

- zadnji puta razmatrali:
  - svojstva sinusnog niza
  - osnovne kontinuirane signale
  - teorem otipkavanja
  - energiju i snagu signala
  - odziv linearnih vremenski diskretnih sustava
  - fundamentalnu matricu diskretnih sustava
  - impulsni odziv diskretnih sustava
  - konvolucijsku sumaciju

1

- danas ćemo razmotriti:
  - konvolucijsku sumaciju – nastavak
  - odziv MIMO linearnih vremenski kontinuiranih sustava
  - impulsni odziv linearnih vremenski kontinuiranih sustava
  - model ulaz-izlaz za vremenski diskretne sustave
  - impulsni odziv SISO diskretnih sustava

2

## Diskretni vremenski stalni linearni sustavi

Impulsni odziv sustava s jednim ulazom i  
izlazom – konvolucijska sumacija

### Impulsni odziv linearnih vremenski diskretnih sustava

- razmotrimo ponovo izraz za odziv mirnog,  
 $s[n] = 0$ , SISO sustava

$Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni, Izlazi = Realni$

$\forall n \in Cjelobrojni, \quad s[n+1] = As[n] + Bx[n]$

$y[n] = Cs[n] + Dx[n]$

$$y[n] = \begin{cases} Dx[0], & n = 0 \\ \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m} Bx[m] \right\} + Dx[n], & n > 0 \end{cases}$$

4

### Impulsni odziv linearnih vremenski diskretnih sustava

- pobudimo ovaj sustav s jediničnim impulsom  
 $x[n] = \delta[n]$  odziv je tada

$$y[n] = h[n] = \begin{cases} D\delta[0], & n = 0 \\ \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m} B\delta[m] \right\} + D\delta[n], & n > 0 \end{cases}$$

- odziv sustava u tom slučaju nazivamo  
impulsni odziv i označavamo ga s  $h[n]$

$$h[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ D, & n = 0 \\ CA^{n-1}B, & n \geq 1 \end{cases}$$

5

### Konvolucijska sumacija

- za ovako određeni impulsni odziv  $h[n]$   
moguće je izraz za odziv mirnog sustava  
transformirati u oblik

$$y[n] = \sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m} Bx[m] + Dx[n]$$

$$y[n] = \sum_{m=0}^{n-1} h[n-m]x[m] + Dx[n]$$

$$y[n] = \sum_{m=0}^n h[n-m]x[m], \quad n \geq 0$$

6

### Konvolucijska sumacija

- ovime smo dobili još jedan način potpunog  
opisa diskretnog sustava
- dakle, poznavanjem impulsnog odziva sustava  
 $h[n]$  moguće odrediti odziv sustava na bilo  
koju pobudu  $x[n]$  (uz uvjet da je početno  
stanje bilo jednako nuli – miran sustav)

$$y[n] = \sum_{m=0}^n h[n-m]x[m], \quad n \geq 0$$

7

### Konvolucijska sumacija

- neka je

$$x[n] = 0, \text{ za } \forall n < 0 \text{ i } h[n] = 0, \text{ za } \forall n < 0$$

- tada možemo pisati konvolucijsku sumaciju

$$\forall n \in Cjelobrojni, \quad y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m]x[m]$$

- drugi – ekvivalentni - oblik konvolucijske  
sumacije možemo dobiti odgovarajućom  
transformacijom

8

### Konvolucijska sumacija

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m]x[m]$$

$$k = n - m \Rightarrow$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

- dakle vrijedi

$$y = h * x = x * h$$

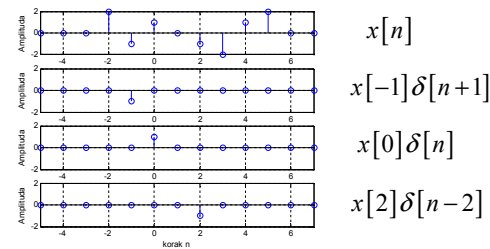
9

## Konvolucijska sumacija

- do konvolucijske sumacije moguće je doći i na drugi način
- vremenski diskretan signal moguće je prikazati kao zbroj jediničnih impulsa

10

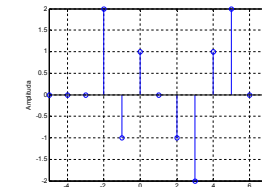
## Prikaz niza uz pomoć $\delta[n]$



11

## Prikaz niza uz pomoć $\delta[n]$

- svaki niz može biti prikazan uz pomoć sume jediničnih impulsa



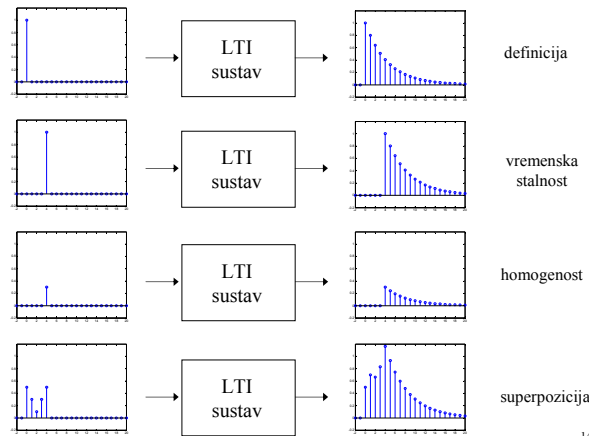
$$x[n] = 2\delta[n+2] - \delta[n+1] + \delta[n] - \delta[n-2] - 2\delta[n-3] + \delta[n-4] + 2\delta[n-5]$$

