

Podsjetimo se...

- zadnji puta razmatrali:
 - automate s beskonačnim brojem stanja
 - uvod u vremenski diskretne linearne sustave
 - diskretne signale

1

a danas

- danas ćemo razmotriti:
 - svojstva sinusnog niza
 - osnovne kontinuirane signale
 - teorem otipkavanja
 - energiju i snagu signala
 - odziv linearnih vremenski diskretnih sustava
 - fundamentalnu matricu diskretnih sustava
 - impulsni odziv diskretnih sustava
 - konvolucijsku sumaciju

2

Svojstva sinusnog niza

- realni sinusni (kosinusni) niz:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \text{ cjelobrojni, } x[n] = \cos(\omega n)$$

ω [radijana/uzorku] kutna frekvencija

za $\omega = \pi + \Delta$ izlazi

$$x(n) = \cos(\pi + \Delta)n = \cos(-2\pi + \pi + \Delta)n$$

$$= \cos(-\pi + \Delta)n = \cos(\pi - \Delta)n$$

za ovaj niz se ne može razlikovati da li je

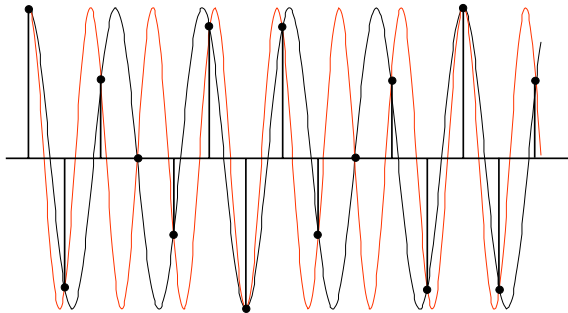
kutna frekvencija niza

$$\omega_1 = \pi + \Delta \quad \text{ili} \quad \omega_2 = \pi - \Delta$$

3

$$x(n) = \cos(\omega n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\omega = \omega_1 = 7\pi/6 \quad \omega = \omega_2 = 5\pi/6$$



4

Svojstva sinusnog niza

- za $\omega = 2\pi - \Delta$ izlazi

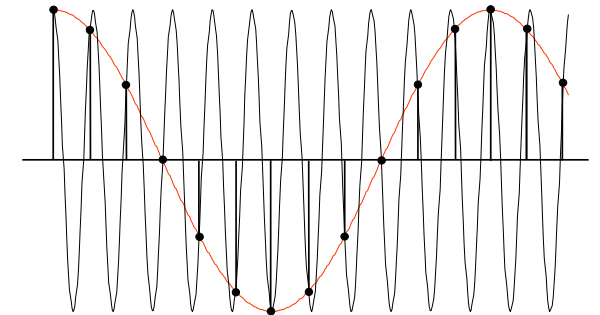
$$x(n) = \cos(2\pi - \Delta)n = \cos(-\Delta)n = \cos(\Delta n)$$
- za zadani niz se ne može razlikovati je li kutna frekvencija

$$\omega_1 = 2\pi - \Delta \quad \text{ili} \quad \omega_2 = \Delta$$

5

$$x(n) = \cos(\omega n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\omega = \omega_1 = \pi/6 \quad \omega = \omega_2 = 11\pi/6$$



6

Svojstva sinusnog niza

iz prethodnog slijedi da su sve sinusoidne frekvencije $\omega_k = \omega_0 + 2k\pi$ - $\pi < \omega_0 < \pi$ identične (i ne možemo ih razlikovati) jer vrijedi

$$\cos((\omega_0 + 2k\pi)n + \varphi) = \cos((\omega_0 n + \varphi) + 2k\pi n) = \cos(\omega_0 n + \varphi)$$

zato su sve $\cos((\omega_0 + 2k\pi)n + \varphi)$ "alias" kosinusoidne $\cos(\omega_0 n + \varphi)$

7

Svojstva sinusnog niza

sve diskretne sinusoidne s frekvencijom

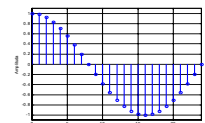
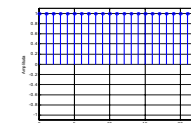
$$|\omega| \leq \pi \quad \text{ili} \quad |f| \leq \frac{1}{2}$$

su jednoznačno definirane

8

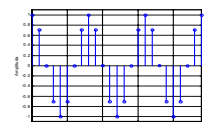
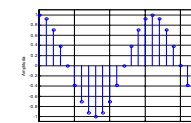
$$\forall n \geq 0, \quad \cos(\omega n), \quad \omega = 0$$

$$\forall n \geq 0, \quad \cos(\omega n), \quad \omega = \frac{\pi}{16}$$



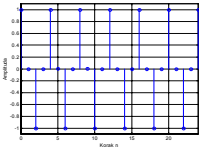
$$\forall n \geq 0, \quad \cos(\omega n), \quad \omega = \frac{\pi}{8}$$

$$\forall n \geq 0, \quad \cos(\omega n), \quad \omega = \frac{\pi}{4}$$

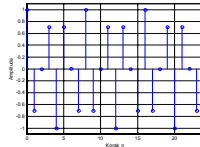


9

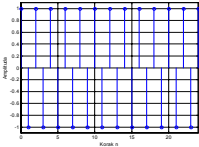
$$\forall n \geq 0, \cos(\omega n), \omega = \frac{\pi}{2}$$



