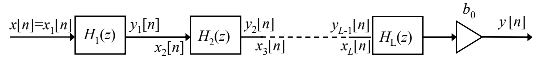
Kaskadna realizacija diskretnih sustava

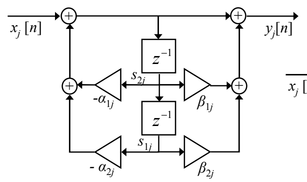
- razlaganje transfer funkcije $H(z)$ na sekcije prvog i drugog reda

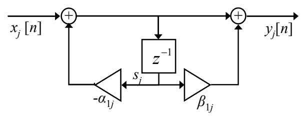
$$H(z)=b_0\cdot\prod_{j=1}^{L}H_j(z) \qquad H_j(z)=\frac{1+\beta_{1j}z^{-1}+\beta_{2j}z^{-2}}{1+\alpha_{1j}z^{-1}+\alpha_{2j}z^{-2}}$$

$$H_j(z)=\frac{1+\beta_{1j}z^{-1}}{1+\alpha_{1j}z^{-1}}$$

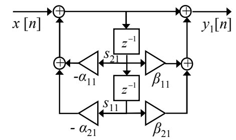
Kaskadna realizacija diskretnih sustava







Kaskadna realizacija diskretnih sustava



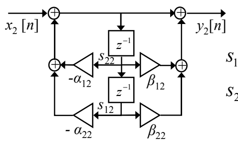
$$s_{11}[n+1]=s_{21}[n]$$

$$s_{21}[n+1]=-\alpha_{21}s_{11}[n]-\alpha_{11}s_{21}[n]+\underbrace{x_1[n]}_{x[n]}$$

$$s_{21}[n+1]=-\alpha_{21}s_{11}[n]-\alpha_{11}s_{21}[n]+x[n]$$

$$y_1[n]=(\beta_{21}-\alpha_{21})s_{11}[n]+(\beta_{11}-\alpha_{11})s_{21}[n]+\underbrace{x_1[n]}_{x[n]}$$

Kaskadna realizacija diskretnih sustava



$$s_{12}[n+1]=s_{22}[n]$$

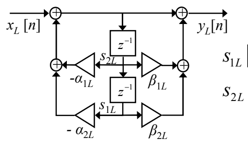
$$s_{22}[n+1]=-\alpha_{22}s_{12}[n]-\alpha_{12}s_{22}[n]+\underbrace{x_2[n]}_{y_1[n]}$$

$$s_{22}[n+1]=(\beta_{21}-\alpha_{21})s_{11}[n]+(\beta_{11}-\alpha_{11})w_{21}[n]-\alpha_{22}s_{12}[n]-\alpha_{12}s_{22}[n]+x[n]$$

$$y_2[n]=(\beta_{22}-\alpha_{22})s_{12}[n]+(\beta_{12}-\alpha_{12})s_{22}[n]+\underbrace{x_2[n]}_{y_1[n]}$$

$$y_2[n]=(\beta_{21}-\alpha_{21})s_{11}[n]+(\beta_{11}-\alpha_{11})s_{21}[n]$$
$$+(\beta_{22}-\alpha_{22})s_{12}[n]+(\beta_{12}-\alpha_{12})s_{22}[n]+x[n]$$

Kaskadna realizacija diskretnih sustava



$$s_{1L}[n+1]=s_{2L}[n]$$

$$s_{2L}[n+1]=-\alpha_{2L}s_{1L}[n]-\alpha_{1L}s_{2L}[n]+\underbrace{x_L[n]}_{y_{L-1}[n]}$$

$$s_{2L}[n+1]=(\beta_{21}-\alpha_{21})s_{11}[n]+(\beta_{11}-\alpha_{11})s_{21}[n]+(\beta_{22}-\alpha_{22})s_{12}[n]$$
$$+(\beta_{12}-\alpha_{12})s_{22}[n]+.....-\alpha_{2L}s_{1L}[n]-\alpha_{1L}w_{2L}[n]+x[n]$$

$$\underbrace{y_L[n]}_{y[n]}=(\beta_{2L}-\alpha_{2L})s_{1L}[n]+(\beta_{1L}-\alpha_{1L})s_{2L}[n]+\underbrace{x_L[n]}_{y_{L-1}[n]}$$

$$y[n]=(\beta_{21}-\alpha_{21})s_{11}[n]+(\beta_{11}-\alpha_{11})s_{21}[n]+(\beta_{22}-\alpha_{22})s_{12}[n]$$
$$+(\beta_{12}-\alpha_{12})s_{22}[n]+.....+(\beta_{2L}-\alpha_{2L})s_{1L}[n]+(\beta_{1L}-\alpha_{1L})s_{2L}[n]+x[n]$$

