Digitalna obradba kontinuiranih signala

Signali i sustavi

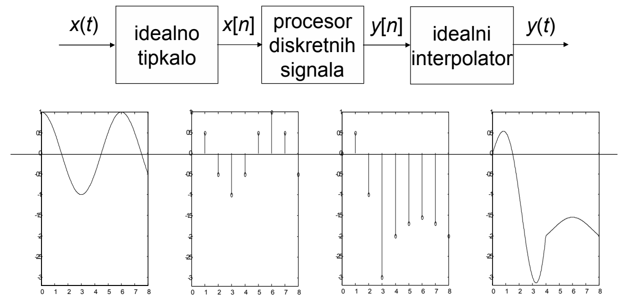
Digitalna obradba kontinuiranih signala

Digitalna obradba kontinuiranih signala se sastoji od tri osnovna koraka:

1. pretvorba vremenski kontinuiranog signala u vremenski diskretan signal
2. obradba vremenski diskretnog signala
3. pretvorba obrađenog diskretnog signala u vremenski kontinuirani signal

---

Digitalna obradba kontinuiranih signala



Digitalna obradba kontinuiranih signala

ovdje će se razmotriti:

1. otipkavanje
   i
3. interpolacija

Vremenska diskretizacija tipkanjem kontinuiranog signala

Vremenska diskretizacija tipkanjem kontinuiranog signala

otipkavanjem kontinuiranog signala $x(t)$ čiji je spektar $X(F)$ dobiva se signal $x_s(t)$ čiji je spektar $X_s(F)$ i pokazano je da pri tome vrijedi:

$$X_s(F) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(F - kF_s) = F_s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(F - kF_s)$$

spektar $X_s(F)$ otipkanog signala $x_s(t)$ je periodično ponavljani spektar $X(F)$ kontinuiranog signala.

Vremenska diskretizacija tipkanjem kontinuiranog signala

Pretpostavimo da je spektar $X(F)$ frekvencijski ograničen

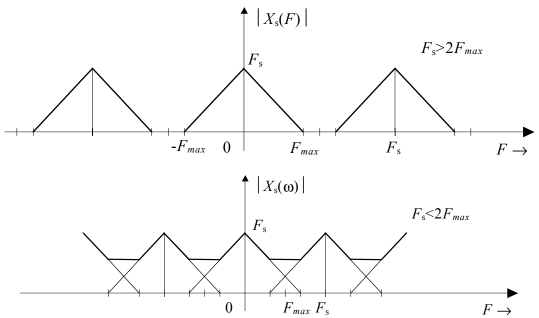
$X(F) = 0$ za $|F| > F_{max}$

Različite frekvencije tipkanja signala $F_s = 1/T$ mogu u spektru $X_s(F)$ izazvati različite rezultate zavisno od toga da li je $F_s - F_{max} > F_{max}$ ili $F_s - F_{max} < F_{max}$ odnosno

(i) $F_s > 2\,F_{max}$

(ii) $F_s < 2\,F_{max}$.

Vremenska diskretizacija tipkanjem kontinuiranog signala



preklapanje sekcija spektra (engl. “aliasing”)

Vremenska diskretizacija tipkanjem kontinuiranog signala

Diskretni se signal može smatrati ekvivalentnim kontinuiranom samo ako je moguće rekonstruirati izvorni signal $x(t)$ iz otipkanog $x_s(t)$ odnosno ako se iz spektra $X_s(F)$ može dobiti originalni $X(F)$. Postupak rekonstrukcije pretpostavlja izdvajanje osnovne sekcije spektra filtriranjem. To će biti moguće načiniti bez pogreške samo ako je spektar $X(F)$ ograničen na F_{max}, te ako je frekvencija otipkavanja $F_s > 2\,F_{max}$.

teorem otipkavanja

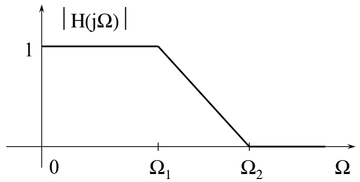
Antialiasing filtri

Aliasing, koji se javlja pri otipkavanju frekvencijski neomeđenog signala, izbjegava se filtriranjem kontinuiranog signala tzv. antialiasing filtrom.

aliasing filtri su niskopropusni analogni filtri koji propuštaju komponente spektra frekvencija nižih od pola frekvencije otipkavanja, dok više frekvencije guše.