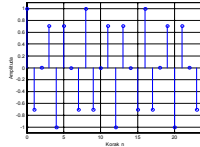
$$\forall n \geq 0, \cos(\omega n), \omega = \frac{3\pi}{4}$$



$$\forall n \geq 0, \cos(\omega n), \omega = \pi$$



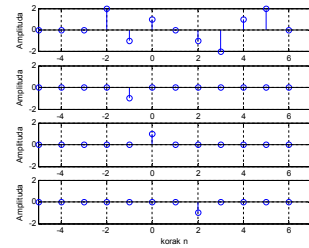
$$\forall n \geq 0, \cos(\omega n), \omega = \frac{5\pi}{4}$$



10

Prikaz niza uz pomoć $\delta[n]$

- svaki niz može biti prikazan uz pomoć sume jediničnih impulsa



$$x[n]$$

$$x[-1]\delta[n+1]$$

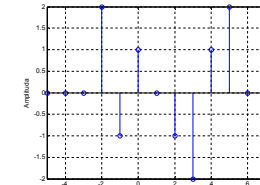
$$x[0]\delta[n]$$

$$x[2]\delta[n-2]$$

11

Prikaz niza uz pomoć $\delta[n]$

- svaki niz može biti prikazan uz pomoć sume jediničnih impulsa



$$x[n] = 2\delta[n+2] - \delta[n+1] + \delta[n] - \delta[n-2] - 2\delta[n-3] + \delta[n-4] + 2\delta[n-5]$$

12

Osnovni kontinuirani signali

- jedinični skok definira se kao

$$\forall t \in \text{Realni}, \mu(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

- jedinična rampa

$$\forall t \in \text{Realni}, r(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

13

Osnovni kontinuirani signali

- jedinična parabola m -tog stupnja

$$\forall t \in \text{Realni}, P_m(t) = \begin{cases} t^m, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, m = 2, 3, 4, \dots$$

- realni sinusni signal

$$\forall t \in \text{Realni}, \forall A \in \text{Realni} \\ x(t) = A \sin(2\pi Ft) = A \sin(\Omega t)$$

14

Osnovni kontinuirani signali

- kompleksna eksponencijala

$$\forall t \in \text{Realni}, \forall s, X \in \text{Kompleksni}$$

$$x(t) = X e^{st}$$

- ovisno o kompleksnoj frekvenciji $s = \sigma + j\omega$ važna tri slučaja

- konstantnog ($s = 0$),
- eksponencijalnog ($\omega = 0$) i
- harmonijskog ($\sigma = 0$) signala

15

Osnovni kontinuirani signali

- Diracova δ - funkcija

$$\forall t \in \text{Realni},$$

$$\delta(t) = 0 \text{ za } t \neq 0 \text{ i } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1$$

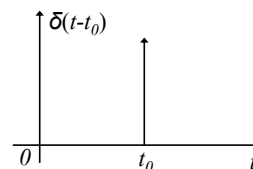
- $\delta(t)$ – singularna funkcija

16

Osnovni kontinuirani signali

- pomak $\delta(t)$ definira se kao

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases} \text{ i } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = \int_{t_0^-}^{t_0^+} \delta(t - t_0) dt = 1$$



17

Osnovni kontinuirani signali

- regularne funkcije proširene sa singularnim funkcijama čine skup poopćenih funkcija koje igraju važnu ulogu u analizi linearnih dinamičkih sustava

- Diracovu ili delta funkciju u “regularnoj matematici” definiramo kao

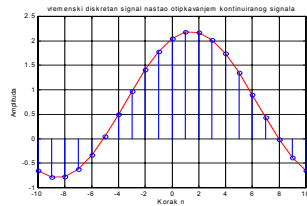
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

gdje je $f(t)$ regularna funkcija kontinuirana u t_0

18

Otipkavanje signala

- diskretni signali mogu nastati otipkavanjem kontinuiranih signala



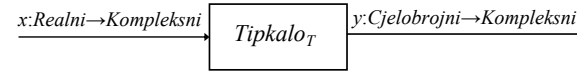
19

Otipkavanje signala

- u otipkavanju signala koristimo se *tipkalom*
- u općem slučaju tipkalo može otipkavati i kompleksni signal pa ga definiramo kao sustav

$$\text{Tipkalo}_T : [\text{Realni} \rightarrow \text{Kompleksni}]$$

$$\rightarrow [\text{Cjelobrojni} \rightarrow \text{Kompleksni}]$$



20

Otipkavanje signala

- ovdje je T interval otipkavanja (razmak između uzoraka) – jedinica sekundi po uzorku
- frekvencija otipkavanja $F_s = 1/T$ – jedinica je uzoraka po sekundi
- ili $\Omega_s = 2\pi F_s = 2\pi/T$ je kutna frekvencija otipkavanja – jedinice radijana po sekundi

