Model linearnog sustava s varijablama stanja

Uvod

Vremenski diskretan sustav je linearan i vremenski invarijantan ako se može opisati jednadžbama

$$\boldsymbol{x}[n+1] = \boldsymbol{A}\mathbf{x}[n] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}[n]$$

$$\boldsymbol{y}[n] = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}[n] + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}[n], \text{ za } n = 0, 1, 2,...$$

$\boldsymbol{x}[n]$, $\boldsymbol{u}[n]$, $\boldsymbol{y}[n]$ - vektori

$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ **-** matrice s realnim i konstantnim elementima

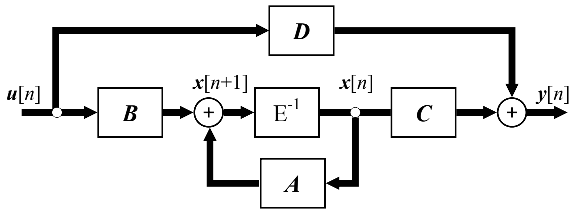
Vektorska jednadžba stanja je identična skupu N linearnih jednadžbi diferencija

$$x_i[n+1] = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j[n] + \sum_{l=1}^{M} b_{il} u_l[n]; \qquad i = 1,2,\dots,N$$

Izlazna jednadžba identična je skupu R linearnih algebarskih jednadžbi

$$y_i[n] = \sum_{j=1}^{N} c_{ij} x_j[n] + \sum_{l=1}^{M} d_{il} u_l[n]; \qquad i = 1,2,\dots,R$$

Opći kabelski blok dijagram



Jednadžbe stanja u domeni $\mathcal{Z}$ - transformacije

$\boldsymbol{U}(z) = \mathcal{Z}\{\boldsymbol{u}[n]\}$, $\quad \boldsymbol{Y}(z) = \mathcal{Z}\{\boldsymbol{y}[n]\}$, $\quad \boldsymbol{X}(z) = \mathcal{Z}\{\boldsymbol{x}[n]\}$

transformacija jednadžbe stanja

$$z\boldsymbol{X}(z) - z\boldsymbol{x}[0] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(z) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(z)$$

$$(z\mathbf{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(z) = z\boldsymbol{x}[0] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(z)$$

$$\boldsymbol{X}(z) = z(z\mathbf{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}[0] + (z\mathbf{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(z)$$

transformacija izlazne jednadžbe

$$\boldsymbol{Y}(z) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(z) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{U}(z)$$

$$\boldsymbol{Y}(z) = \boldsymbol{C}(z\mathbf{I} - \boldsymbol{A})^{-1}z\boldsymbol{x}[0] + [\boldsymbol{C}(z\mathbf{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}]\, \boldsymbol{U}(z)$$

Jednadžbe stanja u domeni $\mathcal{Z}$ - transformacije

izlaz mirnog sustava $\boldsymbol{x}[0] = 0$ biti će određen sa

$$\boldsymbol{Y}(z) = \boldsymbol{H}(z)\, \boldsymbol{U}(z)$$

$$\boldsymbol{H}(z) = \boldsymbol{C}(z\mathbf{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$$ transfer matrica vremenski diskretnog sustava

$$\Phi(z) = (z\mathbf{I} - A)^{-1} z$$ rezolventa sustava

Odziv linearnih vr. dis. sustava

Vektorska jednadžba sustava $\boldsymbol{x}[n+1] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}[n] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}[n]$ može se riješiti korak po korak:

$$\boldsymbol{x}[1] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}[0] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}[0]$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}[2] &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}[1] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}[1] = \\ &= \boldsymbol{A}\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}[0] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}[0]\} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}[1] = \\ &= \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}[0] + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}[0] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}[1]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}[3] &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}[2] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}[2] = \\ &= \boldsymbol{A}\{\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}[0] + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}[0] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}[1]\} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}[2] = \\ &= \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x}[0] + \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}[0] + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}[1] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}[2]\end{aligned}$$

$$\mathbf{x}[n] = \mathbf{A}^n \mathbf{x}[0] + \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{A}^{n-1-j} \mathbf{B}\mathbf{u}[j]$$