12

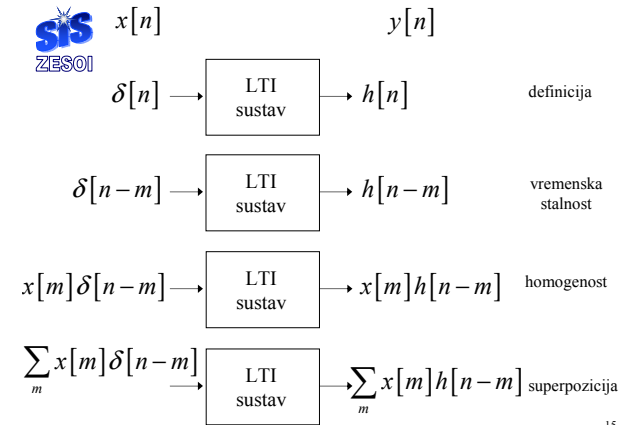
## Odziv sustava na niz impulsa

- razmotrimo odziv linearnog, vremenski, stalnog (LTI) diskretnog sustava na niz impulsa

13



14



15

## Konvolucijska sumacija

- pretpostavimo proizvoljni signal oblika

$$x = \dots + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + \dots$$

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[n-m]$$

- odziv sustava na impuls  $\delta[n]$  je  $h[n]$  pa za LTI sustav vrijedi

$$x[m]\delta[n-m] \rightarrow x[m]h[n-m]$$

16

## Konvolucijska sumacija

- odziv na niz  $x$  je

$$y = \dots + x[-1]h[n+1] + x[0]h[n] + x[1]h[n-1] + x[2]h[n-2] + \dots$$

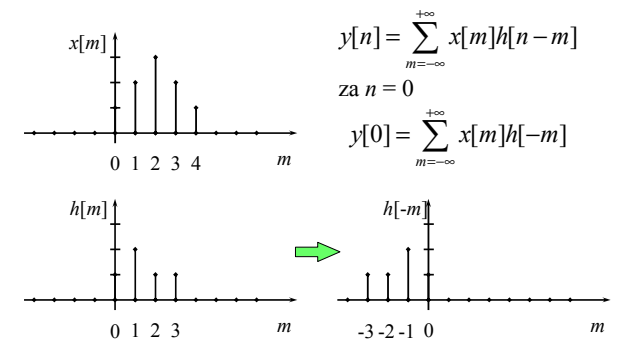
- pa je odziv dan s konvolucijskom sumacijom

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$$

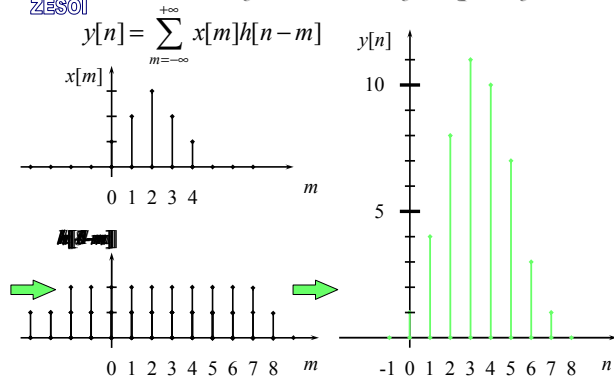
- konvolucijska sumacija omogućuje određivanje odziva na proizvoljnu pobudu kada je poznat odziv na  $\delta$  niz

17

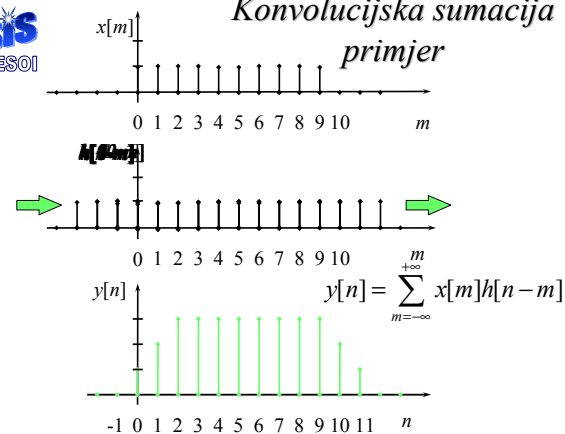
## Konvolucijska sumacija - primjer



## Konvolucijska sumacija - primjer



## Konvolucijska sumacija primjer



## Konvolucijska sumacija -svojstva

- već smo pokazali da vrijedi komutativnost tj.

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m]$$

$$y = x * h = h * x$$

- svojstvo asocijativnosti

$$y[n] = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n])$$

$$x[n] \xrightarrow{h_1[n]} \xrightarrow{h_2[n]} y[n] = x[n] \xrightarrow{h_1[n]*h_2[n]} y[n]$$

21

## Konvolucijska sumacija-svojstva

- pokažimo to

$$y[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h_1[l-m] \right) h_2[n-l] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \left( \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_1[l-m]h_2[n-l] \right)$$

- za  $k = l - m$  slijedi

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[k]h_2[n-m-k] \right)$$

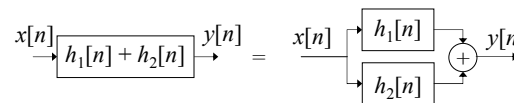
$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] \text{ uz } h[n] = h_1[n] * h_2[n]$$

22

## Konvolucijska sumacija -svojstva

- distributivnost tj.

$$y[n] = x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$



$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m](h_1[n-m] + h_2[n-m])$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h_1[n-m] + \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h_2[n-m]$$

23

## Impulsni odziv linearnih vremenski diskretnih sustava

- razmotrimo ponovo izraz za odziv mirnog,  $s[n] = 0$ , MIMO sustava

$$y[n] = \begin{cases} Dx[0], & n = 0 \\ \sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m}Bx[m] + Dx[n], & n > 0 \end{cases}$$

- definira se niz  $h[0], h[1], h[2], \dots$  matrica dimenzija  $K \times M$  s

$$h[n] = \begin{cases} D, & n = 0 \\ CA^{n-1}B, & n > 0 \end{cases}$$

24

## Impulsni odziv linearnih vremenski diskretnih sustava

- pa slijedi da je

$$y[n] = \sum_{m=0}^n h[n-m]x[m], \quad n \geq 0$$

- dakle opet smo dobili konvolucijsku sumaciju
- $h[0], h[1], h[2], \dots$  su matrice dimenzije  $K \times M$  i njihov  $(i, j)$ -ti element je zaista impulsni odziv SISO sustava čiji je ulaz  $x_j$  i čiji je izlaz  $y_i$
- matricu  $h[n]$  nazivamo *matrica impulsnih odziva*

