

Signal i sustavi

Hrvoje Babić, Branko Jeren

ZESOI
FER

6.003 Signals and Systems

U (4, 2)

Prereq.: 6.001, 6.002

Units: 4-2-9

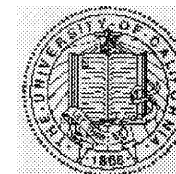
URL: <http://web.mit.edu/6.003/www/home.html>

Lab: TBA Lecture: TR12 (34-101) Recitation: WF10 (34-301) or WF11 (34-301) or WF12 (34-301) or WF1 (34-301) or WF11 (38-136) or WF12 (26-310) or WF10 (26-310) or WF11 (26-310) +final

Final: TUESDAY, DECEMBER 16 (9:00 A.M. - 12:00 NOON) in du Pont Gym (W31-140)

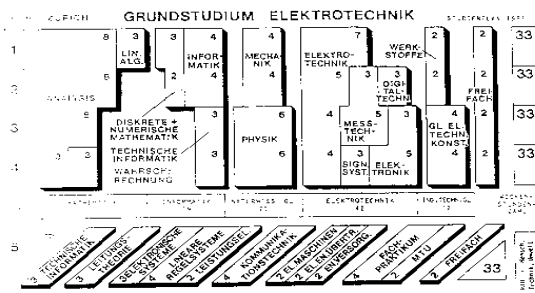
System analysis techniques and their application to circuit and filter design, robotic control, computer simulation, communication, and speech and image processing. Topics include: Laplace- and Z-transform techniques; system transfer functions; filtering; convolution and deconvolution; feedback stability analysis; Fourier transforms; modulation system analysis; sampling theorems. 4 Engineering Design Points.

J. K. White

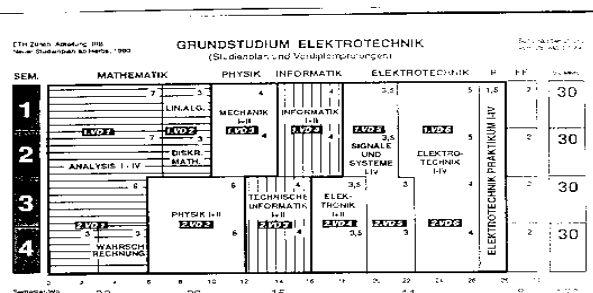


EECS 120 Signals and Systems

ETH Zürich, 1985



ETH Zürich, 1990



Director of Science in Computer Science and Engineering

Course VI Program 3: Computer Science and Engineering

General Institute Requirements 17 Subjects

Science Requirement 5

Humanities, Arts, and Social Sciences Requirement 8

Science Department Laboratory

RUS

Department

Subject not required

Required 8.001

Structure and Interpretation of Computer Languages, 15

6.002 Circuits and Electronics, 15; 6.001, 6.002

6.003 Signals and Systems, 15; 6.001, 6.002

6.004 Computational Science, 15; 6.001, 6.002

6.005 Introduction to Computer Science, 15

6.006 Laboratory in Software Engineering, 15

6.007 Introduction to Algebraic Systems, 15

6.008 Linear Algebra, 12; 6.001, 6.002

6.009 Undergraduate Thesis, 12

Restricted Electives: 36

1. One of the following two subjects:

VI-A Internship Program

The VI-A Internship Program combines industrial and research experience with classroom work through a series of organized assignments and projects combined with the regular course of study at MIT. Although students may stop at the bachelor's degree, the program is designed to prepare students for the master's and doctoral degrees by the end of the fifth year with one of the master's thesis required for the two degrees. The work of the two VI-A Internship assignments normally is as the basis for the thesis. Since the VI-A Internship Program is a joint program between MIT and the participating company, students are bona fide employees of the participating company and receive pay as well as academic credit for work.

