Frekvencijska analiza vremenski diskretnih signala

Signali i sustavi

Frekvencijska analiza diskretnih aperiodičnih signala

aperiodični diskretni signal možemo generirati iz kontinuiranog aperiodičnog signala otipkavanjem

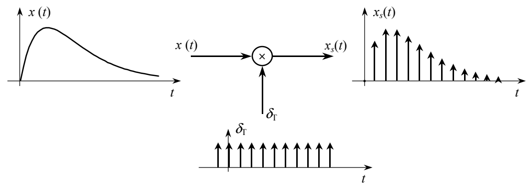
postupak uzimanja uzoraka ili otipkavanja kontinuiranog signala možemo matematički modelirati kao pridruživanje funkciji $x(t)$ niza impulsa, čiji intenzitet je proporcionalan trenutnim vrijednostima kontinuiranog signala

$$x_s(t) = S_T\{x(t)\}$$

Frekvencijska analiza diskretnih aperiodičnih signala

Možemo to interpretirati kao modulaciju impulsnog niza $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\mathrm{T})$ funkcijom $x(t)$, tj.

$$x_s(t) = x(t) \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\mathrm{T})$$



Frekvencijska analiza diskretnih aperiodičnih signala

zbog svojstva delta funkcije da vadi vrijednost kontinuirane funkcije $x(t)$ na mjestu diskontinuiteta $t - nT = 0$, tj. $t_n = nT$, može se napisati i u obliku:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

Frekvencijska analiza diskretnih aperiodičnih signala

usporedimo spektre ovih signala

za signal $x(t)$ vrijedi par:

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi Ft} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F) e^{j2\pi Ft} dF$$

Frekvencijska analiza diskretnih aperiodičnih signala

Periodičan niz δ_T nastao ponavljanjem delta funkcije svakih T, kao svaka periodična funkcija se dade predstaviti Fourierovim redom, gdje su Fourierovi koeficijenti dani s:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} \delta(t) e^{-j2\pi kF_s t} dt = \frac{1}{T}, \quad F_s = \frac{1}{T}.$$

F_s je frekvencija otipkavanja

slijedi: $$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j2\pi kF_s t} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi kF_s t}.$$

Frekvencijska analiza diskretnih aperiodičnih signala

spektar otipkanog signala $x_s(t)$ dan je s:

$$X_s(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t) e^{-j2\pi Ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left(\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi kF_s t} \right) e^{-j2\pi Ft} dt$$

zamjenom redoslijeda sumacije i integracije dobivamo:

$$X_s(F) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi(F - kF_s)t} dt$$

integral je spektar signala $x(t)$, ali pomaknut za kF_s, pa izlazi:

$$X_s(F) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(F - kF_s) = F_s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(F - kF_s)$$

Frekvencijska analiza diskretnih aperiodičnih signala

pokazano je da je spektar otipkanog dakle diskretnog signala periodičan pa Fourierovu transformaciju diskretnog signala $x[n]$ konačne energije možemo pisati:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

Frekvencijska analiza diskretnih aperiodičnih signala

važno je primijetiti da je $X(e^{j\omega})$ periodičan s periodom 2π

$$X(e^{j(\omega+2\pi k)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j(\omega+2\pi k)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} e^{-j2\pi kn} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = X(e^{j\omega})$$

ovo je posljedica činjenice da je za diskretni signal frekvencijsko područje limitirano samo na interval $(-\pi, \pi)$ ili $(0, 2\pi)$ i da su sve frekvencije izvan tog intervala ekvivalentne frekvencijama unutar intervala

Frekvencijska analiza diskretnih aperiodičnih signala

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

gornji izraz predstavlja prikaz $X(e^{j\omega})$ uz pomoć Foureirovog reda pa uzorci $x[n]$ predstavljaju Foureierove koeficijente

izračunavanje $x[n]$ iz $X(e^{j\omega})$

Fourierova transformacija diskretnih aperiodičnih signala

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

izračunavanje $x[n]$ iz $X(e^{j\omega})$ započinje množenje obje strane s $e^{j\omega m}$ i integracijom preko intervala (-π, π):

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega m}d\omega = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}\right]e^{j\omega m}d\omega$$