25

## Kontinuirani vremenski stalni linearni sustavi

Odziv sustava s više ulaza i izlaza

## Linearni vremenski kontinuirani sustavi - [A,B,C,D] prikaz

- model s varijablama stanja kontinuiranog vremenski stalnog linearnog sustava je kako je pokazano

$$\text{Stanja} = \text{Realni}^N, \text{Ulazi} = \text{Realni}^M, \text{Izlazi} = \text{Realni}^K$$

$$\forall t \in \text{Realni}, \quad \dot{w}(t) = Aw(t) + Bx(t)$$

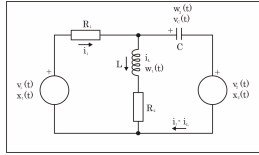
$$y(t) = Cw(t) + Dx(t)$$

- neka je

$$w(t_0) = \text{pocetnoStanje}$$

27

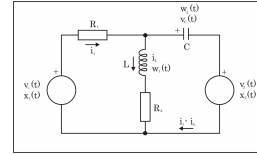
## Linearni vremenski kontinuirani sustavi - $[A,B,C,D]$ prikaz primjer



- za mrežu na slici napisati jednadžbe stanja
- ulazni signali su naponi izvora  $v_1(t)$  i  $v_2(t)$ , izlazni signali su struja  $i_L(t)$  kroz zavojnicu i struja  $i_1(t)$  kroz otpor  $R_1$  a stanja neka su struja kroz zavojnicu  $i_L(t)$  i napon na kapacitetu  $v_C(t)$

28

## Linearni vremenski kontinuirani sustavi - $[A,B,C,D]$ prikaz primjer



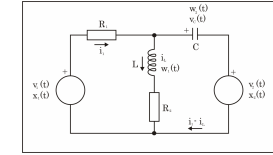
za desnu petlju vrijedi

$$R_2 i_L(t) + L \frac{di_L(t)}{dt} = v_2(t) + v_C(t)$$

slijedi 
$$\frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{R_2}{L} i_L(t) + \frac{1}{L} v_C(t) + \frac{1}{L} v_2(t)$$

29

## Linearni vremenski kontinuirani sustavi - $[A,B,C,D]$ prikaz primjer



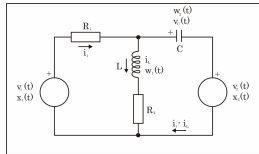
za definirana stanja i ulaze

$$w_1(t) = i_L(t), \quad w_2(t) = v_C(t), \quad x_1(t) = v_1(t), \quad x_2(t) = v_2(t),$$

slijedi 
$$\dot{w}_1(t) = -\frac{R_2}{L} w_1(t) + \frac{1}{L} w_2(t) + \frac{1}{L} x_2(t)$$

30

## Linearni vremenski kontinuirani sustavi - $[A,B,C,D]$ prikaz primjer



za vanjsku petlju vrijedi

$$v_1(t) - R_1 i_1(t) - v_C(t) - v_2(t) = 0$$

no isto tako

$$C \frac{dv_C(t)}{dt} = i_1(t) - i_L(t)$$

kombiniramo  
pa slijedi

31

## Linearni vremenski kontinuirani sustavi - $[A,B,C,D]$ prikaz primjer

$$v_1(t) - R_1 \left[ C \frac{dv_C(t)}{dt} + i_L(t) \right] - v_C(t) - v_2(t) = 0$$

odnosno

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{1}{C} i_L(t) - \frac{1}{R_1 C} v_C(t) + \frac{1}{R_1 C} v_1(t) - \frac{1}{R_1 C} v_2(t)$$

za izabrane varijable stanja, ulaze i izlaze

$$\dot{w}_2(t) = -\frac{1}{C} w_1(t) - \frac{1}{R_1 C} w_2(t) + \frac{1}{R_1 C} x_1(t) - \frac{1}{R_1 C} x_2(t)$$

32

## Linearni vremenski kontinuirani sustavi - $[A,B,C,D]$ prikaz primjer

matrična jednadžba stanja je

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1(t) \\ \dot{w}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{R_1 C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ \frac{1}{R_1 C} & -\frac{1}{R_1 C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

a izlazna jednadžba slijedi iz

$$i_L(t) = y_1(t) = w_1(t)$$

$$i_1(t) = y_2(t) = -\frac{1}{R_1} w_2(t) + \frac{1}{R_1} x_1(t) - \frac{1}{R_1} x_2(t)$$

33

## Linearni vremenski kontinuirani sustavi - $[A,B,C,D]$ prikaz primjer

pa je izlazna jednadžba

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

34

## Linearni vremenski kontinuirani sustavi - $[A,B,C,D]$ prikaz

- model s varijablama stanja kontinuiranog vremenski stalnog linearnog sustava je kako je pokazano

$$\text{Stanja} = \text{Realni}^N, \text{Ulazi} = \text{Realni}^M, \text{Izlazi} = \text{Realni}^K$$

$$\forall t \in \text{Realni}, \quad \dot{w}(t) = Aw(t) + Bx(t)$$

$$y(t) = Cw(t) + Dx(t)$$

- neka je

$$w(t_0) = \text{pocetnoStanje}$$

35

## Odziv linearnih vremenski kontinuiranih sustava

- odziv sustava određujemo rješavanjem jednadžbi sustava
- rješavamo prvo diferencijalnu jednadžbu

$$\dot{w}(t) = Aw(t) + Bx(t)$$

- pomnožimo obje strane jednadžbe s matricom  $e^{-At}$  s lijeva

$$e^{-At} \dot{w}(t) = e^{-At} Aw(t) + e^{-At} Bx(t)$$

36

- slijedi prebacivanjem

$$\underbrace{e^{-At}\dot{w}(t) - e^{-At}Aw(t)}_{\frac{d}{dt}(e^{-At}w(t))} = e^{-At}Bx(t)$$