Kaskadna realizacija diskretnih sustava

$$\begin{bmatrix} s_{11}[n+1] \\ s_{21}[n+1] \\ s_{12}[n+1] \\ s_{22}[n+1] \\ s_{13}[n+1] \\ s_{23}[n+1] \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_{21} & -\alpha_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta_{21}-\alpha_{21} & \beta_{11}-\alpha_{11} & -\alpha_{22} & -\alpha_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_{21}-\alpha_{21} & \beta_{11}-\alpha_{11} & \beta_{22}-\alpha_{22} & \beta_{12}-\alpha_{12} & -\alpha_{23} & -\alpha_{13} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{11}[n] \\ s_{21}[n] \\ s_{12}[n] \\ s_{22}[n] \\ s_{13}[n] \\ s_{23}[n] \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}x[n]$$

$$y[n]=\begin{bmatrix} \beta_{21}-\alpha_{21} & \beta_{11}-\alpha_{11} & \beta_{22}-\alpha_{22} & \beta_{12}-\alpha_{12} & \beta_{23}-\alpha_{23} & \beta_{13}-\alpha_{13} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{11}[n] \\ s_{21}[n] \\ s_{12}[n] \\ s_{22}[n] \\ s_{13}[n] \\ s_{23}[n] \end{bmatrix}+b_0x[n]$$

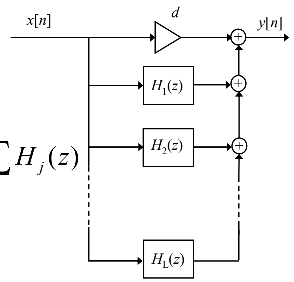
Paralelna realizacija diskretnih sustava

- razlaganje transfer funkcije $H(z)$ na zbroj sekcija nižeg reda dakle,

za $N \ge M$

$$H(z)=\frac{\sum_{m=0}^{M}b_m z^{-m}}{1+\sum_{m=1}^{N}a_m z^{-m}}=d+\sum_j H_j(z)$$

$$d=\frac{b_N}{a_N}$$



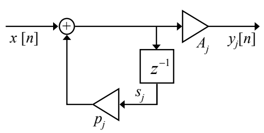
Paralelna realizacija diskretnih sustava

- razlaganje transfer funkcije $H(z)$ na zbroj sekcija prvog reda ,

za $N \ge M$

$$H(z)=d+\sum_{j=1}^{N}H_j(z)$$

$$d=\frac{b_N}{a_N}, \quad H_j(z)=\frac{A_j}{1-p_j z^{-1}}$$



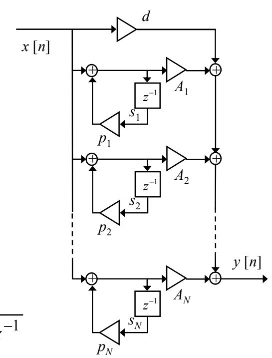
Paralelna realizacija diskretnih sustava

- neka je $H(z)$

$$H(z)=\frac{\sum_{m=0}^{N}b_m z^{-m}}{1+\sum_{m=1}^{N}a_m z^{-m}}$$

$$H(z)=d+\sum_{j=1}^{N}H_j(z)$$

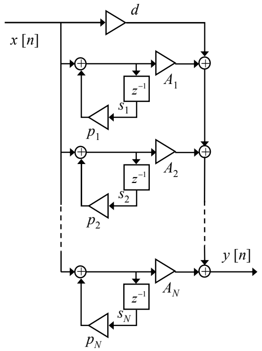
$$d=\frac{b_N}{a_N}, \quad H_j(z)=\frac{A_j}{1-p_j z^{-1}}$$