Students in the VI-A Internship Program usually

and, when appropriate, receive students may request to take subjects after hours at sister institutions for transfer credit at MIT, when it is

Computer Science and Engineering

MIT

Signals and Systems

Bachelor of Science in Electrical Engineering

Course VI Program 1: Electrical Science and Engineering

General Institute Requirements 17 Subjects

Science Requirement 5

Humanities, Arts, and Social Sciences Requirement 8

Science Department Laboratory

RUS

Departmental Program

Subject names below are followed by credit units, prerequisites if any (consequences in italics)

Required Subjects:

6.001 Programs, 15

6.002 Circuits and Electronics, 15; 6.001, 6.002

6.003 Signals and Systems, 15; 6.001, 6.002

6.004 Computational Science, 15; 6.001, 6.002

6.005 Introduction to Computer Science, 15

6.006 Laboratory in Software Engineering, 15

6.007 Introduction to Algebraic Systems, 15

6.008 Linear Algebra, 12; 6.001, 6.002

6.009 Undergraduate Thesis, 12

Restricted Electives: 48

1. One subject each from three of the following four groups:

Group A: Thermodynamics, Statistical Mechanics

Group B: Probability

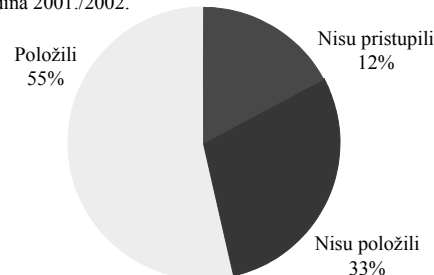
Group C: Probability

Electrical Science and Engineering

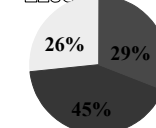
Signals and Systems

SIS - Prolaznost

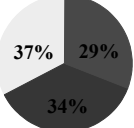
Školska godina 2001./2002.



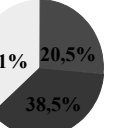
96./97.



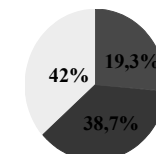
97./98.



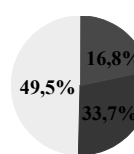
98./99.



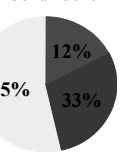
99./2000.



2000./2001.

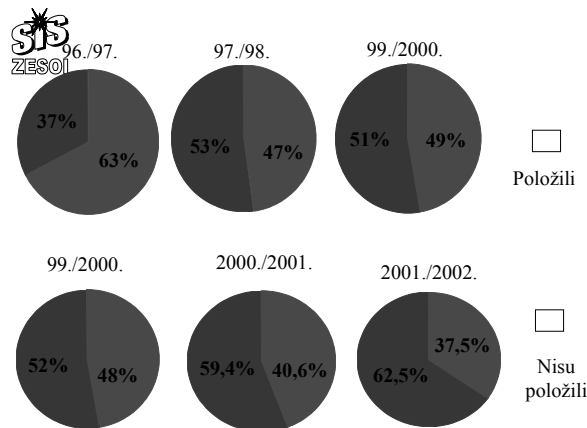
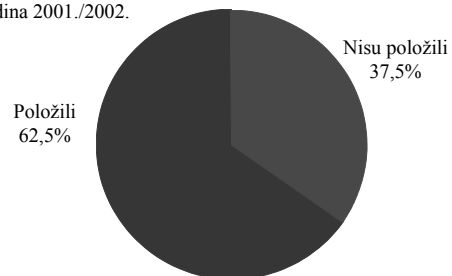


2001./2002.



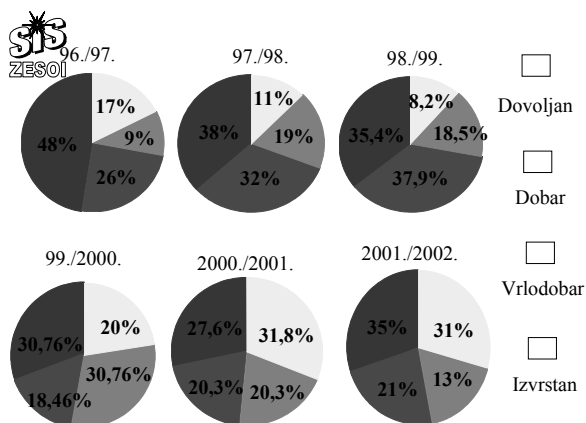
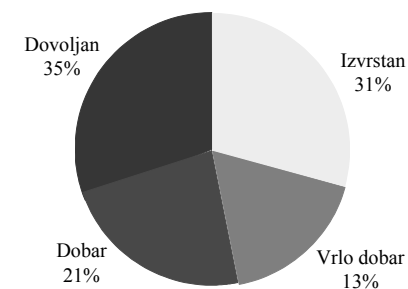
SIS - Prolaznost
(od onih koji su pristupili)

Školska godina 2001./2002.

