

Frekvencijska analiza vremenski diskretnih signala

Signali i sustavi

Frekvencijska analiza diskretnih aperiodičnih signala

aperiodični diskretni signal možemo generirati iz kontinuiranog aperiodičnog signala otipkavanjem

postupak uzimanja uzoraka ili otipkavanja kontinuiranog signala možemo matematički modelirati kao pridruživanje funkciji $x(t)$ niza impulsa, čiji intenzitet je proporcionalan trenutnim vrijednostima kontinuiranog signala

$$x_s(t) = S_T\{x(t)\}$$

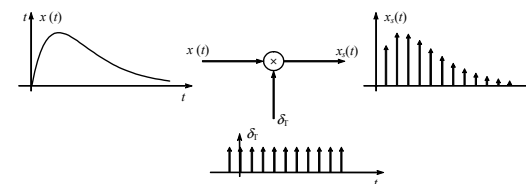
2

Frekvencijska analiza diskretnih aperiodičnih signala

Možemo to interpretirati kao modulaciju impulsnog

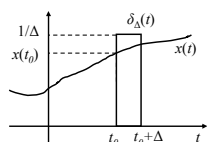
niza $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$ funkcijom $x(t)$, tj.

$$x_s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$$



3

Frekvencijska analiza diskretnih aperiodičnih signala



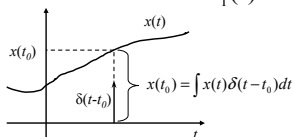
$$x_1(t) = x(t)\delta_\Delta(t)$$

za mali $\Delta \Rightarrow$

$$x_1(t) = x(t)\delta_\Delta(t) \approx x(t_0)\delta_\Delta(t)$$

za $\Delta \rightarrow 0 \Rightarrow$

$$x_1(t) = x(t)\delta(t-t_0) \approx x(t_0)\delta(t-t_0)$$



4

Frekvencijska analiza diskretnih aperiodičnih signala

zbog svojstva delta funkcije da vadi vrijednost kontinuirane funkcije $x(t)$ na mjestu diskontinuiteta $t - nT = 0$, tj. $t_n = nT$, može se napisati i u obliku:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

5

Frekvencijska analiza diskretnih aperiodičnih signala

usporedimo spektre ovih signala

za signal $x(t)$ vrijedi par:

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi Ft} dt \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F)e^{j2\pi Ft} dF$$

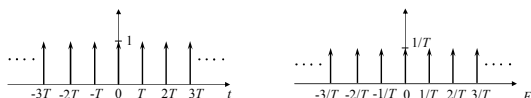
Periodičan niz δ_T nastao ponavljanjem delta funkcije svakih T , kao svaka periodična funkcija se daje predstaviti Fourierovim redom, gdje su Fourierovi koeficijenti dani s:

6

Frekvencijska analiza diskretnih aperiodičnih signala

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)e^{-j2\pi kF_s t} dt = \frac{1}{T}, \quad F_s = \frac{1}{T}.$$

F_s je frekvencija otipkavanja



slijedi:
$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j2\pi kF_s t} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi kF_s t}.$$

7

Frekvencijska analiza diskretnih aperiodičnih signala

spektar otipkanog signala $x_s(t)$ dan je s:

$$X_s(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t)e^{-j2\pi Ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left(\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi kF_s t} \right) e^{-j2\pi Ft} dt$$

zamjenom redoslijeda sumacije i integracije dobivamo:

$$X_s(F) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi(F-kF_s)t} dt$$

integral je spektar signala $x(t)$, ali pomaknut za kF_s , pa izlazi:

$$X_s(F) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(F-kF_s) = F_s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(F-kF_s)$$

8

Frekvencijska analiza diskretnih aperiodičnih signala

pokazano je da je spektar otipkanog dakle diskretnog signala periodičan pa Fourierovu transformaciju diskretnog signala $x[n]$ konačne energije možemo pisati:

$$X(\omega) = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

9

Frekvencijska analiza diskretnih aperiodičnih signala

važno je primijetiti da je $X(e^{j\omega})$ periodičan s periodom 2π

$$X(e^{j(\omega+2\pi k)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(\omega+2\pi k)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} e^{-j2\pi kn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = X(e^{j\omega})$$

ovo je posljedica činjenice da je za diskretni signal frekvencijsko područje limitirano samo na interval $(-\pi, \pi)$ ili $(0, 2\pi)$ i da su sve frekvencije izvan tog intervala ekvivalentne frekvencijama unutar intervala