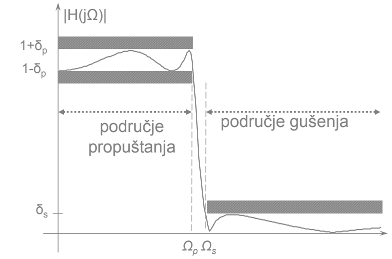
koriste se realni filtri koji imaju konačnu širinu prijelaznog pojasa frekvencijske karakteristike i konačno gušenje u pojasu gušenja

Antialiasing filtri

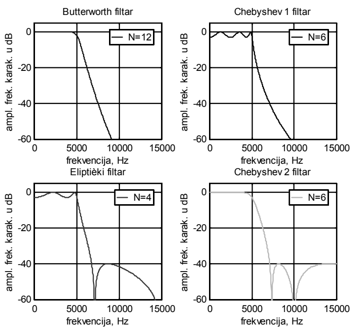


područje propuštanja za $0 < \Omega < \Omega_1$,
područje gušenja za $\Omega_2 < \Omega < \infty$,
vrijedi : $\Omega_1 < \Omega_2$.

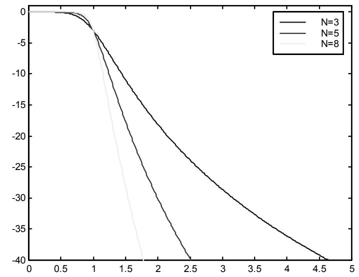
Amplitudna frekvencijska karakteristika eliptičkog filtra



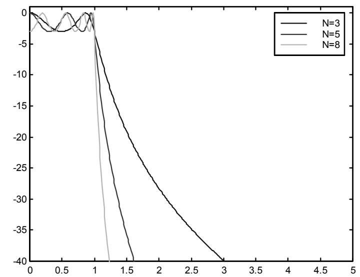
Niskopropusni analogni filtri



Butterworth filtri

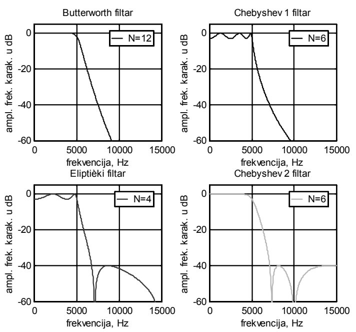


Chebyshev1 filtri



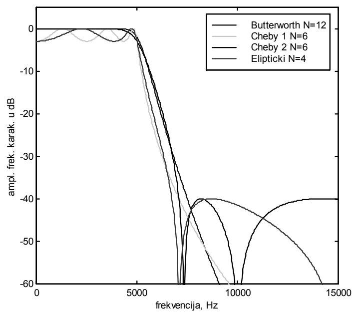
Usporedba filtara

Fp =5000 Hz
Fs = 7500 Hz
Rp=3 dB
Rs=40 dB



Usporedba filtara

Fp =5000 Hz
Fs = 7500 Hz
Rp=3 dB
Rs=40 dB



Otipkavanja kontinuiranog signala

greška uslijed aliasinga $$\varepsilon = 2\int_{F_o/2}^{\infty} \left|X(F)\right|^2 dF$$

Otipkavanje realnih signala

zbog konačne širine prijelaznog područja realnih antialiasing filtara potrebno je signal otipkavati nešto većom frekvencijom od dvostruke maksimalne frekvencije signala ⇒ oversampling

u digitalnoj telefoniji standardizirano je frekvencijsko područje od 3.4 kHZ koje osigurava telefonsku konverzaciju zadovoljavajuće kvalitete

u postupku digitalizacije otipkavanje se provodi s 8 kHz što je više od dvostruke širine spektra signala