Fourierova transformacija diskretnih aperiodičnih signala

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega m}d\omega = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}\right]e^{j\omega m}d\omega$$

desna strana se preuređuje i izračunava:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)}\,d\omega = \begin{cases} 2\pi\, x[m] & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

pa je konačno:

$$x[m] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega m}d\omega$$

Fourierova transformacija diskretnih aperiodičnih signala

zaključno, par za Fourierovu transformaciju aperiodičnih diskretnih signala je

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

Gustoća spektra energije aperiodičnih vremenski diskretnih signala

energija aperiodičkog diskretnog signala $x[n]$, čija je Fourierova transformacija $X(e^{j\omega})$ je:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

uz

$$|x[n]|^2 = x[n]\cdot x^*[n]$$

izrazimo energiju E_x pomoću spektralne karakteristike $X(e^{j\omega})$

Gustoća spektra energije aperiodičnih vremenski diskretnih signala

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\cdot x^*[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega})e^{-j\omega n}d\omega\right]$$

$$E_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega})\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}\right]d\omega$$

$$E_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega})X(e^{j\omega})d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega$$

Gustoća spektra energije aperiodičnih vremenski diskretnih signala

dakle vrijedi:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega$$

što je Parseval-ova relacija za aperidodične diskretne signala konačne energije

Gustoća spektra energije aperiodičnih vremenski diskretnih signala

kao i u slučaju aperiodskih kontinuiranih signala i ovdje je uobičajen prikaz spektra u polarnom obliku:

$$X(e^{j\omega}) = \left|X(e^{j\omega})\right|e^{j\Theta(\omega)}$$

a

$$S_{xx}(e^{j\omega}) = \left|X(e^{j\omega})\right|^2$$

predstavlja raspodjelu energije kao funkcija frekvencije i naziva se gustoća spektra energije

Spektar realnih aperiodičnih vremenski diskretnih signala

nadalje za realni signal vrijedi:

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$$

čemu je ekvivalentno

$$\left|X(e^{j\omega})\right| = \left|X(e^{-j\omega})\right| \quad \text{i} \quad \arg X(e^{j\omega}) = -\arg X(e^{-j\omega})$$

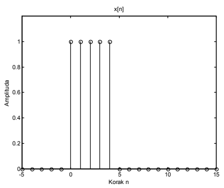
odnosno

$$S_{xx}(e^{-j\omega}) = S_{xx}(e^{j\omega})$$

Primjer Fourierove transformacije aperiodičkog pravokutnog signala

Zadan je pravokutni signal za koji treba odrediti Fourierovu transformaciju:

$$x[n]=\begin{cases} A & 0\le n\le L-1 \\ 0 & \text{za ostale n} \end{cases}$$



L=5

Primjer Fourierove transformacije aperiodičkog pravokutnog signala

Fourierova transformacija ovog signala je:

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{L-1}Ae^{-j\omega n}$$

$$=A\frac{1-e^{-j\omega L}}{1-e^{-j\omega}}=Ae^{-j(\omega/2)(L-1)}\,\frac{\sin(\omega L/2)}{\omega/2}$$

Primjer Fourierove transformacije aperiodičkog pravokutnog signala

Amplitudni spektar je:

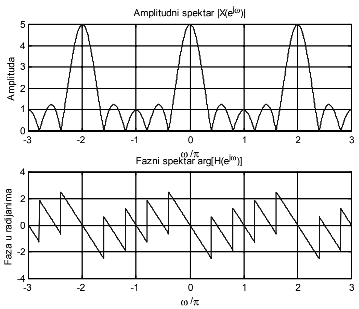
$$\left|X(e^{j\omega})\right|=\begin{cases} |A|L & \omega=0 \\ |A|\left|\dfrac{\sin(\omega L/2)}{\omega/2}\right| & \text{za ostale } \omega \end{cases}$$

fazni spektar je:

$$\arg\left|X(e^{j\omega})\right|=\arg A-\frac{\omega}{2}(L-1)+\arg\frac{\sin(\omega L/2)}{\omega/2}$$