10

Frekvencijska analiza diskretnih aperiodičnih signala

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

gornji izraz predstavlja prikaz $X(e^{j\omega})$ uz pomoć Foureirovog reda pa uzorci $x[n]$ predstavljaju Foureierove koeficijente

izračunavanje $x[n]$ iz $X(e^{j\omega})$

11

Fourierova transformacija diskretnih aperiodičnih signala

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

izračunavanje $x[n]$ iz $X(e^{j\omega})$ započinje množenje obje strane s $e^{j\omega m}$ i integracijom preko intervala $(-\pi, \pi)$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega m} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \right] e^{j\omega m} d\omega$$

12

Fourierova transformacija diskretnih aperiodičnih signala

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega m} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \right] e^{j\omega m} d\omega$$

desna strana se preuređuje i izračunava:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)} d\omega = \begin{cases} 2\pi x[m] & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

pa je konačno:

$$x[m] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega m} d\omega$$

13

Fourierova transformacija diskretnih aperiodičnih signala

zaključno, par za Fourierovu transformaciju aperiodičnih diskretnih signala je

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$$

14

Gustoća spektra energije aperiodičnih vremenski diskretnih signala

energija aperiodičnog diskretnog signala $x[n]$, čija je Fourierova transformacija $X(e^{j\omega})$, je:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

uz

$$|x[n]|^2 = x[n] \cdot x^*[n]$$

izrazimo energiju E_x pomoću spektralne karakteristike $X(e^{j\omega})$

15

Gustoća spektra energije aperiodičnih vremenski diskretnih signala

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot x^*[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega})e^{-j\omega n} d\omega \right]$$

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega}) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \right] d\omega$$

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

16

Gustoća spektra energije aperiodičnih vremenski diskretnih signala

dakle vrijedi:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

što je Parseval-ova relacija za aperiodične diskretne signala konačne energije

17

Gustoća spektra energije aperiodičnih vremenski diskretnih signala

kao i u slučaju aperiodskih kontinuiranih signala i ovdje je uobičajen prikaz spektra u polarnom obliku:

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\Theta(\omega)}$$

a

$$S_{xx}(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|^2$$

predstavlja raspodjelu energije kao funkcija frekvencije i naziva se gustoća spektra energije

18

Spektar realnih aperiodičnih vremenski diskretnih signala

nadalje za realni signal vrijedi:

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$$

čemu je ekvivalentno

$$|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})| \quad \text{i} \quad \arg X(e^{j\omega}) = -\arg X(e^{-j\omega})$$

odnosno

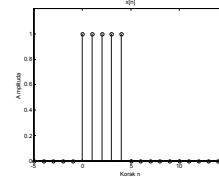
$$S_{xx}(e^{-j\omega}) = S_{xx}(e^{j\omega})$$

19

Primjer Fourierove transformacije aperiodičnog pravokutnog signala

Zadan je pravokutni signal za koji treba odrediti Fourierovu transformaciju:

$$x[n] = \begin{cases} A & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & \text{za ostale } n \end{cases}$$



L=5

A=1

20

Primjer Fourierove transformacije aperiodičnog pravokutnog signala

Fourierova transformacija ovog signala je:

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{L-1} A e^{-j\omega n} \\ &= A \frac{1 - e^{-j\omega L}}{1 - e^{-j\omega}} = A e^{-j(\omega/2)(L-1)} \frac{\sin(\omega L / 2)}{\sin(\omega / 2)} \end{aligned}$$

21

Primjer Fourierove transformacije aperiodičnog pravokutnog signala

Amplitudni spektar je:

$$|X(e^{j\omega})| = \begin{cases} |A|L & \omega = 0 \\ |A| \frac{\sin(\omega L / 2)}{\sin(\omega / 2)} & \text{za ostale } \omega \end{cases}$$

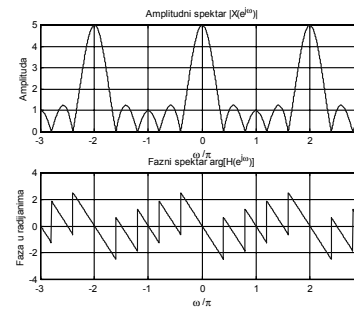
fazni spektar je:

$$\arg |X(e^{j\omega})| = \arg A - \frac{\omega}{2}(L-1) + \arg \frac{\sin(\omega L / 2)}{\sin(\omega / 2)}$$