- pa pišemo

$$\frac{d}{dt}(e^{-At}w(t)) = e^{-At}Bx(t)$$

37

- množenjem obje strane s  $dt$  i integriranjem u intervalu  $t_0$  do  $t$  slijedi (i uz odgovarajuću zamjenu varijabli)

$$\int_{t_0}^t \frac{d}{d\tau}(e^{-A\tau}w(\tau))d\tau = \int_{t_0}^t e^{-A\tau}Bx(\tau)d\tau$$

- slijedi

$$e^{-At}w(t) - e^{-At_0}w(t_0) = \int_{t_0}^t e^{-A\tau}Bx(\tau)d\tau$$

38

- množenjem obje strane s matricom  $e^{At}$  s lijeva

$$w(t) - e^{At}e^{-At_0}w(t_0) = e^{At} \int_{t_0}^t e^{-A\tau}Bx(\tau)d\tau$$

- i konačno

$$w(t) = e^{A(t-t_0)}w(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bx(\tau)d\tau$$

39

- ukupni odziv sustava je

$$y(t) = Cw(t) + Dx(t)$$

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}w(t_0) + \int_{t_0}^t Ce^{A(t-\tau)}Bx(\tau)d\tau + Dx(t)$$

- ili

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}w(t_0) + \int_{t_0}^t [Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau)]x(\tau)d\tau$$

40

- za  $t_0 = 0$

$$w(t) = e^{At}w(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bx(\tau)d\tau$$

$$y(t) = Ce^{At}w(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bx(\tau)d\tau + Dx(t)$$

41

- za nepobuđeni sustav,  $x(t) = 0$ , odziv stanja je

$$w(t) = e^{At}w(0)$$

- i ovdje, kao i kod diskretnih sustava, definiramo fundamentalnu ili prijelaznu matricu  $\Phi(t)$

$$w(t) = e^{At}w(0) = \Phi(t)w(0)$$

$$\Downarrow$$

$$\Phi(t) = e^{At}$$

42

$$\text{Stanja} = \text{Realni}^N, \text{Ulazi} = \text{Realni}^M, \text{Izlazi} = \text{Realni}^K$$

$$\forall t \in \text{Realni}, \quad \dot{w}(t) = Aw(t) + Bx(t)$$

$$y(t) = Cw(t) + Dx(t)$$

$$w(t) = e^{At}w(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bx(\tau)d\tau$$

$$y(t) = Ce^{At}w(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bx(\tau)d\tau + Dx(t)$$

43

- za mirni,  $w(t_0) = 0$ , kontinuirani SISO sustav zadan s

$$\text{Stanja} = \text{Realni}^N, \text{Ulazi} = \text{Realni}, \text{Izlazi} = \text{Realni}$$

$$\dot{w}(t) = Aw(t) + Bx(t)$$

$$y(t) = Cw(t) + Dx(t)$$

- odziv je

$$y(t) = \int_{t_0}^t [Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau)]x(\tau)d\tau$$

45

- za ulazni signal ili pobudu  
 $x(t) = \delta(t)$
- odziv je impulsni odziv i označava se  $h(t)$

$$y(t) = \int_0^t [C e^{A(t-\tau)} B + D \delta(t-\tau)] \delta(\tau) d\tau$$

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ C e^{At} B + D \delta(t) & t \geq 0 \end{cases}$$

46

- ukupni odziv sustava možemo pisati  
 $y(t) = \int_0^t h(t-\tau) x(\tau) d\tau$
- ovo je tzv. konvolucijski integral
- u slučaju MIMO kontinuiranih sustava  $h(t)$  je matrica dimenzije  $K \times M$  a njezin  $(i, j)$ -ti element je impulsni odziv SISO sustava čiji je ulaz  $x_j$  i čiji je izlaz  $y_i$
- matricu  $h(t)$  nazivamo *matrica impulsnih odziva*

47

## Diskretni vremenski stalni linearni sustavi

Model s ulazno izlaznim varijablama

## Diskretni sustavi – model s ulazno izlaznim varijablama

- opis linearnog sustava jednačbom diferencija

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + \dots + a_N y[n-N] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \dots + b_M x[n-M]$$

- odnosno, sažeto pisano

$$\sum_{j=0}^N a_j y[n-j] = \sum_{j=0}^M b_j x[n-j]$$

49

## Diskretni sustavi – model s ulazno izlaznim varijablama

- $x$  - jedan ulaz,  $y$  - jedan izlaz
- Vremenski stalan sustav  
→ koeficijenti  $\{a_i\}$  i  $\{b_i\}$  konstante
- Sustav promjenjiv po koraku  
→ koeficijenti  $\{a_i\}$  i  $\{b_i\}$  funkcije koraka  $n$
- Izravni način određivanja odziva je izračunavanje  $y[n]$  rješavanjem jednačbe oblika  
 $y[n] = F\{y[n-1], y[n-2], \dots, y[n-M], x[n], x[n-1], \dots, x[n-M]\}$

50

## Diskretni sustavi – model s ulazno izlaznim varijablama

- Dakle  $y[n] = -\sum_{j=1}^N a_j y[n-j] + \sum_{j=0}^M b_j x[n-j]$

gdje je pretpostavljeno (ili je izvršena normalizacija) da je  $a_0 = 1$

- da bi se odredio odziv sustava  $y[n]$ , za  $n \geq n_0$ , treba poznavati  $x[n]$  i početne uvjete  $y[n_0-1]$ ,  $y[n_0-2]$ , ...,  $y[n_0-N]$
- ovaj prikaz pokazuje da je moguće izravno izračunati odziv sustava postupkom korak po korak

51

## Diskretni sustavi – model s ulazno izlaznim varijablama

- rješenje linearne jednačbe dobiva se kao zbroj rješenja homogene jednačbe  $y_h[n]$

$$\sum_{j=0}^N a_j y[n-j] = 0$$

i partikularnog rješenja  $y_p[n]$  koje ovisi o funkciji pobude  $f[n]$

$$f[n] = \sum_{j=0}^M b_j x[n-j]$$

52

## Rješenje homogene jednačbe – odziv nepobuđenog sustava

- najopćenitije rješenje homogene jednačbe je *linearna kombinacija* od  $N$  posebnih linearno nezavisnih rješenja  
 $y_1[n], y_2[n], \dots, y_N[n]$   
s proizvoljnim konstantama  
 $y_h[n] = C_1 y_1[n] + C_2 y_2[n] + \dots + C_N y_N[n]$
- linearnu jednačbu diferencija zadovoljava niz  $e^{qn}$  ili bolje  $y[n] = C q^n$  gdje je  $q \in \text{Kompleksni}$