21

Otipkavanje signala

- dakle ako je $y = \text{Tipkalo}_T(x)$ tada je y definiran s

$$\forall n \in \text{Cjelobrojni}, \quad y(n) = x(nT)$$

22

Otipkavanje signala

- neka je $x_a: \text{Realni} \rightarrow \text{Realni}$ sinusoidalni signal

$$\forall t \in \text{Realni}, \quad x_a(t) = \cos(2\pi Ft + \varphi) = \cos(\Omega t + \varphi)$$

gdje je F frekvencija sinusnog signala u Hz
a Ω kutna frekvencija

23

Otipkavanje signala

- kontinuirani signal $x_a(t)$ otipkavamo u diskretnim trenucima vremena

$$t = nT = \frac{n}{F_s} = \frac{2\pi n}{\Omega_s}$$

$$\forall n \in \text{Cjelobrojni},$$

$$x[n] = x_a(nT) = \cos(2\pi F n T + \varphi) = \cos(\Omega n T + \varphi)$$

$$= \cos\left(\frac{2\pi F}{F_s} n + \varphi\right) = \cos\left(\frac{2\pi \Omega}{\Omega_s} n + \varphi\right)$$

$$= \cos(\Omega T n + \varphi) = \cos(\omega n + \varphi)$$

24

Otipkavanje signala

- dakle otipkani signal je

$$\forall n \in \text{Cjelobrojni},$$

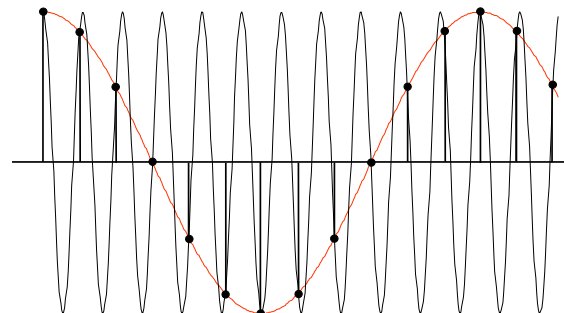
$$x[n] = \cos(\omega n + \varphi)$$

pri čemu je $\omega = \Omega T$

normalizirana kutna frekvencija (jedinica je radijana po uzorku) diskretnog signala $x[n]$

25

Aliasing kosinusnog signala



26

Aliasing kod otipkavanja

- otipkavaju se kosinusni signali $x_1(t)$ i $x_2(t)$ frekvencija 4 kHz i 44 kHz
- frekvencija otipkavanja $F_s = 48$ kHz

$$x_1(t) = \cos(2\pi F_1 t) = \cos(2\pi \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot t)$$

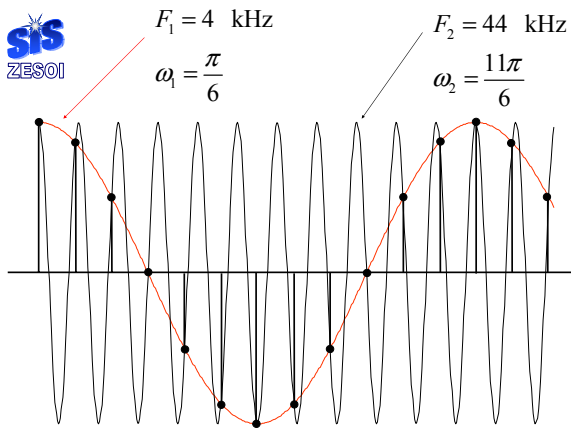
$$x_2(t) = \cos(2\pi F_2 t) = \cos(2\pi \cdot 44 \cdot 10^3 \cdot t)$$

$$t = nT = \frac{n}{F_s} = \frac{n}{48 \cdot 10^3}$$

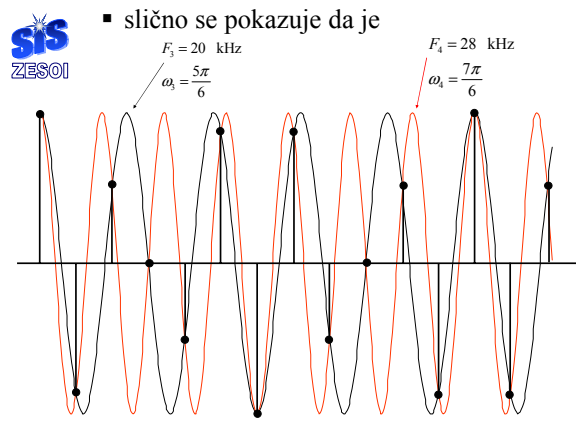
$$x_1[n] = \cos[2\pi F_1 n T] = \cos\left[2\pi \cdot \frac{4 \cdot 10^3}{48 \cdot 10^3} \cdot n\right] = \cos\left[\frac{\pi}{6} n\right]$$

$$x_2[n] = \cos\left[2\pi \cdot \frac{44 \cdot 10^3}{48 \cdot 10^3} \cdot n\right] = \cos\left[\frac{11\pi}{6} n\right] = \cos\left[\frac{\pi}{6} n\right]$$

