Signali i sustavi

Odziv i svojstva linearnih sustava

Sadržaj

- Odziv nepobuđenog sustava.
- Određivanje *fundamentalne matrice* razvojem u red.
- Klasična metoda određivanja fundamentalne matrice.
- Određivanje $\mathbf{\Phi}(t)$ pomoću $\mathcal{L}$ – transformacije.
- Odziv pobuđenog linearnog sustava.
  - Impulsni odziv sustava.
  - Odziv stanja sustava na eksponencijalnu pobudu.
  - Odziv sustava $\mathcal{L}$ – transformacijom.

Odziv nepobuđenog sustava

- Dinamičko vladanje i svojstva linearnog sustava određujemo rješavanjem jednadžbi stanja sustava:
- Rješenje matrične jednadžbe uz pobudu $\mathbf{u}$ i početno stanje $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ dati će nam stanje sustava od trenutka $t_0 = 0$ do bilo kojeg trenutka t.
- Homogeni dio (bez pobude):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t),$$

uz rubni uvjet, odnosno uz početno stanje $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$.

Odziv nepobuđenog sustava

- Pretpostavimo $\mathbf{x}(t)$ oblika :
  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1 t + \ldots + \mathbf{c}_k t^k + \ldots$, gdje su $\mathbf{c}_k$ vektori.
- Uvrstimo u diferencijalnu jednadžbu stanja:

$$\mathbf{c}_1 + 2\mathbf{c}_2 t + \ldots + k\mathbf{c}_k t^{k-1} + \ldots = \mathbf{A}(\mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1 t + \ldots + k\mathbf{c}_k t^k + \ldots),$$

- pa izjednačimo iste potencije od t:

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{A}\mathbf{c}_0,$$

$$\mathbf{c}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{c}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{A}^2\mathbf{c}_0,$$

... ili općenito:

$$\mathbf{c}_3 = \frac{1}{3}\mathbf{A}\mathbf{c}_2 = \frac{1}{3\cdot 2}\mathbf{A}^3\mathbf{c}_0, \ldots$$

Odziv nepobuđenog sustava

- Uvrštavanjem $\mathbf{c}_k$ u izraz za $\mathbf{x}(t)$ dobivamo:

$$\mathbf{x}(t) = \left[\left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{1!} + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 t^2 + \ldots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k + \ldots\right)\right]\mathbf{x}(0).$$

- Razvoj sliči eksponencijalnoj funkciji, ali od matrice $\mathbf{A}$!

$$\mathbf{x}(t) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}\right]\mathbf{x}(0) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0).$$

matrična eksponencijala $\mathbf{\Phi}(t)$

- Svojstva $\mathbf{\Phi}(t)$:

$$\dot{\mathbf{\Phi}}(t) = \mathbf{A}\Phi(t),$$

$$\text{uz} \qquad \mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}, \quad \mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}.$$

Odziv nepobuđenog sustava

- Poznavanje $\mathbf{\Phi}(t)$ i $\mathbf{x}_0 \Rightarrow$ omogućuje određivanje stanja sustava za bilo koji $t > t_0$.
- $\mathbf{\Phi}(t)$ – prijelazna ili fundamentalna matrica, transformira početno stanje $\mathbf{x}_0$ u stanje $\mathbf{x}(t)$:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{\Phi}(t-t_0)\mathbf{x}(t_0).$$

- Deriviranje i integriranje $\mathbf{\Phi}(t)$:

$$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t},$$

$$\int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}\tau}d\tau = \mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}t} - e^{\mathbf{A}t_0}).$$

Određivanje fundamentalne matrice razvojem u red

- Pogodno za numeričko određivanje fund. matrice.
- Aproksimacija matrice $e^{\mathbf{A}t}$ s N članova reda:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}(\mathbf{A}t)^2 + \ldots + \frac{1}{N!}(\mathbf{A}t)^N.$$

- Izbor N: $\left\|\frac{1}{N!}(\mathbf{A}t)^N\right\| < \varepsilon.$
- Potreban N ovisit će o vlastitim vrijednostima matrice.

