Signali i sustavi

Opći linearni sustavi

Linearni diferencijalni sustavi

Sadržaj

Signali i sustavi

Opći linearni sustavi

Primjeri kontinuiranih signala

- Za analizu linearnih sustava najveće značenje imaju:
  - kompleksna eksponencijala,
  - Diracova δ – funkcija.

Kompleksna eksponencijala

- $u(t) = \mathrm{U}e^{st}$; $s,\mathrm{U} \in \mathbf{C}$.
- Ovisno o kompleksnoj frekvenciji $s = \sigma + j\omega$ imamo slučajeve:
  - konstantnog ($s = 0$),
  - eksponencijalnog ($\omega = 0$)
  - harmonijskog signala ($\sigma = 0$).
- Pobuda kompleksnom eksponencijalom koristi se za analizu vladanja sustava u frekvencijskoj domeni.

Diracova δ - funkcija

- Diracova δ – funkcija

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0; \qquad \text{i} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1.$$

- $\delta(t)$ – singularna funkcija.
- Regularne + singularne funkcije = poopćene funkcije ili distribucije.

$$\delta(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\varphi(t)\; dt = \varphi(0).$$

Delta distribucija

Singularna delta funkcija

Ispitna funkcija, regularna u nuli

Skalar

Impulsni odziv i konvolucija

- Diracovu funkciju nazivamo i jedinični impuls.
- Poznavanje impulsnog odziva nekog sustava je dovoljno za potpun opis njegovog vladanja.
- Odziv linearnog vremenski stalnog sustava na opću pobudu opisuje se konvolucijskim integralom:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)\; d\tau,$$

gdje je $h(t)$ odziv sustava na jedinični impuls.

Linearne operacije na signalima

- Složeni signali se mogu predstaviti linearnom kombinacijom elementarnih signala:

$$u(t) = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{a}_k\; u_k(t),$$

- gdje su a_k – realne ili kompleksne konstante, a $\{u_k(t)\}$ prebrojiv skup elementarnih funkcija.
- Složeni se signali mogu predstaviti također i neprebrojivim skupom elementarnih funkcija:

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\lambda)\; u(t,\lambda)\, d\lambda, \qquad \lambda - \text{kontinuiran.}$$

Linearne operacije na signalima

- *Fourierov* red predstavlja primjer linearne kombinacije eksponencijala, čije frekvencije su aritmetički niz:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{a}_k\; e^{jk\omega_0 t}.$$

- Primjer neprebrojivog skupa je *Fourierov* integral:

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\lambda)\; e^{j\lambda t}\; d\lambda.$$

Primjer

- Predstavimo signal integralom delta funkcija

$$u(t)=\int_{-\infty}^{\infty} a(\lambda)\,\delta(t-\lambda)\,d\lambda,\quad a(\lambda)=u(\lambda).$$

- Djelovanje nekog stalnog linearnog sustava na signal *u* možemo opisati linearnim operatorom *F*:

$$F[u(t)]=F\left[\int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda)\,\delta(t-\lambda)\,d\lambda\right]=\int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda)\,F[\delta(t-\lambda)]\,d\lambda,$$

$$F[u]=y,\quad F[\delta]=h,$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda)\,h(t-\lambda)\,d\lambda \longrightarrow \text{konvolucijski integral !}$$

Harmonijska pobuda sustava

- Korisna za analizu linearnog nepromjenjivog sustava u frekvencijskoj domeni:

$$u(t)=\mathrm{U}e^{j\omega t}\quad\rightarrow\quad y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\,\mathrm{U}e^{j\omega\tau}d\tau.$$

- Nakon supstitucije $t-\tau=\vartheta$ i sređivanja izlazi:

$$y(t)=H(\omega)\,\mathrm{U}e^{j\omega t},\quad H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\vartheta)\,e^{-j\omega\vartheta}d\vartheta.$$

- Harmonijska pobuda daje harmonijski odziv – nema izobličenja ni viših harmonika.

Harmonijska pobuda sustava

- Veličina $H(\omega)$ je kompleksan broj koji nam pokazuje za svaku frekvenciju ω:
  - koliko se promijenila amplituda harmonijskog odziva
  - kakav je fazni pomak u odnosu na harmonijsku pobudu $u(t)$.
- $A(\omega)=|H(\omega)|$ je frekv. karakteristika amplitude,
- $\varphi(\omega)=\arg H(\omega)$ je frekv. karakteristika faze.
- Izraz za $H(\omega)$ predstavlja *Fourierov* integral ili *Fourierov* spektar impulsnog odziva sustava $h(t)$.

Pobuda sustava kompleksnom eksponencijalom

- Općenito, pobuda kompleksnom eksponencijalom opet daje kompleksnu eksponencijalu:

$$H(s)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\vartheta)\,e^{-s\vartheta}d\vartheta.$$

- To nam kazuje da je kompleksna eksponencijala svojstvena funkcija (*eigenfunction*) konvolucije!

Pobuda sustava kompleksnom eksponencijalom

- Izraz za $H(s)$ je ujedno izraz za dvostranu *Laplaceovu* transformaciju impulsnog odziva *h*.

$$H(s)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\vartheta)\,e^{-s\vartheta}d\vartheta.$$

- Izraz za jednostranu *Laplaceovu* transformaciju dobivamo uz kauzalnu pobudu $u(t)=\mathrm{U}e^{st}\cdot\mu(t)$!!!

Signali i sustavi

Linearni diferencijalni sustavi

Model sustava s ulazno izlaznim varijablama

- Diferencijalni sustavi su oni koji se daju opisati jednom ili više diferencijalnih jednadžbi.
- Linearni sustav s jednim ulazom i jednim izlazom:

$$\mathrm{a}_n y^{(n)}+\mathrm{a}_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+\mathrm{a}_0 y=f(t)=$$
$$=\mathrm{b}_m u^{(m)}+\mathrm{b}_{m-1}u^{(m-1)}+\ldots+\mathrm{b}_0 u.$$

- Desna strana od $f(t)$ – funkcija smetnje ili funkcija pobude, općenito funkcija ulaznog signala $u(t)$ i njegovih derivacija do m – tog reda, $m\le n$.