27



28



29

analogni signali

$$\Omega = 2\pi F$$

$$\frac{\text{radian}}{\text{sekunda}} \quad \text{Hz}$$

$$-\infty < \Omega < \infty$$

diskretni signali

$$\omega = 2\pi f$$

$$\frac{\text{radian}}{\text{uzorak}} \quad \frac{\text{period}}{\text{uzorak}}$$

$$-\pi \leq \omega \leq \pi$$

$$\omega = \Omega T$$

$$f = F / F_s$$

$$-\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}$$

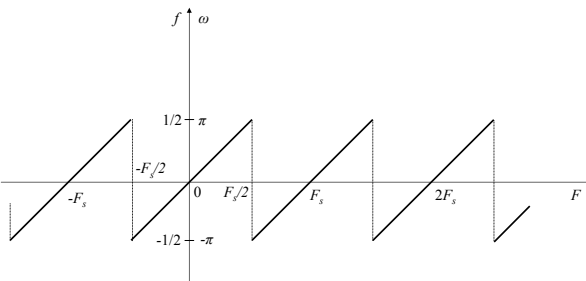
$$-\pi / T \leq \Omega \leq \pi / T \quad \Omega = \omega / T$$

$$-F_s / 2 \leq F \leq F_s / 2 \quad F = f \cdot F_s$$

30

Otipkavanje signala

- veza između F i f



31

Aliasing kod otipkavanja

- iz $\omega_0 = \Omega_0 T = \Omega_0 \frac{1}{F_s} = \frac{2\pi\Omega_0}{\Omega_s}$ i $\omega_0 \leq \pi$

slijedi

$$\frac{2\pi\Omega_0}{\Omega_s} \leq \pi \Rightarrow \Omega_s \geq 2\Omega_0$$

- dakle, kako bi se postiglo otipkavanje bez “aliasing-a” frekvencija otipkavanja Ω_s treba biti barem dvostruko veća od frekvencije Ω_0 sinusnog signala koji se otipkava

32

Teorem otipkavanja

- poopćimo prethodni zaključak razmatrajući vremenski kontinuirani signal $x_a(t)$ prikazan kao sumu sinusoida
- $x_a(t)$ može biti jednoznačno prikazan otipkanim signalom $x[n]$ samo ako je frekvencija otipkavanja Ω_s najmanje dva puta veća od najviše frekvencije sadržane u signalu $x_a(t)$ – Nyquist-Shanon-ov teorem otipkavanja

33

Energija signala

- energija koja se u vremenskom intervalu $[t_1, t_2]$ disipira kao toplina na otporu R kroz koji teče struja $i(t)$ dana je s

$$E_{[t_1, t_2]} = R \int_{t_1}^{t_2} i^2(t) dt$$

- analogno definiramo energiju kontinuiranog signala definiranom u vremenskom intervalu $[t_1, t_2]$ dakle, duljine $L = t_2 - t_1$

$$E_L = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt$$

34

Energija signala

- totalna energija kontinuiranoga signala dana je s

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

- srednju snagu kontinuiranog signala definiramo kao

$$P_\infty = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} |f(t)|^2 dt$$

35

Energija signala

- totalna energija E_x niza $x[n]$ definira se kao:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

- niz beskonačna trajanja s konačnim vrijednostima uzoraka može imati konačnu ili beskonačnu totalnu energiju
- niz konačnog trajanja ima konačnu energiju

36

Energija i snaga signala

- srednja snaga P_x aperiodskog niza definira se kao:

$$P_x = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M |x[n]|^2$$

- srednja snaga niza beskonačne duljine može biti konačna ili beskonačna

37

Energija i snaga signala

- energija niza konačne duljine $-M \leq n \leq M$ je pak:

$$E_{x,M} = \sum_{n=-M}^M |x[n]|^2$$

- pa je:

$$P_x = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} E_{x,M}$$

- srednja snaga periodičnog niza perioda N je:

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\tilde{x}[n]|^2$$

38

Energija i snaga signala

- razmotrimo kauzalni niz:

$$x[n] = \begin{cases} (\frac{1}{2})^n, & n \geq 0 \\ 3^n, & n < 0 \end{cases}$$

- $x[n]$ je konačne energije jer: $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$

$$\begin{aligned} E_x &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} 3^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{4}} + \frac{1}{1-\frac{1}{9}} - 1 = \frac{35}{24} \end{aligned}$$

