

Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih signala

Signali i sustavi

Uvod

Linearna kombinacija kontinuiranih kompleksnih eksponencijala generira kontinuirani signal $x(t)$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\Omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}$$

koji je periodičan s periodom

$$T_p = 1 / F_0$$

što upućuje da linearna kombinacija kompleksnih eksponencijala može poslužiti u prikazu periodičnih kontinuiranih signala

2

Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih periodičnih signala

dakle, korištenjem kompleksnih eksponencijala

$$\{e^{j2\pi k F_0 t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

moguće je razložiti periodični signal perioda T_p pri čemu F_0 određuje osnovni period $x(t)$ a koeficijenti $\{c_k\}$ određuju oblik signala. Ovakav matematički prikaz signala $x(t)$ naziva se Fourierov red.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}$$

3

Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih periodičnih signala

Takav razvoj u trigonometrijski red koristio je Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) (politički aktivan, dva puta izbjegao giljotinu, blizak Napoleonu, bio prefekt jedne francuske regije sa sjedištem u Grenobleu i baš u to vrijeme razvio svoje ideje o trigonometrijskim redovima).

21. prosinca 1807. prezentirao svoj rad o difuziji topline i pokazao kako red harmonijski vezanih sinusoida može biti koristan u prikazu distribucije temperature kroz tijela. Tada tvrdi i da "bilo koji" periodični signal može biti prikazan s takovim redom.

4

Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih periodičnih signala

Koncept korištenja "trigonometrijskih suma" potiče još od babilonaca koji su ove ideje koristili u predikciji astronomskih događaja.

Istom konceptu se vraća Euler 1748 u istraživanju gibanja (titranja) žice. Lagrange 1759 kritizira njegov pristup tvrdeći da su trigonometrijski redovi limitirane uporabivosti.

Fourier je imao jasnu ideju (podržanu od Laplacea no vrlo kritiziranu od Lagrangea) međutim strogo je matematičku podlogu dao tek Dirichlet 1829.

5

Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih periodičnih signala

Izračunavanje koeficijenta $\{c_k\}$ započinje iz

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}$$

množe se obje strane s $e^{-j2\pi l F_0 t}$, l je cijeli broj integriraju se obje strane preko jednog perioda, dakle od 0 do T_p , ili općenitije od t_0 do $t_0 + T_p$

$$\int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) e^{-j2\pi l F_0 t} dt = \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j2\pi l F_0 t} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t} \right) dt$$

6

Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih periodičnih signala

desnu stranu transformiramo u

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{j2\pi F_0 (k-l)t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left[\frac{e^{j2\pi F_0 (k-l)t}}{j2\pi F_0 (k-l)} \right]_{t_0}^{t_0+T_p}$$

Izraz u zagradi izračunat za gornju i donju granicu jednak je nuli. S druge strane za $k=l$ imamo

$$\int_{t_0}^{t_0+T_p} dt = t \Big|_{t_0}^{t_0+T_p} = T_p$$

7

Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih periodičnih signala

slijedi

$$\int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) e^{-j2\pi l F_0 t} dt = c_l T_p$$

pa je izraz za Fourierove koeficijente

$$c_l = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) e^{-j2\pi l F_0 t} dt$$

8

Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih periodičnih signala

budući je t_0 proizvoljan, integral može biti izračunat preko bilo kojeg intervala duljine T_p

pa je konačno izraz za Fourierove koeficijente

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt$$

9

Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih periodičnih signala

Uvjeti konvergencije za Fourierov red

Od posebne važnosti je klasa periodičnih signala za koje vrijedi

$$\int_T |x(t)|^2 dt < \infty$$

i za njih su Fourierovi koeficijenti $\{c_k\}$ konačni

10

Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih periodičnih signala

Postojanje Fourierovog reda za periodični niz osigurava ispunjenje *Dirichlet-ovih* uvjeta:

1. signal $x(t)$ ima konačni broj diskontinuiteta u bilo kojem periodu
2. signal $x(t)$ ima konačni broj maksimuma i minimuma u bilo kojem periodu
3. signal $x(t)$ je apsolutno integrabilan u bilo kojem periodu

$$\int_T |x(t)| dt < \infty$$

Svi periodični signali od praktičnog interesa zadovoljavaju gornje uvjete

11

Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih periodičnih signala

Prema tome za periodični signal $x(t)$, koji zadovoljava Dirichletove uvjete, vrijedi par jednakosti:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}$$

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt$$

12

Frekvencijska analiza realnih vremenski kontinuiranih periodičnih signala

Generalno govoreći, Fourierovi koeficijenti c_k poprimaju kompleksne vrijednosti.

za realni periodični signal $x(t)$ proizlazi da su c_k i c_{-k} konjugirano kompleksni dakle,

$$c_k = |c_k| e^{j\theta_k}$$

i

$$c_{-k} = |c_k| e^{-j\theta_k}$$

13

Frekvencijska analiza realnih vremenski kontinuiranih periodičnih signala

pa za realni periodični signal $x(t)$ Fourierov red možemo pisati u obliku:

$$x(t) = c_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \cos(2\pi k F_0 t + \theta_k)$$

gdje je c_0 realan

postoji i treći oblik Fourierovog reda za realni periodični signal $x(t)$ a temelji se na transformaciji kosinusa u gornjem prikazu

14

Frekvencijska analiza realnih vremenski kontinuiranih periodičnih signala

$$\cos(2\pi k F_0 t + \theta_k) = \cos(2\pi k F_0 t) \cos \theta_k - \sin(2\pi k F_0 t) \sin \theta_k$$

pa za realni periodični signal $x(t)$ prethodni oblik Fourierovog reda možemo transformirati u:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos 2\pi k F_0 t - b_k \sin 2\pi k F_0 t)$$

gdje je su $a_0 = c_0$

$$a_k = 2|c_k| \cos \theta_k$$

$$b_k = 2|c_k| \sin \theta_k$$

15

Gustoća spektra snage periodičnih vremenski kontinuiranih signala

periodični kontinuirani signal $x(t)$ ima beskonačnu energiju ali konačnu srednju snagu koja je dana s:

$$P_x = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} |x(t)|^2 dt$$

kako je

$$|x(t)|^2 = x(t) \cdot x^*(t)$$

16

Gustoća spektra snage periodičnih vremenski kontinuiranih signala

možemo pisati

$$P_x = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* e^{-j2\pi k F_0 t} \right) dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* \left(\frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

17

Gustoća spektra snage periodičnih vremenski kontinuiranih signala

iz ovoga pišemo tzv. Parseval-ovu relaciju

$$P_x = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

ilustrirajmo fizikalno značenje Parseval-ove relacije:

18

Gustoća spektra snage periodičnih vremenski kontinuiranih signala

neka se $x(t)$ sastoji od samo jedne kompleksne eksponencijale

$$x(t) = c_k e^{j2\pi k F_0 t}$$

u tom slučaju svi su koeficijenti Fourierovog reda, osim c_k , jednaki nuli

sukladno tomu srednja snaga signala je

$$P_x = |c_k|^2$$

19

Gustoća spektra snage periodičnih vremenski kontinuiranih signala

očigledno je da $|c_k|^2$ predstavlja snagu k -te harmoničke komponente signala

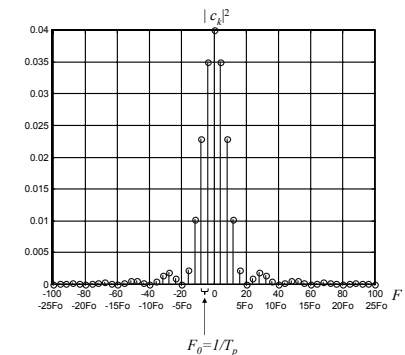
ukupna srednja snaga periodičkog signala je suma srednjih snaga svih harmonika

prikazujemo $|c_k|^2$ kao funkciju frekvencija kF_0 , $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

dijagram pokazuje kako je snaga periodičnog signala raspodijeljena po različitim frekvencijskim (spektralnim) komponentama – dijagram se stoga naziva *gustoća spektra snage*