Paralelna realizacija diskretnih sustava

- jednadžbe stanja su

$$s_1[n+1] = p_1 s_1[n] + x[n]$$
$$s_2[n+1] = p_2 s_2[n] + x[n]$$
$$s_3[n+1] = p_3 s_3[n] + x[n]$$
$$s_N[n+1] = p_N s_N[n] + x[n]$$



$$y[n] = p_1 A_1 s_1[n] + p_2 A_2 s_2[n] + \dots\dots\dots + p_N A_N s_N[n] +$$
$$+ (d + A_1 + A_2 + \dots\dots\dots + A_N)x[n]$$

Paralelna realizacija diskretnih sustava

$$\begin{bmatrix} s_1[n+1] \\ s_2[n+1] \\ s_3[n+1] \\ \vdots \\ s_N[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & p_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1[n] \\ s_2[n] \\ s_3[n] \\ \vdots \\ s_N[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = \begin{bmatrix} p_1 A_1 & p_2 A_2 & \cdots & p_N A_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1[n] \\ s_2[n] \\ \vdots \\ s_N[n] \end{bmatrix} + (d + A_1 + A_2 + \dots\dots\dots + A_N)x[n]$$

Paralelna realizacija diskretnih sustava

- u općem slučaju neki od polova mogu biti kompleksni u tom slučaju su i A_j također kompleksni
- želimo li izbjeći množenja s kompleksnim brojevima kombiniramo konjugirano kompleksne korijene kako bi formirali podsustav s dva pola

Paralelna realizacija diskretnih sustava

- razlaganje transfer funkcije $H(z)$ na sekcije drugog reda

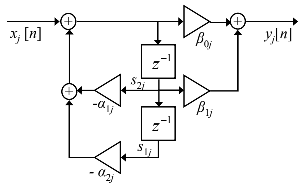
$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{1 + \sum_{m=1}^{N} a_m z^{-m}} = \frac{b_N}{a_N} + \sum_{j=1}^{L} H_j(z)$$

$$H_j(z) = \frac{\beta_{0j} + \beta_{1j} z^{-1}}{1 + \alpha_{1j} z^{-1} + \alpha_{2j} z^{-2}}$$

- za N neparan barem jedan realni pol
  tada je u prijenosnoj funkciji sekcije $\alpha_{2j} = \beta_{1j} = 0$

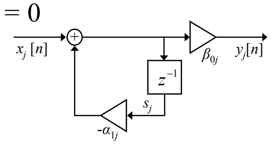
Paralelna realizacija diskretnih sustava

$$H_j(z) = \frac{\beta_{0j} + \beta_{1j} z^{-1}}{1 + \alpha_{1j} z^{-1} + \alpha_{2j} z^{-2}}$$



- za realni pol $\alpha_{2j} = \beta_{1j} = 0$

$$H_j(z) = \frac{\beta_{0j}}{1 + \alpha_{1j} z^{-1}}$$



Paralelna realizacija diskretnih sustava

- neka je zadani sustav

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4} + b_5 z^{-5}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + a_4 z^{-4} + a_5 z^{-5}}$$

- N je neparan barem je jedan pol realan
- neka je jedan pol realan a preostali neka su konjugirano kompleksni polovi

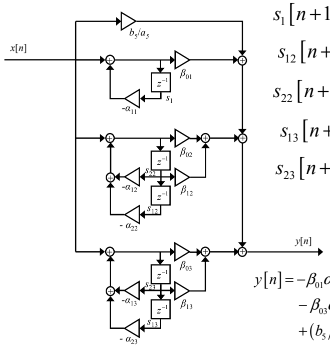
Paralelna realizacija diskretnih sustava

- razlaganje na parcijalne razlomke je oblika

$$H(z) = \frac{b_5}{a_5} + \frac{\beta_{01}}{1 + \alpha_{11} z^{-1}} + \frac{\beta_{02} + \beta_{12} z^{-1}}{1 + \alpha_{12} z^{-1} + \alpha_{22} z^{-2}} + \frac{\beta_{03} + \beta_{13} z^{-1}}{1 + \alpha_{13} z^{-1} + \alpha_{23} z^{-2}}$$