Model sustava s ulazno izlaznim varijablama

- Koeficijenti $\{\mathrm{a}_i\}$ i $\{\mathrm{b}_i\}$:
  - konstantni ⇒ vremenski stalan linearni sustav,
  - funkcija vremena ⇒ vremenski promjenjiv linearni sustav,
  - zavise od ulaznih ili izlaznih varijabli i njihovih derivacija ⇒ nelinearni sustav.
- Sustav je općenito opisan s više simultanih diferencijalnih jednadžbi.
- Često se više simultanih diferencijalnih jednadžbi svodi na jednu jednadžbu višeg reda koja veže jednu izlaznu i jednu ulaznu varijablu.

Model sustava s ulazno izlaznim varijablama

- Uvodi se operator deriviranja
  - $Dy=\dfrac{dy}{dt}$ odnosno,
  - $D^n y=\dfrac{d^n y}{dt^n}.$

Model sustava s ulazno izlaznim varijablama

- Svojstva operatora deriviranja:

$$\mathrm{D}^n\left(\mathrm{D}^m y\right)=\mathrm{D}^m\left(\mathrm{D}^n y\right)=\mathrm{D}^{n+m} y$$

$$\mathrm{D}^n\left(\mathrm{C}_1 y_1+\mathrm{C}_2 y_2\right)=\mathrm{C}_1\mathrm{D}^n y_1+\mathrm{C}_2\mathrm{D}^n y_2$$

$$\left(\mathrm{D}+\mathrm{C}_1\right)\left(\mathrm{D}+\mathrm{C}_2\right)y=\left[\mathrm{D}^2+\left(\mathrm{C}_1+\mathrm{C}_2\right)\mathrm{D}+\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2\right]y.$$

- Diferencijalna jednadžba napisana pomoću operatora D

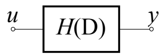
$$\left(\mathrm{a}_n\mathrm{D}^n+\ldots+\mathrm{a}_0\right)y=\left(\mathrm{b}_m\mathrm{D}^m+\ldots+\mathrm{b}_0\right)u.$$

Model sustava s ulazno izlaznim varijablama

- Skraćeni oblik zapisa:

$$A(\mathrm{D})y=B(\mathrm{D})u \quad \text{gdje su} \quad \mathrm{D}y\equiv\frac{dy}{dt},\ \mathrm{D}^n y\equiv\frac{d^n y}{dt^n}.$$

- Predstavljanje linearnog sustava pomoću operatora $H(\mathrm{D})$, gdje je $H(\mathrm{D}) = B(\mathrm{D}) / A(\mathrm{D})$



Klasične metode rješavanja

- Ako postoji funkcija smetnje ili pobude $f(t)$, linearna diferencijalna jednadžba je nehomogena.
- Jednadžba postaje homogena za $f(t) = 0$:

$$\mathrm{a}_n\frac{d^n y}{dt^n}+\ldots+\ \mathrm{a}_0 y=0.$$

- Homogena jednadžba n – tog reda ima n linearno nezavisnih rješenja, pa se opće rješenje može prikazati kao linearna kombinacija pojedinačnih rješenja.

$$y_0=\mathrm{K}_1 y_1+\mathrm{K}_2 y_2+\ldots+\mathrm{K}_n y_n$$

Klasične metode rješavanja

- Pretpostavlja se rješenje oblika: $y(t) = e^{pt}$, $p\in \mathrm{C}$.
- Supstitucijom se dobije izraz:

$$(\mathrm{a}_n p^n+\mathrm{a}_{n-1}p^{(n-1)}+\ldots+\mathrm{a}_1 p+\mathrm{a}_0)e^{pt}=0.$$

- Karakteristična jednadžba gornje diferencijalne jednadžbe

$$\mathrm{a}_n p^n+\mathrm{a}_{n-1}p^{(n-1)}+\ldots+\mathrm{a}_1 p+\mathrm{a}_0=0.$$

- Opće rješenje uz n različitih karakterističnih korijena

$$y_0(t)=\mathrm{K}_1 e^{\mathrm{p}_1 t}+\mathrm{K}_2 e^{\mathrm{p}_2 t}+\ldots+\mathrm{K}_n e^{\mathrm{p}_n t}=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{K}_i e^{\mathrm{p}_i t}.$$

Vremenski stalni sustavi

- Opće rješenje uz k jednakih od ukupno n korijena $y_0(t)=\mathrm{K}_1 e^{\mathrm{p}_1 t}+\mathrm{K}_2 t e^{\mathrm{p}_1 t}+\ldots+\mathrm{K}_k t^{k-1}e^{\mathrm{p}_1 t}$

$$+\mathrm{K}_{k+1}e^{\mathrm{p}_{k+1}t}+\ldots+\mathrm{K}_n e^{\mathrm{p}_n t}.$$

- Opće rješenje uz korijene višestrukosti m_1, m_2, ..., m_n

$$y_0(t)=\sum_{i=1}^{n'}e^{\mathrm{p}_i t}\sum_{j=1}^{m_i}\mathrm{K}_{ij}t^{j-1}.$$

- Rješenje nehomogene jednadžbe dobiva se dodavanjem tzv. partikularnog rješenja y_p na rješenje homogene

Vremenski stalni sustavi

- Rješenje homogene jednadžbe – komplementarno rješenje ili slobodni odziv sustava,
  - postoji i kada nema pobude za $\mathrm{K}_i \neq 0$,
  - naziva se i vlastito gibanje ili titranje sustava jer opisuje titranje energije u sustavu bez vanjskog poticaja.
  - Komponente slobodnog odziva titraju isključivo karakterističnim frekvencijama sustava p_i, koje zavise od strukture i parametara sustava, a ne od pobude.
  - Komplementarno rješenje prisutno je u općem rješenju nehomogene jednadžbe.

Amplitude vlastitog titranja sustava

- Opće rješenje diferencijalne jednadžbe za slučaj nejednakih korijena je:

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{K}_i e^{\mathrm{p}_i t}+y_\mathrm{p}(t).$$

- Konstante K_i određuju se iz početnih uvjeta danih preko vrijednosti funkcije i njenih derivacija u $t = 0$.
- Uzastopnom derivacijom izraza za $y(t)$ u $t = 0$ dobiva se sustav linearnih algebarskih jednadžbi.

Amplitude vlastitog titranja sustava

$$y(0)-y_\mathrm{p}(0)=\mathrm{K}_1+\mathrm{K}_2+\ldots+\mathrm{K}_n$$

$$\dot{y}(0)-\dot{y}_\mathrm{p}(0)=p_1\mathrm{K}_1+p_2\mathrm{K}_2+\ldots\ p_n\mathrm{K}_n$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)}(0)-y_\mathrm{p}^{(n-1)}(0)=p_1^{n-1}\mathrm{K}_1+p_2^{n-1}\mathrm{K}_2+\ldots+p_n^{n-1}\mathrm{K}_n$$

- Van der Mondova determinanta sustava sastavljena od potencija korijena p_i, p_i^{n-1}.