20

Gustoća spektra snage



21

Gustoća spektra snage

periodični signali imaju, dakle, diskretni ili linijski spektar

razmak između dviju spektralnih linija jednak je recipročnoj vrijednosti osnovnog perioda T_p

oblik spektra tj. raspodjela snage signala ovisi o značajkama signala u vremenskoj domeni

koeficijenti Fourierovog reda poprimaju kompleksne vrijednosti pa ih možemo pisati kao $c_k = |c_k| e^{j\theta_k}$

umjesto crtanja spektra snage možemo crtati amplitudni spektar $\{|c_k|\}$ odnosno fazni spektar $\{\theta_k\}$

22

Spektar realnog periodičkog signala

za realni periodični $x(t)$ vrijedi

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) [\cos(2\pi k F_0 t) - j \sin(2\pi k F_0 t)] dt \end{aligned}$$

$$\text{odnosno: } c_{-k} = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) [\cos(-2\pi k F_0 t) - j \sin(-2\pi k F_0 t)] dt =$$

$$= \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) [\cos(2\pi k F_0 t) + j \sin(2\pi k F_0 t)] dt = c_k^*$$

23

Spektar realnog periodičkog signala

dakle, za realni periodični $x(t)$ koeficijenti Fourierovog reda $\{c_k\}$ zadovoljavaju slijedeći uvjet:

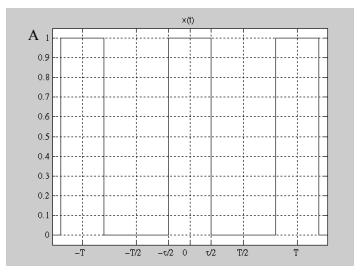
$$c_{-k} = c_k^*$$

iz čega slijedi:

$$|c_{-k}| = |c_k| \quad \text{ i } \quad \arg(c_k) = -\arg(c_{-k})$$

24

Primjer Fourierovog reda periodičnog pravokutnog signala



25

Primjer Fourierovog reda periodičnog pravokutnog signala

signal je periodičan s osnovnim periodom T_p

signal je paran tj $x(t) = x(-t)$ pa možemo izabrati interval integracije od $-T_p/2$ do $T_p/2$

za $k=0$ slijedi:

$$c_0 = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} x(t) dt = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} A dt = \frac{A \tau}{T_p}$$

c_0 predstavlja srednju vrijednost (istosmjernu komponentu) signala $x(t)$

26

Primjer Fourierovog reda periodičnog pravokutnog signala

za $k \neq 0$ izračunavamo:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} x(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt = \frac{1}{T_p} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j2\pi k F_0 t} dt = \\ &= \frac{A}{T_p - j2\pi k F_0} \left. e^{-j2\pi k F_0 t} \right|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{A}{\pi F_0 k T_p} \frac{e^{j\pi k F_0 \tau} - e^{-j\pi k F_0 \tau}}{j2} \\ &= \frac{A \tau}{T_p} \frac{\sin \pi k F_0 \tau}{\pi k F_0 \tau} \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

27

Primjer Fourierovog reda periodičnog pravokutnog signala

$x(t)$ je paran \Rightarrow Fourierovi koeficijenti c_k su realni

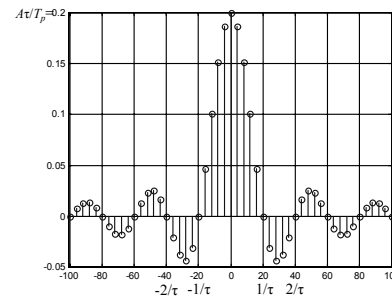
\Rightarrow fazni spektar = 0 za $c_k > 0$

\Rightarrow fazni spektar = π za $c_k < 0$

za realne c_k umjesto pojedinačnih prikaza amplitudnog i faznog spektra obično se prikazuje samo jedan dijagram koji označava pozitivne i negativne vrijednosti c_k