53

## Rješenje homogene jednačbe – odziv nepobuđenog sustava

- Iz  $\sum_{j=0}^N a_j y[n-j] = \sum_{j=0}^N a_j C q^{n-j} = 0$

slijedi

$$C q^{n-N} (q^N + a_1 q^{N-1} + a_2 q^{N-2} + \dots + a_{N-1} q + a_N) = 0$$

karakteristična jednačba je

$$q^N + a_1 q^{N-1} + a_2 q^{N-2} + \dots + a_{N-1} q + a_N = 0$$

koja ima  $N$  korijena  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_N$

54

## Rješenje homogene jednačbe – odziv nepobuđenog sustava

- za različite korijene dobivamo rješenje oblika

$$y_h[n] = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n + \dots + C_N q_N^n$$

- a višestruke korijene (npr.  $q_1$  višestrukosti  $m$ )

$$y_h[n] = C_1 q_1^n + C_2 n q_1^n + \dots + C_m n^{m-1} q_1^n + \\ + C_{m+1} q_{m+1}^n + \dots + C_N q_N^n$$

- Korijen  $q = 0$  se ne uzima obzir jer on samo smanjuje red jednačbe za jedan, odnosno za  $m$  u slučaju njegove višestrukosti

55

## Rješenje homogene jednačbe – odziv nepobuđenog sustava

- kompleksni korijeni u jednačbi s realnim koeficijentima dolaze u konjugiranim parovima tj.  $q_1 = r e^{j\omega}$  i  $q_2 = r e^{-j\omega}$

$$y_h[n] = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n = C_1 r^n e^{jn\theta} + C_2 r^n e^{-jn\theta}$$

vrijedi također za realni  $y_h[n]$

$$C_1 = C e^{j\phi} \rightarrow C_2 = C e^{-j\phi}$$

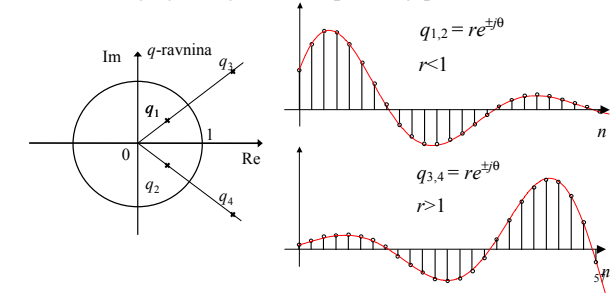
pa se rješenje može zapisati u obliku

$$y_h[n] = C r^n e^{j\phi} e^{jn\theta} + C r^n e^{-j\phi} e^{-jn\theta} = 2C r^n \cos[n\theta + \phi]$$

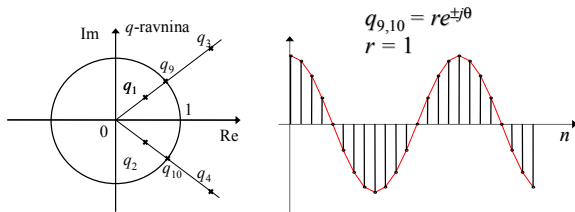
56

## Rješenje homogene jednačbe – odziv nepobuđenog sustava

Predstavljanje korijena u kompleksnoj  $q$ -ravnini

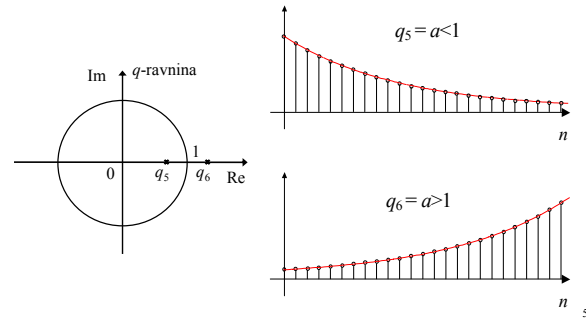


## Rješenje homogene jednačbe – odziv nepobuđenog sustava



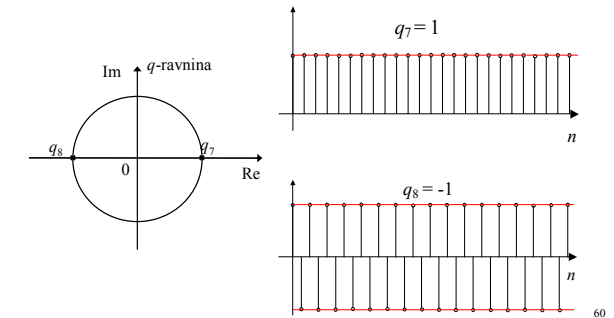
58

## Rješenje homogene jednačbe – odziv nepobuđenog sustava



59

## Rješenje homogene jednačbe – odziv nepobuđenog sustava



60

## Rješenje homogene jednačbe – primjer

$$y[n] - 0.8\sqrt{2}y[n-1] + 0.64y[n-2] = 0$$

- pretpostavimo rješenje oblika  $y[n] = Cq^n$

$$Cq^n - 0.8\sqrt{2}Cq^{n-1} + 0.64Cq^{n-2} = 0$$

$$Cq^{n-2}(q^2 - 0.8\sqrt{2}Cq + 0.64) = 0$$

- pa je karakteristična jednačba

$$q^2 - 0.8\sqrt{2}Cq + 0.64 = 0$$

61

## Rješenje homogene jednačbe – primjer

- korijeni karakteristične jednačbe su

$$q_{1,2} = 0.4\sqrt{2}(1 \pm j) = 0.8e^{j\frac{\pi}{4}}$$

- pa je homogeno rješenje

$$y_h[n] = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n = C_1 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + C_2 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n}$$