- blok dijagram je

Paralelna realizacija diskretnih sustava



$$s_1[n+1] = -\alpha_{11} s_1[n] + x[n]$$
$$s_{12}[n+1] = s_{22}[n]$$
$$s_{22}[n+1] = -\alpha_{22} s_{12}[n] - \alpha_{12} s_{22}[n] + x[n]$$
$$s_{13}[n+1] = s_{23}[n]$$
$$s_{23}[n+1] = -\alpha_{23} s_{13}[n] - \alpha_{13} s_{23}[n] + x[n]$$

$$y[n] = -\beta_{01}\alpha_{11} s_1[n] - \beta_{02}\alpha_{22} s_{12}[n] + (\beta_{12} - \beta_{02}\alpha_{12}) s_{22}[n]$$
$$- \beta_{03}\alpha_{23} s_{13}[n] + (\beta_{13} - \beta_{03}\alpha_{13}) s_{23}[n]$$
$$+ (b_5/a_5 + \beta_{01} + \beta_{02} + \beta_{03}) x[n]$$

Paralelna realizacija diskretnih sustava

$$\begin{bmatrix} s_1[n+1] \\ s_{12}[n+1] \\ s_{22}[n+1] \\ s_{13}[n+1] \\ s_{23}[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_{22} & -\alpha_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_{23} & -\alpha_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1[n] \\ s_{12}[n] \\ s_{22}[n] \\ s_{13}[n] \\ s_{23}[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = \begin{bmatrix} -\beta_{01}\alpha_{11} & -\beta_{02}\alpha_{12} & (\beta_{12} - \beta_{02}\alpha_{12}) & -\beta_{03}\alpha_{13} & (\beta_{13} - \beta_{03}\alpha_{13}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1[n] \\ s_{12}[n] \\ s_{22}[n] \\ s_{13}[n] \\ s_{23}[n] \end{bmatrix} +$$

$$+ \left(\frac{b_5}{a_5} + \beta_{01} + \beta_{02} + \beta_{03} \right) x[n]$$

Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja – kontinuirani sustavi

- kontinuirani sustav opisujemo diferencijalnom jednadžbom

$$\sum_{m=0}^{N} a_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m}$$

- ili $\mathcal{L}$ - transformacijom prijenosnom funkcijom:

$$\mathrm{H}(s) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m s^m}{\sum_{m=0}^{N} a_m s^m}$$

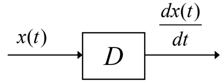
- polinomi od s u brojniku i nazivniku
- sustav ima nule i polove

Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja – kontinuirani sustavi

- za $N=M$ možemo prikazati $y(t)$ kao

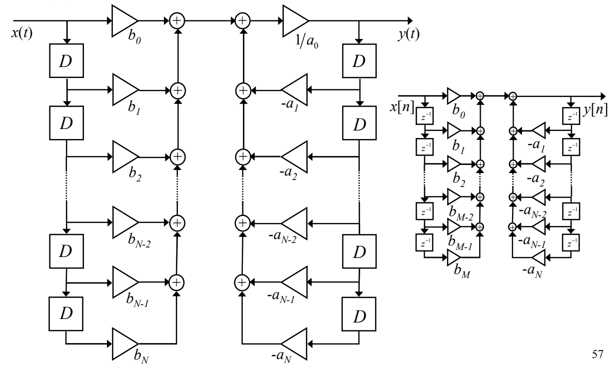
$$y(t) = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} - \sum_{m=1}^{N} a_m \frac{d^m y(t)}{dt^m}\right\}$$

- definicijom funkcijskog bloka za deriviranje D



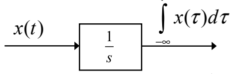
moguće je nacrtati blok dijagram za direktnu realizaciju

Direktna I realizacija – kontinuirani sustavi



Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja – kontinuirani sustavi

- zbog problema realizacije sklopova za deriviranje u realizaciji kontinuiranih sustava koristi se funkcijski blok za integriranje