28

Primjer Fourierovog reda periodičnog pravokutnog signala



29

Primjer Fourierovog reda periodičnog pravokutnog signala

promatraju se Fourierovi koeficijenti za

1. fiksiran T_p i promjenljiv τ

neka je

$A = 1$

i

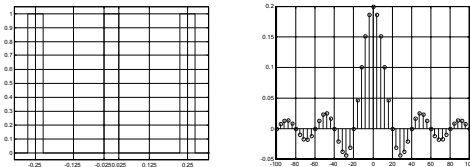
$T_p = 0.25 \text{ sec} \Rightarrow F_0 = 1/T_p = 4 \text{ Hz}$

mijenjamo τ :

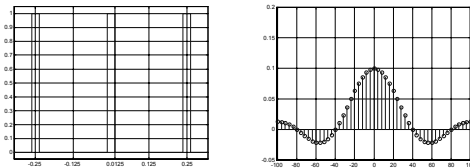
$\tau = 0.2 T_p$; $\tau = 0.1 T_p$; $\tau = 0.05 T_p$;

30

$\tau = 0.2 T_p$
 $\tau = 0.05$

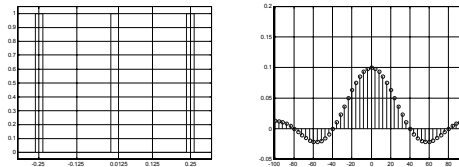


$\tau = 0.1 T_p$
 $\tau = 0.025$

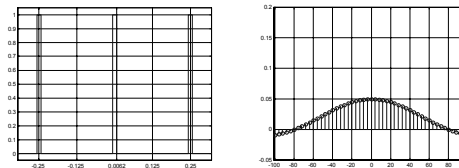


31

$\tau = 0.1 T_p$
 $\tau = 0.025$



$\tau = 0.05 T_p$
 $\tau = 0.0125$



32

Primjer Fourierovog reda periodičnog pravokutnog signala

zaključujemo:

- razmak između susjednih spektralnih linija je konstantan $F_0 = 4 \text{ Hz}$ tj. proporcionalan osnovnom periodu signala
- razmak između susjednih spektralnih linija je neovisan o τ
- uži pravokutni signal u vremenskoj domeni \Rightarrow širi spektar (snaga signala se širi u frekvencijskom području)

33

Primjer Fourierovog reda periodičnog pravokutnog signala

- harmonici za koje je snaga jednaka nuli javljaju se na frekvencijama kF_0 za koje vrijedi

$$\sin \pi k F_0 \tau = 0 \Rightarrow \pi k F_0 \tau = m \pi \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

dakle

$$k F_0 = m / \tau \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

tako za $F_0 = 4 \text{ Hz}$ i $\tau = 0.2 T_p$ slijedi da spektralne komponente na frekvencijama $\pm 20 \text{ Hz}$, $\pm 40 \text{ Hz}$, $\pm 60 \text{ Hz}$ što odgovara Fourierovim koeficijentima c_k za $k = \pm 5, \pm 10, \pm 15, \dots$, su jednake nuli

34

Primjer Fourierovog reda periodičnog pravokutnog signala

promatraju se Fourierovi koeficijenti za

2. fiksiran τ i promjenljiv T_p

$A = 1$

i

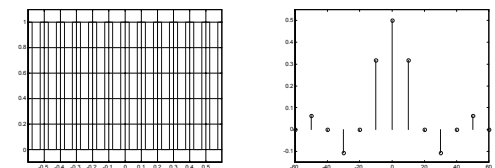
$\tau = 0.05 \text{ sec}$

Mijenjamo T_p :

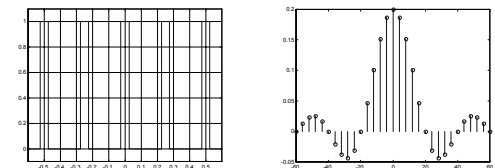
$T_p = 2\tau$; $T_p = 5\tau$; $T_p = 10\tau$; $T_p = 20\tau$

