Podsjetimo se…

- zadnji puta razmatrali:
  - konvolucijsku sumaciju – nastavak
  - odziv MIMO linearnih vremenski kontinuiranih sustava
  - impulsni odziv linearnih vremenski kontinuiranih sustava
  - model ulaz-izlaz za vremenski diskretne sustave
  - impulsni odziv SISO diskretnih sustava

a danas ……

- danas ćemo razmotriti:
  - model ulaz-izlaz za vremenski kontinuirane sustave

Opis linearnih sustava i njihov odziv gdje smo do sada?

$$Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K$$

$$\forall n \in Cjelobrojni, \quad s[n+1] = As[n] + Bx[n]$$
$$y[n] = Cs[n] + Dx[n]$$

$$s[n] = A^n s[0] + \sum_{m=0}^{n-1} A^{n-1-m} Bx[m], \quad n > 0$$

$$y[n] = \begin{cases} Cs[0] + Dx[0], & n = 0 \\ CA^n s[0] + \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m} Bx[m] \right\} + Dx[n], & n > 0 \end{cases}$$

$$y[n] = \sum_{m=0}^{n} h[n-m] x[m], \quad n \geq 0$$

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + ... + a_N y[n-N] =$$
$$= b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + ... + b_M x[n-M]$$

$$Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K$$

$$\forall t \in Realni, \quad \dot{w}(t) = Aw(t) + Bx(t)$$
$$y(t) = Cw(t) + Dx(t)$$

$$w(t) = e^{At} w(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bx(\tau) d\tau$$

$$y(t) = Ce^{At} w(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} Bx(\tau) d\tau + Dx(t)$$

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau) x(\tau) d\tau,$$

Kontinuirani vremenski stalni linearni sustavi

Model sustava s ulazno izlaznim varijablama

Kontinuirani sustavi – model s ulazno izlaznim varijablama

- kontinuirani sustav je općenito opisan s više simultanih diferencijalnih jednadžbi.
- često se više simultanih diferencijalnih jednadžbi svodi na jednu jednadžbu višeg reda koja veže jednu izlaznu i jednu ulaznu varijablu.

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = f(t) =$$
$$= b_m x^{(m)}(t) + b_{m-1} x^{(m-1)}(t) \ldots + b_0 x(t)$$

Kontinuirani sustavi – model s ulazno izlaznim varijablama

- koeficijenti $\{a_i\}$ i $\{b_i\}$
  - konstantni → vremenski stalan linearni sustav
  - funkcija vremena → vremenski promjenjivi linearni sustav
  - zavise od ulaznih ili izlaznih varijabli i njihovih derivacija → nelinearni sustav

Kontinuirani sustavi – model s ulazno izlaznim varijablama

- rješenje diferencijalne jednadžbe

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = f(t) =$$
$$= b_m x^{(m)}(t) + b_{m-1} x^{(m-1)}(t) \ldots + b_0 x(t)$$

ima dvije komponente:

- $y_h(t)$ - rješenje homogene jednadžbe
- $y_p(t)$ - partikularno rješenje

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Klasične metode rješavanja

- jednadžba postaje homogena za $f(t) = 0$:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + \quad a_0 y = 0$$

- jednadžba je n - tog reda → ima n linearno nezavisnih rješenja, pa se opće rješenje može prikazati kao linearna kombinacija pojedinačnih rješenja.

$$y_h(t) = K_1 y_1(t) + K_2 y_2(t) + \ldots + K_n y_n(t)$$

Klasične metode rješavanja

- pretpostavlja se rješenje oblika: $y(t) = e^{pt}$, $p \in$ C.
- supstitucijom se dobije izraz:

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0) e^{pt} = 0.$$

- karakteristična jednadžba gornje diferencijalne jednadžbe

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0$$

Klasične metode rješavanja

- opće rješenje uz n različitih karakterističnih korijena

$$y_h(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \ldots + K_n e^{p_n t} = \sum_{i=1}^{n} K_i e^{p_i t}$$

- opće rješenje uz k jednakih od ukupno n korijena

$$y_h(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 t e^{p_1 t} + \ldots + K_k t^{k-1} e^{p_1 t} + K_{k+1} e^{p_{k+1} t} + \ldots + K_n e^{p_n t}$$