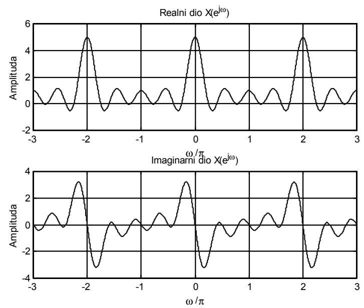
Napomena: faza realne veličine je *nula* kada je ona pozitivna a π kada je veličina negativna

Primjer Fourierove transformacije aperiodičkog pravokutnog signala



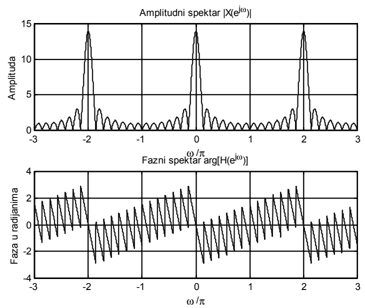
L=5

Primjer Fourierove transformacije aperiodičkog pravokutnog signala



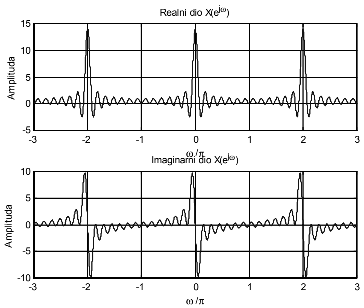
L=5

Primjer Fourierove transformacije aperiodičkog pravokutnog signala



L=14

Primjer Fourierove transformacije aperiodičkog pravokutnog signala



L=14

Veza Fourierove transformacije i z - transforamcije

Z – transformacija je definirana kao

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}\qquad \mathrm{ROC}: r_2<|z|<r_1$$

kompleksna varijabla z izražena u polarnom obliku:

$$z=re^{j\omega}$$

gdje je

$$r=|z|\quad \&\quad \omega=\arg(z)$$

Veza Fourierove transformacije i z - transforamcije

Unutar područja konvergencije $X(z)$ možemo supstituirati $z=re^{j\omega}$ u izraz za z – transformaciju pa slijedi:

$$X(z)\big|_{z=re^{j\omega}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]r^{-n}e^{-j\omega n}$$

ovaj izraz možemo interpretirati kao Fourierovu transformaciju niza $x[n]r^{-n}$

alternativno ako $X(z)$ konvergira za $|z|=1$ tada je

$$X(z)\big|_{z=e^{j\omega}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}\equiv X(e^{j\omega})$$

Dakle Fourierovu transformaciju možemo interpretirati kao z - transformaciju izračunatu na jediničnoj kružnici

Fourierova transformacija diskretnih periodičnih signala

Fourierova transformacija diskretnih periodičnih signala

Fourierov red za kontinuirani periodični signal $x(t)$, perioda T_p, je:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}$$

signal $x(t)$ može biti prikazan s beskonačnim brojem frekvencijskih komponenti

spektar je diskretan pri čemu je razmak između susjednih komponenti $1/T_p$

Fourierova transformacija diskretnih periodičnih signala

diskretni periodični signal $x[n]$ ima periodični spektar (zbog diskretnosti signala u vremenskoj domeni) koji se ponavlja svakih $2\pi \Rightarrow$ područje frekvencija $(-\pi, \pi)$ ili $(0, 2\pi)$

diskretni periodični signal $x[n]$ ima diskretan spektar (zbog periodičnosti signala u vremenskoj domeni) pri čemu je razmak između susjednih frekvencijskih komponenti $2\pi/N$ radijana $\Rightarrow$ Fourierov red za periodični diskretni signal sadržavati će najviše N frekvencijskih komponenti

Fourierova transformacija diskretnih periodičnih signala

Za diskretni periodični signal $x[n]$ perioda N vrijedi:

$$x[n] = x[n+N] \quad \text{za svaki} \quad n$$

Fourierov red periodičnog signala sadrži N harmonički vezanih kompleksnih eksponencijalnih funkcija:

$$e^{j2\pi kn/N} \qquad k = 0, 1, ..., N-1$$

Fourierova transformacija diskretnih periodičnih signala

Fourierov red za diskretini periodični signal:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N} \qquad n = 0, 1, ..., N-1$$

izvod izraza za Foureriove koeficijente c_k:

obje strane se množe s eksponencijalom $e^{-j2\pi l n/N}$ a zatim se produkti zbrajaju od n=0 do n=N-1