35

$\tau = 0.05$
 $T_p = 2\tau = 0.1$
 $F_0 = 10 \text{ Hz}$

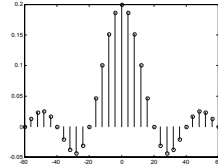
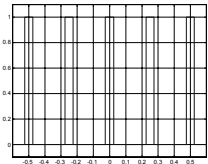


$\tau = 0.05$
 $T_p = 5\tau = 0.25$
 $F_0 = 4 \text{ Hz}$

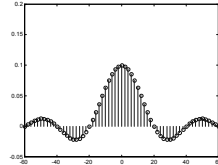
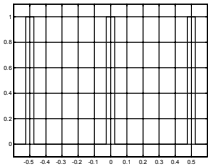


36

$\tau=0.05$
 $T_p=5\tau=$
 $=0.25$
 $F_0=4\text{Hz}$

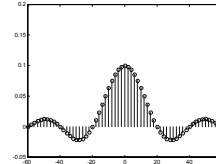
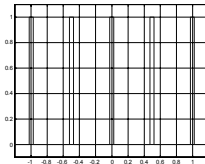


$\tau=0.05$
 $T_p=10\tau=$
 $=0.5$
 $F_0=2\text{Hz}$

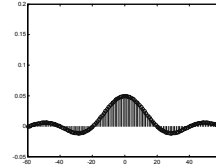
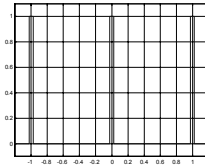


37

$\tau=0.05$
 $T_p=10\tau=$
 $=0.5$
 $F_0=2\text{Hz}$



$\tau=0.05$
 $T_p=20\tau=$
 $=1$
 $F_0=1\text{Hz}$



38

Fourierova transformacija kontinuiranog aperiodičnog signala

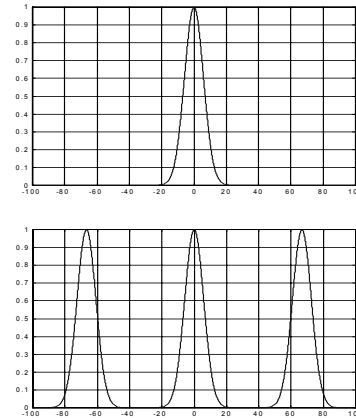
39

Fourierova transformacija kontinuiranog aperiodičnog signala

$x(t)$ aperiodični signal konačnog trajanja

kreiramo periodični signal peiroda T_p periodičnim
ponavljanjem signala $x(t)$

40



41

Fourierova transformacija kontinuiranog aperiodičnog signala

vrijedi da je: $x(t) = \lim_{T_p \rightarrow \infty} x_p(t)$

ova interpretacija kao i prethodni primjer ukazuju da bi
spektar $x(t)$ mogli dobiti iz spektra $x_p(t)$ uz $T_p \rightarrow \infty$

42

Fourierova transformacija kontinuiranog aperiodičnog signala

prikaz $x_p(t)$ uz pomoć Fourierovog reda je:

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t} \quad F_0 = \frac{1}{T_p}$$

gdje je

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} x_p(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt$$

43

Fourierova transformacija kontinuiranog aperiodičnog signala

budući je $x(t) = x_p(t)$ za $-T_p/2 \leq t \leq T_p/2$ možemo pisati:

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} x(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt$$

vrijedi također da je $x(t) = 0$ za $|t| > T_p/2 \Rightarrow$ granice
integrala mogu biti zamijenjene s $-\infty$ odnosno ∞

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt$$

44

Fourierova transformacija kontinuiranog aperiodičnog signala

Definiramo funkciju $X(F)$ koju nazivamo Fourierovom
transformacijom $x(t)$:

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi F t} dt$$

$X(F)$ je funkcija kontinuirane varijable F

$X(F)$ možemo povezati s prije izvedenim c_k na slijedeći
način:

45

Fourierova transformacija kontinuiranog aperiodičnog signala

$$\text{iz } X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi Ft} dt \quad \text{ i } \quad c_k = \frac{1}{T_p} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt =$$

$$c_k = \frac{1}{T_p} X(kF_0) \Leftrightarrow T_p c_k = X(kF_0) = X\left(\frac{k}{T_p}\right)$$

prema tome Fourierovi koeficijenti c_k su uzorci $X(F)$ uzeti na frekvencijama kF_0 te zatim pomnoženi s F_0 ili sa $1/T_p$

