

Signal i sustavi

Sustavi drugog reda

Definicija i blok dijagram

- Sustav drugog reda ima dva elementa s memorijom, dakle, dva integratora u blok dijagramu.
- Opisan je s diferencijalnom jednačbom drugog reda, odnosno s dvije jednačbe prvog reda.

2

Definicija i blok dijagram

- Sustav s ulazom u i izlazom y je drugog reda ako se mogu identificirati dvije varijable stanja x_1 i x_2 .

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, u) \quad x_1(t_0) = x_{10} \quad \text{za } t > t_0$$

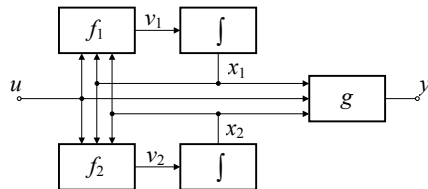
$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, u) \quad x_2(t_0) = x_{20}$$

$$y = g(x_1, x_2, u)$$

3

Definicija i blok dijagram

- Opći oblik blok dijagrama za sustav drugog reda može se nacrtati s funkcijskim blokovima samo s jednim izlazom:



4

Definicija i blok dijagram

- Vektor stanja: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

- Sustav drugog reda:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \quad \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, u) \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, u)$$

$$y = \mathbf{g}(\mathbf{x}, u) \quad y = g(x_1, x_2, u)$$

5

Definicija i blok dijagram

- Rješenje vektorske diferencijalne jednačbe možemo napisati formalno u obliku kao da se radi o diferencijalnoj jednačbi prvog reda:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), u(\tau)) d\tau.$$

- Dobivena je integralna jednačba u kojoj se funkcija stanja $\mathbf{x}(t)$ pojavljuje implicitno, pa je nije moguće jednostavno riješiti.
- To je oblik koji se koristi u numeričkim postupcima.

6

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

Linearni sustav vremenski stalan

- Opći oblik jednačbe stanja:

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

- Može se transformirati u diferencijalnu jednačbu drugog reda:

$$\ddot{x}_1 - T\dot{x}_1 + \Delta x_1 = u(t),$$

$$\ddot{x}_2 - T\dot{x}_2 + \Delta x_2 = v(t).$$

7

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- Pri tom su:

$$T = a_{11} + a_{22}$$

trag matrice \mathbf{A}

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

determinanta od \mathbf{A}

$$u(t) = (a_{12}b_{21} - a_{22}b_{11})u_1 + (a_{12}b_{22} - a_{22}b_{12})u_2 + b_{11}\dot{u}_1 + b_{12}\dot{u}_2$$

$$v(t) = (a_{21}b_{11} - a_{11}b_{21})u_1 + (a_{21}b_{12} - a_{11}b_{22})u_2 + b_{21}\dot{u}_1 + b_{22}\dot{u}_2$$

- Ako su obje konstante $a_{12} = a_{21} = 0$ (matrica \mathbf{A} je dijagonalna) sustav je opisan s dvije razvezane jednačbe prvog reda.

8

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- Često se jednačba drugog reda nepobuđenog sustava piše u obliku:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

- $2\alpha = -T$, α je faktor prigušenja,

- $\omega_0^2 = \Delta$, ω_0 je frekvencija neprigušenog titranja.

9

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- Pretpostavimo da je rješenje eksponencijala:

$$x(t) = X e^{pt}.$$

- Uvrštenje vodi do karakteristične jednadžbe:

$$p^2 + 2ap + \omega_0^2 = 0,$$

- čija rješenja su karakteristične ili prirodne frekvencije sustava drugog reda.