Određivanje fundamentalne matrice razvojem u red

- Primjer matrične eksponencijale:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{A}t} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Određivanje fundamentalne matrice razvojem u red

- Primjer matrične eksponencijale:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{A}t} \approx \begin{bmatrix} 1+t & 0 & 0 \\ -3t & 1-2t & 0 \\ 3t & t & 1-t \end{bmatrix}$$

Određivanje fundamentalne matrice razvojem u red

- Primjer matrične eksponencijale:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{A}t} \approx \begin{bmatrix} 1+t+t^2/2 & 0 & 0 \\ -3t+3t^2/2 & 1-2t+2t^2 & 0 \\ 3t-3t^2/2 & t-3t^2/2 & 1-t+t^2/2 \end{bmatrix}$$

Određivanje fundamentalne matrice razvojem u red

- Primjer matrične eksponencijale:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ -e^{t}+e^{-2t} & e^{-2t} & 0 \\ e^{t}-e^{-2t} & -e^{-2t}+e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Određivanje fundamentalne matrice razvojem u red

- Fiksiramo $t = 1$:

$$e^{\mathbf{A}\cdot 1} = \begin{bmatrix} 2{,}72 & 0 & 0 \\ -2{,}58 & 0{,}14 & 0 \\ 2{,}58 & 0{,}23 & 0{,}37 \end{bmatrix}$$

- Numerički postupak:

$$e^{\mathbf{A}\cdot 1} \approx \begin{bmatrix} 2{,}72 & 0 & 0 \\ -2{,}58 & 0{,}14 & 0 \\ 2{,}58 & 0{,}23 & 0{,}37 \end{bmatrix}$$

Određivanje fundamentalne matrice razvojem u red

- Iterativni postupak određivanja:

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{(\mathbf{A}t)^2}{2!} + \frac{(\mathbf{A}t)^3}{3!} + \ldots =$$

$$= \mathbf{I} + \mathbf{A}t\left\{\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{2!} + \frac{(\mathbf{A}t)^2}{3!} + \ldots\right\}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}t\left\{\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{2}\left[\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{3}\left(\ldots\left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{N-1}\left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{N}\right)\right)\ldots\right)\right]\right\}$$

Klasična metoda određivanja fund. matrice

- $\mathbf{\Phi}(t)$ sadrži vremenske funkcije svih varijabli stanja.
- Svaku varijablu stanja možemo pretpostaviti u obliku:

homogena jednadžba stanja

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

Klasična metoda određivanja fund. matrice

- Dobiva se sustav homogenih jednadžbi za X_i koji daje rješenje $X_i \neq 0$ samo ako je determinanta sustava jednaka 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-p & a_{12} & & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-p & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & & \\ a_{n1} & & & \cdots & a_{nn}-p \end{vmatrix} = 0$$

- Slijedi karakteristični polinom u varijabli p, koji daje karakteristične korijene ili vlastite frekvencije sustava.

Klasična metoda određivanja fund. matrice

- Opće rješenje za svaku varijablu stanja sadrži titranja svim karakterističnim frekvencijama sustava: $x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} e^{p_j t}, \quad i=1,\ldots\ldots,n.$
- Amplitude eksp. određuju se iz početnih uvjeta $x_k(0)$.
- $x_i(t)$ na osnovu matrice svih rješenja $\varphi_{ik}(t)$.

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{ik}(t)x_k(0) \quad \text{odnosno } \mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0).$$

- Funkcije $\varphi_{ik}(t)$ su elementi fundamentalne matrice sustava.

Klasična metoda određivanja fund. matrice

- Specijalni slučaj: matrica $\mathbf{A}$ dijagonalna, $\mathbf{A} = \mathbf{\Lambda}$
  $\Rightarrow$ imamo n nezavisnih sustava prvog reda.
  $\dot{x}_i = \lambda_i x_i\,, \qquad i = 1,2,\ldots,n$
- Rješenje za x_i: $x_i = e^{\lambda_i t}x_i(0)$.
- Svaka varijabla x_i titra samo svojom frekvencijom:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = e^{\Lambda t}\mathbf{x}(0).$$

Klasična metoda određivanja fund. matrice

- Opća matrica $\mathbf{A}$ može se dijagonalizirati transformacijom varijabli stanja modalnom matricom $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{M} \quad \text{i} \quad \mathbf{A} = \mathbf{M}\,\mathbf{\Lambda}\,\mathbf{M}^{-1}.$$

- Rješenje možemo iskoristiti za izračunavanje matrične eksponencijale od $\mathbf{A}$:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{M}\, e^{\mathbf{\Lambda}t}\, \mathbf{M}^{-1},$$

- te slijedi odziv stanja:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{M}\, e^{\mathbf{\Lambda}t}\, \mathbf{M}^{-1}\, \mathbf{x}_0.$$

Geometrijska interpretacija rješenja

- Neka je matrica $\mathbf{A}$: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$
- Pripadne svojstvene vrijednosti i karak. vektori su:

$$s_1 = -3, \quad s_2 = -2, \quad s_3 = -1,$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Kako će se mijenjati stanje $\mathbf{x}(t)$, ako je početno stanje $\mathbf{x}(0)$ proporcionalno nekom od karakterističnih vektora?