Stanje u koraku n je određeno iz početnog stanja $\boldsymbol{x}[0]$ i pobude $\{\boldsymbol{u}[n]\}$

Nepobuđeni sustav ima odziv $\mathbf{x}_{\text{nepob.}}[n] = \boldsymbol{A}^n\, \mathbf{x}[0] = \mathbf{\Phi}[n]\, \mathbf{x}[0]$

$\mathbf{\Phi}[n] = \boldsymbol{A}^n$ - fundamentalna matrica sustava

odgovara matričnoj eksponencijali $\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$

Stanje mirnog sustava u koraku n

$$\mathbf{x}_{\text{mirni}}[n] = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{A}^{n-1-j}\mathbf{B}\mathbf{u}[j] = \sum_{j=0}^{n-1} \Phi[n-1-j]\mathbf{B}\mathbf{u}[j]$$

Izlaz sustava dan je s

$$\mathbf{y}[n] = \begin{cases} \mathbf{C}\mathbf{x}[0] + \mathbf{D}\mathbf{u}[0], & n = 0 \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^n\mathbf{x}[0] + \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1-j}\mathbf{B}\mathbf{u}[j] + \mathbf{D}\mathbf{u}[n], & n > 0 \end{cases}$$

Odziv sustava na jedinični uzorak

$\{\mathbf{u}[n]\} = \{\mathbf{U}\delta[n]\};\ \mathbf{u}[n] = \mathbf{U}\delta[n]$

Stanje sustava je dano s

$$\mathbf{x}[n] = \mathbf{A}^n\mathbf{x}[0] + \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{A}^{n-1-j}\mathbf{BU}\delta[j]$$

$$\mathbf{x}[n] = \begin{cases} \mathbf{x}[0], & n = 0 \\ \mathbf{A}^n\mathbf{x}[0] + \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{BU}, & n > 0 \end{cases}$$

Uzorak pobude u $n = 0$ utječe tek na stanje prvom uzorku.

Odziv sustava na jedinični uzorak

Izlaz sustava je dan s

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{CA}^n\,\mathbf{x}[0] + \mathbf{CA}^{n-1}\,\mathbf{BU} + \mathbf{DU}\boldsymbol{\delta}[n]$$

izlaz mirnog sustava $\mathbf{x}[0] = 0$ koji predstavlja jedinični odziv sustava je

$$\mathbf{h}[n] = \begin{cases} \mathbf{DU}, & n = 0 \\ \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{BU}, & n > 0 \end{cases}$$

Upravljivost sustava

Sustav je upravljiv ako se iz bilo kojeg početnog stanja sustav može prevesti u bilo koje krajnje stanje diskretnim signalom u konačnom broju koraka $n_f \geq N$.

Jednadžba stanja $\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{Ax}[n] + \mathbf{Bu}[n]$

Radi jednostavnosti pretpostavimo:

- u[n] je skalar
- konačno stanje sustava je $\mathbf{x}[n_f] = \mathbf{0}$

Ako je sustav upravljiv može se primjenom signala $\{u[0], u[1], ..., u[n_f-1]\}$ iz bilo kojeg stanja $\mathbf{x}[0]$ prevesti u mirno stanje $\mathbf{x}[n_f] = 0$.

$$\mathbf{x}[n_f] = \mathbf{0} = \sum_{j=0}^{n_f-1} \mathbf{A}^{n-j-1}\mathbf{B}u[j] + \mathbf{A}^n\mathbf{x}[0]$$

Za najmanji broj koraka $n_f = N$

$$\mathbf{x}[0] = -\sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{A}^{-j-1}\mathbf{B}u[j]$$

$$\mathbf{x}[0] = -\begin{bmatrix}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} & \mathbf{A}^{-2}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{-N}\mathbf{B}\end{bmatrix}\cdot \bar{\mathbf{u}},\quad \bar{\mathbf{u}} = \{u[0], u[1], ..., u[N-1]\}$$

Sustav je upravljiv ako matrica $\mathbf{G} = [\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\ \mathbf{A}^{-2}\mathbf{B}\ ...\ \mathbf{A}^{-N}\mathbf{B}]$ nije singularna.