Otipkavanje realnih signala

slično je kod digitalne obradbe glazbenih signala, čija je frekvencijsko područje širine 20 kHz osigurava visoko vjernu reprodukciju

u slučaju pohrane analognog glazbenog signala na CD frekvencija otipkavanja je 44.1 kHz što je opet više od dvostruke maksimalne frekvencije signala

u realnim CD uređajima (Dual prije 12 godina) frekvencija otipkavanja 352.8 kHz (8 x oversampling)

Obnavljanje ili rekonstrukcija kontinuiranog signala iz diskretnog

Obnavljanje ili rekonstrukcija kontinuiranog signala iz diskretnog

Periodični spektar $X_s(F)$ može se dobiti i iz

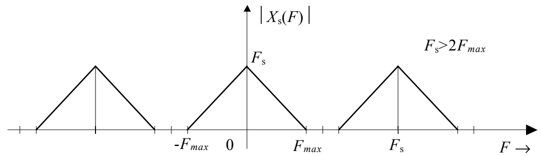
$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

$$X_s(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t)e^{-j2\pi Ft}dt \quad = \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t-nT)e^{-j2\pi Ft}dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)e^{-j2\pi FnT}$$

u dobivenom izrazu se može prepoznati Fourierov red za periodični spektar $X_s(F)$

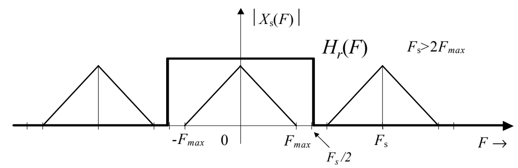
Obnavljanje ili rekonstrukcija kontinuiranog signala iz diskretnog



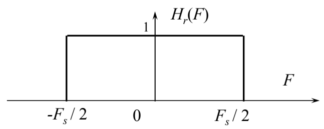
Da bi se dobila osnovna sekcija spektra $X_c(F)$ odnosno po mogućnosti $X(F)$, potrebno je izvršiti filtraciju $X_s(F)$ s filtrom frekvencijske karakteristike H_r ,

$$X_c(F) = X_s(F)\, H_r(F)$$

Obnavljanje ili rekonstrukcija kontinuiranog signala iz diskretnog



pretpostavimo za H_r idealan filter



$$H_r(F) = \begin{cases} 1 & |F| < F_s/2 \\ 0 & |F| > F_s/2 \end{cases}$$

Obnavljanje ili rekonstrukcija kontinuiranog signala iz diskretnog

Impulsni odziv je

$$h_r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_r(F)e^{j2\pi Ft}dF \quad = F_s\frac{\sin \pi F_s t}{\pi F_s t}$$

neka je frekvencija otipkavanja $F_s > 2\, F_{max}$, tako da unutar pojasa ponavljanja (- F_s/2, F_s/2), nema preklapanja sekcija spektra.

tada je $\quad X_s(F)H_r(F) = F_s X(F)$

uz prije izvedeno: $\quad X_s(F) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)e^{-j2\pi FnT}$

Obnavljanje ili rekonstrukcija kontinuiranog signala iz diskretnog

$$H_r(F)\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)e^{-j2\pi FnT}\right] = F_s X(F)$$

inverznom Fourierovom transformacijom spektra $X(F)$ slijedi:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F)e^{j2\pi Ft}dF =$$

$$= \frac{1}{F_s}\int_{-\infty}^{\infty} H_r(F)\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)e^{-j2\pi FnT}\right]e^{j2\pi Ft}dF =$$

Obnavljanje ili rekonstrukcija kontinuiranog signala iz diskretnog

$$x(t) = \frac{1}{F_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi F(t-nT)}dF =$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\frac{\sin \pi F_s(t-nT)}{\pi F_s(t-nT)}$$