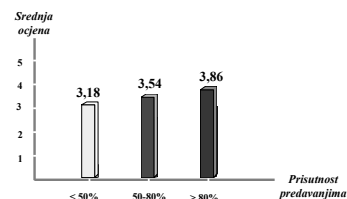


SIS - Ocjene

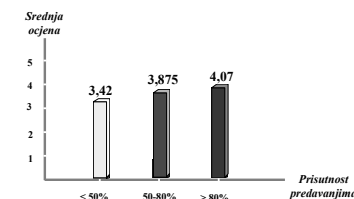
Školska godina 2001./2002.



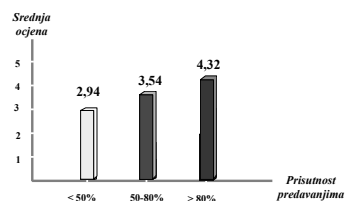
Veza prisutnost predavanja - Srednja ocjena (97./98.)



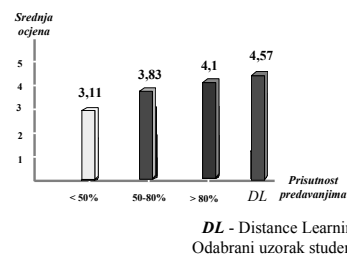
Veza prisutnost predavanja - Srednja ocjena (98./99.)



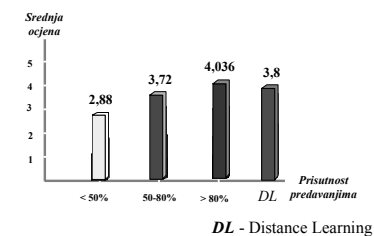
Veza prisutnost predavanja - Srednja ocjena (99./2000.)

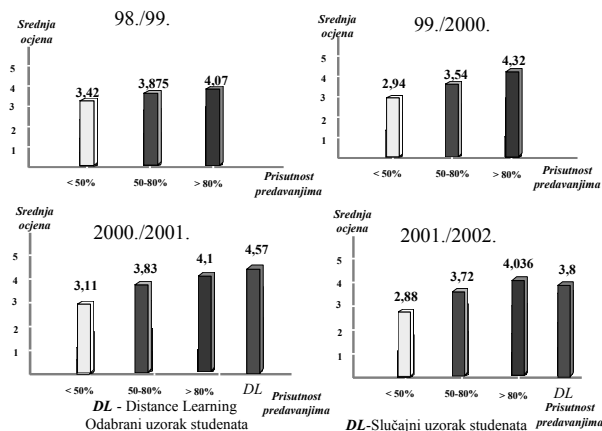


Veza prisutnost predavanja - Srednja ocjena (2000./2001.)



Veza prisutnost predavanja - Srednja ocjena (2001./2002.)





ZESOI Uvod u signale i sustave

- Sustav?... teško definirati...
- “Sustav je cjelina sastavljena od međusobno povezanih objekata gdje svojstva objekata i njihovo međudjelovanje određuju svojstva i vladanje cjeline”.
- Sustav je prirodna ili ljudska tvorevina.
- Multidisciplinarni problem: odrediti, podesiti, predvidjeti vladanje sustava, ili pak realizirati sustav željenih svojstava.

ZESOI Uvod u signale i sustave

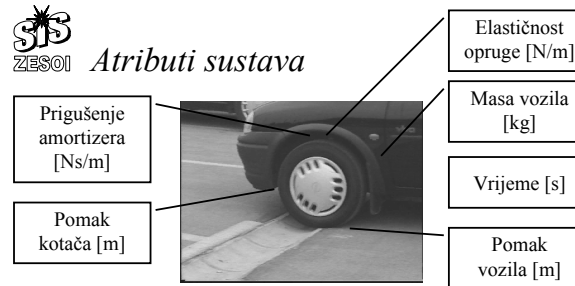
- Kvantitativna analiza sustava u različitim disciplinama vodi na iste matematičke postupke.
- Matematički postupci omogućavaju uvođenje apstraktne koncepcije.
- Pogodan matematički opis nekog realnog sustava naziva se matematičkim modelom tog sustava ili apstraktni sustav.
- Teorija sustava: skup matematičkih postupaka.