Napomena: faza realne veličine je *nula* kada je ona pozitivna a π kada je veličina negativna

22

Primjer Fourierove transformacije aperiodičnog pravokutnog signala

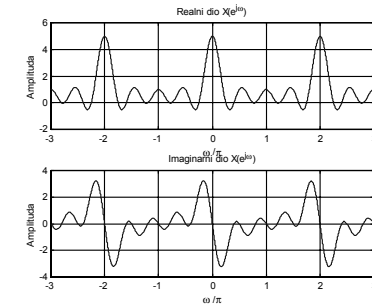


L=5

A=1

23

Primjer Fourierove transformacije aperiodičnog pravokutnog signala

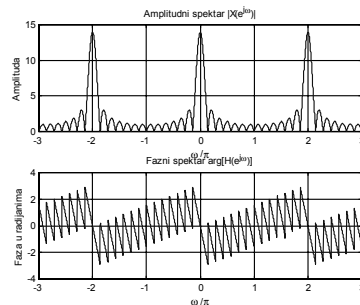


L=5

A=1

24

Primjer Fourierove transformacije aperiodičnog pravokutnog signala

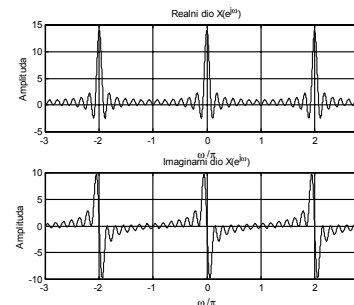


L=14

A=1

25

Primjer Fourierove transformacije aperiodičnog pravokutnog signala



L=14

26

Veza Fourierove transformacije i z - transformacije

Z – transformacija je definirana kao

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad \text{ROC} : r_2 < |z| < r_1$$

kompleksna varijabla z izražena u polarnom obliku:

$$z = r e^{j\omega}$$

gdje je

$$r = |z| \quad \& \quad \omega = \arg(z)$$

27

Veza Fourierove transformacije i z - transformacije

Unutar područja konvergencije $X(z)$ možemo supstituirati $z=re^{j\omega}$ u izraz za z – transformaciju pa slijedi:

$$X(z)\Big|_{z=re^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\omega n}$$

ovaj izraz možemo interpretirati kao Fourierovu transformaciju niza $x[n]r^{-n}$
alternativno ako $X(z)$ konvergira za $|z|=1$ tada je

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \equiv X(e^{j\omega})$$

Dakle Fourierovu transformaciju možemo interpretirati kao
z - transformaciju izračunatu na jediničnoj kružnici

28

Fourierova transformacija diskretnih periodičnih signala

29

Fourierova transformacija diskretnih periodičnih signala

Fourierov red za kontinuirani periodični signal $x(t)$,
perioda T_p je:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}$$

signal $x(t)$ može biti prikazan s beskonačnim brojem
frekvencijskih komponenti

spektar je diskretan pri čemu je razmak između susjednih
komponenti $1/T_p$

30

Fourierova transformacija diskretnih periodičnih signala

diskretni periodični signal $x[n]$ ima periodični spektar
(zbog diskretnosti signala u vremenskoj domeni) koji se
ponavlja svakih $2\pi \Rightarrow$ područje frekvencija $(-\pi, \pi)$ ili $(0, 2\pi)$

diskretni periodični signal $x[n]$ ima diskretan spektar
(zbog periodičnosti signala u vremenskoj domeni) pri
čemu je razmak između susjednih frekvencijskih
komponenti $2\pi/N$ radijana \Rightarrow Fourierov red za periodični
diskretni signal sadržavati će najviše N frekvencijskih
komponenti

31

Fourierova transformacija diskretnih periodičnih signala

Za diskretni periodični signal $x[n]$ perioda N vrijedi:

$$x[n] = x[n + N] \quad \text{za svaki } n$$

Fourierov red periodičnog signala sadrži N harmonički
vezanih kompleksnih eksponencijalnih funkcija:

$$e^{j2\pi k n / N} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

32

Fourierova transformacija diskretnih periodičnih signala

Fourierov red za diskretni periodični signal:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi k n / N} \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

izvod izraza za Fourierove koeficijente c_k :

obje strane se množe s eksponencijalom $e^{-j2\pi l n / N}$ a zatim
se produkti zbrajaju od $n=0$ do $n=N-1$