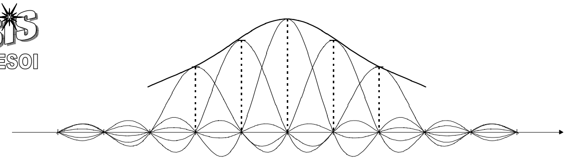
Kontinuirani signal $x(t)$ rekonstruiran je iz uzoraka otipkanog signala $x(nT)$ interpolacijom s funkcijom:

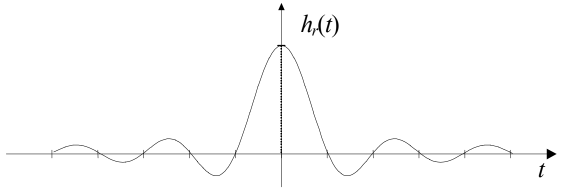
$$h_r(t) = F_s\frac{\sin \pi F_s t}{\pi F_s t}$$

Obnavljanje ili rekonstrukcija kontinuiranog signala iz diskretnog

možemo zaključiti kako je kontinuirani signal $x(t)$, koji ima frekvencijski omeđen spektar tj. $X(F) = 0$ za $|F|>F_s/2$, jednoznačno određen trenutnim vrijednostima u jednoliko raspoređenim trenucima $t_n = nT = n/F_s$

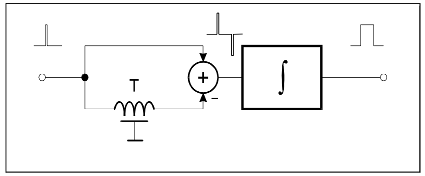
interpolacijska funkcija predstavlja impulsni odziv idealnog filtra

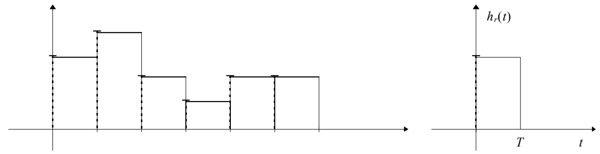




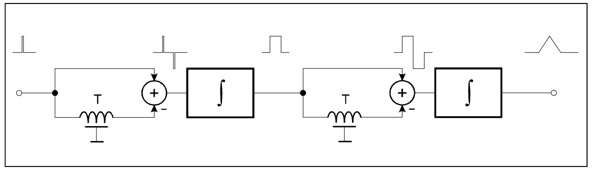
filtar ima nekauzalan odziv i prema tome je neostvariv

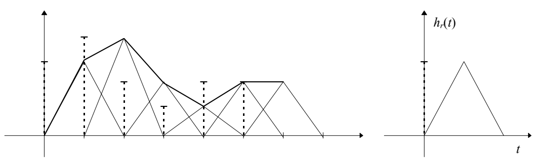
Interpolator nultog reda





Interpolator prvog reda



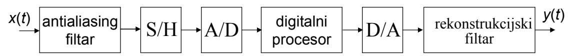


Digitalna obradba kontinuiranih signala

1. pretvorba vremenski kontinuiranog signala u vremenski diskretan signal izvodi se analogno-digitalnim (A/D) pretvornikom što znači da je vremenski diskretan signal potrebno kvantizirati i po amplitudi
2. obradba vremenski diskretnog signala izvodi se digitalnim procesorom
3. pretvorba obrađenog diskretnog signala u vremenski kontinuirani signal izvodi se pomoću digitalno-analognog (D/A) pretvornika

Digitalna obradba kontinuiranih signala

Lanac sklopova potrebnih za digitalnu obradbu kontinuiranih signala prikazan je blok dijagramom



Diskretizacija kontinuiranoga spektra

Diskretizacija kontinuiranoga spektra

Spektar aperiodičnih kontinuiranih signala je kontinuiran

spektar aperiodičnih diskretnih signala također je kontinuiran i još k tome i periodičan

ovdje se razmatraju postupak otipkavanja spektra tj. diskretizacija u spektralnoj domeni

postupak koji ćemo ovdje primijeniti identičan je postupku primijenjenom kod otipkavanja vremenski kontinuiranih signala