ZESOI Primjer tehničkog sustava



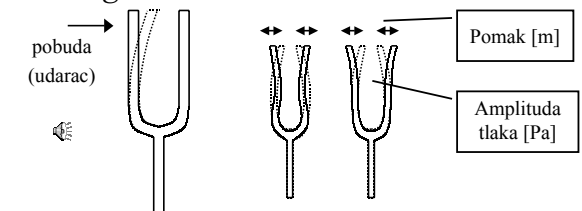
- Sustav: kotač – amortizer – vozilo

ZESOI Atributi sustava



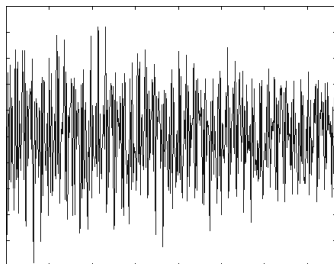
- Varijable sustava: mjerljive veličine.
- Nezavisna varijabla – vrijeme t .
- Ulazne i izlazne varijable.

ZESOI Primjer još jednog sustava – glazbena vilica



- Varijable sustava: mjerljive veličine.
- Nezavisna varijabla – vrijeme t .
- Ulazne i izlazne varijable.

ZESOI Analiza vladanja glazbene vilice (1)



- Sustav: glazbena vilica

ZESOI Model glazbene vilice

- Udarcom u vrh vilice pobuđujemo titranje.
- Elastična sila $F(t) = -ky(t)$ uzrokuje vraćanje vrha vilice u početni položaj.
- Kako je $F(t) = ma(t) = my''(t)$ imamo

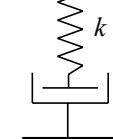
$$y''(t) = -(k/m)y(t)$$

Odnosno za $\omega_0^2 = k/m$

$$y''(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$$

ZESOI Model sustava kotač – amortizer – vozilo

- Na sličan način moguće je napisati diferencijalnu jednačinu za model kotač – amortizer – vozilo
- $$m \cdot y''(t) + b \cdot y'(t) + k \cdot y(t) = F(t)$$



Uz zamjenu

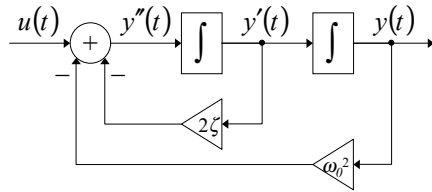
$$\zeta = \frac{b}{2m} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$y''(t) + 2\zeta \cdot y'(t) + \omega_0^2 y(t) = u(t)$$



Teorija sustava:
1. matematički model

$$y''(t) + 2\zeta \cdot y'(t) + \omega_0^2 y(t) = u(t)$$



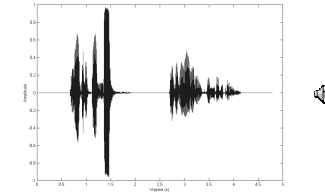
Teorija sustava:
2. analiza vladanja sustava

MATLAB / SIMULINK



Primjeri tipičnih signala

- Govorni signal – predstavlja tlak zraka kao funkciju vremena
- Vremenski prikaz govornog signala



Klasifikacija signala

- Signal: fenomen koji nosi neku informaciju.
- Signal je funkcija nezavisnih varijabli kao što su vrijeme, udaljenost, pozicija, temperatura, tlak itd.
- Signali mogu biti generirani putem računala (sintetizirani).



Klasifikacija signala

- Podjela s obzirom na prirodu nezavisne varijable koja može biti kontinuirana ili diskretna:
 1. kontinuirani signali,
 2. diskretni signali.



Klasifikacija signala

- Klasifikacija temeljena na vjerojatnosti kojom signali mogu biti jednoznačno opisani:
 1. deterministički signal – signal može biti jednoznačno opisan dobro definiranim procesom kao što su to matematički izrazi ili tablice,
 2. slučajni signal.



Klasifikacija signala

- Realni signali – nosi informaciju o realnom procesu.
- Kompleksni signali – generirani od realnih signala kako bi postigli poželjna svojstva.



Klasifikacija signala

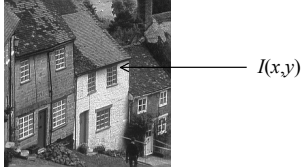
- Signal generiran iz jednog izvora naziva se skalarom.
- Signal generiran iz više izvora naziva se višekanalni signal i opisuje se vektorom.



Klasifikacija signala

- Jednodimenzionalni (1-D) signal je funkcija jedne nezavisne varijable.
- Govorni signal je primjer 1-D signala gdje je nezavisna varijabla vrijeme.

- Višedimenzionalni (M-D) signal je funkcija više od jedne nezavisne varijable.
- Signal slike, kao što je crno-bijela fotografija, je primjer 2-D signala gdje su dvije nezavisne varijable dvije prostorne varijable.