Amplitude vlastitog titranja sustava

- Partikularno rješenje označimo s $y_\mathrm{p}(t)$. Uz konstantnu ili periodičku pobudu nazovimo ga stacionarno stanje.
- Komplementarno rješenje iščezava s vremenom pa se naziva prijelazno ili prolazno stanje.
  - Prijelazno stanje sastoji se od titranja vlastitim frekvencijama p_i sustava.
  - Amplitude titranja u prijelaznom stanju određene su razlikom početnog stanja $\{y^{(i)}(0)\}$ i iznosa partikularnog rješenja $\{y_\mathrm{p}^{(i)}(0)\}$ u trenutku $t = 0$.

Amplitude vlastitog titranja sustava

- Prvi specijalni slučaj: početni uvjeti jednaki partikularnom rješenju u $t = 0$

$$y^{(i)}(0) - y_{\mathrm{p}}^{(i)}(0) = 0, \qquad i = 0,1,2,\dots,n-1.$$

  - Trivijalno rješenje, $K_i = 0$.
  - Prijelaznog procesa nema, već stacionarno stanje kreće odmah i ima frekvenciju pobude.
- Drugi specijalni slučaj: početni uvjeti jednaki 0

$$y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(0) = 0.$$

  - Sustav je bez početne energije – miran sustav.

Amplitude vlastitog titranja sustava

- Treći specijalni slučaj: $f(t) = 0$ – nepobuđen sustav

$$y_{\mathrm{p}}(t) = 0,\ \dot{y}_{\mathrm{p}}(t) = 0, \dots, y_{\mathrm{p}}^{(n-1)}(t) = 0.$$

- Označimo s K_{0i} konstante koje slijede iz početnih uvjeta $y_{\mathrm{p}}^{(i)}(0) = 0.$
- Označimo s $K_{\mathrm{p}i}$ konstante koje slijede iz početnih uvjeta kada je sustav miran $y^{(i)}(0) = 0.$

Amplitude vlastitog titranja sustava

- Ukupno rješenje prikazano pomoću K_{0i} i $K_{\mathrm{p}i}$:

$$y(t) = \left[\sum_{i=1}^{n} K_{0i} e^{p_i t} + \sum_{i=1}^{n} K_{\mathrm{p}i} e^{p_i t}\right] + y_{\mathrm{p}}(t).$$

  - Dio s vlastitim titranjem frekvencijom p_i u zagradi te prisilno titranje $y_{\mathrm{p}}(t)$ frekvencijom pobude.

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} K_{0i} e^{p_i t} + \left[\sum_{i=1}^{n} K_{\mathrm{p}i} e^{p_i t} + y_{\mathrm{p}}(t)\right]$$

  - Odziv nepobuđenog sustava u zagradi te odziv mirnog sustava koji titra s p_i i frekvencijom pobude.

Prisilni odziv sustava

- Prisilni odziv sustava predstavlja partikularno rješenje nehomogene jednadžbe.
  - Općenito se može dobiti Lagrangeovom metodom varijacije parametara.
- Za pobudu eksponencijalnom funkcijom računanje odziva je jednostavno jer se $y_{\mathrm{p}}(t)$ može predstaviti eksponencijalom (deriviranjem se mijenja samo kompleksna amplituda eksponencijale).
- Određivanje kompleksne amplitude temelji se na metodi neodređenih koeficijenata.

Prisilni odziv sustava

- Opći oblik diferencijalne jednadžbe:

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_0) y = (b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \dots + b_0) u.$$

- Pobudni signal $u(t)$ u obliku eksponencijale,
  - U kompleksna amplituda ($|U|$ amplituda, φ faza),
  - s kompleksna frekvencija, $s = \sigma + j\omega$,

$$u(t) = \mathrm{U} e^{st}, \qquad \mathrm{U} = |\mathrm{U}| e^{j\varphi}.$$

- Pretpostavljeno rješenje (Y neodređeni koeficijent):

Prisilni odziv sustava

- Uvrštavanjem i izjednačavanjem koeficijenata lijevo i desno dobiva se:

$$\mathrm{Y} = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots a_0} \mathrm{U} = H(s)\,\mathrm{U}.$$

- Amplituda partikularnog rješenja Y određena je amplitudom pobude, svojstvima sustava te kompleksnom frekvencijom s.
- Transfer ili prijenosna funkcija sustava $H(s)$ – veličina koja određuje odnos kompleksne amplitude prisilnog odziva $\mathrm{Y}e^{st}$ i kompleksne amplitude pobude $\mathrm{U}e^{st}$.

Prisilni odziv sustava

$$H(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots a_0} = \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{U}}$$

- $H(s)$ je formalno jednak operatoru $H(D)$ ali
  - $H(D)$ pridružuje vremensku funkciju y funkciji u

$$y = H(D)u,$$

  - $H(s)$ ima značenje faktora kojim treba množiti kompleksnu amplitudu ulaza da se dobije amplituda izlaza

$$\mathrm{Y} = H(s)\mathrm{U}.$$

Prisilni odziv sustava

- Specijalni slučajevi kompleksne frekvencije pobude s:
  - $s = 0$ – prisilni odziv na pobudu konstantom

$$u = \mathrm{U}e^{0t} = \mathrm{U}, \quad H(0) = \frac{b_0}{a_0}.$$

  - $s = j\omega$ – odziv na harmonijsku (ili sinusnu) pobudu, je dan izrazom:

$$H(j\omega) = H(\omega) = H_{\mathrm{r}}(\omega) + jH_{\mathrm{i}}(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)},$$

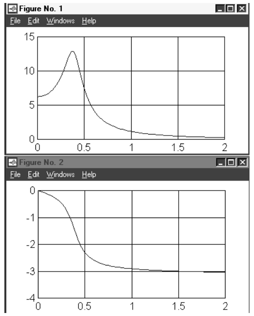
koji se naziva frekvencijska karakteristika sustava.