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi ln/N} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi(k-l)n/N}$$

Fourierova transformacija diskretnih periodičnih signala

zamijenimo redoslijed sumacije:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi ln/N} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi(k-l)n/N}$$

uz sumaciju

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi(k-l)n/N} = \begin{cases} N & k-l = 0, \pm N, \pm 2N, ... \\ 0 & \text{za ostale} \end{cases}$$

desna se strana reducira na Nc_l pa slijedi:

Fourierova transformacija diskretnih periodičnih signala

$$c_l = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi ln/N} \qquad l = 0, 1, ..., N-1$$

što je izraz za Fourierove koeficijente signala $x[n]$

Fourierova transformacija diskretnih periodičnih signala

zaključno, par za Fourierovu transformaciju periodičnih diskretnih signala je

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} \qquad k = 0, 1, ..., N-1$$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N} \qquad n = 0, 1, ..., N-1$$

Fourierova transformacija diskretnih periodičnih signala

jednadžba $x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N} \quad n = 0, 1, ..., N-1$

se u engleskoj terminologiji naziva *discrete-time Fourier series* (*DTFS*)

Fourierovi koeficijenti c_k, k =0, 1, 2, ...,N-1, omogućavaju prikaz $x[n]$ u frekvencijskoj domeni, tako da c_k predstavljaju amplitudu i fazu vezanu uz frekvencijske komponente

gdje je $\omega_k = 2\pi k / N$

Fourierova transformacija diskretnih periodičnih signala

slijedi važno svojstvo periodičnosti c_k

$$c_{k+N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi(k+N)n/N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N} = c_k$$

prema tome $\{c_k\}$ je periodični niz s osnovnim periodom N

prema tome:

Fourierova transformacija diskretnih periodičnih signala

spektar signala $x[n]$, koji je periodičan s periodom N, je periodičan niz s periodom $N \Rightarrow$ bilo kojih N susjednih uzoraka signala ili njegova spektra su dovoljni za potpuni opis signala u vremenskoj ili frekvencijskoj domeni

Gustoća spektra snage vremenski diskretnih periodičnih signala

za periodični diskretni signal $x[n]$, perioda N, srednja snaga je definirana kao:

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \left|x[n]\right|^2$$

i ovdje će srednja snaga biti prikazana pomoću Fourierovih keficijenata

Gustoća spektra snage vremenski diskretnih periodičnih signala

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cdot x^*[n] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\left(\sum_{k=0}^{N-1} c_k^* e^{-j2\pi kn/N}\right) =$$

$$P_x = \sum_{k=0}^{N-1} c_k^* \left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}\right]$$

pa finalno zaključujemo:

$$P_x = \sum_{k=0}^{N-1} c_k^* \cdot c_k = \sum_{k=0}^{N-1} \left|c_k\right|^2$$

Gustoća spektra snage vremenski diskretnih periodičnih signala

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \left|x[n]\right|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \left|c_k\right|^2$$

predstavlja Parseval-ovu relaciju za diskretne periodične signale

Parseval-ova relacija pokazuje da je za diskretne periodične signale srednja snaga signala jednaka sumi snaga svake pojedine frekvencijske komponente

niz $|c_k|^2$ za k=0, 1, ... , N-1 predstavlja distribuciju snage kao funkciju frekvencije i naziva se gustoća spektra snage

Spektar realnog periodičkog diskretnog signala

za realni periodični $x[n]$ koeficijenti Fourierovog reda $\{c_k\}$ zadovoljavaju slijedeći uvjet:

$$c_{-k} = c_k^*$$

iz čega slijedi:

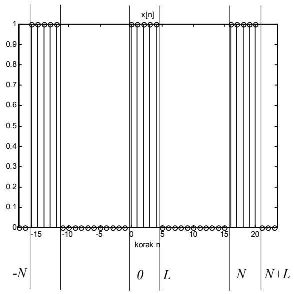
$$\left|c_{-k}\right| = \left|c_k\right| \quad \text{i} \quad \arg(c_k) = -\arg(c_{-k})$$

a zbog $c_k = c_{k+N}$ slijedi

$$\left|c_k\right| = \left|c_{N-k}\right| \quad \text{i} \quad \arg(c_k) = -\arg(c_{N-k})$$