46

Fourierova transformacija kontinuiranog aperiodičnog signala

Fourierov red za $x_p(t)$ sada možemo pisati

$$x_p(t) = \frac{1}{T_p} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k}{T_p}\right) e^{j2\pi k F_0 t} \quad F_0 = \frac{1}{T_p}$$

prije je kazano da je $x(t) = \lim_{T_p \rightarrow \infty} x_p(t)$

promotrimo gornji Fourierov red kada $T_p \rightarrow \infty$

definiramo $\Delta F = 1/T_p \Rightarrow$

47

Fourierova transformacija kontinuiranog aperiodičnog signala

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Delta F) e^{j2\pi k \Delta F t} \Delta F$$

kada $T_p \rightarrow \infty$ tada se $x_p(t)$ reducira na $x(t)$

također, ΔF postaje diferencijal dF , $k\Delta F$ postaje kontinuirana frekvencijska varijabla F a gornja sumacija prelazi u integral po frekvencijskoj varijabli F

pa pišemo

48

Fourierova transformacija kontinuiranog aperiodičnog signala

$$\lim_{T_p \rightarrow \infty} x_p(t) = x(t) = \lim_{T_p \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Delta F) e^{j2\pi k \Delta F t} \Delta F$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F) e^{j2\pi Ft} dF$$

gornji izraz se naziva inverzna Fourierova transformacija

49

Fourierova transformacija kontinuiranog aperiodičnog signala

konačno pišemo transformacioni par:

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi Ft} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F) e^{j2\pi Ft} dF$$

50

Fourierova transformacija kontinuiranog aperiodičnog signala

Uobičajeno je Fourierovu transformaciju prikazati preko kružne frekvencije $\Omega = 2\pi F$, uz $dF = d\Omega / 2\pi \Rightarrow$

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

51

Fourierova transformacija kontinuiranog aperiodičnog signala

Fourierova transformacija egzistira ako je signal $x(t)$ konačne energije tj. ako je

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

alternativni skup uvjeta za egzistenciju Fourierove transformacije su i ovdje Dirichletovi uvjeti:

52

Fourierova transformacija kontinuiranog aperiodičnog signala

Dirichletovi uvjeti za egzistenciju Fourierove transformacije:

1. Signal $x(t)$ ima konačni broj konačnih diskontinuiteta
2. Signal $x(t)$ ima konačni broj maksimuma i minimuma
3. Signal $x(t)$ je apsolutno integrabilan

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

53

Gustoća spektra energije aperiodičnih vremenski kontinuiranih signala

energija aperiodičnog kontinuiranog signala $x(t)$, čija je Fourierova transformacija $X(F)$ je:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

kako je

$$|x(t)|^2 = x(t) \cdot x^*(t)$$

slijedi:

54

Gustoća spektra energije aperiodičnih vremenski kontinuiranih signala

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot x^*(t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} X^*(F) e^{-j2\pi Ft} dF \right] dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X^*(F) dF \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi Ft} dt \right] = \int_{-\infty}^{\infty} |X(F)|^2 dF \end{aligned}$$

55

Gustoća spektra energije aperiodičnih vremenski kontinuiranih signala

dakle vrijedi:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(F)|^2 dF$$

što je Parseval-ova relacija za aperiodičke kontinuirane signale konačne energije i izražava princip očuvanja energije u vremenskoj i frekvencijskoj domeni

56

Gustoća spektra energije aperiodičnih vremenski kontinuiranih signala

spektar signala $X(F)$ općenito je kompleksna funkcija pa je uobičajen njegov prikaz u polarnom obliku

$$X(F) = |X(F)| e^{j\theta(F)}$$

gdje je $|X(F)|$ amplitudni spektar a $\theta(F)$ fazni spektar

s druge strane integrand $|X(F)|^2$ u prethodnom integralu predstavlja distribuciju energije u signalu kao funkciju frekvencije.