62

## Rješenje homogene jednačbe – primjer

- konstante  $C_1$  i  $C_2$  određuju se iz početnih uvjeta  $y[-2]=1$  i  $y[-1]=1$

$$\left. \begin{aligned} y_h[-1] &= C_1 0.8^{-1} e^{-j\frac{\pi}{4}} + C_2 0.8^{-1} e^{j\frac{\pi}{4}} = 1 \\ y_h[-2] &= C_1 0.8^{-2} e^{-j\frac{\pi}{4} \cdot 2} + C_2 0.8^{-2} e^{j\frac{\pi}{4} \cdot 2} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$C_1 = 0.2457 + 0.3200j = 0.4034e^{j0.9160}$$

$$C_2 = 0.2457 - 0.3200j = 0.4034e^{-j0.9160}$$

63



## Rješenje homogene jednadžbe – primjer

- homogeno rješenje je

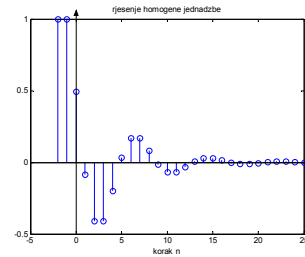
$$y_h[n] = 0.4034e^{j0.9160}0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + 0.4034e^{-j0.9160}0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n}$$

$$y_h[n] = 0.4034 \cdot 0.8^n \left( e^{j(\frac{\pi}{4}n+0.9160)} + e^{-j(\frac{\pi}{4}n+0.9160)} \right)$$

$$y_h[n] = 0.8068 \cdot 0.8^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n + 0.9160\right)$$

64

## Rješenje homogene jednadžbe – primjer



65

## Rješenje nehomogene jednadžbe diferencija

- Određivanje partikularnog rješenja
  - Lagrangeova metoda varijacije parametara
    - rješenje se dobiva u eksplisnom obliku
    - primjena rezultira složenim sumacijama
  - Metoda neodređenog koeficijenta
    - ograničena na pobude oblika polinoma i eksponencijalnih nizova
    - veliki broj pobuda može se aproksimirati gore navedenim nizovima
    - češće se upotrebljava u analizi sustava

66

## Rješenje nehomogene jednadžbe diferencija

- pobuda polinomom oblika  $f[n] = A_0 + A_1n + \dots + A_Mn^M$
- dati će partikularno rješenje u obliku polinoma  $M$ -tog stupnja  $y_p[n] = K_0 + K_1n + \dots + K_Mn^M$
- rješenje se uvijek pretpostavlja u obliku kompletnog polinoma tj. sa svim potencijama, bez obzira da li polinom pobude ima sve članove

67

## Rješenje nehomogene jednadžbe diferencija

- slično je i za slijedeće ulazne nizove:

ulazni niz $x[n]$	partikularno rješenje $y_p[n]$
$A$ (konstanta)	$K$
$AM^n$	$KM^n$
$An^M$	$K_0 + K_1n + \dots + K_Mn^M$
$A^n n^M$	$A^n(K_0 + K_1n + \dots + K_Mn^M)$
$A \cos(\omega_0 n)$	$K_1 \cos \omega_0 n + K_2 \sin \omega_0 n$
$A \sin(\omega_0 n)$	$K_1 \cos \omega_0 n + K_2 \sin \omega_0 n$

68

## Impulsni odziv diskretnog sustava

- Određivanje odziva mirnog sustava na jedinični impuls  $a_0y[n] + a_1y[n-1] + a_2y[n-2] + \dots + a_Ny[n-N] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2] + \dots + b_Mx[n-M]$

$$x[n] = \delta[n]; \quad x[n] = 0 \text{ za } n > 0 \text{ pa je } y_p[n] = 0$$

Odziv sustava na pobudu  $x[n] = \delta[n]$  nazivamo impulsni odziv

Impulsni odziv je dakle jednak komplementarnom rješenju

69

## Impulsni odziv diskretnog sustava

Rješenje je tada linearna kombinacija

$$h[n] = y_h[n] = C_1q_1^n + C_2q_2^n + \dots + C_Nq_N^n \text{ za } n \geq 0$$

$N$  je nepoznanica  $\{C_i\} \Rightarrow$  potrebno je izračunati  $N$  početnih vrijednosti  $h[0], h[1], \dots, h[N]$

Uvjeti proizlaze iz jednadžbe diferencija i svojstva  $\delta$  niza

$$\delta[n-i] = 1, \text{ za } n = i$$

$$\delta[n-i] = 0, \text{ za } n \neq i$$

70

## Impulsni odziv diskretnog sustava

Iz jednadžbe diferencija za  $x[n] = \delta[n]$  i  $n \in [0, N]$  možemo dobiti  $N+1$  jednadžbu

$$\begin{aligned} n=0 &\Rightarrow a_0h[0] + a_1h[-1] + a_2h[-2] + \dots + a_Nh[-N] = b_0 \\ n=1 &\Rightarrow a_0h[1] + a_1h[0] + a_2h[-1] + \dots + a_Nh[1-N] = b_1 \\ n=2 &\Rightarrow a_0h[2] + a_1h[1] + a_2h[0] + \dots + a_Nh[2-N] = b_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n=N-1 &\Rightarrow a_0h[N-1] + a_1h[N-2] + a_2h[N-3] + \dots + a_Nh[-1] = b_{N-1} \\ n=N &\Rightarrow a_0h[N] + a_1h[N-1] + a_2h[N-2] + \dots + a_Nh[0] = b_N \end{aligned}$$

71

## Impulsni odziv diskretnog sustava

budući je sustav miran,  $h[n]=0$ , za  $n < 0$

$$\begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_N & a_{N-1} & a_{N-2} & \dots & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ h[2] \\ \vdots \\ h[N] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{Ah} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

rješenje za  $\{h[n]\}$ ,  $n \in [0, N]$  može se dobiti inverzijom matrice  $\mathbf{A}$