Ekvivalentan uvjet: matrica $[\mathbf{B}\ \ \mathbf{AB}\ ...\ \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B}]$ nije singularna.

Osmotrivost sustava

Sustav je osmotriv ako poznavanje izlaznih signala za konačan broj koraka omogućuje određivanje početnog stanja sustava.

Stanje vremenski stalnog sustava: $\mathbf{x}[n] = \mathbf{A}^n\mathbf{x}[0]$

Izlaz: $\mathbf{y}[n] = \mathbf{CA}^n\mathbf{x}[0]$

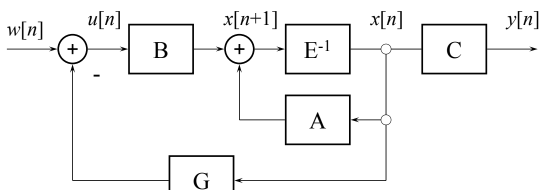
$\mathbf{y}[0] = \mathbf{Cx}[0]$
$\mathbf{y}[1] = \mathbf{CAx}[0]$
....
$\mathbf{y}[N-1] = \mathbf{CA}^{N-1}\mathbf{x}[0]$

Uvjet osmotrivosti sustava:

matrica $\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \dots \\ \mathbf{CA}^{N-1} \end{bmatrix}$ mora biti N-tog ranga,

gdje je N dimenzija vektora $\mathbf{x}[0]$.

Sustav s povratnom vezom



$\boldsymbol{x}[n+1] = \boldsymbol{Ax}[n] + \boldsymbol{Bu}[n]$
$\boldsymbol{u}[n] = \boldsymbol{w}[n] - \boldsymbol{Gx}[n]$
$\boldsymbol{y}[n] = \boldsymbol{Cx}[n]$

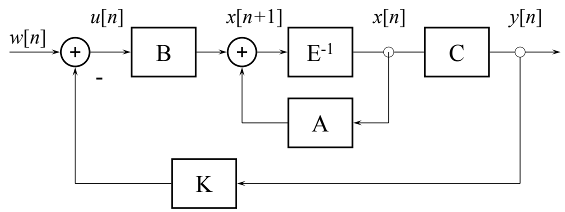
Sustav s povratnom vezom

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{Ax}[n] + \mathbf{B}(\mathbf{w}[n] - \mathbf{Gx}[n])$$
$$\mathbf{x}[n+1] = (\mathbf{A} - \mathbf{BG})\mathbf{x}[n] + \mathbf{Bw}[n]$$
$$\mathbf{x}[n+1] = \overline{\mathbf{A}}\mathbf{x}[n] + \mathbf{Bw}[n]$$

$\overline{\mathbf{A}}$ - matrica sustava uz zatvorene petlje povratne veze njene karakteristične frekvencije q_k određuju vladanje sustava

može se pokazati da za upravljivi sustav postoji najmanje jedna matrica G takva da karakteristične vrijednosti q_k matrice $\overline{\mathbf{A}}$ budu jednake zadanima

Povratna veza s izlaza sustava



$\boldsymbol{x}[n+1] = \boldsymbol{Ax}[n] + \boldsymbol{Bu}[n]$
$\boldsymbol{u}[n] = \boldsymbol{w}[n] - \boldsymbol{Ky}[n]$
$\boldsymbol{y}[n] = \mathbf{C}\,\boldsymbol{x}[n]$

Povratna veza s izlaza sustava

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[n] + \mathbf{B}(\mathbf{w}[n] - \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{x}[n])$$

$$\mathbf{x}[n+1] = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{x}[n] + \mathbf{B}\mathbf{w}[n]$$

$$\mathbf{x}[n+1] = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}[n] + \mathbf{B}\mathbf{w}[n]$$

$\bar{\mathbf{A}}$ matrica ovisi o matricama A, B, C i K. Ako je odziv izvornog sustava nezadovoljavajući treba naći matricu K da bi sustav imao željeni odziv.

Pokazuje se da to nije uvijek moguće za bilo koje matrice B i C.

Zato se pristupa realizaciji povratne veze s varijabli stanja $\Rightarrow$ estimatori