10

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

$$p_{12} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \begin{cases} -\alpha \pm \alpha_d & \text{za } \alpha > \omega_0 > 0 \\ -\alpha & \text{za } \alpha = \omega_0 > 0 \\ -\alpha \pm j\omega_d & \text{za } 0 < \alpha < \omega_d \end{cases}$$

$$\alpha_d = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

Rješenje je oblika: $x = X_1 e^{p_1 t} + X_2 e^{p_2 t}$

11

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- zavisno od veličina α i ω_0 postoji tzv.
 - nadkritično prigušenje $\alpha > \omega_0$,
 - kritično prigušenje $\alpha = \omega_0$,
 - podkritično prigušenje $\alpha < \omega_0$,
 - neprigušeni slučaj $\alpha = 0$.

12

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

SIMULINK primjer

13

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- Proizvoljne konstante određuju početni uvjeti $x(0)$ i
- Rješenje se može napisati u obliku:

$$x(t) = \frac{\dot{x}(0) - x(0)p_2}{(p_1 - p_2)} e^{p_1 t} + \frac{\dot{x}(0) - x(0)p_1}{(p_2 - p_1)} e^{p_2 t}.$$

14

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- Rješenje homogene jednadžbe stanja može se dobiti pretpostavkom da eksponencijalne funkcije $x_1 = X_1 e^{p_1 t}$, $x_2 = X_2 e^{p_2 t}$ zadovoljavaju skup od dvije jednadžbe:

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

15

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- Dobije se sustav karakterističnih algebarskih jednadžbi:

$$\begin{matrix} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{matrix} \xrightarrow[\substack{x_1 = X_1 e^{pt} \\ x_2 = X_2 e^{pt}}]{\substack{x_1 = X_1 e^{pt} \\ x_2 = X_2 e^{pt}}} \begin{matrix} pX_1 e^{pt} = (a_{11}X_1 + a_{12}X_2)e^{pt} \\ pX_2 e^{pt} = (a_{21}X_1 + a_{22}X_2)e^{pt} \end{matrix}$$

$$pX_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2$$

$$pX_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2$$

$$(a_{11} - p)X_1 + a_{12}X_2 = 0$$

$$a_{21}X_1 + (a_{22} - p)X_2 = 0$$

16

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- Da bi sustav karakterističnih jednadžbi dao rješenja za amplitude X_1 , X_2 različite od nule, mora determinanta sustava iščezavati,

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - p) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22} - p) \end{vmatrix} = 0.$$

- To daje polinom drugog stupnja:

$$p^2 - Tp + \Delta = 0.$$

17

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- odakle slijede prirodne frekvencije p_1 i p_2 za koje $e^{p_i t}$ zadovoljava jednadžbu.
- Rješenje se može napisati u obliku:

$$x_1(t) = X_{11} e^{p_1 t} + X_{12} e^{p_2 t},$$

$$x_2(t) = X_{21} e^{p_1 t} + X_{22} e^{p_2 t}.$$

18

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- Nezavisne su samo dvije konstante i one se odrede iz dva početna uvjeta.
- Druge dvije konstante proizlaze iz prvih uvrštenjem u jednadžbe stanja za $t = 0$.

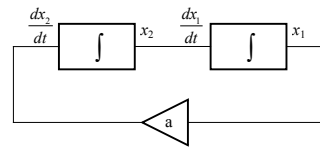
$$X_{11} = \frac{(a_{11} - p_2)x_{10} + a_{12}x_{20}}{p_1 - p_2} \quad X_{12} = \frac{(a_{11} - p_1)x_{10} + a_{12}x_{20}}{p_2 - p_1}$$

$$X_{21} = \frac{a_{21}x_{10} + (a_{22} - p_2)x_{20}}{p_1 - p_2} \quad X_{22} = \frac{a_{21}x_{10} + (a_{22} - p_1)x_{20}}{p_2 - p_1}$$

19

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- Primjer:** Najjednostavniji slučaj dva integratora s povratnom vezom.