Vremenski stalni sustavi

- opće rješenje uz korijene višestrukosti $m_1, m_2, \ldots, m_n$

$$y_h(t) = \sum_{i=1}^{n'} e^{p_i t} \sum_{j=1}^{m_i} K_{ij} t^{j-1}$$

gdje je

$$\sum_{i=1}^{n'} m_i = n$$

Vremenski stalni sustavi

- rješenje homogene jednadžbe – komplementarno rješenje ili slobodni odziv sustava,
  - postoji i kada nema pobude za $K_i \neq 0$,
  - naziva se i vlastito gibanje ili titranje sustava jer opisuje titranje energije u sustavu bez vanjskog poticaja.
  - komponente slobodnog odziva titraju isključivo karakterističnim frekvencijama sustava p_i, koje zavise od strukture i parametara sustava, a ne od pobude.
  - komplementarno rješenje prisutno je u općem rješenju nehomogene jednadžbe.

Amplitude vlastitog titranja sustava

- opće rješenje diferencijalne jednadžbe za slučaj nejednakih korijena je:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} K_i e^{p_i t} + y_p(t)$$

- konstante K_i određuju se iz početnih uvjeta danih preko vrijednosti funkcije i njenih derivacija u $t = 0$.
- uzastopnom derivacijom izraza za $y(t)$ u t=0 dobiva se sustav linearnih algebarskih jednadžbi.

Amplitude vlastitog titranja sustava

$$y(0) - y_p(0) = K_1 + K_2 + \ldots + K_n$$

$$\dot{y}(0) - \dot{y}_p(0) = p_1 K_1 + p_2 K_2 + \ldots p_n K_n$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)}(0) - y_p^{(n-1)}(0) = p_1^{n-1} K_1 + p_2^{n-1} K_2 + \ldots + p_n^{n-1} K_n$$

- Van der Mondova determinanta sustava sastavljena od potencija korijena p_i , p_i^{n-1}.

Amplitude vlastitog titranja sustava

- uz konstantnu ili periodičku pobudu partikularno rješenje se naziva *stacionarno stanje*.
- komplementarno rješenje iščezava s vremenom pa se naziva *prijelazno* ili *prolazno stanje*.

Amplitude vlastitog titranja sustava

- Prijelazno stanje sastoji se od titranja vlastitim frekvencijama p_i sustava.
- Amplitude titranja u prijelaznom stanju određene su razlikom početnog stanja $\{y^{(i)}(0)\}$ i iznosa partikularnog rješenja $\{y_p^{(i)}(0)\}$ u trenutku $t = 0$.

Amplitude vlastitog titranja sustava

- Prvi specijalni slučaj: početni uvjeti jednaki partikularnom rješenju u $t = 0$

$$y^{(i)}(0) - y_{\mathrm{p}}^{(i)}(0) = 0, \quad i = 0,1,2,\ldots,n-1.$$

  - trivijalno rješenje, $K_i = 0$.
  - prijelaznog procesa nema, već stacionarno stanje kreće odmah i ima frekvenciju pobude.

Amplitude vlastitog titranja sustava

- drugi specijalni slučaj: *početni uvjeti jednaki 0*

$$y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(0) = 0.$$

- sustav je bez početne energije - *miran sustav*
- označimo s K_{pi} konstante koje slijede iz početnih uvjeta kada je sustav miran

Amplitude vlastitog titranja sustava

- Treći specijalni slučaj: $f(t) = 0$ – nepobuđen sustav

$$y_{\mathrm{p}}(t) = 0,\ \dot{y}_{\mathrm{p}}(t) = 0, \ldots, y_{\mathrm{p}}^{(n-1)}(t) = 0.$$

- označimo s K_{0i} konstante koje slijede iz početnih uvjeta $y_{\mathrm{p}}^{(i)}(0) = 0.$

Amplitude vlastitog titranja sustava

- ukupno rješenje prikazano pomoću K_{0i} i K_{pi}:

$$y(t) = \left[\sum_{i=1}^{n} K_{0i} e^{p_i t} + \sum_{i=1}^{n} K_{pi} e^{p_i t}\right] + y_p(t)$$

- dio s *vlastitim titranjem* frekvencijom p_i u zagradi te *prisilno titranje* $y_{\mathrm{p}}(t)$ frekvencijom pobude.