$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mu(t-\tau)d\tau = x(t)*\mu(t) \Rightarrow \mathcal{L}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mu(t-\tau)d\tau\right) = \frac{1}{s}X(s)$$

$$\int_{-\infty}^{t}\left(\int_{-\infty}^{\tau} x(\sigma)d\sigma\right)d\tau = \left(x(t)*\mu(t)\right)*\mu(t) \Rightarrow \mathcal{L}\left(\int_{-\infty}^{t}\left(\int_{-\infty}^{\tau} x(\sigma)d\sigma\right)d\tau\right) = \frac{1}{s^2}X(s)$$

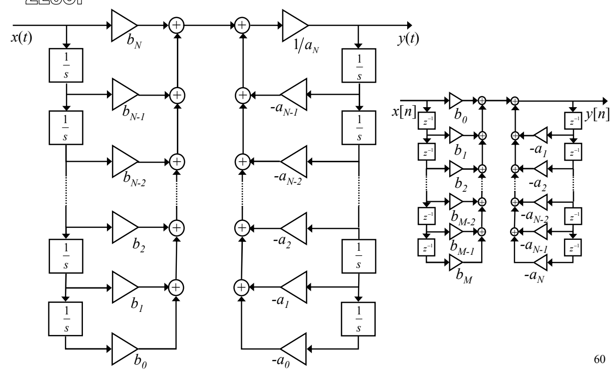
Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja – kontinuirani sustavi

$$H(s) = \frac{b_N s^N + b_{N-1}s^{N-1} + ... + b_1 s + b_0}{a_N s^N + a_{N-1}s^{N-1} + ... + a_1 s + a_0}$$

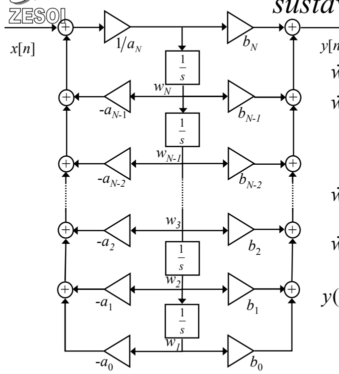
- integrirajući N puta diferencijalnu jednadžbu dobivamo integralnu jednadžbu sustava čemu odgovara i slijedeća formulacija prijenosne funkcije

$$H(s) = \frac{b_N + b_{N-1}s^{-1} + ... + b_1 s^{-(N-1)} + b_0 s^{-N}}{a_N + a_{N-1}s^{-1} + ... + a_1 s^{-(N-1)} + a_0 s^{-N}}$$

Direktna I realizacija kontinuirani sustavi



Direktna II realizacija kontinuirani sustavi



$$\dot{w}_1(t) = w_2(t)$$
$$\dot{w}_2(t) = w_3(t)$$
$$\vdots$$
$$\dot{w}_{N-1}(t) = w_N(t)$$
$$\dot{w}_N(t) = \frac{1}{a_N}\left\{x(t) - \sum_{j=1}^{N} a_{j-1} w_j(t)\right\}$$
$$y(t) = \frac{b_N}{a_N}x(t) + \sum_{j=1}^{N}\left(b_{j-1} - \frac{b_N}{a_N}a_{j-1}\right)w_j(t)$$

Direktna II realizacija kontinuiranih sustava

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1(t) \\ \dot{w}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{w}_{N-1}(t) \\ \dot{w}_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ------ & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ------ & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ------ & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_N} & -\frac{a_1}{a_N} & ------ & -\frac{a_{N-2}}{a_N} & -\frac{a_{N-1}}{a_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ \vdots \\ w_{N-1}(t) \\ w_N(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_N} \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = \left[\left(b_0 - \frac{b_N}{a_N}a_0\right) \ \left(b_1 - \frac{b_N}{a_N}a_1\right) \ ----- \ \left(b_{N-1} - \frac{b_N}{a_N}a_{N-1}\right)\right] \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ \vdots \\ w_N(t) \end{bmatrix} + \frac{b_N}{a_N}x(t)$$

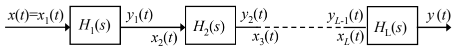
Kaskadna realizacija kontinuiranih sustava