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0 \\ a_{21} &= a \\ T &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = ax_1$$

$$\begin{aligned} a_{12} &= 1 \\ a_{22} &= 0 \\ \Delta &= -a \end{aligned}$$

20

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- Determinanta sustava mora iščezavati

$$\begin{vmatrix} -p & 1 \\ a & -p \end{vmatrix} = p^2 - a = 0 \quad p_{1,2} = \pm\sqrt{a} = \pm\alpha$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ch}(\alpha t) & \frac{\text{sh}(\alpha t)}{\alpha} \\ \alpha \text{sh}(\alpha t) & \text{ch}(\alpha t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0$, gdje je $\Phi(t)$ – prijelazna matrica.

21

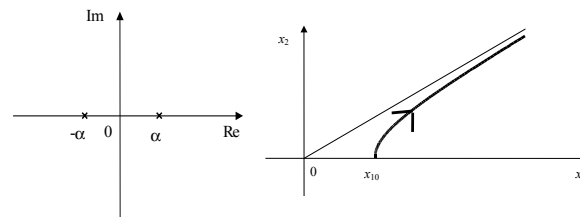
Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- Veza između $x_1(t)$ i $x_2(t)$.
- Jednadžbu krivulje $F(x_1, x_2) = 0$ možemo dobiti eliminacijom vremena.
- Uzmimo početno stanje $x_{10}, (x_{20} = 0)$:

$$\left(\frac{x_1}{x_{10}}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{\alpha x_{10}}\right)^2 = 1.$$

22

Vladanje i svojstva sustava drugog reda



- $x_1 \rightarrow \infty$ za $t \rightarrow \infty$
- $x_2 \rightarrow \infty$ za $t \rightarrow \infty$
- Nestabilan sustav. Ravnoteža $\mathbf{x} = 0$ se ne dosegne – sedlo

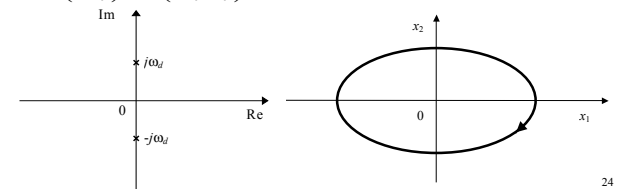
23

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- Primjer:** za $a < 0$ $p_{1,2} = \pm\sqrt{-\omega_0^2} = \pm j\omega_0$

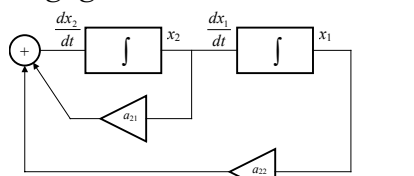
$$\left(\frac{x_1}{x_{10}}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\omega_0 x_{10}}\right)^2 = 1$$

- Zatvorena krivulja – periodičan proces. Trajektorija obilazi oko točke ravnoteže – fokus.



24

Vladanje i svojstva sustava drugog reda



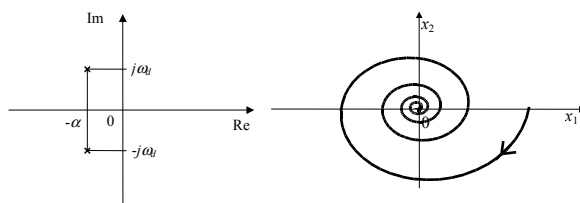
$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

25

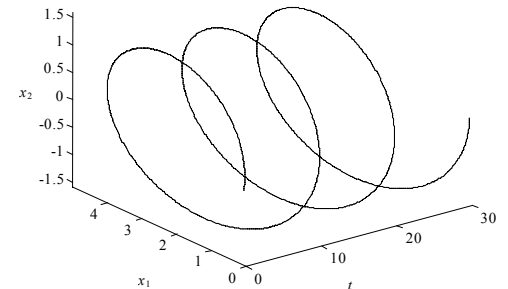
Vladanje i svojstva sustava drugog reda

$$\left(\frac{x_1}{x_{10}e^{-\alpha t}}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\omega_d x_{10}e^{-\alpha t}}\right)^2 = 1$$