39

Energija i snaga osnovnih nizova

- jedinični skok $\mu[n]$:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^2[n] = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty$$

$$\begin{aligned} P &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=0}^M \mu^2[n] = \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M+1}{2M+1} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1+1/M}{2+1/M} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

40

Energija i snaga osnovnih nizova

- Kompleksna eksponencijala

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |Ae^{j\omega_0 n}|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A^2 = \infty$$

$$\begin{aligned} P &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M |Ae^{j\omega_0 n}|^2 = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M A^2 \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{(2M+1)A^2}{2M+1} = A^2 \end{aligned}$$

41

Energija i snaga osnovnih nizova

signal	E	P
$\delta[n]$	1	0
$\mu[n]$	∞	$\frac{1}{2}$
$r[n]$	∞	∞
$Ae^{j\omega n}$	∞	A^2

42

Linearni vremenski diskretni sustavi - $[A, B, C, D]$ prikaz

- model s varijablama stanja diskretnog vremenski stalnog linearnog sustava je kako je pokazano

Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K
 $\forall n \in \text{Cjelobrojni}$

$$s[n+1] = As[n] + Bx[n]$$

$$y[n] = Cs[n] + Dx[n]$$

43

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava

- odziv sustava možemo riješiti korak po korak
- neka je $s[0] = \text{pocetnoStanje}$

$$n=0, \quad s[1] = As[0] + Bx[0]$$

$$\begin{aligned} n=1, \quad s[2] &= As[1] + Bx[1] \\ &= A\{As[0] + Bx[0]\} + Bx[1] \\ &= A^2s[0] + ABx[0] + Bx[1] \end{aligned}$$

44

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava

$$\begin{aligned} n=2, \quad s[3] &= As[2] + Bx[2] \\ &= A\{A^2s[0] + ABx[0] + Bx[1]\} + Bx[2] \\ &= A^3s[0] + A^2Bx[0] + ABx[1] + Bx[2] \end{aligned}$$

- možemo napisati odziv stanja za n - ti korak

$$\forall n > 0$$

$$s[n] = A^n s[0] + \sum_{m=0}^{n-1} A^{n-1-m} Bx[m]$$

45

- pa je odziv sustava

$$y[n] = \begin{cases} Cs[0] + Dx[0], & n = 0 \\ CA^n s[0] + \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m} Bx[m] \right\} + Dx[n], & n > 0 \end{cases}$$

46

- dokažimo indukcijom da je izraz za odziv stanja korektno određen i da on daje korektnu vrijednost i za $n+1$ korak

$$s[n] = A^n s[0] + \sum_{m=0}^{n-1} A^{n-1-m} Bx[m]$$

iz $s[n+1] = As[n] + Bx[n]$ slijedi

$$= A \left\{ A^n s[0] + \sum_{m=0}^{n-1} A^{n-1-m} Bx[m] \right\} + Bx[n]$$

47

$$\begin{aligned} s[n+1] &= A^{n+1} s[0] + \sum_{m=0}^{n-1} A^{n-m} Bx[m] + Bx[n] \\ &= A^{n+1} s[0] + \sum_{m=0}^n A^{n-m} Bx[m] \end{aligned}$$

- što je izraz na desnoj strani odziva stanja izračunat za $n+1$ pa je indukcijom pokazano da je korektno određen izraz za odziv stanja i da vrijedi za svaki $n > 0$

$$s[n] = A^n s[0] + \sum_{m=0}^{n-1} A^{n-1-m} Bx[m]$$

48

- dakle, za MIMO diskretni sustav zadan s $Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K$

$$\forall n \in \text{Cjelobrojni}, \quad s[n+1] = As[n] + Bx[n] \\ y[n] = Cs[n] + Dx[n]$$

odziv stanja i odziv sustava su

$$s[n] = A^n s[0] + \sum_{m=0}^{n-1} A^{n-1-m} Bx[m], \quad n > 0$$

$$y[n] = \begin{cases} Cs[0] + Dx[0], & n = 0 \\ CA^n s[0] + \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m} Bx[m] \right\} + Dx[n], & n > 0 \end{cases}$$

49

- dakle, za MIMO diskretni sustav zadan s $Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K$

$$\forall n \in \text{Cjelobrojni}, \quad s[n+1] = As[n] + Bx[n] \\ y[n] = Cs[n] + Dx[n]$$

odziv stanja, odziv sustava i ulazni signal su vektori dimenzije N odnosno K i M i suglasno tome su matrice A, B, C, D odgovarajućih dimenzija