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi l n / N} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi (k-l) n / N}$$

33

Fourierova transformacija diskretnih periodičnih signala

zamijenimo redoslijed sumacije:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi l n / N} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi (k-l) n / N}$$

uz sumaciju

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi (k-l) n / N} = \begin{cases} N & k-l = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0 & \text{za ostale} \end{cases}$$

desna se strana reducira na Nc_l pa slijedi:

34

Fourierova transformacija diskretnih periodičnih signala

$$c_l = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi l n / N} \quad l = 0, 1, \dots, N-1$$

što je izraz za Fourierove koeficijente signala $x[n]$

35

Fourierova transformacija diskretnih periodičnih signala

zaključno, par za Fourierovu transformaciju
periodičnih diskretnih signala je

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi k n / N} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi k n / N} \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

36

Fourierova transformacija diskretnih periodičnih signala

jednadžba
$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N} \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

se u engleskoj terminologiji naziva *discrete-time Fourier series (DTFS)*

Fourierovi koeficijenti c_k , $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, omogućavaju prikaz $x[n]$ u frekvencijskoj domeni, tako da c_k predstavljaju amplitudu i fazu vezanu uz frekvencijske komponente
gdje je $\omega_k = 2\pi k / N$

37

Fourierova transformacija diskretnih periodičnih signala

sljedi važno svojstvo periodičnosti c_k

$$c_{k+N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi(k+N)n/N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} = c_k$$

prema tome $\{c_k\}$ je periodični niz s osnovnim periodom N

prema tome:

38

Fourierova transformacija diskretnih periodičnih signala

spektar signala $x[n]$, koji je periodičan s periodom N , je periodičan niz s periodom $N \Rightarrow$ bilo kojih N susjednih uzoraka signala ili njegova spektra su dovoljni za potpuni opis signala u vremenskoj ili frekvencijskoj domeni

39

Gustoća spektra snage vremenski diskretnih periodičnih signala

za periodični diskretni signal $x[n]$, perioda N , srednja snaga je definirana kao:

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$$

i ovdje će srednja snaga biti prikazana pomoću Fourierovih koeficijenata

40

Gustoća spektra snage vremenski diskretnih periodičnih signala

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot x^*[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \left(\sum_{k=0}^{N-1} c_k^* e^{-j2\pi kn/N} \right) =$$

$$P_x = \sum_{k=0}^{N-1} c_k^* \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} \right]$$

$$P_x = \sum_{k=0}^{N-1} c_k^* \cdot c_k = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2$$

pa finalno zaključujemo:

41

Gustoća spektra snage vremenski diskretnih periodičnih signala

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2$$

predstavlja Parseval-ovu relaciju za diskretne periodične signale

Parseval-ova relacija pokazuje da je za diskretne periodične signale srednja snaga signala jednaka sumi snaga svake pojedine frekvencijske komponente niz $|c_k|^2$ za $k=0, 1, \dots, N-1$ predstavlja distribuciju snage kao funkciju frekvencije i naziva se gustoća spektra snage

42

Spektar realnog periodičkog diskretnog signala

za realni periodični $x[n]$ koeficijenti Fourierovog reda $\{c_k\}$ zadovoljavaju sljedeći uvjet:

$$c_{-k} = c_k^*$$

iz čega sljedi:

$$|c_{-k}| = |c_k| \quad \text{i} \quad \arg(c_k) = -\arg(c_{-k})$$

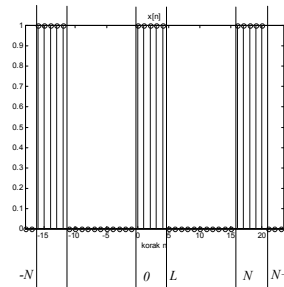
a zbog $c_k = c_{k+N}$ sljedi

$$|c_k| = |c_{N-k}| \quad \text{i} \quad \arg(c_k) = -\arg(c_{N-k})$$

43

Primjer Fourierove transformacije periodičkog pravokutnog signala

zadan je periodični pravokutni diskretni signal kao na slici:



$L=5$
 $N=16$

44

Primjer Fourierove transformacije periodičkog pravokutnog signala

izračunavaju se c_k

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{L-1} A e^{-j2\pi kn/N} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$c_k = \frac{A}{N} \sum_{n=0}^{L-1} (e^{-j2\pi k/N})^n = \begin{cases} \frac{AL}{N} & k=0 \\ \frac{A}{N} \frac{1-e^{-j2\pi kL/N}}{1-e^{-j2\pi k/N}} & k=1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$

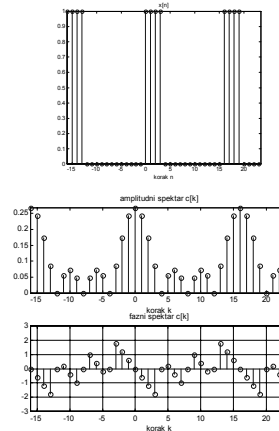
45

Primjer Fourierove transformacije periodičkog pravokutnog signala

$$c_k = \begin{cases} \frac{AL}{N} & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ \frac{A}{N} e^{j\pi k(L-1)/N} \frac{\sin(\pi k L / N)}{\sin(\pi k / N)} & \text{za ostale } k \end{cases}$$

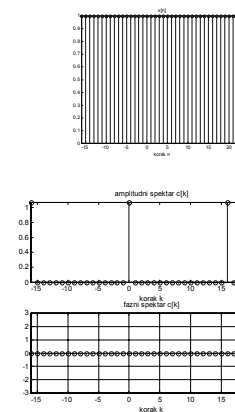
primjeri:

46



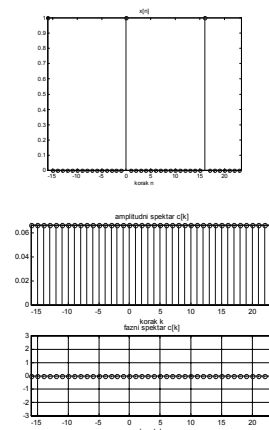
L=4
N=16
A=1

47



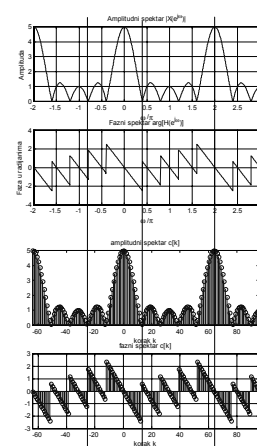
L=16
N=16
A=1

48



L=1
N=16
A=1

49



L=5
aperiodični
signal x[n]

L=5
periodični
signal x[n]

50

	aperiodičan	periodičan
kontinuirani	$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$ $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$	$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt$ $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}$
diskretni	$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$ $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$	$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi k n / N}$ $x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi k n / N}$

51

Svojstva Fourierove transformacije diskretnih signala

prije je izvedena transformacija za aperiodični diskretni signal (DTFT)

$$X(e^{j\omega}) \equiv F\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

$$x[n] \equiv F^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

ovdje se razmatraju neka svojstva DTFT pogodna u nizu praktičnih primjena

slična razmatranja vrijede i za kontinuirane signale

52

Svojstva Fourierove transformacije diskretnih signala

svojstvo linearnosti

ako je $X_1(e^{j\omega}) = F\{x_1[n]\}$ i $X_2(e^{j\omega}) = F\{x_2[n]\}$ tada je
 $X(e^{j\omega}) = F\{\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]\} = \alpha X_1(e^{j\omega}) + \beta X_2(e^{j\omega})$

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &\equiv F\{\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]) e^{-j\omega n} \\ &= \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n] e^{-j\omega n} + \beta \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n] e^{-j\omega n} = \\ &= \alpha X_1(e^{j\omega}) + \beta X_2(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