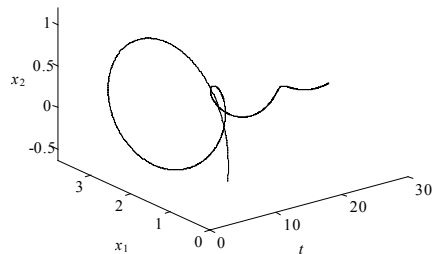


26

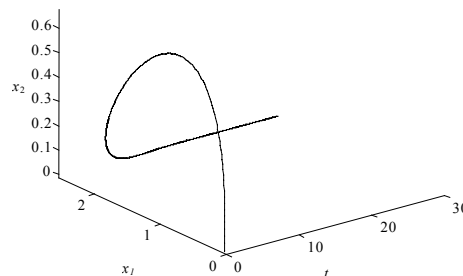
Vladanje i svojstva sustava drugog reda



27



28

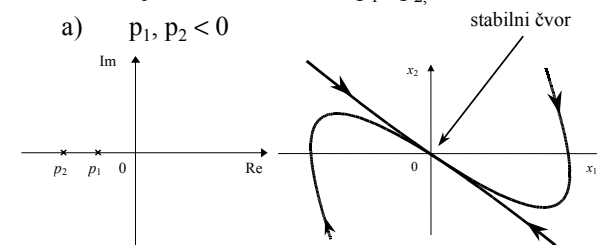


29

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- Slučaj realnih i različitih p_1 i p_2 ,

a) $p_1, p_2 < 0$

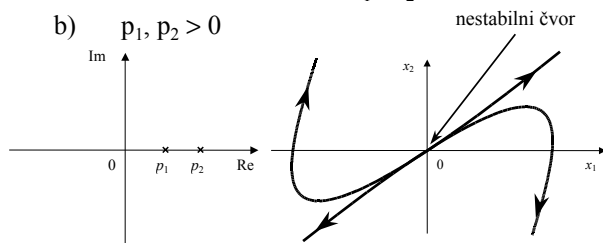


30

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- Slučaj realnih i različitih p_1 i p_2

b) $p_1, p_2 > 0$

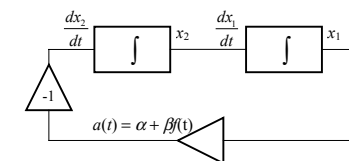


31

SIMULINK primjer

32

Vremenski varijantan sustav drugog reda



- Pojačanje $a(t)$ u petlji blok dijagrama je zavisno od vremena.

$$\dot{x}_1(t) = x_2$$

$$\dot{x}_2(t) = -a(t)x_1(t)$$

33

Vremenski varijantan sustav drugog reda

- Vremenska funkcija $a(t)$ pojačanja će utjecati na vladanje sustava.

- Hillova diferencijalna jednačba

$$\ddot{x}_1 = \dot{x}_2 = -(\alpha + \beta f(t))x_1,$$

$$\dot{x}_1 + (\alpha + \beta f(t))x_1 = 0.$$

- Za $f(t) = 2\cos(2t)$ izlazi Mathieuova diferencijalna jednačba:

$$\ddot{x}_1 + (\alpha + 2\beta \cos 2t)x_1 = 0.$$

34

Vremenski varijantan sustav drugog reda

- Za $f(t) = r(t)$ pravokutan oblik, gdje je funkcija pojačanja konstantna po odsječcima (Meissnerova jednačba).
- Jednačba se može rješavati po intervalima kao diferencijalna jednačba s konstantnim koeficijentima.