50

- za sustav su jednim ulazom i jednim izlazom (SISO) vrijedi

$$\begin{aligned} Stanja &= Realni^N, Ulazi = Realni, Izlazi = Realni \\ \forall n \in \text{Cjelobrojni}, \quad s[n+1] &= As[n] + Bx[n] \\ y[n] &= Cs[n] + Dx[n] \end{aligned}$$

- B i C postaju tada vektori a D skalar

51

- interesantno je definirati i razmotriti četiri slučaja

- odziv stanja mirnog sustava dakle $s(0) = 0$

$$s[n] = \sum_{m=0}^{n-1} A^{n-1-m} Bx[m], \quad n > 0$$

- odziv stanja nepobuđenog sustava dakle $x(n) = 0$

$$s[n] = A^n s[0], \quad n > 0$$

52

- odziv mirnog sustava dakle $s(0) = 0$

$$y[n] = \begin{cases} Dx[0], & n = 0 \\ \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m} Bx[m] \right\} + Dx[n], & n > 0 \end{cases}$$

- odziv nepobuđenog sustava dakle $x(n) = 0$

$$y[n] = \begin{cases} Cs[0], & n = 0 \\ CA^n s[0], & n > 0 \end{cases}$$

53

- odziv stanja nepobuđenog sustava dakle kada je $x(n) = 0$ je

$$s[n] = A^n s[0], \quad n > 0$$

- u slučaju nepobuđenog sustava matrica A^n prevodi sustav iz početnog stanja u stanje u koraku n

- matricu A^n nazivamo prijelazna (state transition matrix) ili fundamentalna matrica i označavamo je s $\Phi[n]$

54

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava - primjer

- primjer bankovne štednje:
 - označimo stanje nekog bankovnog računa, na početku dana n , sa $s[n]$
 - početnoStanje neka je stanje računa na dan 0 i označimo ga sa $s[0]$
 - sa $x[n]$ označimo ukupni dnevni depozit (za $x[n] > 0$) ili ukupni iznos podizanja (za $x[n] < 0$) u HRK
 - sa $y[n]$ označimo izlaz iz sustava koji predstavlja stanje računa na kraju dana n
 - neka je dnevna kamata K

55

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava - primjer

- prepoznamo da je
 $Stanja = Ulazi = Izlazi = Realni$
- stanje računa na početku dana $n+1$ (naredno stanje) će biti
 $\forall n \in \mathbb{Cjelobrojni}, s[n+1] = (1+K)s[n] + x[n]$
- stanje računa na dan n (izlaz) je
 $\forall n \in \mathbb{Cjelobrojni}, y[n] = s[n] + x[n]$

56

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava - primjer

- neka smo na dan kada počnemo pratiti stanje na računu od prijašnje štednje imali 200 Kuna i to je početno stanje $s[0]=200$
- neka tog istog dana uložimo 3800 Kuna
 $x[0]=3800$
- plan štednje (trošenja) je podizanje svakog dana po 120 Kuna
- zanima nas stanje računa nakon n dana ako su kamate 3% godišnje – dakle dnevno $K = .03/365 = 0,0000822$

57

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava - primjer

- stanje na računu bi mogli računati korak po korak

$$s[n+1] = (1+K)s[n] + x[n]$$

$$s[n+1] = 1,0000822s[n] + x[n]$$

$$n=0, s[1] = 1,0000822s[0] + x[0] \\ = 1,0000822 \cdot 200 + 3800 = 4000,01644$$

$$n=1, s[2] = 1,0000822s[1] + x[1] \\ = 1,0000822 \cdot 4000,01644 - 120 = 3880,34524135$$

$$n=2, s[3] = 1,0000822s[2] + x[2] \\ = 1,0000822 \cdot 3880,34524135 - 120 = 3760,6642057$$

58

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava - primjer

- nađimo rješenje na drugi način
- jednadžbe možemo pisati kao

$$s[n+1] = as[n] + bx[n]$$

$$y[n] = cs[n] + dx[n]$$

gdje su, za naš primjer, $a = 1+K$, $b = c = d = 1$

- gornje jednadžbe podsjećaju na [A,B,C,D] prikaz MIMO sustava i dobivanju općeg rješenja možemo pristupiti na isti način

59

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava - primjer

- odziv sustava možemo riješiti korak po korak
- neka je $s[0] = \text{početnoStanje}$