Amplitude vlastitog titranja sustava

- ukupno rješenje prikazano pomoću K_{0i} i K_{pi} može biti prikazano i ovako

$$y(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} K_{0i} e^{p_i t}}_{\text{odziv nepobuđenog sustava}} + \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n} K_{pi} e^{p_i t} + y_p(t)\right]}_{\text{odziv mirnog sustava}}$$

- odziv *nepobuđenog sustava* koji titra s p_i
- u zagradi je odziv *mirnog sustava* koji titra s p_i i frekvencijom pobude.

Prisilni odziv sustava

- Prisilni odziv sustava predstavlja partikularno rješenje nehomogene jednadžbe.
  - Općenito se može dobiti Lagrangeovom metodom varijacije parametara.
- Za pobudu eksponencijalnom funkcijom računanje odziva je jednostavno jer se $y_{\mathrm{p}}(t)$ može predstaviti eksponencijalom (deriviranjem se mijenja samo kompleksna amplituda eksponencijale).
- Određivanje kompleksne amplitude temelji se na metodi neodređenih koeficijenata.

Odziv sustava primjer

- naći odziv sustava opisanog diferencijalnom jednadžbom

$$\ddot{y}(t) + 0,2\dot{y}(t) + 0,16y(t) = x(t)$$

$$\text{uz } x(t) = 0,64s(t) \text{ i } y(0) = -3;\ \dot{y}(0) = -1$$

- karakteristična jednadžba i karakteristične frekvencije su

$$p^2 + 0,2p + 0,16 = 0 \Rightarrow p_{1,2} = -0,1 \pm j0,3873$$

Odziv sustava primjer

- pa je rješenje homogene jednadžbe

$$y_h(t) = K_1 e^{(-0,1+j0,3873)t} + K_2 e^{(-0,1-j0,3873)t}$$

- partikularno rješenje je oblika

$$y_p(t) = As(t) \ = 4s(t)$$

- uvrštenjem u polaznu jednadžbu i

$$\text{za } \ddot{y}_p(t) = 0, \dot{y}_p(t) = 0 \Rightarrow$$

$$0,16A = 0,64 \Rightarrow A = 4$$

Odziv sustava primjer

- totalno rješenje je

$$y(t) = K_1 e^{(-0,1+j0,3873)t} + K_2 e^{(-0,1-j0,3873)t} + 4s(t)$$

- konstante K_1 i K_2 određuju se iz početnih vrijednosti
- rješenje i njegova derivacija su

$$y(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + 4s(t)$$

$$\dot{y}(t) = p_1 K_1 e^{p_1 t} + p_2 K_2 e^{p_2 t}$$

Odziv sustava primjer

- za $t = 0$

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= K_1 + K_2 + 4 \\ \dot{y}(0) &= p_1 K_1 + p_2 K_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$K_1 = -3,5 + 2,1947j = 4,1312e^{j2,5815}$$

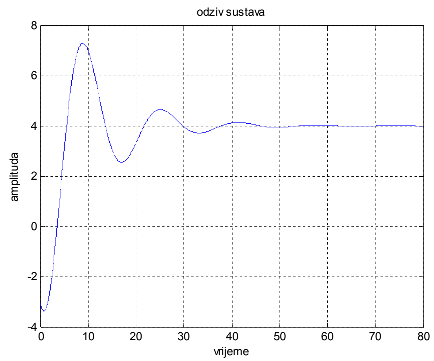
$$K_2 = -3,5 - 2,1947j = 4,1312e^{-j2,5815}$$

- konačno totalno rješenje je

$$y(t) = 4,1312e^{j2,5815}e^{-0,1t}e^{j0,3873t} + 4,1312e^{-j2,5815}e^{-0,1t}e^{-j0,3873t} + 4s(t)$$

$$y(t) = 8,2624e^{-0,1t}\cos(0,3873t + 2,5815) + 4s(t)$$

Odziv sustava primjer



Odziv nepobuđenog sustava primjer

- totalno rješenje možemo naći i kao zbroj nepobuđenog i odziv mirnog sustava
- odziv nepobuđenog sustava je

$$y_{nep}(t) = K_{01} e^{(-0,1+j0,3873)t} + K_{02} e^{(-0,1-j0,3873)t}$$

- konstante K_{01} i K_{02} određuju se iz početnih vrijednosti
- rješenje i njegova derivacija su

$$y_{nep}(t) = K_{01} e^{p_1 t} + K_{02} e^{p_2 t}$$

$$\dot{y}_{nep}(t) = p_1 K_{01} e^{p_1 t} + p_2 K_{02} e^{p_2 t}$$

Odziv sustava primjer

- za $t = 0$

$$\left.\begin{aligned} y_{nep}(0) &= K_{01} + K_{02} \\ \dot{y}_{nep}(0) &= p_1 K_{01} + p_{02} K_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$K_{01} = -1,5 + 1,6783j = 2,2509 e^{j2,3002}$$