- Svaki okvir (*frame*) crno-bijelog digitalnog video signala je 2-D slika koja je funkcija 2 diskretne prostorne varijable pri čemu se svaki okvir pojavljuje u diskretnim trenucima vremena.
- Stoga se crno-bijeli digitalni video signal uzima kao primjer 3-D signala gdje su tri nezavisne varijable dvije prostorne varijable i vrijeme.

- Slika u boji je signal koji se sastoji od tri 2-D signala koji predstavljaju tri osnovne boje: crveno (*r*), zeleno (*g*) i plavo (*b*).
- Tri komponente slike u boji prikazane su ovim primjerom:



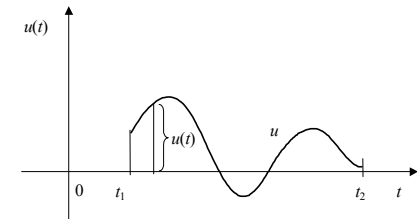
- Potpuna slika u boji dobiva se kombinacijom prethodne tri slike:



- Za većinu 1-D signala, nezavisna varijabla je vrijeme.
- Signale – vremenske funkcije označavati ćemo malim slovima – *x*, *v*, *u*.
- Trenutna vrijednost: $u(t)$, $t \in \mathbf{R}$.
- Ako je t ograničen na $\mathbf{T} \subset \mathbf{R}$, onda je signal u preslikavanje $u: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{U}$, gdje je \mathbf{T} domena, a \mathbf{U} kodomena od u .

$$u = \{(t, u(t)) \mid t \in \mathbf{T}\}.$$

- Ako je domena \mathbf{T} neprebrojiv i neprekinut (kontinuirani) skup, onda se radi o vremenski kontinuiranom signalu.



- Neka je domena interval $\mathbf{T} = (t_1, t_2)$, tad je
- signal u skup parova $\{(t, u(t))\}$ za $t \in \mathbf{T}$.
- vremenski kontinuirani signal s kontinuiranom amplitudom naziva se analogni signal

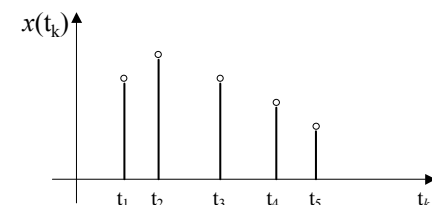
- Neka je \mathcal{U} skup svih signala iz \mathbf{T} na \mathbf{U} .
- Tada je signal u varijabla iz klase signala \mathcal{U} .
- Razlikujemo:
 - kodomena od $u(t)$ je \mathbf{U} (skup brojeva),
 - kodomena od u je \mathcal{U} (skup funkcija).

- Cijela funkcija: $u, u(\cdot), \{u(t)\}$.
- Trenutna vrijednost u trenutku t : $u(t)$.
- Segment (odsječak) funkcije u intervalu:

$$u_{(t_0, t_1)} = \{(t, u(t)) \mid t \in (t_0, t_1)\}$$

- Interval može biti:
 - otvoren (t_0, t_1) ,
 - zatvoren $[t_0, t_1]$ i
 - poluotvoren $(t_0, t_1]$, $[t_0, t_1)$.

- Ako je domena \mathbf{T} prebrojiv skup trenutaka $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_k\}$, onda govorimo o vremenski diskretnom signalu.





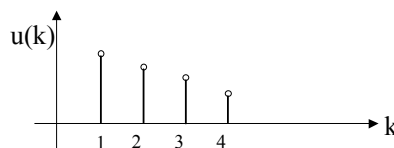
Diskretna vremenska varijabla

- Nizove vrem. trenutaka označavamo kao $\dots, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \dots$ ili $\{t_k\}, k \in \mathbb{Z}$
- Najjednostavniji primjer: aritmetički niz $t = \{t_0, t_0 + T, t_0 + 2T, \dots\}$,
- gdje je T konstanta (kvant vremena).



Grafička predodžba diskretnih signala

- Diskretni signali se definiraju za niz trenutaka $\{t_k\}, k \in \mathbb{Z}$,
- pa ih je moguće opisati pomoću rednog broja niza ili koraka k



- pa je $u = \{k, u(k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$
- $u(k)$ se naziva uzorkom



Primjeri vremenski diskretnih signala

- Dnevni tečaj stranih valuta,
- Dnevne cijene dionica,
- Godišnji broj studenata na pojedinim studijima,
- Godišnji broj putnika na pojedinim letovima.