$$s[1] = as[0] + bx[0]$$

$$s[2] = as[1] + bx[1]$$

$$= a\{as[0] + bx[0]\} + bx[1]$$

$$= a^2s[0] + abx[0] + bx[1]$$

60

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava

$$s[3] = as[2] + bx[2]$$

$$= a\{a^2s[0] + abx[0] + bx[1]\} + bx[2]$$

$$= a^3s[0] + a^2bx[0] + abx[1] + bx[2]$$

- možemo napisati odziv stanja za n – ti korak

$$\forall n > 0$$

$$s[n] = a^n s[0] + \sum_{m=0}^{n-1} a^{n-1-m} bx[m]$$

61

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava - primjer

- želimo naći odziv stanja (i ukupni odziv) u $n=30$

$$s[n] = a^n s[0] + \sum_{m=0}^{n-1} a^{n-1-m} bx[m]$$

gdje su, za naš primjer, $a = 1+K$, $b = c = 1$ i $d = 1$

62

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava - primjer

$$s[n] = a^n s[0] + \sum_{m=0}^{n-1} a^{n-1-m} bx[m] =$$

$$= a^{30} s[0] + \begin{bmatrix} a^{29} \\ a^{28} \\ \vdots \\ a^1 \\ a^0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[28] \\ x[29] \end{bmatrix}$$

$$= 1.0000822^{30} \cdot 200 + \begin{bmatrix} 1.0000822^{29} \\ 1.0000822^{28} \\ \vdots \\ 1.0000822^1 \\ 1.0000822^0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3800 \\ -120 \\ \vdots \\ -120 \\ -120 \end{bmatrix} = 525.554912$$

63

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava - primjer

- odziv u koraku n možemo naći i ovako

$$s[n] = a^n s[0] + \sum_{m=0}^{n-1} a^{n-1-m} b x[m]$$

- $x(n)$ u našem primjeru možemo prikazati i kao

$$0 \leq n \leq 30 \quad x[n] = 3800\delta[n] - 120\mu(n-1)$$

$$x[n] = 3800\delta[n] + 120\delta[n] - 120\delta[n] - 120\mu(n-1)$$

$$x[n] = 3920\delta[n] - 120\mu(n)$$

64

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava - primjer

- pa je odziv stanja

$$\begin{aligned} s[n] &= a^n s[0] + \sum_{m=0}^{n-1} a^{n-1-m} b x[m] \\ &= a^n s[0] + \sum_{m=0}^{n-1} a^{n-1-m} \{3920\delta[m] - 120\mu(m)\} \\ &= a^n s[0] + 3920 \sum_{m=0}^{n-1} a^{n-1-m} \delta[m] - 120 \sum_{m=0}^{n-1} a^{n-1-m} \mu[m] \\ &= a^n s[0] + 3920 a^{n-1} - 120 a^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} a^{-m} \\ &= a^n s[0] + 3920 a^{n-1} - 120 \frac{1-a^n}{1-a} \end{aligned}$$

odziv stanja na impuls

65

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava - primjer

- pa je odziv stanja u koraku $n=30$

$$s[n] = a^n s[0] + 3920 a^{n-1} - 120 \frac{1-a^n}{1-a}$$

$$s[30] = 1.0000822^{30} \cdot 200 + 3920 \cdot 1.0000822^{29} - 120 \frac{1-1.0000822^{30}}{1-1.0000822}$$

$$s[30] = 525.554912$$

66

Jednadžba diferencija linearnog vremenski diskretnoga sustava - primjer

- za zadani primjer diskretnog sustava prvog reda zadanog s modelom s varijablama stanja izvršimo transformaciju u model ulaz izlaz

- iz $s[n+1] = as[n] + bx[n]$

$$y[n] = cs[n] + dx[n]$$

- slijedi $y[n] = c\{as[n-1] + bx[n-1]\} + dx[n]$

$$y[n-1] = cs[n-1] + dx[n-1]$$

$$y[n] - ay[n-1] = dx[n] + (cb - ad)x[n-1]$$

67

Primjer iz ekonomije

Australian National University
Department of Economics
Faculty of Economics and Commerce

Mathematical Techniques for
Advanced Economic
Analysis.

68

Primjer iz ekonomije

February 2002

(For handing in by 4pm, Thursday 19 February and discussion in the tutorial to follow that day. To plan your work, recall that the final examination will be on the morning of Friday 22 February)

7. Difference and differential equations and dynamic optimisation

- A closed economy has GDP, $Y_t = C_t + I_t + G_t$, where the consumption function is $C_t = 0.6 Y_t$, government spending, G_t , is exogenous and constant, and investment, I_t , depends on both a long-term trend growth rate, g , and the most recent change in GDP, $I_t = (1 + g)t + 0.2 (Y_t - 1 - Y_t - 2)$. Consider, first, the case in which the long term growth rate of investment is $g = 0$.
 - Formulate this problem as a difference equation in Y_t and classify the equation.
 - Calculate the steady state GDP level.
 - Solve the homogeneous form to determine whether the economy would be locally stable around the steady state and whether its path would be oscillatory or convergent.
 - Derive a particular solution for the case where $g=0.05$ and assemble the general solution in this case; then describe its behaviour through time.

69

Primjer diskretnog sustava drugog reda

- primjer: model nacionalnog bruto dohotka (Paul A. Samuelson)

$y[n]$ – bruto dohodak na kraju n -te godine,
 $p[n]$ – potrošnja – kupovina dobara,
 $i[n]$ – investicije – kupovina proizvodnih sredstava,
 $d[n]$ – troškovi državne uprave,
 $y[n] = p[n] + i[n] + d[n]$.