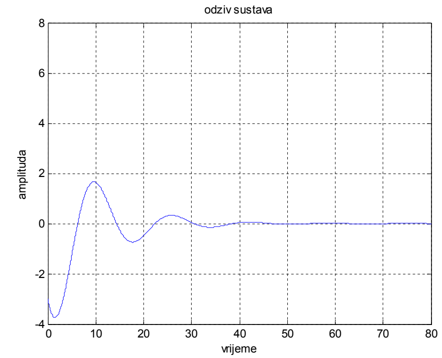
$$K_{02} = -1,5 - 1,6783j = 2,2509 e^{-j2,3002}$$

- konačno, rješenje nepobuđenog sustava je

$$y_{nep}(t) = 2,2509 e^{j2,3002} e^{-0,1t} e^{j0,3873t} + 2,2509 e^{-j2,3002} e^{-0,1t} e^{-j0,3873t}$$

$$y_{nep}(t) = 4,5018 e^{-0,1t} \cos(0,3873t + 2,3002)$$

Odziv sustava primjer



Odziv mirnog sustava primjer

- odziv mirnog sustava je

$$y_{mirn}(t) = K_{p1} e^{(-0,1+j0,3873)t} + K_{p2} e^{(-0,1-j0,3873)t} + 4s(t)$$

- konstante K_{p1} i K_{p2} određuju se iz početnih vrijednosti
- rješenje i njegova derivacija su

$$y_{mirn}(t) = K_{p1} e^{p_1 t} + K_{p2} e^{p_2 t} + 4$$

$$\dot{y}_{mirn}(t) = p_1 K_{p1} e^{p_1 t} + p_2 K_{p2} e^{p_2 t}$$

Odziv sustava primjer

- za $t = 0$

$$\left.\begin{aligned} y_{mirn}(0) &= K_{p1} + K_{p2} + 4 \\ \dot{y}_{mirn}(0) &= p_1 K_{p1} + p_2 K_{p2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$K_{p1} = -2 + 0,5164j = 2,0656 e^{j2,8889}$$

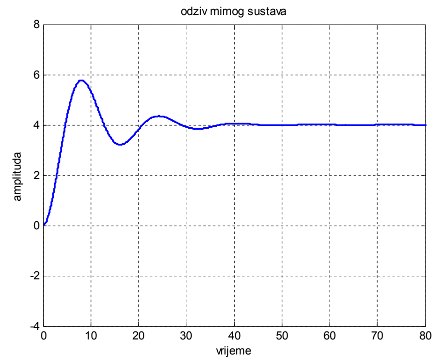
$$K_{p2} = -2 - 0,5164j = 2,0656 e^{-j2,8889}$$

- konačno, rješenje mirnog sustava je

$$y_{mirn}(t) = 2,0656 e^{j2,8889} e^{-0,1t} e^{j0,3873t} + 2,0656 e^{-j2,8889} e^{-0,1t} e^{-j0,3873t} + 4s(t)$$

$$y_{mirn}(t) = 4,1312 e^{-0,1t} \cos(0,3873t + 2,8889) + 4s(t)$$

Odziv sustava primjer



Odziv nepobuđenog sustava primjer

- totalno rješenje možemo naći i kao zbroj nepobuđenog i odziv mirnog sustava

$$y(t) = y_{nep}(t) + y_{mirn}(t)$$

$$y(t) = (-1,5 + 1,6783j) e^{(-0,1+j0,3873)t} + (-1,5 - 1,6783j) e^{(-0,1-j0,3873)t}$$

$$+ (-2,0 + 0,5164j) e^{(-0,1+j0,3873)t} + (-2,0 - 0,5164j) e^{(-0,1-j0,3873)t} + 4s(t)$$