35

Vremenski varijantan sustav drugog reda

- Pretpostavimo $a(t)$

$$a(t) = \alpha(1 + m r(t)) \quad r(t) = \begin{cases} 1 & 0 < \sqrt{1+m}\alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ -1 & \frac{\pi}{2} < \sqrt{1-m}\alpha \leq \pi \end{cases}$$

- Za 1,3,5,... četvrtinu perioda jednačba stanja je

$$\dot{x}_2 = -\alpha(1+m)x_1 \quad \dot{x}_1 = x_2 \quad \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = 0.$$

- Za 2,4,6,... četvrtinu perioda jednačba stanja je

$$\dot{x}_2 = -\alpha(1-m)x_1 \quad \dot{x}_1 = x_2 \quad \ddot{x}_1 + \omega_2^2 x_1 = 0.$$

36

Vremenski varijantan sustav drugog reda

- U oba slučaja je to rješenje vremenski nepromjenljivog sustava.
 - Prvi slučaj: $\omega_1^2 = \alpha(1+m)$.
 - Drugi slučaj: $\omega_2^2 = \alpha(1-m)$.
- Rješenje izraženo s početnim uvjetima je:

$$x_1 = x_{10} \cos \omega t + \frac{x_{20}}{\omega} \sin \omega t,$$

$$x_2 = -\omega x_{10} \sin \omega t + x_{20} \cos \omega t.$$

37

Vremenski varijantan sustav drugog reda

- Određimo rješenje gornjih diferencijalnih jednadžbi u 1, 2, 3 i 4. vremenskom odsječku.
- U svakom odsječku ćemo smatrati da vrijeme počinje od $t = 0$.
- Kao početno stanje uzet ćemo krajnje stanje iz prethodnog vremenskog intervala.
- Kao početno stanje u prvom intervalu uzmimo:

38

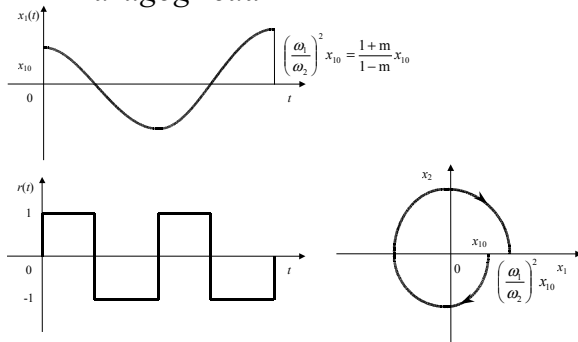
Vremenski varijantan sustav drugog reda

- Uz dane pretpostavke dobije se izraz za amplitudu titranja:

$$x_1(2\pi) = \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 x_{10} = \frac{1+m}{1-m} x_{10}.$$

39

Vremenski varijantan sustav drugog reda



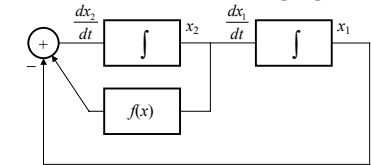
40

Vremenski varijantan sustav drugog reda

- Periodična promjena parametra pogodnog polariteta $m > 0$ i dvostruke frekvencije izaziva porast amplitude titranja.
- Analizirani sustav je model:
 - fizikalnog njihala (dječja lula) gdje se težište mase mijenja,
 - titrajnog kruga čiji se kapacitet mijenja dvostrukom frekvencijom od frekvencije titranja kruga.
- Promjenljivi element *pumpa* energiju u sustav.

41

Nelinearni sustav drugog reda



- Neka je funkcija nelinearnog bloka polinom trećeg stupnja, $f(x) = ax - cx^3$.

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + f(x_2)$$

42

Nelinearni sustav drugog reda

- Jednadžbe se mogu svesti na jednadžbu drugog reda

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{dx_1}{dt} + \frac{df}{dx_2} \cdot \frac{dx_2}{dt}$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -x_2 + \frac{df}{dx_2} \cdot \frac{dx_2}{dt},$$

odnosno $\frac{d^2 x_2}{dt^2} - (a - 3cx_2^2) \frac{dx_2}{dt} + x_2 = 0.$

Van der Pol – ova jednadžba

43

SIMULINK primjer

44

Nelinearni sustav drugog reda

- Ova jednadžba je poslužila za analizu nekoliko tipova oscilatora.
- Od niza zanimljivih fenomena posvetit će se pažnja radu ovog sustava kao oscilatora.
- Pretpostavit ćemo da veličine $a \ll 1$ i $c \ll 1$ tako da je sustav vrlo oscilatoran.
- Uz zanemarenje člana s $\frac{dx_2}{dt}$ dominantni proces može se opisati jednadžbom: $\ddot{x}_2 + x_2 = 0$ čije je rješenje *harmonijsko titranje*.