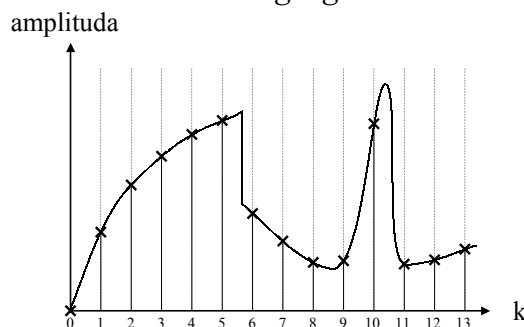


Vremensko diskretni kontinuirani signal

- Diskretni signal $\{x(k)\}$ moguće je generirati periodičnim otipkavanjem (uzorkovanjem) vremenski kontinuiranog signala $x_a(t)$,
- $x(k) = x_a(t)|_{t=kT} = x_a(kT), k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$



Primjer – otipkavanje vremenski kontinuiranog signala



Konačna i beskonačna os (domena) signala

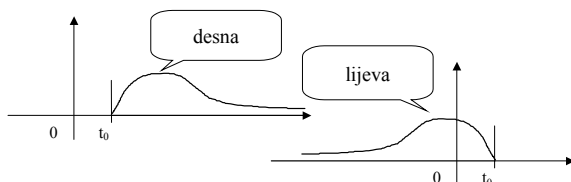
- Os (domena) kontinuiranog ili diskretnog signala može biti sadržana u konačnom ili beskonačnom intervalu.
- Konačna os:
 $T = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ ili $K = [k_0, k_1] \subset \mathbb{Z}$.
- Beskonačna os (neomeđena):
 $T = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ ili $K = (-\infty, \infty) = \mathbb{Z}$.



Konačna i beskonačna os (domena) signala

- Polubeskonačna os ("desna os", tj. omeđena slijeva):

$$T = [t_0, \infty) \subset \mathbb{R} \text{ ili } K = [k_0, \infty) \subset \mathbb{Z}.$$



Amplitude signala

- Ako je područje amplituda signala $U \subset \mathbb{R}$, neprebrojiv i kontinuiran skup, signal je nekvantiziran ili analogan.
- Ako je područje amplituda signala prebrojiv skup $U = \{\dots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \dots\}$, signal je kvantiziran.

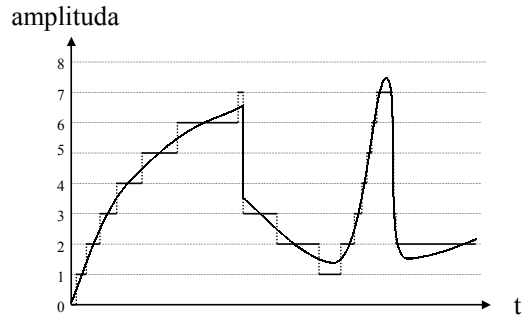


Diskretizacija amplitude

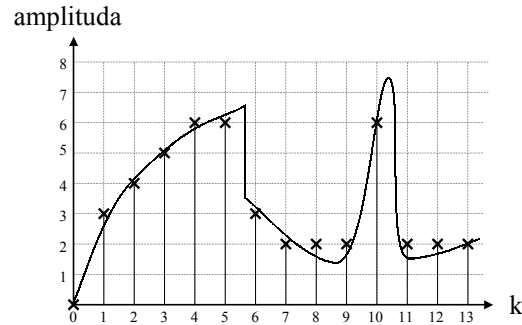
- Indeksacija amplituda u_n je preslikavanje $u: \mathbb{Z} \rightarrow U$,
 $u = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}, \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.
- Najjednostavniji primjer: aritmetički niz $u = \{\dots, a_0 - Q, a_0, a_0 + Q, a_0 + 2Q, \dots\}$,
- gdje je Q konstanta (kvant amplitude).
 $u_n = Q n, n \in \mathbb{N}$.