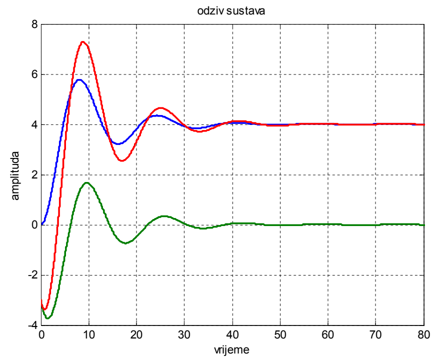
$$y(t) = (-3,5 + 2,1947j) e^{(-0,1+j0,3873)t} + (-3,5 - 2,1947j) e^{(-0,1-j0,3873)t} + 4s(t)$$

$$y(t) = 4,5018 e^{-0,1t} \cos(0,3873t + 2,3002) +$$

$$+ 4,1312 e^{-0,1t} \cos(0,3873t + 2,8889) + 4s(t)$$

$$y(t) = 8,2624 e^{-0,1t} \cos(0,3873t + 2,5815) + 4s(t)$$

Odziv sustava primjer



Signali i sustavi

Sustavi drugog reda

Vladanje i svojstva kontinuiranih sustava drugog reda

- linearni vremenski stalan sustav drugog reda s jednim ulazom i jednim izlazom opisan je s

$$\begin{bmatrix} \dot w_1 \\ \dot w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + dx$$

- jednadžba stanja se može transformirati u diferencijalnu jednadžbu drugog reda:

$$\ddot w_1 - \mathrm{T}\dot w_1 + \Delta w_1 = u(t) \quad \text{ili}$$
$$\ddot w_2 - \mathrm{T}\dot w_2 + \Delta w_2 = v(t).$$

Vladanje i svojstva kontinuiranih sustava drugog reda

- pri tom su:

$T = a_{11} + a_{22}$ trag matrice A

$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ determinanta od A

$$u(t) = -a_{22}b_1x + a_{12}b_2x + b_1\dot x$$
$$v(t) = -a_{11}b_2x + a_{21}b_1x + b_2\dot x$$

- Ako su obje konstante $a_{12} = a_{21} = 0$ (matrica ***A*** je dijagonalna) sustav je opisan s dvije razvezane jednadžbe prvog reda.

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- uobičajeno je jednadžbu drugog reda nepobuđenog sustava pisati u obliku:

$$\ddot y + 2\alpha\dot y + \omega_0^2 y = 0,$$

$2\alpha = -\mathrm{T}$, α je faktor prigušenja,

$\omega_0^2 = \Delta$, ω_0 je frekvencija neprigušenog titranja.

- analizirajmo odziv ovog sustava

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- karakteristična jednadžba je:

$$p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 = 0,$$

- njezina rješenja su karakteristične ili prirodne frekvencije sustava drugog reda.

$$p_{12} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \begin{cases} -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} & \text{za} \quad \alpha > \omega_0 > 0 \\ -\alpha & \text{za} \quad \alpha = \omega_0 > 0 \\ -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} & \text{za} \quad 0 < \alpha < \omega_0 \end{cases}$$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- rješenje je oblika: $y(t) = Y_1e^{p_1t} + Y_2e^{p_2t}$
- proizvoljne konstante određuju početni uvjeti $y(0)$ i $\dot y(0)$.
- rješenje se može napisati u obliku:

$$y(t) = \frac{y(0)p_2 - \dot y(0)}{p_2 - p_1}e^{p_1t} + \frac{\dot y(0) - y(0)p_1}{p_2 - p_1}e^{p_2t}.$$

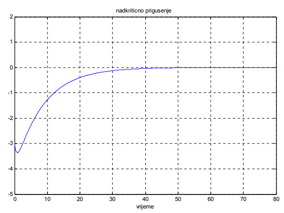
Vladanje i svojstva sustava drugog reda

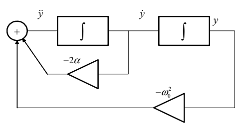
- zavisno od veličina α i ω_0 postoji tzv.
  - nadkritično prigušenje $\alpha > \omega_0$,
  - kritično prigušenje $\alpha = \omega_0$,
  - podkritično prigušenje $\alpha < \omega_0$,
  - neprigušeni slučaj $\alpha = 0$.