57

Gustoća spektra energije aperiodičnih vremenski kontinuiranih signala

zato se $S_{xx}(F)$

$$S_{xx} = |X(F)|^2$$

naziva gustoća spektra energije signala $x(t)$

kako je prije pokazano integral $S_{xx}(F)$ preko svih frekvencija daje totalnu energiju signala

$S_{xx}(F)$ ne sadrži informaciju o faznom spektru pa nije moguće rekonstruirati signal opisan s $S_{xx}(F)$

58

Spektar realnih aperiodičnih vremenski kontinuiranih signala

za realni signal $x(t)$ slijedi iz para za Fourierovu transformaciju:

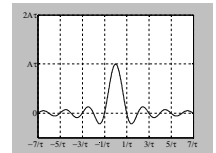
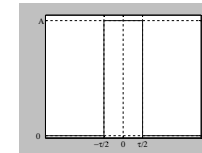
$$\begin{aligned} |X(-F)| &= |X(F)| \\ \arg(X(-F)) &= -\arg(X(F)) \end{aligned}$$

59

Primjer Fourierove transformacije aperiodičnog pravokutnog signala

Zadan je pravokutni signal za koji treba odrediti Fourierovu transformaciju:

$$x(t) = \begin{cases} A & |t| \leq \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases} \quad X(F) = A\tau \frac{\sin \pi F \tau}{\pi F \tau}$$

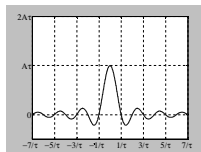
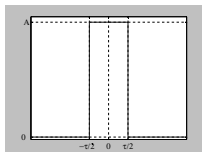


60

Primjer Fourierove transformacije aperiodičnog pravokutnog signala

Vremenski kontinuirani signal $x(t)$ je aperiodski i zadovoljava Dirichletove uvjete pa izračunavamo Fourierovu transformaciju

$$X(F) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j2\pi Ft} dt = A\tau \frac{\sin \pi F \tau}{\pi F \tau}$$



61

Primjer Fourierove transformacije aperiodičnog pravokutnog signala

Očigledno je da je $X(F)$ realna ($x(t)$ je paran) pa je dovoljno crtati samo jedan dijagram.

Koeficijenti Fourierovog reda (linijski spektar) periodičkog pravokutnog signala također su bili oblika $\sin x/x$.

$X(F)$ je zapravo dodirnica linijskog spektra periodičkog signala koji je nastao periodičnim ponavljanjem (s periodom T_p) aperiodičkog signala $x(t)$

$$X(F) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j2\pi Ft} dt = A\tau \frac{\sin \pi F \tau}{\pi F \tau}$$

62

Primjer Fourierove transformacije aperiodičnog pravokutnog signala

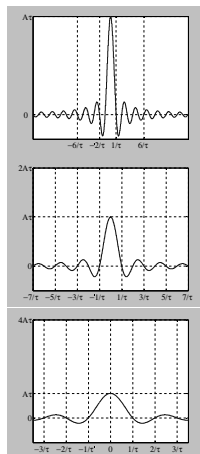
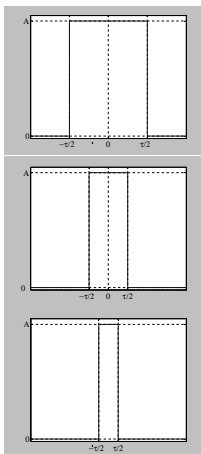
Drugim riječima Fourierovi koeficijenti c_k periodičkog signala $x_p(t)$ su jednostavno uzorci $X(F)$ na frekvencijama $kF_0 = k/T_p$ dakle:

$$c_k = \frac{1}{T_p} X(kF_0) = \frac{1}{T_p} X\left(\frac{k}{T_p}\right)$$

63

Usporedba
 Fourierovih
 transformacija
 za različite
 vrijednosti
 širine
 aperioidičnog
 pravokutnog
 signala

⇒
 relacija
 neodredenosti



64