Primjer – kontinuirani signal s kvantiziranom amplitudom

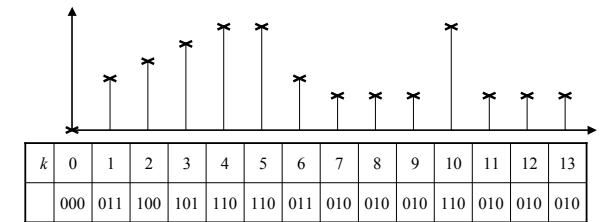


Primjer – kvantizacija po amplitudi i vremenu



Digitalni signali

- Vremenski diskretan signal s kvantiziranim amplitudama, prikazan uz pomoć konačnog broja znamenaka naziva se digitalnim



Operacije na signalu

- Promjene na signalu se događaju kad signal prolazi kroz medij ili sustav.
- Važne operacije: modificiranje vremenske i amplitudne osi signala.
- Radi jednoznačnosti koristit ćemo funkcije koje imaju inverziju – monotono rastuće ili padajuće funkcije.



Transformacija vremenske osi

- Neka funkcija τ preslikava staru os u novu

$$t_n = \tau(t_s).$$

- Novu vrijednost signala računamo kao

$$u_n(t) = u_s(\tau^{-1}(t)), t \in T_n.$$

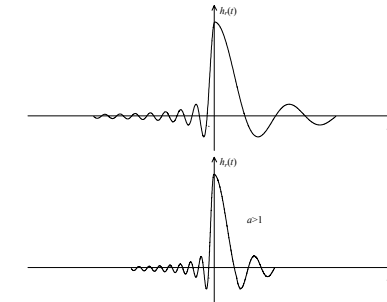
- Primjer (stezanje ili rastezanje signala):

$$\tau(t) = t / a \quad t \in T_s.$$

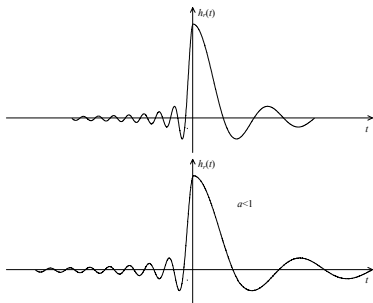
$$\tau^{-1}(t) = a t \quad t \in T_n.$$



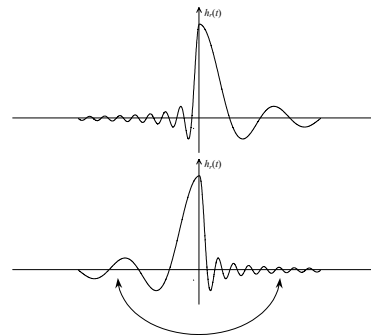
Primjer transformacije vremenske osi



Primjer transformacije vremenske osi



Primjer transformacije vremenske osi



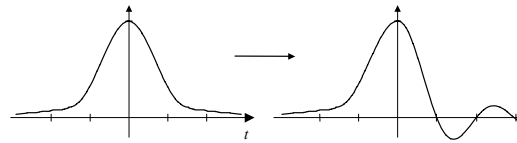
Za $a < 0$
(kao i za sve monotono padajuće funkcije τ)
imamo reverziju vremenske osi !!!



Transformacija područja signala

- Neka je T os signala u_s . Imamo
- $u_s: T \rightarrow U_s$, gdje je U_s područje signala.
- Preslikamo “staro” područje U_s u novo U_n :
- $\varphi: U_s \rightarrow U_n$.
- Dobili smo novi signal u_n :
- $u_n(t) = \varphi(u_s(t)), t \in T$.
- Pri tom funkcija φ mora imati inverziju (ako želimo restaurirati stari signal).

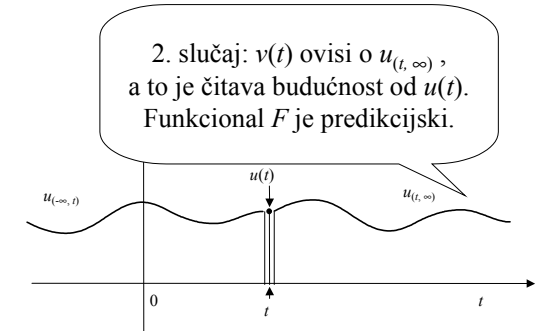
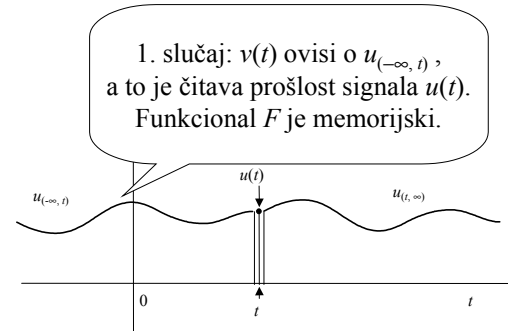
- Jednostavno preslikavanje – kompozicija funkcija:
- $v(t) = f(u(t))$, $v = f(u)$, $u \in \mathcal{U}$, $v \in \mathcal{V}$.
- Trenutna vrijednost preslikava se u trenutnu.
- Složenije preslikavanje – operator pridružuje signalu drugi signal:
- $v = F(u)$, $u \in \mathcal{U}$, $v \in \mathcal{V}$.