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- za: $\alpha = 0,75; \quad \omega_0 = 0,4$

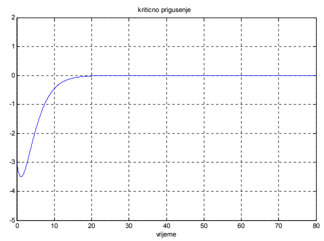
$$\alpha > \omega_0 \Rightarrow p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -0,75 \pm 0,6344$$
$$= -0,1156$$
$$= -1,3844$$





Vladanje i svojstva sustava drugog reda

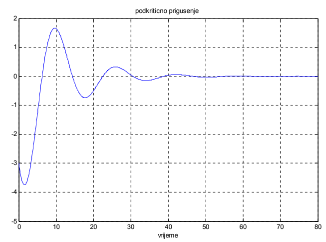
- za: $\alpha = \omega_0 = 0,4 \Rightarrow p_{1,2} = -\alpha = -0,4$



Vladanje i svojstva sustava drugog reda

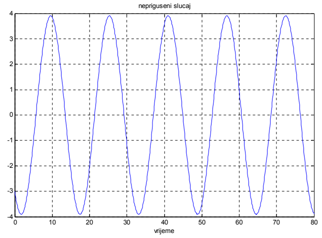
- za: $\alpha = 0,1; \quad \omega_0 = 0,4$

$$\alpha < \omega_0 \Rightarrow p_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -0,1 \pm j0.3873$$



Vladanje i svojstva sustava drugog reda

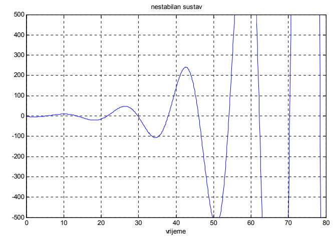
- za: $\alpha = 0;\ \omega_0 = 0,4 \Rightarrow p_{1,2} = \pm j\sqrt{\omega_0^2} = \pm 0,4$



Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- za: $\alpha = -0,1;\quad \omega_0 = 0,4$

$$\alpha < \omega_0 \Rightarrow p_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 0,1 \pm j0.3873$$



Vladanje i svojstva sustava drugog reda

SIMULINK primjer

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- rješenje homogene jednadžbe stanja može se dobiti pretpostavkom da eksponencijalne funkcije $w_1 = W_1 e^{pt}$, $w_2 = W_2 e^{pt}$ zadovoljavaju skup od dvije jednadžbe:

$$\dot{w}_1 = a_{11} w_1 + a_{12} w_2$$
$$\dot{w}_2 = a_{21} w_1 + a_{22} w_2$$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- dobije se sustav karakterističnih algebarskih jednadžbi:

$$\begin{array}{l}\dot{w}_1 = a_{11} w_1 + a_{12} w_2 \\ \dot{w}_2 = a_{21} w_1 + a_{22} w_2\end{array} \xrightarrow[w_2 = W_2 e^{pt}]{w_1 = W_1 e^{pt}} \begin{array}{l} pW_1 e^{pt} = (a_{11} W_1 + a_{12} W_2) e^{pt} \\ pW_2 e^{pt} = (a_{21} W_1 + a_{22} W_2) e^{pt}\end{array}$$

$$pW_1 = a_{11} W_1 + a_{12} W_2$$
$$pW_2 = a_{21} W_1 + a_{22} W_2$$
$$(a_{11} - p) W_1 + a_{12} W_2 = 0$$
$$a_{21} W_1 + (a_{22} - p) W_2 = 0$$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- da bi sustav karakterističnih jednadžbi dao rješenja za amplitude W_1, W_2 različite od nule, mora determinanta sustava biti jednaka nuli,

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - p) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22} - p) \end{vmatrix} = 0.$$

- to daje polinom drugog stupnja:

$$p^2 - \mathrm{T} p + \Delta = 0.$$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- odakle slijede prirodne frekvencije p_1 i p_2 za koje e^{pt} zadovoljava jednadžbu.
- rješenje se može napisati u obliku:

$$w_1(t) = W_{11} e^{p_1 t} + W_{12} e^{p_2 t},$$
$$w_2(t) = W_{21} e^{p_1 t} + W_{22} e^{p_2 t}.$$

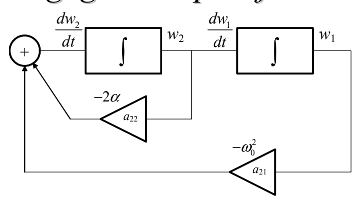
Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- nezavisne su samo dvije konstante i one se odrede iz dva početna uvjeta.
- druge dvije konstante proizlaze iz prvih uvrštenjem u jednadžbe stanja za $t = 0$.