Diskretizacija kontinuiranoga spektra

diskretizaciju kontinuiranog spektra možemo interpretirati kao modulaciju impulsnog niza

$$\delta_{F_0} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(F - kF_0)$$

funkcijom $X(F)$ dakle:

$$X_d(F) = X(F)\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(F - kF_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(kF_0)\delta(F - kF_0)$$

Frekvencijska analiza diskretnih aperiodičnih signala

Periodičan niz $\delta_{F_0}(F)$ nastao ponavljanjem delta funkcije svakih F_0, kao svaka periodična funkcija se dade predstaviti Fourierovim redom, gdje su amplitude dane s:

$$\delta_{F_0}(F)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi nT_pF} \qquad T_p=\frac{1}{F_0}$$

gdje su amplitude c_n dane s:

$$c_n=\frac{1}{F_0}\int_{-F_0/2}^{F_0/2}\delta(F)e^{-j2\pi nT_pF}dF=\frac{1}{F_0}$$

Frekvencijska analiza diskretnih aperiodičnih signala

slijedi:

$$\delta_{F_0}(F)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi nT_pF}=\frac{1}{F_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi nT_pF}$$

inverznom transformacijom $X_d(F)$ dobiva se kontinuirani signal $x_d(t)$ koji odgovara otipkanom spektru:

$$x_d(t)=\int_{-\infty}^{\infty} X_d(F)e^{j2\pi Ft}dF=$$

Diskretizacija kontinuiranoga spektra

$$x_d(t)=\int_{-\infty}^{\infty} X(F)\left(\frac{1}{F_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi nT_pF}\right)e^{j2\pi Ft}dF$$

$$x_d(t)=\frac{1}{F_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X(F)e^{j2\pi F(t+nT_p)}dF$$

i konačno:

$$x_d(t)=\frac{1}{F_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t+nT_p), \qquad T_p=\frac{1}{F_0}$$

otipkavanje kontinuiranog spektra $X(F)$ aperiodičkog signala $x(t)$ rezultira u njegovom periodičnom ponavljanju svakih $T_p=1/F_0$

Obnavljanje kontinuiranog spektra iz diskretnog

Uz $X_d(F)$ prikazan kao:

$$X_d(F)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(kF_0)\delta(F-kF_0)$$

$x_d(t)$ dobivamo inverznom transformacijom kao:

$$x_d(t)=\int_{-\infty}^{\infty} X_d(F)e^{j2\pi Ft}dF=$$

$$x_d(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(kF_0)\delta(F-kF_0)\right)e^{j2\pi Ft}dF=$$

Obnavljanje kontinuiranog spektra iz diskretnog

$$x_d(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(kF_0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(F-kF_0)e^{j2\pi Ft}dF=$$

$$x_d(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(kF_0)e^{j2\pi kF_0t} \qquad F_0=\frac{1}{T_p}$$

$x_d(t)$ je periodična funkcija prikazana Fourierovim redom

rekonstrukciju kontinuiranog spektra postiže se izdvajanjem samo osnovne sekcije od $x_d(t)$ što se postiže množenjem $x_d(t)$ s idealnim pravokutnim otvorom

Obnavljanje kontinuiranog spektra iz diskretnog

$$w(t)=\begin{cases}1 & |t|<T_p/2\\ 0 & |t|>T_p/2\end{cases}$$

čiji je spektar:

$$W(\omega)=T_p\frac{\sin\pi FT_p}{\pi FT_p}=\frac{1}{F_0}\frac{\sin\pi F/F_0}{\pi F/F_0}$$

prvu sekciju signala dobivamo množenjem s $w(t)$:

$$x_d(t)w(t)=\frac{1}{F_0}x(t)=\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(kF_0)e^{j2\pi kF_0t}\right)\cdot w(t)$$