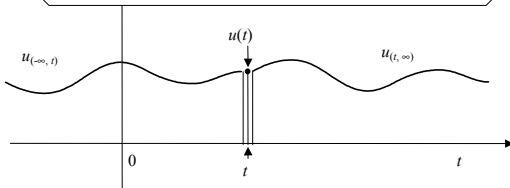
- Signalu slijeva u cjelini pridružen je signal na desnoj strani (ne trenutnim vrijednostima!).

- Neka F preslikava signal u iz intervala $[t_1, t_2]$ u signal v u intervalu $[t_1, t_2]$.
- $v_{[t_1, t_2]} = F(u_{[t_1, t_2]})$
- Trenutna vrijednost $v(t)$, uz $t \in [t_1, t_2]$ zavisi od svih trenutnih vrijednosti $u(\tau)$ iz intervala $\tau \in [t_1, t_2]$!

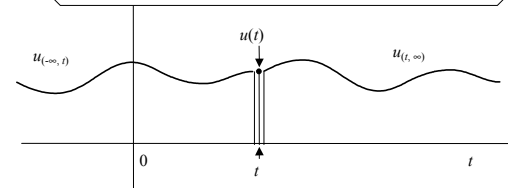
- Trenutna vrijednost $v(t)$ može se izraziti kao:
- $v(t) = F(u_{[t_1, t_2]}, t)$
- gdje je F funkcional koji funkciji u na intervalu $[t_1, t_2]$ pridružuje broj $v(t)$.
- Posebice su zanimljive 2 mogućnosti:
 - $v(t)$ ovisi od segmenta $[t_1, t]$ – prije t , ili
 - $v(t)$ ovisi od segmenta $(t, t_2]$ – poslije t .
- Trenutci t_1, t_2 mogu biti i u beskonačnosti.



3. granični slučaj: $v(t)$ ovisi samo o $u(t)$,
 $v(t) = f(u(t))$,
 postoji samo ovisnost trenutnih vrijednosti.



4. slučaj: $v(t)$ ovisi o $u_{(-\infty, \infty)}$,
 radi se o memorijsko-prediktivnom ili
 nekauzalnom preslikavanju.



- Linearni funkcional

$$v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t, \tau) u(\tau) d\tau$$

ili

$$v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) u(\tau) d\tau$$

$h(t)$ – težinska ili Greenova funkcija.

- Djelovanje više signala na jedan rezultirajući može se opisati funkcijom:

$$v(t) = f(u_1(t), u_2(t), u_3(t), \dots).$$

- Općenito, to je nelinearna funkcija, npr.

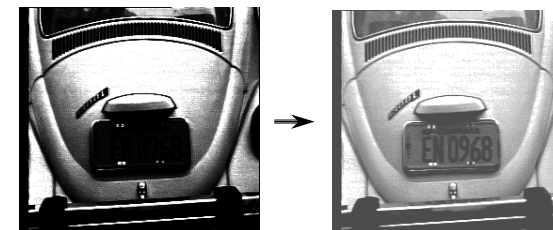
$$v(t) = [u_1(t)]^{u_2(t)},$$









- ili linearna, npr.

$$v(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t).$$

- Elementarne operacije – ne mogu se dalje razlagati.
- Važne elementarne operacije:
 - zbrajanje $v = u_1 + u_2$
 - množenje $v = u_1 u_2$
- Razlaganje f na elementarne operacije – Taylorov red s konačnim brojem članova.
- Funkcionalni: linearni ili nelinearni.

- Poboljšanje slike operacijama na histogramu



- izvorni signal 
- modifikacija vremenske osi (ponavljanjem ili izbacivanjem vremenskih uzoraka signala)  
- modifikacija visine glasa govornika  
- modifikacija trajanja izgovora poruke  
- modeliranje govora LPC modelom 
 - u svrhu učinkovitog prijenosa ili pohrane, tj. kodiranja