Primjer Fourierove transformacije periodičkog pravokutnog signala

zadan je periodični pravokutni diskretni signal kao na slici:



L=5
N=16

Primjer Fourierove transformacije periodičkog pravokutnog signala

izračunavaju se c_k

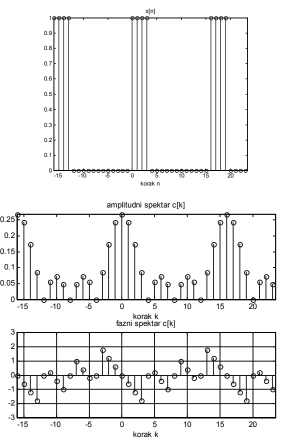
$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{L-1} Ae^{-j2\pi kn/N} \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

$$c_k = \frac{A}{N}\sum_{n=0}^{L-1}\left(e^{-j2\pi k/N}\right)^n = \begin{cases} \dfrac{AL}{N} & k=0 \\ \dfrac{A}{N}\dfrac{1-e^{-j2\pi kL/N}}{1-e^{-j2\pi k/N}} & k = 1,2,\ldots,N-1 \end{cases}$$

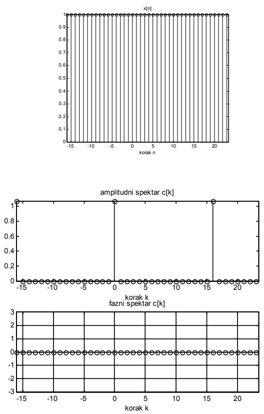
Primjer Fourierove transformacije periodičkog pravokutnog signala

$$c_k = \begin{cases} \dfrac{AL}{N} & k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots.. \\ \dfrac{A}{N} e^{j\pi k(L-1)/N} \dfrac{\sin(\pi kL/N)}{\sin(\pi k/N)} & \text{za ostale } k \end{cases}$$

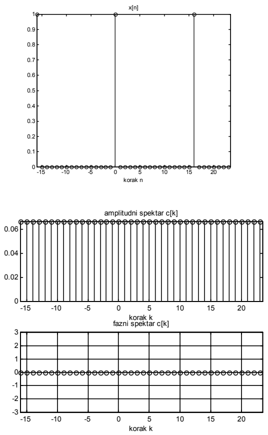
primjeri:



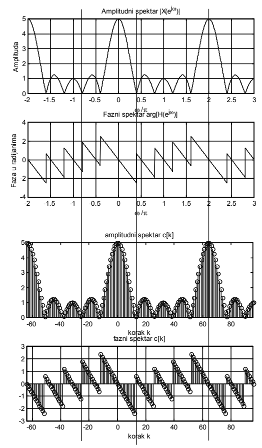
L=4
N=16
A=1



L=16
N=16
A=1



L=1
N=16
A=1



L=5
aperiodični
signal $x[n]$

L=5
periodični
signal $x[n]$

	aperiodičan	periodičan
kontinuirani	$X(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt$ $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$	$c_k=\frac{1}{T_p}\int_{T_p} x(t)e^{-j2\pi kF_0 t}dt$ $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi kF_0 t}$
diskretni	$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$ $x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$	$c_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}$ $x[n]=\sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N}$

Svojstva Fourierove transformacije diskretnih signala

prije je izvedena transformacija za aperiodični diskretni signal (DTFT)

$$X(e^{j\omega}) \equiv F\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$x[n] \equiv F^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

ovdje se razmatraju neka svojstva DTFT pogodna u nizu praktičnih primjena

slična razmatranja vrijede i za kontinuirane signale

Svojstva Fourierove transformacije diskretnih signala

svojstvo linearnosti

ako je $X_1(e^{j\omega}) = \mathrm{F}\{x_1[n]\}$ i $X_2(e^{j\omega}) = \mathrm{F}\{x_2[n]\}$ tada je
$X(e^{j\omega}) = \mathrm{F}\{\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]\} = \alpha X_1(\omega) + \beta X_2(\omega)$