Obnavljanje kontinuiranog spektra iz diskretnog

spektar $X(F)$, izražen uz pomoć $X(nF_0)$ slijedi iz

$$X(F)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi Ft}dt=$$

$x(t)$ zamjenjujemo s prije izvedenim

$$X(F)=F_0\int_{-\infty}^{\infty} w(t)\cdot\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(kF_0)e^{j2\pi kF_0t}\right)e^{-j2\pi Ft}dt$$

$$=F_0\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(kF_0)\int_{-T_p/2}^{T_p/2} e^{-j2\pi t(F-kF_0)}dt=$$

Obnavljanje kontinuiranog spektra iz diskretnog

finalno spektar $X(F)$, izražen uz pomoć $X(nF_0)$, je:

$$X(F)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(kF_0)\frac{\sin\pi(F-kF_0)/F_0}{\pi(F-kF_0)/F_0}$$

dakle spektar $X(F)$ jednoznačno je određen iz svojih uzoraka $X(nF_0)$, interpolacijom funkcijom:

$$W(F)=\frac{\sin\pi F/F_0}{\pi F/F_0}$$

Zaključak: kontinuirani spektar signala koji ima omeđeno trajanje ($x(t)$=0 za $|t|>T_p/2$) jednoznačno je određen svojim uzorcima na jednoliko raspoređenim frekvencijama $F_k=kF_0=k/T_p$

Dimenzionalnost signala

tipkanje signala u vremenskoj domeni $\Rightarrow$ ponavljanje spektra s F_s (aliasing u FD)

tipkanje signala u frekvencijskoj domeni $\Rightarrow$ ponavljanje signala s T_p (aliasing u VD)

relativna greška u FD i VD može biti ocijenjena energijom signala i spektra izvan izabranog trajanja signala T_p, odnosno frekvencijskog pojasa F_s, prema ukupnoj energiji

Dimenzionalnost signala

$$\varepsilon_{FD} = \frac{2\int_{F_s/2}^{\infty} |X(F)|^2 dF}{2\int_0^{\infty} |X(F)|^2 dF} \qquad \varepsilon_{VD} = \frac{2\int_{T_p/2}^{\infty} |x(t)|^2 dt}{2\int_0^{\infty} |x(t)|^2 dt}$$

relativna greška u FD — relativna greška u VD

greške se mogu ocijeniti poznavanjem brzine opadanja signala i spektra za $|t| > T_p / 2$ odnosno $|F| > F_s / 2$

46

Dimenzionalnost signala

uz specificiranu dozvoljenu grešku aliasinga u FD i VD dobivamo T_p i F_s - trajanje i širinu pojasa signala.

potreban broj uzoraka u VD $\quad N_T T = T_p = N_T \frac{1}{F_s} \Rightarrow N_T = T_p F_s$

potreban broj uzoraka u FD $\quad N_{F_0} F_0 = F_s = N_{F_0} \frac{1}{T_p} \Rightarrow N_{F_0} = F_s T_p$

dimenzija signala $\quad N_T = N_{F_0} = T_p F_s$

47

Diskretna Fourierova transformacija (*DFT*)

48

Diskretna Fourierova transformacija (*DFT*)

DFT se koristi za numeričko određivanje spektra signala.

signal i njegov spektar treba predstaviti uzorcima odnosno otipkati $\Rightarrow$ otipkani signal i njegov otipkani spektar periodički će se produžiti

prije je dan par za Fourierovu transformaciju periodičnih diskretnih signala (koji imaju diskretan i periodičan spektar)

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} \qquad k = 0, 1, ..., N-1$$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N} \qquad n = 0, 1, ..., N-1$$

i on će biti korišten u numeričkom izračunavanju uzoraka spektra signala

49

Diskretna Fourierova transformacija (*DFT*)

prije je pokazano da pri otipkavanju kontinuiranog spektra aperiodičkog kontinuiranog signala rezultira u periodizaciji vremenskog signala i u slučaju vremenski neomeđenog signala nastaje aliasing u vremenskoj domeni

razmotrimo sada otipkavanje kontinuiranog spektra aperiodičkog diskretnog signala

spektar diskretnog aperiodičkog signala je kontinuiran (i periodičan s periodom 2π):