53

Svojstva Fourierove transformacije diskretnih signala

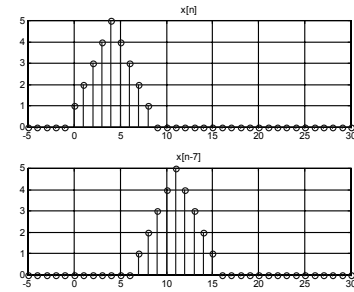
pomak u vremenskoj domeni

ako je $X(e^{j\omega}) = F\{x[n]\}$ tada je
 $F\{x[n-k]\} = e^{-j\omega k} X(e^{j\omega})$

$$\begin{aligned} F\{x[n-k]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-k] e^{-j\omega n} = \\ &= |n-k=m| = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\omega(m+k)} = \\ &= e^{-j\omega k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\omega m} = e^{-j\omega k} X(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

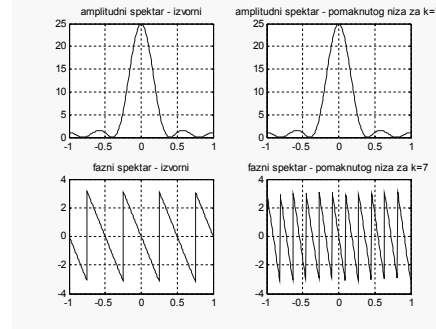
54

Svojstva Fourierove transformacije diskretnih signala



55

Svojstva Fourierove transformacije diskretnih signala



56

Svojstva Fourierove transformacije diskretnih signala pomak u frekvencijskoj domeni

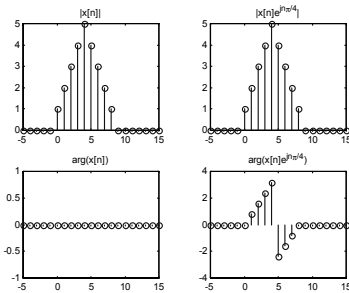
ako je $X(e^{j\omega}) = F\{x[n]\}$ tada je

$$F\{e^{j\omega_0 n} x[n]\} = X(e^{j(\omega - \omega_0)})$$

$$\begin{aligned} F\{e^{j\omega_0 n} x[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 n} x[n] e^{-j\omega n} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j(\omega - \omega_0)n} = X(e^{j(\omega - \omega_0)}) \end{aligned}$$

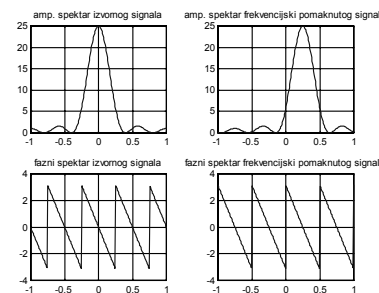
57

Svojstva Fourierove transformacije diskretnih signala



58

Svojstva Fourierove transformacije diskretnih signala



59

Svojstva Fourierove transformacije diskretnih signala konvolucija

ako je $X_1(e^{j\omega}) = F\{x_1[n]\}$ i $X_2(e^{j\omega}) = F\{x_2[n]\}$ tada je

$$\begin{aligned} F\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m] \cdot x_2[n-m]\right\} &= X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega}) \\ F\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m] x_2[n-m]\right\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m] x_2[n-m] \right] e^{-j\omega n} = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m] \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n-m] e^{-j\omega n} \right] = |n-m=l| = \end{aligned}$$

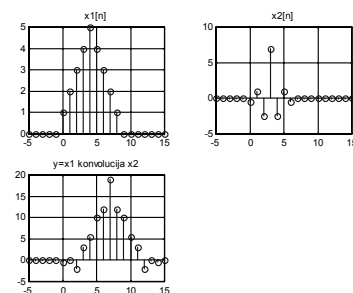
60

Svojstva Fourierove transformacije diskretnih signala

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m] \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x_2[l] e^{-j\omega(m+l)} \right] = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m] e^{-j\omega m} \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x_2[l] e^{-j\omega l} \right] = \\ &= X_2(e^{j\omega}) \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m] e^{-j\omega m} = \\ &= X_2(e^{j\omega}) \cdot X_1(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