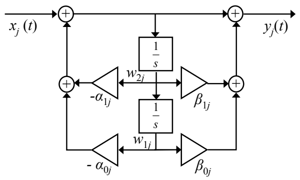
- razlaganje transfer funkcije $H(s)$ na sekcije drugog reda spojenih u kaskadu – iterativna metoda

$$H(s) = \frac{b_M}{a_N} \cdot \prod_{j=1}^{L} H_j(s) \qquad H_j(z) = \frac{s^2 + \beta_{1j}s + \beta_{0j}}{s^2 + \alpha_{1j}s + \alpha_{0j}}$$

gdje je L najveći cijeli broj sadržan u (N+1)/2

Kaskadna realizacija kontinuiranih sustava





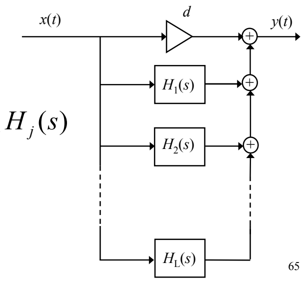
Paralelna realizacija kontinuiranih sustava

- razlaganje transfer funkcije $H(s)$ na zbroj sekcija prvog reda (polovi realni) ili drugog reda (kompleksni polovi)

za $N \geq M$

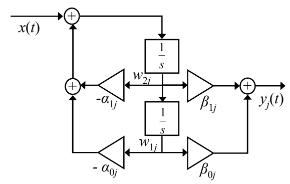
$$H(s) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m s^m}{\sum_{m=0}^{N} a_m s^m} = d + \sum_j H_j(s)$$

$$d = \frac{b_N}{a_N}$$



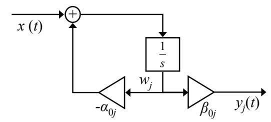
Paralelna realizacija kontinuiranih sustava

$$H_j(s) = \frac{\beta_{1j}s + \beta_{0j}}{s^2 + \alpha_{1j}s + \alpha_{0j}}$$



- za realni pol

$$H_j(s) = \frac{\beta_{0j}}{s + \alpha_{0j}}$$



Odziv kontinuiraih sustava $\mathcal{L}$ - transformacijom

$$Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K$$

$$\forall t \in Realni, \quad \dot{w}(t) = Aw(t) + Bx(t)$$

$$y(t) = Cw(t) + Dx(t)$$

$$w(t) = e^{At}w(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bx(\tau)d\tau = \Phi(t)w(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bx(\tau)d\tau$$

$$y(t) = Ce^{At}w(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bx(\tau)d\tau + Dx(t)$$

Odziv kontinuiraih sustava $\mathcal{L}$ - transformacijom

- $\mathcal{L}$ transformacija jednadžbi stanja sustava:

$$sW(s) - w(0) = AW(s) + BX(s)$$

$$(sI - A)W(s) = w(0) + BX(s)$$

$$W(s) = (sI - A)^{-1}w(0) + (sI - A)^{-1}BX(s)$$

matrica karakterističnih frekvencija – resolventa

$$W(s) = \Phi(s)x(0) + \Phi(s)BX(s)$$

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\}w(0) + \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)BX(s)\}$$

fundamentalna matrica $\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$

$$w(t) = \Phi(t)w(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bx(\tau)d\tau$$

Odziv kontinuiraih sustava $\mathcal{L}$ - transformacijom

- matrica karakterističnih frekvencija je

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{adj(sI - A)}{\det(sI - A)}$$

- elementi matrice karakterističnih frekvencija su razlomljene racionalne funkcije kompleksne frekvencije
  - brojnik polinom n-1 stupnja
  - nazivnik n-tog stupnja

Odziv kontinuiraih sustava $\mathcal{L}$ - transformacijom

- det(sI-A) je karakterističan polinom sustava n-tog stupnja i možemo ga pisati kao produkt korijenih faktora:

$$\det(sI - A) = (s - p_1)^{m_1}(s - p_2)^{m_2}\cdots(s - p_j)^{m_j}\cdots(s - p_n)^{m_n}$$

$$= \prod_1^{n'}(s - p_j)^{m_j}$$

- korijeni karakterističnog polinoma p_1 do p_n su vlastite vrijednosti matrice A odnosno vlastite frekvencije sustava
- m_j .... višestrukost j–tog korijena $\sum_{j=1}^{n'} m_j = n.$