72



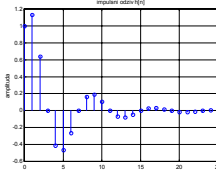
## Primjer određivanje impulsnog odziva diskretnog sustava

odrediti impulsni odziv sustava

$$y[n] - 0.8\sqrt{2}y[n-1] + 0.64y[n-2] = x[n]$$

$$\text{za } x[n] = \delta[n] \text{ \& } y[n-1] = y[n-2] = 0 \rightarrow y[n] = h[n]$$

$h[0] = 1.0000$   
 $h[1] = 1.1314$   
 $h[2] = 0.6400$   
 $h[3] = 0.0000$   
 $h[4] = -0.4096$   
 $h[5] = -0.4634$   
 $h[6] = -0.2621$   
 $h[7] = 0.0000$   
 $h[8] = 0.1678$   
 $h[9] = 0.1898$   
 $h[10] = 0.1074$   
 $h[11] = 0.0000$   
 $h[12] = -0.0687$



73

## Primjer određivanje impulsnog odziva diskretnog sustava

impulsni odziv jednak je rješenju homogene jed.

$$y[n] - 0.8\sqrt{2}y[n-1] + 0.64y[n-2] = x[n]$$

$$\text{za } x[n] = \delta[n] \text{ \& } y[n-1] = y[n-2] = 0 \rightarrow y[n] = h[n]$$

$$\text{karakteristična jednačnja je: } q^2 - 0.8\sqrt{2}q + 0.64 = 0$$

$$\text{korijeni su: } q_{1,2} = 0.8e^{\pm j\frac{\pi}{4}} = 0.4\sqrt{2}(1 \pm j)$$

impulsni odziv je:

$$h[n] = C_1 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + C_2 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} \text{ za } n \geq 0$$

74

## Primjer određivanje impulsnog odziva diskretnog sustava

s druge strane izračunavamo  $h[0]$  i  $h[1]$  kako bi odredili konstante  $C_1$  i  $C_2$

$$y[n] = 0.8\sqrt{2}y[n-1] - 0.64y[n-2] + x[n]$$

$$n = 0 \Rightarrow h[0] = 0.8\sqrt{2}h[-1] - 0.64h[-2] + \delta[0] = 1$$

$$n = 1 \Rightarrow h[1] = 0.8\sqrt{2}h[0] - 0.64h[-1] + \delta[1] = 1.1314$$

75

## Primjer određivanje impulsnog odziva diskretnog sustava

pa vrijedi:

$$h[0] = 1 = C_1 + C_2$$

$$h[1] = 1.1314 = C_1 \cdot 0.8e^{j\frac{\pi}{4}} + C_2 \cdot 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}} \Rightarrow$$

$$C_1 = 0.5 - 0.5j = 0.7071e^{-j0.7854}$$

$$C_2 = 0.5 + 0.5j = 0.7071e^{j0.7854}$$

76

## Primjer određivanje impulsnog odziva diskretnog sustava

Impulsni odziv je prema tome

$$h[n] = 0.7071e^{-j0.7854} (0.8)^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + 0.7071e^{j0.7854} (0.8)^n e^{-j\frac{\pi}{4}n}, \quad n \geq 0$$

odnosno

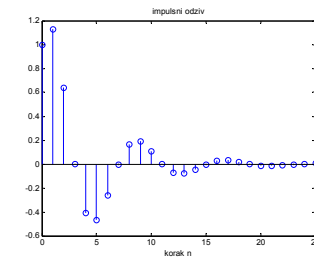
$$h[n] = 0.7071(0.8)^n \{e^{-j0.7854} e^{j\frac{\pi}{4}n} + e^{j0.7854} e^{-j\frac{\pi}{4}n}\}$$

$$= 2 \cdot 0.7071(0.8)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n - 0.7854\right) \text{ za } n \geq 0$$

$$h[n] = 1.4142(0.8)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n - 0.7854\right) \text{ za } n \geq 0$$

77

## Primjer određivanje impulsnog odziva diskretnog sustava



78

## Primjer određivanje impulsnog odziva diskretnog sustava

odrediti impulsni odziv sustava

$$y[n] - 0.8\sqrt{2}y[n-1] + 0.64y[n-2] = x[n] + 2x[n-1]$$

$$\text{za } x[n] = \delta[n] \text{ \& } y[n-1] = y[n-2] = 0 \rightarrow y[n] = h[n]$$

$$\text{karakteristična jednačnja je: } q^2 - 0.8\sqrt{2}q + 0.64 = 0$$

$$\text{korijeni su: } q_{1,2} = 0.8e^{\pm j\frac{\pi}{4}} = 0.4\sqrt{2}(1 \pm j)$$

impulsni odziv je:

$$h[n] = C_1 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + C_2 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} \text{ za } n \geq 0$$

79

## Primjer određivanje impulsnog odziva diskretnog sustava

s druge strane izračunavamo  $h[0]$  i  $h[1]$  kako bi odredili konstante  $C_1$  i  $C_2$

$$y[n] = 0.8\sqrt{2}y[n-1] - 0.64y[n-2] + x[n] + 2x[n-1]$$

$$n = 0 \Rightarrow h[0] = 0.8\sqrt{2}h[-1] - 0.64h[-2] + \delta[0] + 2\delta[-1] = 1$$

$$n = 1 \Rightarrow h[1] = 0.8\sqrt{2}h[0] - 0.64h[-1] + \delta[1] + 2\delta[0] = 3.1314$$

80

## Primjer određivanje impulsnog odziva diskretnog sustava

pa vrijedi:

$$h[0] = 1 = C_1 + C_2$$

$$h[1] = 3.1314 = C_1 \cdot 0.8e^{j\frac{\pi}{4}} + C_2 \cdot 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}} \Rightarrow$$

$$C_1 = 0.5000 - 2.2678j = 2.3223e^{-j1.3538}$$

$$C_2 = 0.5000 + 2.2678j = 2.3223e^{j1.3538}$$

81

## Primjer određivanje impulsnog odziva diskretnog sustava

Impulсни odziv je prema tome

$$h[n] = 2.3223e^{j1.3538} (0.8)^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + 2.3223e^{-j1.3538} (0.8)^n e^{-j\frac{\pi}{4}n}, \quad n \geq 0$$

odnosno

$$h[n] = 2.3223(0.8)^n \left\{ e^{j1.3538} e^{j\frac{\pi}{4}n} + e^{-j1.3538} e^{-j\frac{\pi}{4}n} \right\}$$