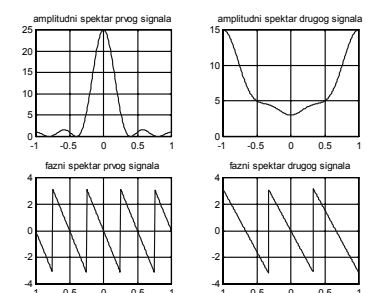
61

Svojstva Fourierove transformacije diskretnih signala



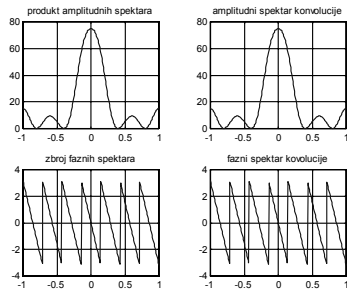
62

Svojstva Fourierove transformacije diskretnih signala



63

Svojstva Fourierove transformacije diskretnih signala



64

Svojstva Fourierove transformacije diskretnih signala

modulacija

ako je $X_1(e^{j\omega}) = F\{x_1[n]\}$ i $X_2(e^{j\omega}) = F\{x_2[n]\}$ tada je

$$F\{x_1[n] \cdot x_2[n]\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\psi}) \cdot X_2(e^{j(\omega-\psi)}) d\psi$$

$$y[n] = x_1[n] \cdot x_2[n] \Rightarrow Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_1[n] x_2[n]) e^{-j\omega n}$$

$$x_1[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\psi}) e^{j\psi n} d\psi$$

65

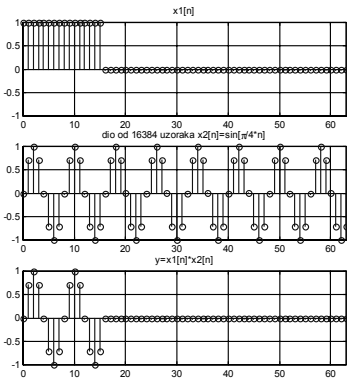
Svojstva Fourierove transformacije diskretnih signala

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\psi}) e^{j\psi n} d\psi \right] x_2[n] e^{-j\omega n}$$

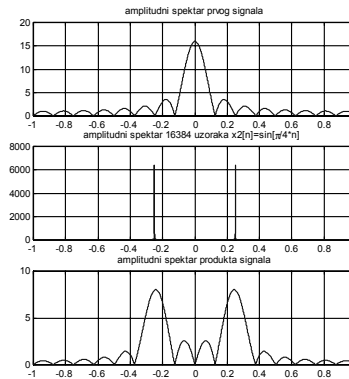
$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\psi}) \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n] e^{-j(\omega-\psi)n}}_{X_2(e^{j(\omega-\psi)})} d\psi$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\psi}) X_2(e^{j(\omega-\psi)}) d\psi = F\{x_1[n] \cdot x_2[n]\}$$