Odziv kontinuiranih sustava $\mathcal{L}$ - transformacijom

- $\mathcal{L}$ transformacija izlazne jednadžbe sustava:

$$Y(s) = CW(s) + DX(s)$$

$$Y(s) = C\Phi(s)w(0) + \{C\Phi(s)B + D\}X(s)$$

- miran sustav: w(0) = 0:

$$Y(s) = \underbrace{\left\{C(sI - A)^{-1}B + D\right\}}_{\text{transfer matrica}}X(s) = \underbrace{H(s)}_{\text{transfer matrica}}X(s)$$

- elementi matrice $H(s)$ su transfer funkcije između pojedinih ulaza i pojedinih izlaza sustava.

Odziv diskretnih sustava z - transformacijom

$$Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K$$

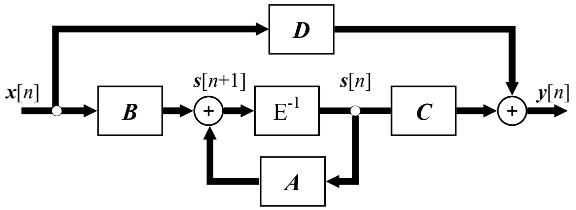
$$\forall n \in Cjelobrojni, \quad s[n+1] = As[n] + Bx[n]$$

$$y[n] = Cs[n] + Dx[n]$$

$$s[n] = A^n s[0] + \sum_{m=0}^{n-1} A^{n-1-m}Bx[m], \quad n > 0$$

$$y[n] = \begin{cases} Cs[0] + Dx[0], & n = 0 \\ CA^n s[0] + \left\{\sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m}Bx[m]\right\} + Dx[n], & n > 0 \end{cases}$$

Općí kabelski blok dijagram diskretnog sustava



Odziv diskretnih sustava z - transformacijom

$$X(z)=Z\{x[n]\},\quad Y(z)=Z\{y[n]\},\quad S(z)=Z\{s[n]\}$$

transformacija jednadžbe stanja $zS(z)-zs[0]=AS(z)+BX(z)$

$$(zI-A)S(z)=zs[0]+BX(z)$$

$$S(z)=z(zI-A)^{-1}s(0)+(zI-A)^{-1}BX(z)$$

transformacija izlazne jednadžbe $y[n]=Cs[n]+Dx[n]$

$$Y(z)=Cz(zI-A)^{-1}s[0]+\left\{C(zI-A)^{-1}B+D\right\}X(z)$$

Odziv diskretnih sustava z - transformacijom

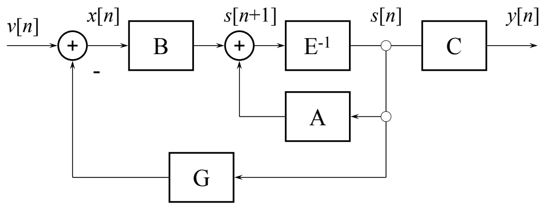
izlaz mirnog sustava $\boldsymbol{s}[0] = 0$ biti će određen sa

$$\boldsymbol{Y}(z) = \boldsymbol{H}(z)\,\boldsymbol{X}(z)$$

$\boldsymbol{H}(z) = \boldsymbol{C}(z\mathbf{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$ transfer matrica vremenski diskretnog sustava

$\Phi(z)=(z\mathbf{I}-A)^{-1}z$ rezolventa sustava

Sustav s povratnom vezom



$\boldsymbol{s}[n+1] = \boldsymbol{As}[n]+\boldsymbol{Bx}[n]$

$\boldsymbol{x}[n] = \boldsymbol{v}[n]-\boldsymbol{Gs}[n]$

$\boldsymbol{y}[n] = \boldsymbol{Cs}[n]$

Sustav s povratnom vezom

$$s[n+1]=As[n]+B\left(v[n]-Gs[n]\right)$$

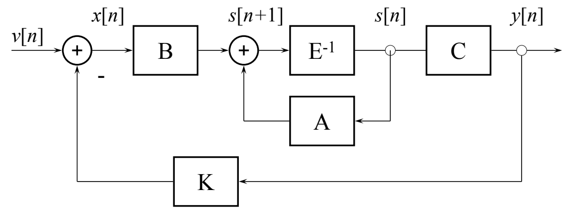
$$s[n+1]=(A-BG)s[n]+Bv[n]$$

$$s[n+1]=\overline{A}s[n]+Bv[n]$$

- matrica sustava uz zatvorene petlje povratne veze njene karakteristične frekvencije q_k određuju vladanje sustava