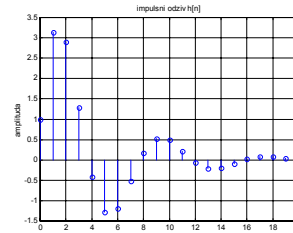
$$= 2 \cdot 2.3223(0.8)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n - 1.3538\right) \quad \text{za } n \geq 0$$

$$h[n] = 4.6446(0.8)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n - 1.3538\right) \quad \text{za } n \geq 0$$

82

## Primjer određivanje impulsnog odziva diskretnog sustava

h[0] = 1.0000  
h[1] = 3.1314  
h[2] = 2.9027  
h[3] = 1.2800  
h[4] = -0.4096  
h[5] = -1.2826  
h[6] = -1.1890  
h[7] = -0.5243  
h[8] = 0.1678  
h[9] = 0.5254  
h[10] = 0.4870  
h[11] = 0.2147  
h[12] = -0.0687  
h[13] = -0.2152  
h[14] = -0.1995  
h[15] = -0.0880  
h[16] = 0.0281



83

## Primjer određivanje impulsnog odziva diskretnog sustava

razmotrimo sustav opisan jednačbom diferencija:

$$y[n] - 0.8\sqrt{2}y[n-1] + 0.64y[n-2] = x[n-4] + 2x[n-5]$$

$$\text{za } x[n] = \delta[n] \text{ \& } y[n-1]=y[n-2]=0 \rightarrow y[n] = h[n]$$

prvi uzorak impulsnog odziva  $\neq 0$  je za  $n \geq 4$   
pa je impulсни odziv jednak komplementarnom rješenju za  $n \geq 4$

$$h[n] = \begin{cases} 0 & \text{za } n < 4 \\ C_1 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + C_2 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} & \text{za } n \geq 4 \end{cases}$$

84

## Primjer određivanje impulsnog odziva diskretnog sustava

potrebno je izračunati  $h[4]$  i  $h[5]$  kako bi odredili konstante  $C_1$  i  $C_2$

$$y[n] = 0.8\sqrt{2}y[n-1] - 0.64y[n-2] + x[n-4] + 2x[n-5]$$

$$n = 4 \Rightarrow h[4] = 0.8\sqrt{2}h[3] - 0.64h[2] + \delta[0] + 2\delta[-1] = 1$$

$$n = 5 \Rightarrow h[5] = 0.8\sqrt{2}h[4] - 0.64h[3] + \delta[1] + 2\delta[0] = 3.1314$$

85

## Primjer određivanje impulsnog odziva diskretnog sustava

pa vrijedi

$$\left. \begin{aligned} h[4] &= 1 = C_1 \cdot \left[ 0.8e^{j\frac{\pi}{4}} \right]^4 + C_2 \cdot \left[ 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}} \right]^4 \\ h[5] &= 3.1314 = C_1 \cdot \left[ 0.8e^{j\frac{\pi}{4}} \right]^5 + C_2 \cdot \left[ 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}} \right]^5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$C_1 = -1.2207 + 5.5365i = 5.6695e^{j1.7878}$$

$$C_2 = -1.2207 - 5.5365i = 5.6695e^{-j1.7878}$$

86

## Primjer određivanje impulsnog odziva diskretnog sustava

prema tome u ovom primjeru je impulсни odziv:

$$h[n] = 5.5365(0.8)^n \left\{ e^{j1.7878} e^{j\frac{\pi}{4}n} + e^{-j1.7878} e^{-j\frac{\pi}{4}n} \right\}$$

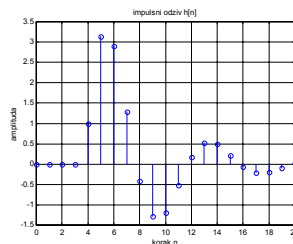
$$= 2 \cdot 5.5365(0.8)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n + 1.7878\right) \quad \text{za } n \geq 4$$

$$h[n] = \begin{cases} 0 & \text{za } n < 4 \\ 11.073(0.8)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n + 1.7878\right) & \text{za } n \geq 4 \end{cases}$$

87

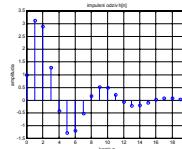
## Primjer određivanje impulsnog odziva diskretnog sustava

h[0] = 0  
h[1] = 0  
h[2] = 0  
h[3] = 0  
h[4] = 1.0000  
h[5] = 3.1314  
h[6] = 2.9027  
h[7] = 1.2800  
h[8] = -0.4096  
h[9] = -1.2826  
h[10] = -1.1890  
h[11] = -0.5243  
h[12] = 0.1678  
h[13] = 0.5254  
h[14] = 0.4870  
h[15] = 0.2147  
h[16] = -0.0687



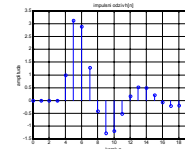
88

## Primjer: usporedba impulsnih odziva



$$y[n] - 0.8\sqrt{2}y[n-1] + 0.64y[n-2] = x[n] + 2x[n-1]$$

h[0] = 1.0000  
h[1] = 3.1314  
h[2] = 2.9027  
h[3] = 1.2800  
h[4] = -0.4096  
h[5] = -1.2826  
h[6] = -1.1890  
h[7] = -0.5243  
h[8] = 0.1678  
h[9] = 0.5254  
h[10] = 0.4870



$$y[n] - 0.8\sqrt{2}y[n-1] + 0.64y[n-2] = x[n-4] + 2x[n-5]$$

h[0] = 0  
h[1] = 0  
h[2] = 0  
h[3] = 0  
h[4] = 1.0000  
h[5] = 3.1314  
h[6] = 2.9027  
h[7] = 1.2800  
h[8] = -0.4096  
h[9] = -1.2826  
h[10] = -1.1890

89