Geometrijska interpretacija rješenja

MATLAB primjer

Određivanje $\mathbf{\Phi}(t)$ pomoću $\mathcal{L}$ – transformacije

- Vektor stanja sustava $\mathbf{x}(t)$ transformira se kao: $\mathcal{L}\{\mathbf{x}(t)\} = \mathbf{X}(s)$ i obratno $\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{X}(s)\} = \mathbf{x}(t)$.
- Jednadžba stanja sustava u s domeni: $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \longrightarrow s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s)$.
- $\mathbf{X}(s)$ stupčasti vektor $[X_1(s)\ X_2(s)\ \ldots\ X_n(s)]^T$
- Riješimo po $\mathbf{X}(s)$:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) = \hat{\mathbf{\Phi}}(s)\,\mathbf{x}(0).$$

Matrica karakterističnih frekvencija ili resolventa sustava.

Određivanje $\mathbf{\Phi}(t)$ pomoću $\mathcal{L}$ – transformacije

- ... $\mathcal{L}$ transf. fundamentalne matrice sustava $\mathbf{\Phi}(t)$:

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\hat{\mathbf{\Phi}}(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right\},$$

$$\hat{\mathbf{\Phi}}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}.$$

- Elementi matrice $\hat{\mathbf{\Phi}}(s)$ – razlomljene racionalne funkcije kompleksne frekvencije s.
  - Brojnik – polinom $n - 1$ stupnja.
  - Nazivnik – polinom n–tog stupnja.

Određivanje $\mathbf{\Phi}(t)$ pomoću $\mathcal{L}$ – transformacije

- Determinanta $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ kao produkt korjenih faktora:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (s - p_1)^{m_1}(s - p_2)^{m_2}\ldots(s - p_i)^{m_i}\ldots(s - p_n)^{m_n} = \prod_{1}^{n'}(s - p_i)^{m_i}.$$

- p_1 do p_n .... karakteristične frekvencije sustava.
- m_i .... višestrukost i–tog korijena $\sum_{i=1}^{n'} m_i = n.$

Određivanje $\mathbf{\Phi}(t)$ pomoću $\mathcal{L}$ – transformacije

- Determinanta $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ kao polinom:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + d_1 s^{n-1} + \ldots + d_{n-1}s + d_n$$

- koeficijenti polinoma $\{d_i\}$ mogu se dobiti iz tragova matrice $\mathbf{A}$ i njenih potencija:

$$\text{Trag matrice } \mathbf{T}_1 = tr\ \mathbf{A} = tr\left[a_{ij}\right] = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$$d_1 = -\operatorname{tr}\mathbf{A}$$

$$d_2 = -\frac{1}{2}(d_1 \operatorname{tr}\mathbf{A} + \operatorname{tr}\mathbf{A}^2)$$

$$d_n = -\frac{1}{n}(d_{n-1}\operatorname{tr}\mathbf{A} + d_{n-2}\operatorname{tr}\mathbf{A}^2 + \ldots + d_1\operatorname{tr}\mathbf{A}^{n-1} + \operatorname{tr}\mathbf{A}^n)$$

- iterativni postupak

Određivanje $\mathbf{\Phi}(t)$ pomoću $\mathcal{L}$ – transformacije

- Inverzna $\mathcal{L}$ transformacija od $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$.
  - Razvojem u parc. razlomke svakog elementa $\varphi_{jk}(s)$

$$\hat{\mathbf{\Phi}}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \sum_{k=1}^{n'}\sum_{j=1}^{m_k}\mathbf{C}_{jk}\frac{1}{(s - p_k)^j}$$

$$\mathbf{C}_{jk} = \frac{1}{(m_k - j)!}\frac{d^{m_k - j}}{ds^{m_k - j}}\left[(s - p_k)^{m_k}\hat{\mathbf{\Phi}}(s)\right]_{s = p_k}$$

$$\mathbf{C}_{jk} = \frac{1}{(m_k - j)!}\frac{d^{m_k - j}}{ds^{m_k - j}}\left[\frac{\operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)^{m_i}}\right]_{s = p_k}$$