Prisilni odziv sustava

- $A(\omega)$ – amplitudno frekvencijska karakteristika.
- $\varphi(\omega)$ – fazno frekvencijska karakteristika.
- Ako je $y_{\mathrm{p}}(t) = \mathrm{Y}e^{st}$ posljedica $u(t) = \mathrm{U}e^{st}$ onda je $y_{\mathrm{p}}(t) = \mathrm{Re}\{\mathrm{Y}e^{st}\}$ posljedica $\mathrm{Re}\{\mathrm{U}e^{st}\}$.

SIMULINK primjer

Frekvencijske karakteristike



ω	$A(\omega)$	φ(ω)
0	6.2500	0
0.2020	7.9460	-0.3268
0.4040	12.3650	-1.6110
0.6061	4.1642	-2.6125
0.8081	1.9275	-2.8248
1.0101	1.1316	-2.9109
1.2121	0.7510	-2.9585
1.4141	0.5372	-2.9891
1.6162	0.4043	-3.0105
1.8182	0.3158	-3.0265

Transfer funkcija linearnog, vremenski invarijantnog sustava

- Linearne, vremenski invarijantne sustave možemo proučavati pomoću Laplaceove transformacije:
  - diferencijalne jednadžbe prelaze u algebarske,
  - sustav je predstavljen u domeni kompleksne frekvencije.
- Za određivanje transfer funkcije poći ćemo od Laplaceovog transformata ulazno izlaznog modela:

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\},\; Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}.$$

Transfer funkcija linearnog, vremenski invarijantnog sustava

- Transformacija derivacije ulaza i izlaza je:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^m u}{dt^m}\right\} = s^m U(s) - s^{m-1}u(0) - \ldots - u^{(m-1)}(0),$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n y}{dt^n}\right\} = s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - \ldots - y^{(n-1)}(0).$$

- Na temelju linearnosti Laplaceove transformacije može se napisati:

$$\left(\mathrm{a}_n s^n + \mathrm{a}_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \mathrm{a}_0\right)Y(s) = \left(\mathrm{b}_m s^m + \ldots + \mathrm{b}_0\right)U(s) + E(s).$$

Transfer funkcija linearnog, vremenski invarijantnog sustava

- Ako vrijedi:

$$y^{(\nu)}(0) = 0 \quad \text{za} \quad \nu = 0,1,2,3,4,\ldots,n-1$$

$$u^{(\mu)}(0) = 0 \quad \text{za} \quad \mu = 0,1,2,3,4,\ldots,m-1$$

dobivamo odziv mirnog sustava:

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + \ldots + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_0}U(s).$$

- Dobiveni izraz možemo napisati:

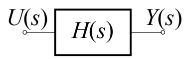
$$Y(s) = H(s)U(s).$$

Transfer funkcija linearnog, vremenski invarijantnog sustava

- Funkcija $H(s)$ zove se transfer funkcija ili prijenosna funkcija sustava.
- Definirana je za miran sustav kao:

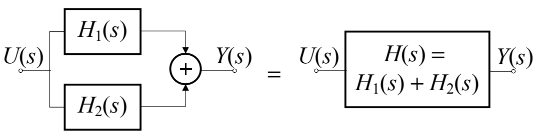
$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}} \qquad u(\mathrm{t}) = 0 \text{ za } t < 0\,.$$

- Ako znamo $H(s)$, sustav možemo predstaviti kao blok:



Transfer funkcija složenih sustava

- Paralelni spoj podsustava:

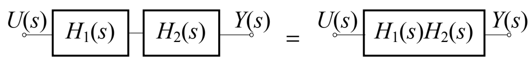


$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = \left[H_1(s) + H_2(s)\right]U(s) = H(s)U(s)$$

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s)$$

Transfer funkcija složenih sustava

- Kaskadni spoj podsustava:

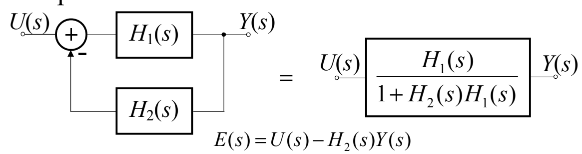


$$Y(s) = H_2(s)V(s) = H_2(s)H_1(s)U(s)$$

$$H(s) = H_2(s)H_1(s)$$

Transfer funkcija složenih sustava

- Prstenasti spoj podsustava – sustav s povratnom vezom:



$$E(s) = U(s) - H_2(s)Y(s)$$

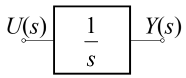
$$Y(s) = H_1(s)E(s) = H_1(s)\left[U(s) - H_2(s)Y(s)\right] = Y(s)$$

$$Y(s)(1 + H_1(s)H_2(s)) = H_1(s)U(s)$$

$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$$

Transfer funkcija složenih sustava

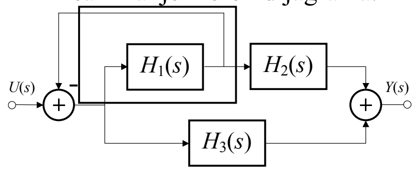
- Jedan često korišten element sustava je integrator.
- Transfer funkcija integratora:



$$H(s) = \frac{1}{s}$$

Transfer funkcija složenih sustava

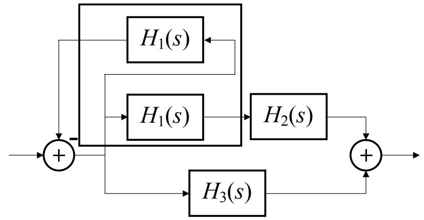
- Korištenjem pokazanih pravila za kaskadu, prsten i paralelni spoj, složene blok dijagrame možemo sažeti i tako odrediti transfer funkciju cijelog sustava.
- *Primjer:* Odrediti transfer funkciju sustava sažimanjem blok dijagrama.



- Transformirajmo označeni dio blok dijagrama.

Transfer funkcija složenih sustava

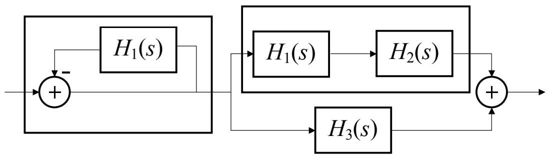
- Dobivamo rezultat:



- Nacrtajmo ponovo isti blok dijagram.