$$X(e^{j\omega}) \equiv F\{\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]\right)e^{-j\omega n}$$

$$= \alpha\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]e^{-j\omega n} + \beta\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n]e^{-j\omega n} =$$

$$= \alpha X_1(e^{j\omega}) + \beta X_2(e^{j\omega})$$

Svojstva Fourierove transformacije diskretnih signala

pomak u vremenskoj domeni

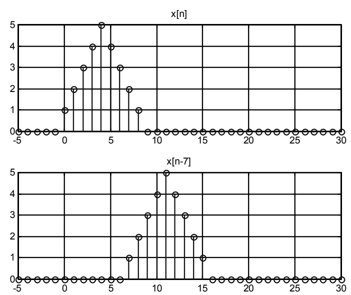
ako je $X(e^{j\omega}) = \mathrm{F}\{x[n]\}$ tada je
$\mathrm{F}\{x[n\text{-}k]\} = e^{-j\omega k} X(e^{j\omega})$

$$F\{x[n-k]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-k]e^{-j\omega n} =$$

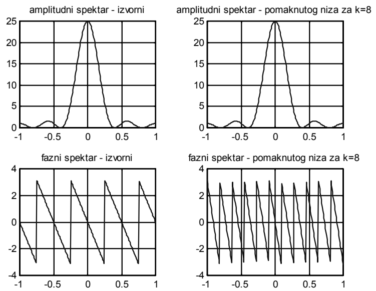
$$= |n-k=m| = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j\omega(m+k)} =$$

$$= e^{-j\omega k}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j\omega m} = e^{-j\omega k}X(e^{j\omega})$$

Svojstva Fourierove transformacije diskretnih signala



Svojstva Fourierove transformacije diskretnih signala



Svojstva Fourierove transformacije diskretnih signala

<u>pomak u frekvencijskoj domeni</u>

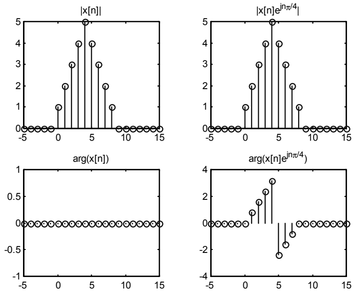
ako je $X(e^{j\omega}) = \mathrm{F}\{x[n]\}$ tada je

$$F\{e^{j\omega_0 n}x[n]\} = X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

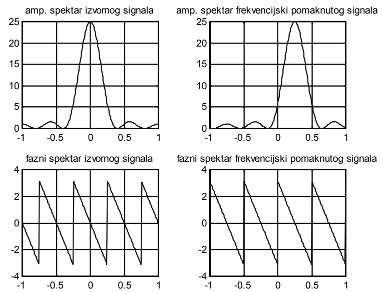
$$F\{e^{j\omega_0 n}x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 n}x[n]e^{-j\omega n} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(\omega-\omega_0)n} = X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

Svojstva Fourierove transformacije diskretnih signala



Svojstva Fourierove transformacije diskretnih signala



Svojstva Fourierove transformacije diskretnih signala

<u>konvolucija</u>

ako je $X_1(e^{j\omega}) = \mathrm{F}\{x_1[n]\}$ i $X_2(e^{j\omega}) = \mathrm{F}\{x_2[n]\}$ tada je

$$\mathrm{F}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]\cdot x_2[n-m]\right\} = X_1(e^{j\omega})\cdot X_2(e^{j\omega})$$

$$F\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]x_2[n-m]\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]x_2[n-m]\right]e^{-j\omega n} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n-m]e^{-j\omega n}\right] = |n-m=l| =$$

Svojstva Fourierove transformacije diskretnih signala

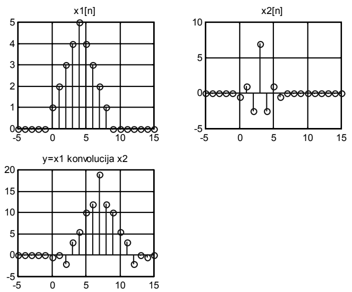
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[l]e^{-j\omega(m+l)}\right] =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]e^{-j\omega m}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[l]e^{-j\omega l}\right] =$$