Određivanje $\mathbf{\Phi}(t)$ pomoću $\mathcal{L}$ – transformacije

- U slučaju jednostrukog korijena:

$$\mathbf{C}_{1k} = \left[(s - p_k)\hat{\mathbf{\Phi}}(s)\right]_{s = p_k} = \frac{\operatorname{adj}(p_k\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\prod_{\substack{1 \\ i \neq k}}^{n}(p_k - p_i)}.$$

- Inverzna transformacija daje fundamentalnu matricu oblika:

$$\mathbf{\Phi}(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{p_k t}\sum_{j=1}^{m_k}\mathbf{C}_{jk}\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}.$$

- Suma eksponencijala eventualno pomnoženih polinomom u varijabli t, $(m_k - 1)$ stupnja, ako je frekvencija (p_k) višestruki korijen.

Odziv pobuđenog linearnog sustava

- Za totalni odziv sustava treba odrediti rješenje nehomogene matrične jednadžbe $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$
- Lagrange–ova metoda varijacije parametara
  - proizvoljne konstante rješenja homogene jednadžbe pretpostave se kao funkcija vremena:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{f}(t).$$

- Uvrštenjem u jednadžbu sustava slijedi:

$$e^{\mathbf{A}t}\dot{\mathbf{f}}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}$$

odnosno: $\dot{\mathbf{f}}(t) = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$

Odziv pobuđenog linearnog sustava

- Integriranjem u intervalu (0, t] slijedi:

$$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{f}(t) \longleftarrow \mathbf{f}(t)-\mathbf{f}(0)=\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

$$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}t}\left[\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau+\mathbf{f}(0)\right]$$

- Za $t = 0$ slijedi: $\mathbf{x}(0) = \mathbf{f}(0)$,

  pa se stanje sustava može naći kao:

$$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)+\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau.$$

Odziv pobuđenog linearnog sustava

- Budući da je $\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$, stanje sustava se može zapisati i kao:

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0)+\int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau.$$

Titranje početnog stanja, ili funkcija stanja sustava $\mathbf{x}_n(t)$ kad nema pobude.

Stanje uzrokovano pobudom, ili odziv stanja mirnog sustava $\mathbf{x}_m(t)$.

Odziv pobuđenog linearnog sustava

- Uvrstimo stanje $\mathbf{x}(t)$ u izlaznu jednadžbu sustava:

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0)+\int_0^t \mathbf{C}\mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau+\mathbf{D}\mathbf{u}(t),$$

odziv sustava bez pobude

odziv mirnog sustava

ili, općenito za pobudu koja počinje u trenutku t_0:

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\mathbf{\Phi}(t-t_0)\mathbf{x}(t_0)+\int_{t_0}^t \mathbf{C}\mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau+\mathbf{D}\mathbf{u}(t).$$

Odziv pobuđenog linearnog sustava

- Konvolucijski integral daje cjelovit odziv i kada t_0 teži prema $-\infty$, ako je pobuda trajna $(-\infty, \infty)$:

$$\mathbf{y}(t)=\int_{-\infty}^t \mathbf{C}\mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau+\mathbf{D}\mathbf{u}(t).$$

- Početno stanje $\mathbf{x}(-\infty)$ je proizvoljno – vlastito titranje uslijed početnog uvjeta ne postoji niti u jednom (konačnom) trenutku t.

Impulsni odziv sustava

- Pobuda sustava impulsima $\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}\delta(t)$.
  - Elementi stupca **U** su intenziteti impulsa na pojedinim ulazima sustava.
- Stanje sustava:

$$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0^-)+\int_{0^-}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{U}\delta(\tau)d\tau$$

$$=e^{\mathbf{A}t}\left[\mathbf{x}(0^-)+\mathbf{B}\mathbf{U}\right]=\mathbf{\Phi}(t)\left[\mathbf{x}(0^-)+\mathbf{B}\mathbf{U}\right].$$

  - Stanje sustava bez pobude određeno stanjem $\mathbf{x}(0^-)$.
  - Stanje mirnog sustava određeno impulsima pobude **BU.**