$$W_{11} = \frac{(a_{11} - p_2) w_1(0) + a_{12} w_2(0)}{p_1 - p_2} \qquad W_{12} = \frac{(p_1 - a_{11}) w_1(0) - a_{12} w_2(0)}{p_1 - p_2}$$

$$W_{21} = \frac{a_{21} w_1(0) + (a_{22} - p_2) w_2(0)}{p_1 - p_2} \qquad W_{22} = \frac{-a_{21} w_1(0) + (p_1 - a_{22}) w_2(0)}{p_1 - p_2}$$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda - primjeri



$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

$$\begin{bmatrix}\dot{w}_1\\ \dot{w}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega_0^2 & -2\alpha\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix}T=-2\alpha\\ \Delta=\omega_0^2\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{matrix}\text{karakteristična jednadžba}\\ p^2+2\alpha p+\omega_0^2=0\end{matrix}$$

- za

$$\alpha<\omega_0\Rightarrow p_{1,2}=-\alpha\pm j\underbrace{\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}}_{\omega_d}$$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

$$p_1=-\alpha+j\omega_d$$
$$p_2=-\alpha-j\omega_d$$

- neka je $w_2(0)=0$, za zadani primjer slijedi

$$W_{11}=\frac{-p_2 w_1(0)+w_2(0)}{p_1-p_2}=\frac{(\alpha+j\omega_d)w_1(0)}{2j\omega_d}$$

$$W_{12}=\frac{(p_1-a_{11})w_1(0)-w_2(0)}{p_1-p_2}=\frac{(-\alpha+j\omega_d)w_1(0)}{2j\omega_d}$$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- pa je

$$w_1(t)=\frac{(\alpha+j\omega_d)w_1(0)}{2j\omega_d}e^{(-\alpha+j\omega_d)t}+\frac{(-\alpha+j\omega_d)w_1(0)}{2j\omega_d}e^{(-\alpha-j\omega_d)t}$$

$$w_1(t)=w_1(0)e^{-\alpha t}\left(\frac{\alpha}{2j\omega_d}e^{j\omega_d t}+\frac{1}{2}e^{j\omega_d t}-\frac{\alpha}{2j\omega_d}e^{-j\omega_d t}+\frac{1}{2}e^{-j\omega_d t}\right)$$

$$w_1(t)=e^{-\alpha t}\left(\frac{\alpha}{\omega_d}\sin(\omega_d t)+\cos(\omega_d t)\right)w_1(0)$$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- kako je $w_2(t)=\dot{w}_1(t)\Rightarrow$

$$w_2(t)=-\frac{\alpha^2}{\omega_d}e^{-\alpha t}\sin(\omega_d t)w_1(0)-\omega_d e^{-\alpha t}\sin(\omega_d t)w_1(0)$$

- za $\frac{\alpha}{\omega_d}\ll 1$

$$w_1(t)=e^{-\alpha t}\cos(\omega_d t)w_1(0)$$

$$w_2(t)=-\omega_d e^{-\alpha t}\sin(\omega_d t)w_1(0)$$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

$$w_1(t)=e^{-\alpha t}\cos(\omega_d t)w_1(0)\Rightarrow\cos(\omega_d t)=\frac{w_1(t)}{w_1(0)e^{-\alpha t}}$$

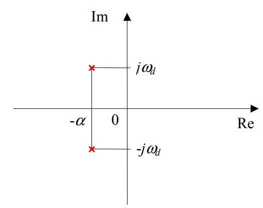
$$w_2(t)=-\omega_d e^{-\alpha t}\sin(\omega_d t)w_1(0)\Rightarrow\sin(\omega_d t)=\frac{w_2(t)}{-\omega_d e^{-\alpha t}w_1(0)}$$

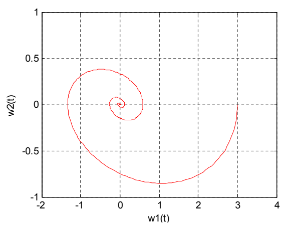
- pa je

$$\left(\frac{w_1(t)}{e^{-\alpha t}w_1(0)}\right)^2+\left(\frac{w_2(t)}{-\omega_d e^{-\alpha t}w_1(0)}\right)^2=1$$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- za $\alpha=-0{,}1;\quad \omega_d=0{,}4;\Rightarrow\omega_d=0{,}3873;$
  $w_1=3;\quad w_2=0;$





Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- za $\alpha=-0{,}1;\quad \omega_d=0{,}4;\Rightarrow\omega_d=0{,}3873;$
  $w_1=-3;\quad w_2=-1;$