- ustanovljen je slijedeći odnos između navedenih veličina:

$$p[n] = \alpha \cdot y[n-1],$$

$$i[n] = \beta \cdot \alpha \cdot (y[n-1] - y[n-2]),$$

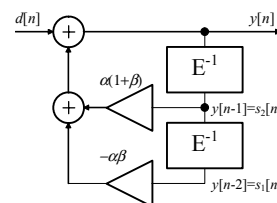
$$d[n] = d.$$

70

Primjer diskretnog sustava drugog reda

- uvršteno u sumu daje:

$$y[n] = \alpha(1 + \beta) y[n-1] - \alpha\beta y[n-2] + d[n]$$



71

Primjer diskretnog sustava drugog reda

- prijelaz iz modela ulaz izlaz

$$y[n] - \alpha(1 + \beta) y[n-1] + \alpha\beta y[n-2] = d[n]$$

u model s varijablama stanja

$$s_1[n] = y[n-2] \Rightarrow s_1[n+1] = y[n-1] = s_2[n]$$

$$s_2[n] = y[n-1] \Rightarrow$$

$$s_2[n+1] = y[n] = -\alpha\beta s_1[n] + \alpha(1 + \beta) s_2[n] + d[n]$$

72

Primjer diskretnog sustava drugog reda

$$\begin{bmatrix} s_1[n+1] \\ s_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha\beta & \alpha(1+\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1[n] \\ s_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d[n]$$

$$y[n] = [-\alpha\beta \quad \alpha(1+\beta)] \begin{bmatrix} s_1[n] \\ s_2[n] \end{bmatrix} + [1]d[n]$$

- radi se o sustavu su jednim ulazom i jednim izlazom (SISO) i vrijedi

$$\text{Stanja} = \text{Realni}^2, \text{Ulazi} = \text{Realni}, \text{Izlazi} = \text{Realni}$$

$$\forall n \in \text{Cjelobrojni}, \quad s[n+1] = As[n] + Bx[n]$$

$$y[n] = Cs[n] + Dx[n]$$

73

Impulsni odziv linearnih vremenski diskretnih sustava

- razmotrimo ponovo izraz za odziv mirnog, $s[n] = 0$, SISO sustava

$$\text{Stanja} = \text{Realni}^N, \text{Ulazi} = \text{Realni}, \text{Izlazi} = \text{Realni}$$

$$\forall n \in \text{Cjelobrojni}, \quad s[n+1] = As[n] + Bx[n]$$

$$y[n] = Cs[n] + Dx[n]$$

$$y[n] = \begin{cases} Dx[0], & n = 0 \\ \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m} Bx[m] \right\} + Dx[n], & n > 0 \end{cases}$$

74

Impulsni odziv linearnih vremenski diskretnih sustava

- pobudimo ovaj sustav s jediničnim impulsom $x[n] = \delta[n]$ odziv je tada

$$y[n] = h[n] = \begin{cases} D\delta[0], & n = 0 \\ \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m} B\delta[m] \right\} + D\delta[n], & n > 0 \end{cases}$$

- odziv sustava u tom slučaju nazivamo impulsni odziv i označavamo ga s $h[n]$

$$h[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ D, & n = 0 \\ CA^{n-1}B, & n \geq 1 \end{cases}$$

75

Konvolucijska sumacija

- za ovako određeni impulsni odziv $h[n]$ moguće je izraz za odziv mirnog sustava transformirati u oblik

$$y[n] = \sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m} Bx[m] + Dx[n]$$

$$y[n] = \sum_{m=0}^{n-1} h[n-m]x[m] + Dx[n]$$

$$y[n] = \sum_{m=0}^n h[n-m]x[m]$$

76

Konvolucijska sumacija

- ovime smo dobili još jedan način potpunog opisa diskretnog sustava
- dakle, poznavanjem impulsnog odziva sustava $h[n]$ moguće odrediti odziv sustava na bilo koju pobudu $x[n]$ (uz uvjet da je početno stanje bilo jednako nuli – miran sustav)

$$y[n] = \sum_{m=0}^n h[n-m]x[m]$$

77

Konvolucijska sumacija

- neka je

$$x[n] = 0, \text{ za } \forall n < 0 \text{ i } h[n] = 0, \text{ za } \forall n < 0$$

- tada možemo pisati konvolucijsku sumaciju

$$\forall n \in \text{Cjelobrojni}, \quad y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m]x[m]$$

- drugi – ekvivalentni - oblik konvolucijske sumacije možemo dobiti odgovarajućom transformacijom

78

Konvolucijska sumacija

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m]x[m]$$

$$k = n - m \Rightarrow$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

- dakle vrijedi

$$y = h * x = x * h$$

79