Impulsni odziv sustava

- Pobuda razložena na impulse: $\mathbf{u}(t)=\int_{0^-}^{t^+}\delta(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau.$
- Množenjem matricom **D** i uvrštavanjem u konvolucijski integral dobivamo odziv mirnog sustava:

$$\mathbf{y}(t)=\int_{0^-}^{t^+}\left[\mathbf{C}\mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}+\delta(t-\tau)\mathbf{D}\right]\mathbf{u}(\tau)d\tau,$$

$$\mathbf{y}(t)=\int_{0^-}^{t^+}\mathbf{H}(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau,$$

$$\mathbf{H}(t)=\mathbf{C}\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{B}+\delta(t)\mathbf{D}=\begin{bmatrix} h_{11}(t) & \cdots & h_{1m}(t) \\ h_{21}(t) & \cdots & h_{2m}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ h_{k1}(t) & \cdots & h_{km}(t) \end{bmatrix}.$$

matrica impulsnog odziva

Impulsni odziv sustava

- Konvolucijski integral predstavlja cjelovit odziv kauzalnog sustava kada t_0 teži u $-\infty$:

$$\mathbf{y}(t)=\int_{-\infty}^t \mathbf{H}(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau.$$

- U slučaju nekauzalnog sustava gornja granica integracije se proteže u $+\infty$:

$$\mathbf{y}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\tau)\mathbf{u}(t-\tau)d\tau.$$

Odziv stanja sustava na kauzalnu eksponencijalnu pobudu

- Pobuda sustava:
  - Elementi stupca **U** (U_1 do U_m) su amplitude stepenice na pojedinim ulazima sustava.
- Stanje sustava:

$$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)+\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{U}e^{s_0\tau}d\tau,$$

$$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)+e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{(s_0\mathbf{I}-\mathbf{A})\tau}\mathbf{B}\mathbf{U}d\tau,$$

$$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)+e^{\mathbf{A}t}\left[e^{(s_0\mathbf{I}-\mathbf{A})t}-\mathbf{I}\right](s_0\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U},$$

$$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)+(\mathbf{I}e^{s_0t}-e^{\mathbf{A}t})(s_0\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}.$$

Odziv stanja sustava na kauzalnu eksponencijalnu pobudu

- U izrazu prepoznajemo tri komponente:

$$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)-e^{\mathbf{A}t}(s_0\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}+(s_0\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}e^{s_0t}$$

$\mathbf{x}_n(t)$, stanje nepobuđenog sustava koje titra vlastitim frekv. sustava

$\mathbf{x}_{ms}(t)$, stanje mirnog sustava koje titra frekvencijom pobude s_0

$\mathbf{x}_{mp}(t)$, stanje mirnog sustava koje titra vlastitim frekv. sustava

Odziv stanja sustava na kauzalnu eksponencijalnu pobudu

- Spajamo članove koji titraju istim frekvencijama:

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{e^{\mathbf{A}t}\left[\mathbf{x}(0) - (\mathrm{s}_0\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}\right]}_{\text{Prijelazno stanje sustava}} + \underbrace{(\mathrm{s}_0\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}e^{\mathrm{s}_0 t}}_{\text{Stacionarno stanje sustava}}$$

  - Desni pribrojnik se naziva i stacionarnim stanjem u slučaju konstantne $\mathrm{s}_0 = 0$ ili periodičke $\mathrm{s}_0 = j\omega_0$ pobude.
  - Amplitude titranja prijelaznog stanja određene su neskladom između početnog stanja $\mathbf{x}(0)$ i stacionarnog stanja $\mathbf{x}_{\mathrm{ms}}(0)$ u trenutku $t = 0$.

Odziv stanja sustava na kauzalnu eksponencijalnu pobudu

- Odziv stanja sustava se može pisati i kao:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\left[\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_{ms}(0)\right] + \mathbf{x}_{ms}(t)$$

- Cjelovit odziv sustava na eksponencijalnu pobudu: $\mathbf{y}(t) = \underbrace{\mathbf{C\Phi}(t)\left[\mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{\Phi}}(\mathrm{s}_0)\mathbf{BU}\right]}_{\text{Prolazni ili prijelazni odziv sustava, } y_{\mathrm{pr}}(t)} + \underbrace{\left[\mathbf{C}\hat{\mathbf{\Phi}}(s_0)\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]\mathbf{U}\mathrm{e}^{\mathrm{s}_0 t}}_{\text{Stacionarni odziv sustava, } y_{\mathrm{s}}(t)}$
- Partikularno rješenje ili stacionarni odziv:

$$\mathbf{y}_s(t) = \underbrace{\left[\mathbf{C}\hat{\mathbf{\Phi}}(\mathrm{s}_0)\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]}_{\text{transfer matrica}}\mathbf{U}e^{\mathrm{s}_0 t} = \underbrace{\mathbf{H}(\mathrm{s}_0)}_{\text{transfer matrica}}\mathbf{U}e^{\mathrm{s}_0 t} = \mathbf{Y}e^{\mathrm{s}_0 t}.$$