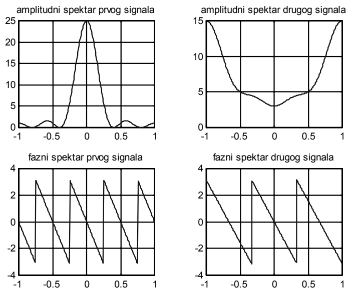
$$= X_2(e^{j\omega})\cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]e^{-j\omega m} =$$

$$= X_2(e^{j\omega})\cdot X_1(e^{j\omega})$$

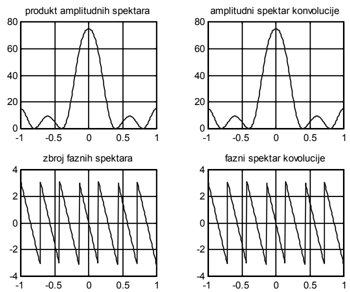
Svojstva Fourierove transformacije diskretnih signala



Svojstva Fourierove transformacije diskretnih signala



Svojstva Fourierove transformacije diskretnih signala



Svojstva Fourierove transformacije diskretnih signala

<u>modulacija</u>

ako je $X_1(e^{j\omega}) = \mathrm{F}\{x_1[n]\}$ i $X_2(e^{j\omega}) = \mathrm{F}\{x_2[n]\}$ tada je

$$\mathrm{F}\{x_1[n]\cdot x_2[n]\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\psi})\cdot X_2(e^{j(\omega-\psi)})d\psi$$

$$\mathrm{y[n]} = x_1[n]\cdot x_2[n] \Rightarrow Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(x_1[n]x_2[n]\right)e^{-j\omega n}$$

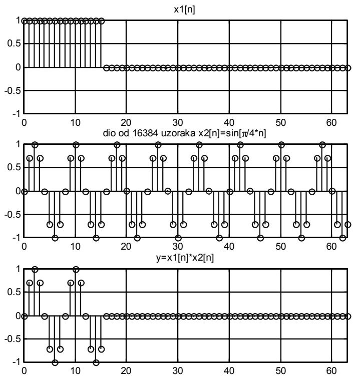
$$x_1[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\psi})e^{j\psi n}d\psi$$

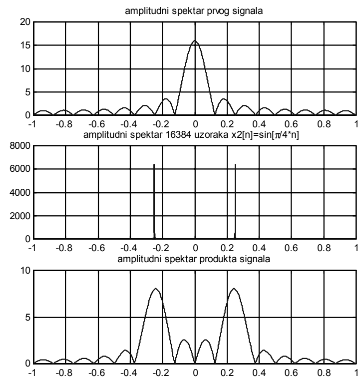
Svojstva Fourierove transformacije diskretnih signala

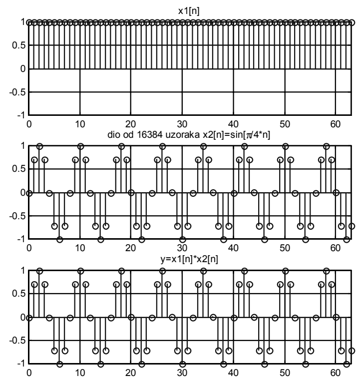
$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\psi})e^{j\psi n}d\psi\right]x_2[n]e^{-j\omega n}$$

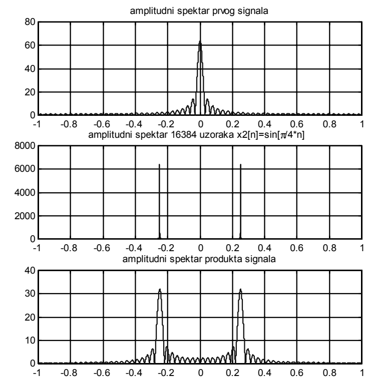
$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\psi})\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n]e^{-j(\omega-\psi)n}}_{X_2(e^{j(\omega-\psi)})}d\psi$$