Transfer funkcija složenih sustava

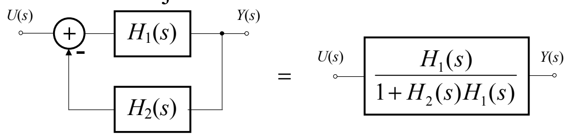
- Dobivamo:



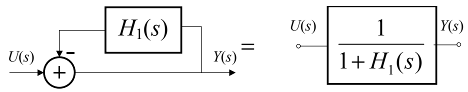
- Na dobivenom blok dijagramu prepoznajemo:
  - kaskadu,
  - spoj s povratnom vezom.
- Kaskada se može nadomjestiti blokom čija je transfer funkcija: $H_1 H_2$,

Transfer funkcija složenih sustava

- Ranije je pokazano da za spoj s povratnom vezom vrijedi:

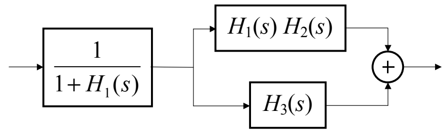


- U našem primjeru bit će:



Transfer funkcija složenih sustava

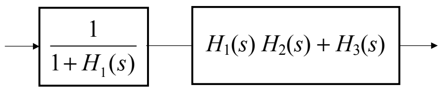
- Prema tome, naš blok dijagram možemo sažeti:



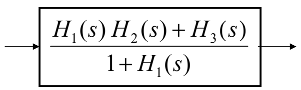
- Desnu stranu blok dijagrama čini paralelni spoj podsustava pa ga možemo nadomjestit podsustavom čija je prijenosna funkcija: $H_1 H_2 + H_3$.

Transfer funkcija složenih sustava

- Daljnjim sažimanjem dobivamo kaskadu:



- Cijeli sustav prikazan jednim blokom ima oblik:



Ulazno izlazni model sustava s više ulaza i izlaza

- Sustav s više ulaza i izlaza može biti opisan s:

$$\begin{aligned}
A_{11}(\mathrm{D})y_1 + \ldots + A_{1r}(\mathrm{D})y_r &= B_{11}(\mathrm{D})u_1 + \ldots + B_{1m}(\mathrm{D})u_m,\\
A_{21}(\mathrm{D})y_1 + \ldots + A_{2r}(\mathrm{D})y_r &= B_{21}(\mathrm{D})u_1 + \ldots + B_{2m}(\mathrm{D})u_m,\\
&\vdots\\
A_{r1}(\mathrm{D})y_1 + \ldots + A_{rr}(\mathrm{D})y_r &= B_{r1}(\mathrm{D})u_1 + \ldots + B_{rm}(\mathrm{D})u_m.
\end{aligned}$$

- Ako su ulaz i izlaz definirani s:

$$\mathbf{y} \equiv \left[y_1, y_2, \ldots, y_r\right]^t$$

$$\mathbf{u} \equiv \left[u_1, u_2, \ldots, u_m\right]^t$$

jednadžbe možemo napisati u matričnom obliku:

Transfer matrica sustava s više ulaza i izlaza

- Laplaceova transformacija skupa jednadžbi ima oblik:

$$\mathbf{L}(s)\mathbf{Y}(s) = \mathbf{K}(s)\mathbf{U}(s) + \mathbf{E}(s)$$

gdje $\mathbf{E}(s)$ sadrži članove s početnim uvjetima.

- Za mirni sustav, $\mathbf{E}(s) = \mathbf{0}$, izlaz je jednak:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{L}^{-1}(s)\mathbf{K}(s)\mathbf{U}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{U}(s).$$

- Ulazni vektor se množi s matricom:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{L}^{-1}(s)\mathbf{K}(s)$$

koja se zove transfer matrica sustava.

Model s varijablama stanja linearnog sustava

- Vladanje sustava opisuje vektorska dif. jednadžba: $$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
- **A** je matrica koeficijenata (realnih i konstantnih): $\{a_{ij}\}, \quad i, j = 1,2,\ldots,n.$
- **B** je pobudna ili kontrolna matrica konstantnih elemenata:
$$\{b_{ik}\}, \quad i = 1,2,\ldots,n; \quad k = 1,2,\ldots,m.$$

Model s varijablama stanja linearnog sustava

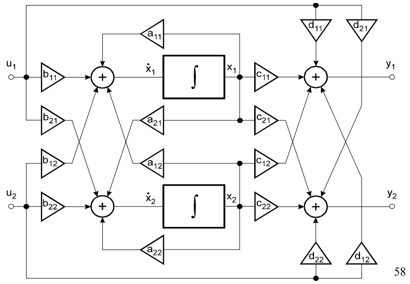
- Vektorska jednadžba:
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
identična je skupu linearnih dif. jednadžbi prvog reda:
$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t) + \sum_{k=1}^{m} b_{ik} u_k(t), \quad i = 1,2,\ldots,n\,.$$
- Ako je pobuda $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, jednadžba je homogena:
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t).$$

Model s varijablama stanja linearnog sustava

- Izlazna vektorska jednadžba:
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t).$$
identična je skupu linearnih algebarskih jednadžbi:
$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j(t) + \sum_{k=1}^{m} d_{ik} u_k(t), \quad \mathrm{i} = 1,2,\ldots,r\,.$$

Blok dijagram linearnog sustava

- Primjer sustava drugog reda s 2 ulaza i 2 izlaza:
$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2,$$
$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2.$$

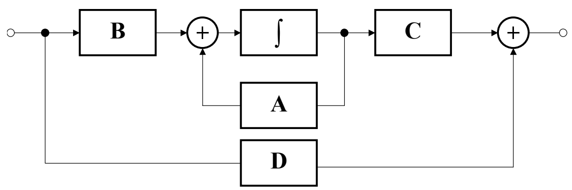


Blok dijagram linearnog sustava

- Izlazna jednadžba se realizira s 2 sumatora:
$$y_1(t) = c_{11}x_1(t) + c_{12}x_2(t) + d_{11}u_1(t) + d_{12}u_2(t),$$
$$y_2(t) = c_{21}x_1(t) + c_{22}x_2(t) + d_{21}u_1(t) + d_{22}u_2(t).$$

Blok dijagram linearnog sustava

- Kompletan sustav jednadžbi stanja i izlaznih jednadžbi prikazuje kabelski blok dijagram:



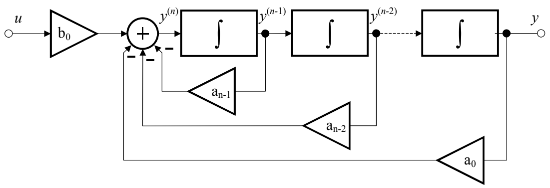
Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

Direktna metoda:

- Pođimo od prijenosne funkcije:
$$H(s) = \frac{\mathrm{b}_0}{s^n + \ldots + \mathrm{a}_0}, \qquad \mathrm{a}_n = 1,$$
$$(s^n + \ldots + \mathrm{a}_0)Y(s) = \mathrm{b}_0 U(s).$$
- Izdvojimo član s najvišom derivacijom:
$$s^n Y(s) = \mathrm{b}_0 U(s) - \frac{1}{s}\mathrm{a}_{n-1}\left(s^n Y(s)\right) - \ldots - \frac{1}{s^n}\mathrm{a}_0\left(s^n Y(s)\right),$$
$$y^{(n)} = \mathrm{b}_0 u - \mathrm{a}_{n-1} y^{(n-1)} - \ldots - \mathrm{a}_0 y.$$

Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

- Realizacija:
$$y^{(n)} = \mathrm{b}_0 u - \mathrm{a}_{n-1} y^{(n-1)} - \ldots - \mathrm{a}_0 y\,.$$



Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

- Prijelaz u model stanja: Označimo na dijagramu izlaze integratora kao varijable stanja.
- Jednadžbe stanja glase:
$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$
$$\dot{x}_n = -\mathrm{a}_0 x_1 - \mathrm{a}_1 x_2 - \cdots - \mathrm{a}_{n-1} x_n + \mathrm{b}_0 u\,.$$
- Jednadžba izlaza glasi: $y(t) = x_1(t).$

Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

- U općem slučaju, $b_i \neq 0$, možemo pisati:

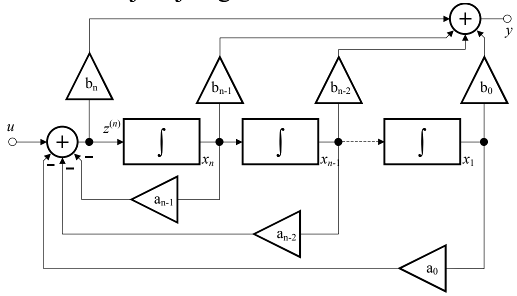
$$Y(s) = B(s)\left(\frac{U(s)}{A(s)}\right) = B(s)Z(s).$$

- Sada prvo realiziramo: $$Z(s) = \frac{U(s)}{A(s)}$$
  što je isto kao u prošlom primjeru.
- Nakon toga napravimo linearnu kombinaciju svih izlaza integratora, prema izrazu:

$$Y(s) = B(s)Z(s) = \left(b_m s^m + \ldots + b_0\right)Z(s).$$

Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

- Realizacija cijelog sustava:



Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

- Istim postupkom kao u slučaju $b_i = 0$, dobivamo jednadžbe stanja:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_n & b_1 - a_1 b_n & \cdots & b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u.$$

Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

Iterativna metoda:

- Brojnik i nazivnik prijenosne funkcije možemo prikazati kao produkt korjenih faktora:

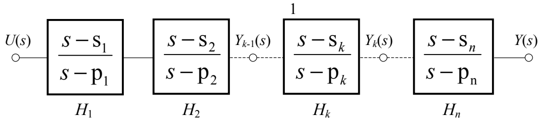
$$\left.\begin{aligned} B(s) &= b_m s^m + \ldots + b_0 = b_m \prod_1^m (s - s_k), \\ A(s) &= a_n s^n + \ldots + a_0 = a_n \prod_{k=1}^n (s - p_k), \end{aligned}\right\} \quad H(s) = \frac{b_m}{a_n} \frac{\prod_1^m (s - s_k)}{\prod_1^n (s - p_k)}.$$

- Produkt – upućuje na kaskadu podsustava.

Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

- Realizacija:

$$H(s) = \frac{b_m}{a_n} \frac{\prod_1^m (s - s_k)}{\prod_1^n (s - p_k)}$$



$$Y(s) = \left[\prod_1^n H_k(s)\right] U(s)$$

Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

- Sekcija s nulom i jednim polom zove se bilinearna sekcija.
- Bilinearna sekcija može se realizirati jednim integratorom.

$$Y_k = H_k(s) Y_{k-1} = \frac{s - s_k}{s - p_k} Y_{k-1}$$

$$X_k(s) = \frac{1}{s - p_k} Y_{k-1} \quad \Rightarrow \quad sX_k(s) = p_k X_k(s) + Y_{k-1}$$

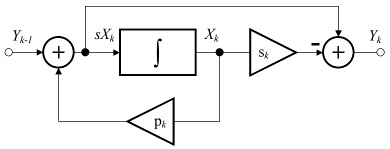
$$Y_k(s) = (s - s_k) X_k(s) \qquad sX_k(s) = Y_{k-1} + p_k \frac{1}{s}(sX_k(s))$$

realizacija

Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

- Realizacija:

$$sX_k(s) = Y_{k-1} + p_k \frac{1}{s}(sX_k(s)), \quad Y_k(s) = (s - s_k) X_k(s).$$



- p_k i s_k mogu biti kompleksni $\Rightarrow$ neostvarivo u praksi,

Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

- Prijelaz u model stanja: Za k–tu bilinernu sekciju u kaskadi, mogu se napisati jednadžbe:

$$\dot{x}_k = p_k x_k + y_{k-1}, \qquad y_k = \dot{x}_k - s_k x_k$$

$$\text{za} \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

- Uz $y_0 = u$, eliminacijom derivacije x_k iz jed. za y_k:

$$\dot{x}_1 = p_1 x_1 + u \qquad y_1 = (p_1 - s_1) x_1 + u$$

$$\dot{x}_2 = p_2 x_2 + (p_1 - s_1) x_1 + u \qquad y_2 = (p_2 - s_2) x_2 + (p_1 - s_1) x_1 + u$$

$$\dot{x}_3 = p_3 x_3 + y_2, \text{ itd.}$$

$$y = y_n = (p_n - s_n) x_n + (p_{n-1} - s_{n-1}) x_{n-1} + \cdots + (p_1 - s_1) x_1 + u$$

Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

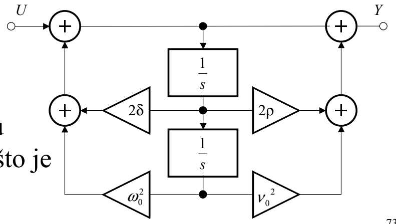
- Dobivene jednadžbe možemo prikazati matrično:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & \\ (p_1 - s_1) & p_2 & 0 & \\ \vdots & & & \\ (p_1 - s_1) & (p_2 - s_2) & \cdots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} (p_1 - s_1) & (p_2 - s_2) & \cdots & (p_n - s_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + u.$$

Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

- Kombiniranjem konjugiranih parova polova i nula: $H_k = \frac{(s-s_k)(s-s_k^*)}{(s-p_k)(s-p_k^*)}$ $\quad s_k = -\rho + j\nu, \quad \nu_0^2 = \rho^2 + \nu^2$, $\quad p_k = -\delta + j\omega, \quad \omega_0^2 = \delta^2 + \omega^2$
- dobiva se bikvadratna sekcija
- koeficijenti polinoma su sada realni što je bitno za realizaciju



Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

Paralelna metoda:

- Prijenosnu funkciju bez višestrukih polova, s istim redom brojnika i nazivnika, možemo rastaviti:

$$H(s) = d_0 + \frac{c_1}{s - p_1} + \cdots + \frac{c_n}{s - p_n} = d_0 + \sum_1^n \frac{c_k}{s - p_k},$$

gdje je:

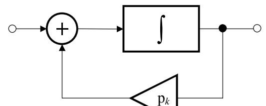
$$c_k = (s - p_k) H(s)\big|_{s = p_k}, \qquad d_0 = \frac{b_n}{a_n}.$$

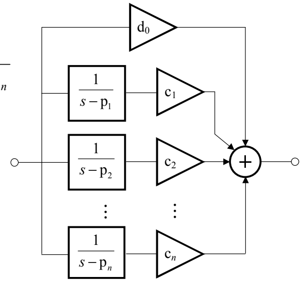
- Suma – upućuje na paralelni spoj podsustava

Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

- Realizacija:

$$H(s) = d_0 + \frac{c_1}{s - p_1} + \cdots + \frac{c_n}{s - p_n}$$





Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

- Svaki sustav prvog reda sa prethodne slike daje jednadžbu:

$$\dot{x}_j = p_j x_j + u.$$

- Izlaz je dan jednadžbom:

$$y = \sum_1^n c_j x_j + du.$$

Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

- Matrični opis modela stanja glasi:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & & 0 \\ 0 & p_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + du.$$

- Ovaj model zovemo razvezani.

Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

- Ako su polovi višestruki, dobivamo slijedeću j. stanja:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & p_1 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & p_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & p_k & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

- Matrica A je kvazidijagonalna, ima tzv. Jordanov blok.

Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

- Izlazna jednadžba ima oblik:

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + du.$$

Transformacija varijabli stanja

- Pretpostavimo da je sustav opisan pomoću varijabli stanja x_i:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \qquad \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}.$$

- Isti sustav možemo prikazati i pomoću drugih varijabli stanja z_i.
- Varijable **z** su linearna kombinacija varijabli **x**:

$$\mathbf{x} = \mathbf{Pz}$$

- Matrica P ne smije biti singularna:

$$\det \mathbf{P} \neq 0$$

Transformacija varijabli stanja

- Uvrstimo:

$$\mathbf{x} = \mathbf{Pz} \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \qquad\qquad \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

$$\mathbf{P}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{APz} + \mathbf{Bu}$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{APz} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Bu} \qquad \mathbf{y} = \mathbf{CPz} + \mathbf{Du}$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^*\mathbf{z} + \mathbf{B}^*\mathbf{u} \qquad \mathbf{y} = \mathbf{C}^*\mathbf{z} + \mathbf{D}^*\mathbf{u}$$

- Nove matrice sustava imaju oblik:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}, \quad \mathbf{B}^* = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}, \quad \mathbf{C}^* = \mathbf{CP}, \quad \mathbf{D}^* = \mathbf{D}.$$

Transformacija varijabli stanja

- Kako odabrati matricu **P** ?
  - Tako da matrica $\mathbf{A}^*$ bude dijagonalna (kanonski oblik).
  - U tom slučaju **P** se zove modalna matrica.
- Kako naći modalnu matricu ?
  - Promatrajmo transformaciju vektora **x** u **y**:

    $$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

  - Za koji **x** će **y** imati isti smjer u vektorskom prostoru ?

    $$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

  (λ je skalar)

Transformacija varijabli stanja

- Jednakost:

  $$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

  predstavlja homogen sustav jednadžbi:

  $$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

  Matrica **I** je jedinična matrica:

  $$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformacija varijabli stanja

- Netrivijalno rješenje $x_k \neq 0$ dobiva se:

  $$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0.$$

- Ako je matrica **A** dimenzija $n \times n$, dobiva se karakteristični polinom n–tog stupnja.
- Korjeni karakterističnog polinoma su vlastite vrijednosti matrice **A**.
- Rješenjem jednadžbe

  $$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

  dobivaju se vlastiti vektori.

Transformacija varijabli stanja

- Transformacija varijabli ne mijenja vlastite vrijednosti:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P_n}(\lambda) &= \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}^*) = \\
&= \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}) = \\
&= \det(\lambda\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}) = \\
&= \det\mathbf{P}^{-1}\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\cdot\det\mathbf{P} = \\
&= \det\mathbf{P}^{-1}\det\mathbf{P}\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \\
&= \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}).
\end{aligned}$$

Transformacija varijabli stanja

- Kako dobiti modalnu matricu ?
- Formirajmo matricu **M** od vlastitih vektora matrice **A**:

  $$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix}.$$

- Odredimo produkt **AM**:

$$\mathbf{A}\mathbf{M} = \mathbf{A}\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{x}_1 & \mathbf{A}\mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{A}\mathbf{x}_n \end{bmatrix}.$$

- Uvrštavanjem $\mathbf{A}\mathbf{x}_k = \lambda_k\mathbf{x}_k$ dobivamo:

  $$\mathbf{A}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{x}_1 & \lambda_2\mathbf{x}_2 & \cdots & \lambda_n\mathbf{x}_n \end{bmatrix}.$$

Transformacija varijabli stanja

- Izraz:

  možemo napisati u obliku:

$$\mathbf{A}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{M}\mathbf{\Lambda}$$

- Vidimo da vrijedi:

  $$\mathbf{A}\mathbf{M} = \mathbf{M}\mathbf{\Lambda} \rightarrow \mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}\,\mathbf{A}\mathbf{M}$$

- Matrica **M** je modalna matrica.