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

50

Diskretna Fourierova transformacija (*DFT*)

kako je spektar periodičan s 2π dovoljno je pri otipkavanju spektra uzeti samo uzorke iz osnovnog perioda

za N jednoliko raspodijeljenih uzoraka razmak između uzoraka će biti $2\pi/N$

otipkajmo sada $X(e^{j\omega})$ na frekvencijama $\omega = 2\pi k/N$

$$X(e^{j2\pi k/N}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi kn/N} \qquad k = 0,1,....,N-1$$

transformirajmo sumaciju u beskonačni zbroj sumacija od N članova

51

Diskretna Fourierova transformacija (*DFT*)

$$X(e^{j2\pi k/N}) = ...+\sum_{n=-N}^{-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} + \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} + $$
$$+ \sum_{n=N}^{2N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} + ...$$
$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=lN}^{lN+N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}$$

zamjenom indeksa n u unutarnjoj sumaciji s n-lN i zamjenom redoslijeda sumacije slijedi:

52

Diskretna Fourierova transformacija (*DFT*)

$$X(e^{j2\pi k/N}) = \sum_{n=0}^{N-1}\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n-lN]\right) e^{-j2\pi kn/N} \qquad k = 0,1,...,N-1$$

$$X(e^{j2\pi k/N}) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p[n] e^{-j2\pi kn/N} \qquad k = 0,1,...,N-1$$

signal: $\quad x_p[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n-lN]$

dobiven je periodičnim ponavljanjem $x[n]$ i periodičan je s periodom $N \Rightarrow$ može biti prikazan uz pomoć Fourierovog reda

53

Diskretna Fourierova transformacija (*DFT*)

$$x_p[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N} \qquad n = 0,1,....,N-1$$

pa su kako je prije pokazano za Fourierove koeficijente periodičnih diskretnih signala oni:

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_p[n] e^{-j2\pi kn/N} \qquad k = 0, 1, ..., N-1$$

ako su usporede c_k i $X(e^{j2\pi k/N})$ slijedi:

$$c_k = \frac{1}{N} X(e^{j2\pi k/N}) \qquad k = 0, 1, ..., N-1$$

54

Diskretna Fourierova transformacija (*DFT*)

stoga je:

$$x_p[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(e^{j2\pi k/N}) e^{j2\pi kn/N} \quad n = 0,1,....,N-1$$

prije izvedeni $X(e^{j2\pi k/N})$ možemo pisati:

$$X[k] \equiv X(e^{j2\pi k/N}) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p[n] e^{-j2\pi kn/N} \quad k = 0,1,....,N-1$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_p[n] e^{-j2\pi kn/N} \quad k = 0,1,....,N-1$$

Diskretna Fourierova transformacija (*DFT*)

otipkavanjem spektra aperiodičnog diskretnog signala može doći do pojave aliasianga u vremenskoj domeni

za diskretne signale $x[n]$ duljine L pri čemu je $L \le N$ nema pojave aliasinga i vrijedi da je:

$$x[n] = x_p[n] \quad 0 \le n \le N-1$$

iz svega slijedi:

Diskretna Fourierova transformacija (*DFT*)

za aperiodički diskretni signal $x[n]$ duljine L ($x[n] = 0$ za $n < 0$ i $n \ge L$) vrijedi par:

1. diskretna Fourierova transformacija (DFT)

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} \quad k = 0,1,....,N-1$$

2. inverzna diskretna Fourierova transformacija (IDFT)

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi kn/N} \quad n = 0,1,....,N-1$$

Diskretna Fourierova transformacija (*DFT*)

DFT

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} \quad k = 0,1,....,N-1$$

IDFT

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi kn/N} \quad n = 0,1,....,N-1$$