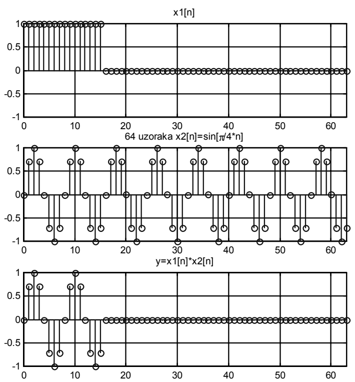
$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\psi})X_2(e^{j(\omega-\psi)})d\psi = \mathrm{F}\{x_1[n]\cdot x_2[n]\}$$

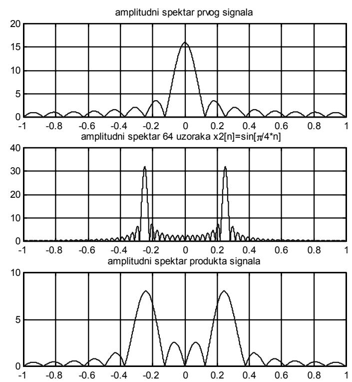


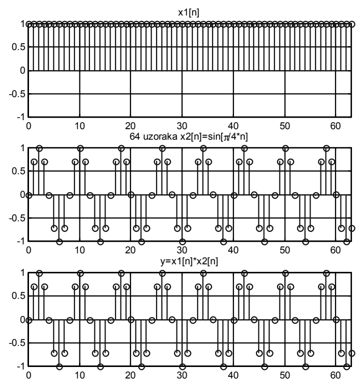


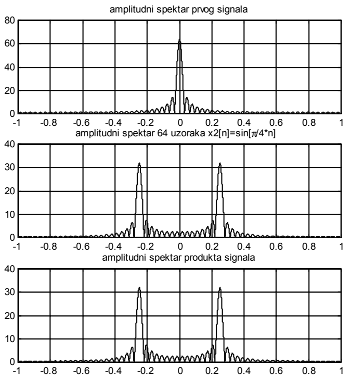


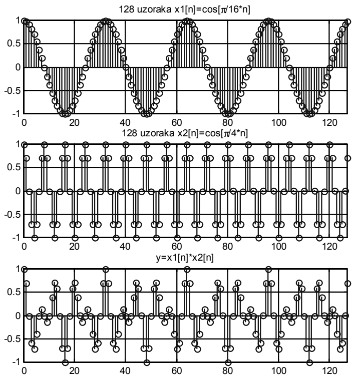












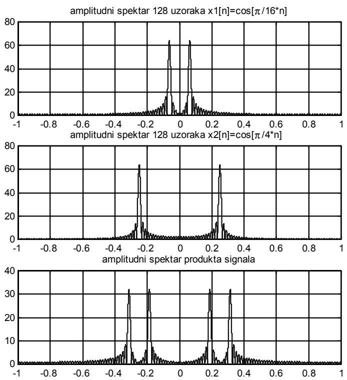
primjer

$$x_1[n] = \cos[\tfrac{\pi}{4} n]$$

$$x_2[n] = \cos[\tfrac{\pi}{16} n]$$

$$x_1[n] \cdot x_2[n] = \cos[\tfrac{\pi}{4} n] \cdot \cos[\tfrac{\pi}{16} n] =$$

$$x_1[n] \cdot x_2[n] = \tfrac{1}{2}\left\{\cos[\tfrac{3\pi}{4} n] \cdot \cos[\tfrac{5\pi}{4} n]\right\} =$$



1/16=
0.0625

1/4=
0.25

3/16=
0,1875

5/4=
0,3125

Svojstva Fourierove transformacije diskretnih signala

<u>inverzija vremenske osi</u>

ako je $X(e^{j\omega}) = \mathrm{F}\{x[n]\}$ tada je $X(e^{-j\omega}) = \mathrm{F}\{x[-n]\}$

$$F\{x[-n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n] e^{-j\omega n} = \left| n = -l \right| =$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l] e^{j\omega l} = X(e^{-j\omega})$$

Svojstva Fourierove transformacije diskretnih signala

za realni $x[n]$ dobivamo:

$$F\{x[-n]\} = X(e^{-j\omega}) = \left| X(e^{-j\omega}) \right| e^{j \arg\{X(e^{-j\omega})\}}$$

$$= \left| X(e^{j\omega}) \right| e^{-j \arg\{X(e^{j\omega})\}}$$