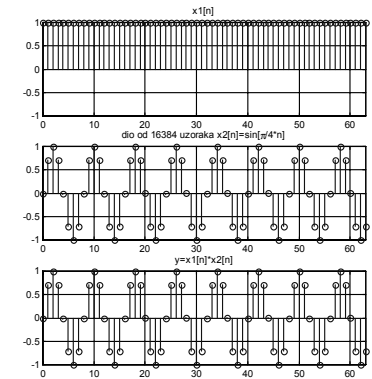
66



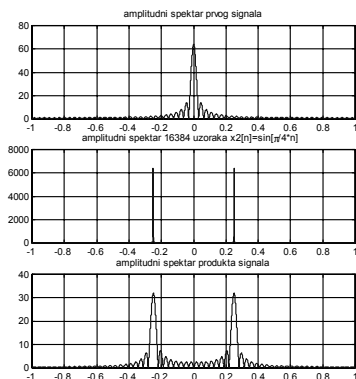
67



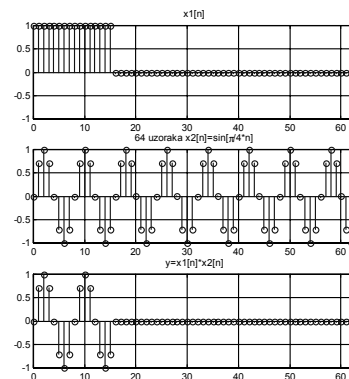
68



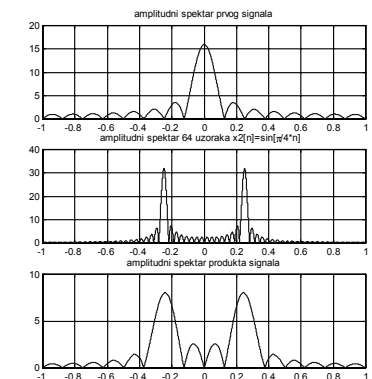
69



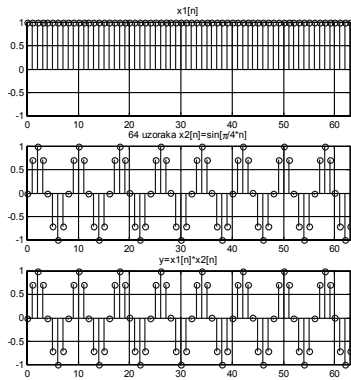
70



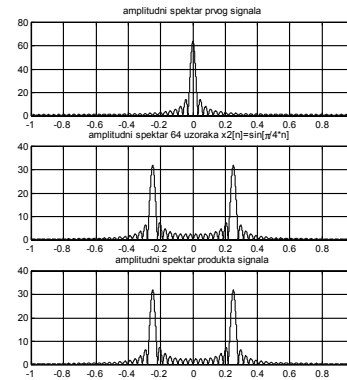
71



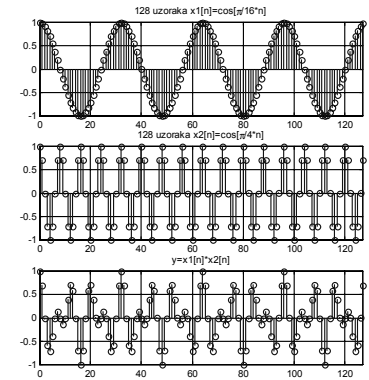
72



73



74



75

primjer

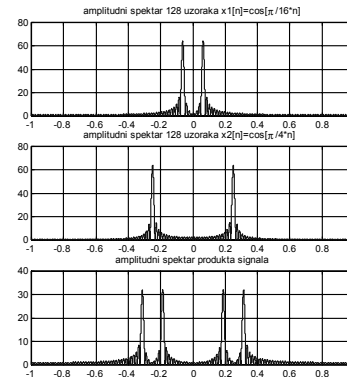
$$x_1[n] = \cos\left[\frac{\pi}{4}n\right]$$

$$x_2[n] = \cos\left[\frac{\pi}{16}n\right]$$

$$x_1[n] \cdot x_2[n] = \cos\left[\frac{\pi}{4}n\right] \cdot \cos\left[\frac{\pi}{16}n\right] =$$

$$x_1[n] \cdot x_2[n] = \frac{1}{2} \left\{ \cos\left[\frac{3\pi}{16}n\right] + \cos\left[\frac{5\pi}{16}n\right] \right\} =$$

76



$$\frac{1}{16} = 0.0625$$

$$\frac{1}{4} = 0.25$$

$$\frac{3}{16} = 0.1875$$

$$\frac{5}{16} = 0.3125$$

77

Svojstva Fourierove transformacije diskretnih signala
inverzija vremenske osi

ako je $X(e^{j\omega}) = F\{x[n]\}$ tada je $X(e^{-j\omega}) = F\{x[-n]\}$

$$F\{x[-n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]e^{-j\omega n} = |n = -l| =$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l]e^{j\omega l} = X(e^{j\omega})$$

78

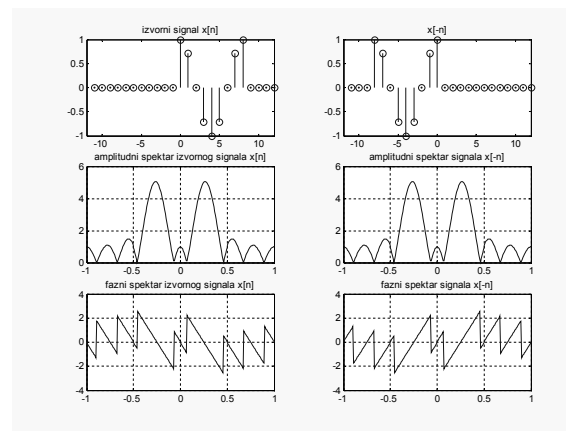
Svojstva Fourierove transformacije diskretnih signala

za realni $x[n]$ dobivamo:

$$F\{x[-n]\} = X(e^{-j\omega}) = \left| X(e^{-j\omega}) \right| e^{j \arg\{X(e^{-j\omega})\}}$$

$$= \left| X(e^{j\omega}) \right| e^{-j \arg\{X(e^{j\omega})\}}$$

79



80