može se pokazati da za upravljivi sustav postoji najmanje jedna matrica G takva da karakteristične vrijednosti q_k matrice $\overline{\mathbf{A}}$ budu jednake zadanima

Povratna veza s izlaza sustava



$\boldsymbol{s}[n+1] = \boldsymbol{As}[n]+\boldsymbol{Bx}[n]$

$\boldsymbol{x}[n] = \boldsymbol{v}[n]-\boldsymbol{Ky}[n]$

$\boldsymbol{y}[n] = \mathbf{C}\,\boldsymbol{s}[n]$

Povratna veza s izlaza sustava

$$s[n+1]=As[n]+B\left(v[n]-KCs[n]\right)$$

$$s[n+1]=(A-BKC)s[n]+Bv[n]$$

$$s[n+1]=\overline{A}s[n]+Bv[n]$$

$\overline{\mathbf{A}}$ matrica ovisi o matricama A, B, C i K. Ako je odziv izvornog sustava nezadovoljavajući treba naći matricu K da bi sustav imao željeni odziv.

Pokazuje se da to nije uvijek moguće za bilo koje matrice B i C.

Zato se pristupa realizaciji povratne veze s varijabli stanja $\Rightarrow$ estimatori

Opis linearnih sustava i njihov odziv gdje smo do sada?

$Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K$

$$\forall n\in Cjelobrojni,\quad s[n+1]=As[n]+Bx[n]$$

$$y[n]=Cs[n]+Dx[n]$$

$$s[n]=A^n s[0]+\sum_{m=0}^{n-1}A^{n-1-m}Bx[m],\quad n>0$$

$$y[n]=\begin{cases} Cs[0]+Dx[0], & n=0\\ CA^n s[0]+\left\{\sum_{m=0}^{n-1}CA^{n-1-m}Bx[m]\right\}+Dx[n], & n>0\end{cases}$$

$$y[n]=\sum_{m=0}^{n}h[n-m]x[m],\quad n\geq 0$$

$$a_0y[n]+a_1y[n-1]+a_2y[n-2]+....+a_Ny[n-N]=$$
$$=b_0x[n]+b_1x[n-1]+b_2x[n-2]+....+b_Mx[n-M]$$

$$Y(z)=H(z)X(z)=\frac{\sum_{m=0}^{N}b_m z^{-m}}{1+\sum_{m=1}^{N}a_m z^{-m}}X(z)$$

$$S(z)=z(zI-A)^{-1}s(0)+(zI-A)^{-1}BX(z)$$

$$Y(z)=Cz(zI-A)^{-1}s[0]+\left\{C(zI-A)^{-1}B+D\right\}X(z)$$

$Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K$

$$\forall t\in Realni,\quad \dot{w}(t)=Aw(t)+Bx(t)$$

$$y(t)=Cw(t)+Dx(t)$$

$$w(t)=e^{At}w(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bx(\tau)d\tau$$

$$y(t)=Ce^{At}w(0)+\int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bx(\tau)d\tau+Dx(t)$$

$$y(t)=\int_0^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau,$$

$$a_ny^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_0y(t)=$$
$$=b_mx^{(m)}(t)+b_{m-1}x^{(m-1)}(t)\ldots+b_0x(t)$$

$$\mathrm{Y(s)=H}(s)X(s)=\frac{\sum_{m=0}^{M}b_m s^m}{\sum_{m=0}^{N}a_m s^m}X(s)$$

$$W(s)=(sI-A)^{-1}w(0)+(sI-A)^{-1}Bx(s)$$

$$Y(s)=C\Phi(s)w(0)+\left\{C\Phi(s)B+D\right\}X(s)$$