Upravljivost i osmotrivost sustava

- Sustav prikazan u kanonskom obliku ima oblik:

  $$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{x} + \boldsymbol{\beta}\mathbf{u},$$

  $$\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n,].$$

- Za slučaj s različitim korjenima imamo jednadžbe stanja:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \mathrm{p}_1 x_1 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2, \\
\dot{x}_2 &= \mathrm{p}_2 x_2 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2, \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= \mathrm{p}_n x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2.
\end{aligned}$$

- Svaka varijabla stanja može se dobiti rješavanjem jedne jednadžbe.

Upravljivost i osmotrivost sustava

- Promotrimo i-tu jednadžbu:

  $$\dot{x}_i = \mathrm{p}_i x_i + b_{i1}u_1 + b_{i2}u_2\,, \quad i = 1,2,...,n$$

- Varijabla x_i u svom odzivu ima istitravanje karakterističnom frekvencijom p_i
- Početni uvjet $x_i(0)$ istitrati će se frekvencijom p_i
- Svaka varijabla stanja istitrava svojom frekvencijom

Upravljivost i osmotrivost sustava

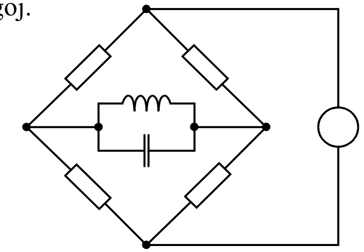
- Sustav je upravljiv ako ulazni signali mogu pobuditi sve karakteristične frekvencije sustava.

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= p_1 x_1 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 \\
\dot{x}_2 &= p_2 x_2 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 \qquad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{x} + \boldsymbol{\beta}\mathbf{u} \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= p_n x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2
\end{aligned}$$

- Sustav s različitim karakterističnim frekvencijama je upravljiv ako matrica $\boldsymbol{\beta}$ nema nultih redaka
  - Ako je i-ti red nul-redak, titranje frekvencijom može doći samo od početnih uvjeta, a ne pobude
  - Varijabla stanja koja odgovara nul-retku je neupravljiva

Upravljivost i osmotrivost sustava

- Primjer: Pobuda u jednoj dijagonali uravnoteženog mosta, a titrajni krug u drugoj.



Upravljivost i osmotrivost sustava

- Kad matrica A ima višestruke vlastite vrijednosti, sustav je upravljiv:
  - Ako ne postoje dva Jordanova bloka koja pripadaju istim vlastitim vrijednostima.
  - Ako elementi matrice $\boldsymbol{\beta}$ koji odgovaraju zadnjem redu svakog Jordanovog bloka nisu jednaki nuli.
  - Ako svi elementi svakog reda matrice $\boldsymbol{\beta}$, koji pripadaju jednostrukim vlastitim vrijednostima nisu jednaki nuli.

Upravljivost i osmotrivost sustava

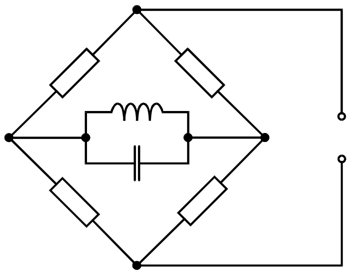
- Sustav je osmotriv ako se preko izlaza sustava mogu registrirati sve prirodne frekvencije sustava.

$$\begin{aligned} y_1 &= \gamma_{11}x_1 + \gamma_{12}x_2 + \cdots + \gamma_{1n}x_n \\ y_2 &= \gamma_{12}x_1 + \gamma_{22}x_2 + \cdots + \gamma_{2n}x_n \\ &\vdots \\ y_r &= \gamma_{r1}x_1 + \gamma_{r2}x_2 + \cdots + \gamma_{rn}x_n \end{aligned} \qquad \mathbf{y} = \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

- Sustav s jednostrukim frekvencijama je osmotriv ako matrica $\boldsymbol{\Gamma}$ nema nultih stupaca
  - Varijabla koja odgovara nultom stupcu je neosmotriva

Upravljivost i osmotrivost sustava

- Primjer: Uravnotežen most



Upravljivost i osmotrivost sustava

- U slučaju višestrukih korijena, sustav je osmotriv:
  - Ako ne postoje dva Jordanova bloka koja pripadaju istim vlastitim vrijednostima.
  - Ako u stupcima matrice $\boldsymbol{\Gamma}$**,** koji pripadaju prvom redu svakog Jordanovog bloka nisu nule.
  - Ako u stupcima matrice $\boldsymbol{\Gamma}$, koji pripadaju jednostrukim vlastitim vrijednostima nisu nule.

Upravljivost i osmotrivost sustava

- U općem slučaju, sustav možemo rastaviti na četiri podsustava:

upravljiv, neupravljiv, osmotriv, neosmotriv

SUSTAV	osmotriv	neosmotriv
upravljiv	$\dot{\mathbf{x}}_1 = \boldsymbol{\Lambda}_1\mathbf{x}_1 + \boldsymbol{\beta}_1\mathbf{u}_1$ $\mathbf{y}_1 = \boldsymbol{\Gamma}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_1\mathbf{u}_1$	$\dot{\mathbf{x}}_2 = \boldsymbol{\Lambda}_2\mathbf{x}_2 + \boldsymbol{\beta}_2\mathbf{u}_2$ $\mathbf{y}_2 = \mathbf{0}$
neupravljiv	$\dot{\mathbf{x}}_3 = \boldsymbol{\Lambda}_3\mathbf{x}_3$ $\mathbf{y}_3 = \boldsymbol{\Gamma}_3\mathbf{x}_3$	$\dot{\mathbf{x}}_4 = \boldsymbol{\Lambda}_4\mathbf{x}_4$ $\mathbf{y}_4 = \mathbf{0}$

- Kombiniranjem jednadžbi iz tablice dolazimo do jednadžbi sustava:

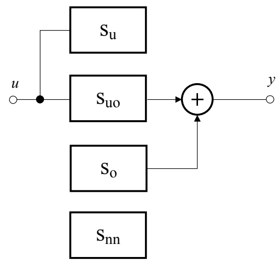
Upravljivost i osmotrivost sustava

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_3 \\ \dot{\mathbf{x}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_1 & & & \\ & \boldsymbol{\Lambda}_2 & & \\ & & \boldsymbol{\Lambda}_3 & \\ & & & \boldsymbol{\Lambda}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\beta}_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\Gamma}_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix}$$

Upravljivost i osmotrivost sustava

- Razlaganje sustava može se prikazati blok dijagramom:



Upravljivost i osmotrivost sustava

- Primjer:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}u$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}u$$