Odziv stanja sustava na kauzalnu eksponencijalnu pobudu

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Y}_1 \\ \mathrm{Y}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{Y}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(\mathrm{s}_0) & H_{12}(\mathrm{s}_0) & \cdots & H_{1m}(\mathrm{s}_0) \\ H_{21}(\mathrm{s}_0) & & & \\ \vdots & & & \vdots \\ H_{r1}(\mathrm{s}_0) & & \cdots & H_{rm}(\mathrm{s}_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{U}_1 \\ \mathrm{U}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{U}_m \end{bmatrix}$$

kompleksna amplituda eksponencijale na izlazu

$H_{ij}(\mathrm{s}_0)$, transfer funkcija između j – tog ulaza i i – tog izlaza za frekvenciju pobude s_0

kompleksna amplituda eksponencijale na ulazu

Odziv stanja sustava na kauzalnu eksponencijalnu pobudu

- Odziv sustava na harmonijsku pobudu, $\mathrm{s}_0 = j\omega$:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}e^{j\omega t}\mu(t),$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}[\mathbf{x}(0) - (j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}] + (j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}e^{j\omega t},$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C\Phi}(t)[\mathbf{x}(0) - (j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}] + [\mathbf{C}(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\ \mathbf{U}e^{j\omega t}.$$

- Stacionarni odziv:

$$\mathbf{y}_s(t) = \underbrace{\left[\mathbf{C}(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]}_{\text{transfer matrica pri frekvenciji } \omega}\mathbf{U}e^{j\omega t} = \underbrace{\hat{\mathbf{H}}(j\omega)}_{\text{transfer matrica pri frekvenciji } \omega}\mathbf{U}e^{j\omega t}.$$

- Veza transfer matrice i matrice impulsnog odziva: $\hat{\mathbf{H}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau.$

Odziv sustava $\mathcal{L}$ - transformacijom

- $\mathcal{L}$ transformacija jednadžbi stanja sustava:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{AX}(s) + \mathbf{BU}(s),$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{BU}(s),$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}(s),$$

$$\mathbf{X}(s) = \hat{\mathbf{\Phi}}(s)\mathbf{x}(0) + \hat{\mathbf{\Phi}}(s)\mathbf{BU}(s),$$

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\{\hat{\mathbf{\Phi}}(s)\}}_{\text{fundamentalna matrica } \mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}}\mathbf{x}(0) + \mathcal{L}^{-1}\{\hat{\mathbf{\Phi}}(s)\mathbf{BU}(s)\},$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{BU}(\tau)d\tau.$$

Odziv sustava $\mathcal{L}$ - transformacijom

- $\mathcal{L}$ transformacija izlazne jednadžbe sustava:

$$\mathbf{Y}(\mathrm{s}) = \mathbf{CX}(\mathrm{s}) + \mathbf{DU}(\mathrm{s}),$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{\Phi}}(s)\mathbf{x}(0) + \left[\mathbf{C}\hat{\mathbf{\Phi}}(s)\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]\mathbf{U}(s).$$

- Miran sustav: $\mathbf{x}(0) = 0$:

$$\mathbf{Y}(s) = \underbrace{\left[\mathbf{C}\hat{\mathbf{\Phi}}(s)\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]}_{\text{transfer matrica}}\mathbf{U}(s) = \underbrace{\hat{\mathbf{H}}(s)}_{\text{transfer matrica}}\mathbf{U}(s).$$

- Elementi matrice $\hat{\mathbf{H}}(s)$ su transfer funkcije između pojedinih ulaza i pojedinih izlaza sustava.

Odziv sustava $\mathcal{L}$ - transformacijom

- Inverznom $\mathcal{L}$ transformacijom transfer matrice dobiva se matrica impulsnog odziva $\mathbf{H}(t)$:

$$\mathbf{H}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{\mathbf{H}}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{C}\hat{\mathbf{\Phi}}(s)\mathbf{B} + \mathbf{D}\}.$$