45

Nelinearni sustav drugog reda

- Za očekivati je da će se proces moći opisati približno s harmonijskim titranjem.
- Mali srednji član $(a - 3cx^2)\dot{x}$ će utjecati na sporo mijenjanje amplitude titranja.

- Pretpostavimo zato rješenje u obliku:

$$x = A(t) \sin(t)$$

gdje je $A(t)$ sporo mijenjajuća amplituda oscilacija.

$$\dot{x} = \dot{A}(t) \sin t + A(t) \cos t$$

46

Nelinearni sustav drugog reda

- Da bi jednačba bila zadovoljena, svi članovi koji množe $\sin(t)$ i koji množe $\cos(t)$ moraju biti jednaki nuli.

$$\ddot{A}(t) \sin t - A(t) \sin t - a\dot{A}(t) \sin t + 3A^2(t) \cos A(t) \sin^3 t = 0,$$

$$2\dot{A}(t) \cos t - aA(t) \cos t + 3cA^3(t) \sin^2 t \cos t = 0.$$

- Iz druge jednačbe izlazi:

$$2\dot{A}(t) \cos t - aA(t) \cos t + \frac{3c}{4} A^3 (\cos t - \cos 3t) = 0.$$

47

Nelinearni sustav drugog reda

- Efekt treće harmoničke komponente ($3t$) se može zanemariti, pa dobijemo jednačbu za sporo mijenjanje amplitude:

$$2\dot{A}(t) - aA(t) + \frac{3c}{4} A^3(t) = 0.$$

- Stalna amplituda $\dot{A}(t) = 0$ uspostaviti će se pri:

$$A(t) \left(a - \frac{3c}{4} A^2(t) \right) = 0 \quad \text{tj. } A_{s1} = 0 \quad \text{i} \quad A_{s2,3}^2 = \frac{4a}{3c}.$$

48

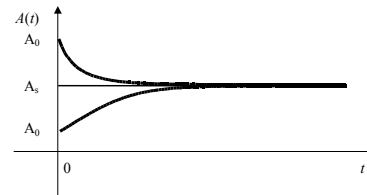
Nelinearni sustav drugog reda

- Pretpostavimo da je početno stanje u sustavu izazvalo početnu amplitudu titranja $A(0) = A_0$.
- Rješenjem jednačbe za amplitudu, dobit ćemo izraz za utitravanje oscilatora od A_0 do A_s :

$$A(t) = \frac{A_s}{\sqrt{1 + \left[\left(\frac{A_s}{A_0} \right)^2 - 1 \right] e^{-at}}}.$$

49

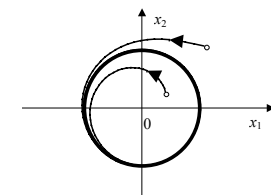
Nelinearni sustav drugog reda



- Amplituda se u početku eksponencijalno razvija počevši od A_0 , a kasnije asimptotski približava stalnoj vrijednosti A_s .
- U slučaju $A_0 < A_s$ raste, dok za $A_0 > A_s$ asimptotski pada na A_s .
- Amplituda oscilacija pokazuje svojstvo stabilnosti.

50

Nelinearni sustav drugog reda



- Trajektorija u ravнинi stanja kreće od početnog stanja i teži zatvorenoj krivulji.
- Zatvorena krivulja opisuje tzv. *granični ciklus* u sustavu.

51

Nelinearni sustav drugog reda

- Za razliku od zatvorenih trajektorija u linearnom sustavu, gdje početno stanje određuje veličinu zatvorene krivulje, ovdje parametri nelinearnog funkcijskog bloka (a , c) određuju veličinu zatvorene trajektorije.
- U njoj neposrednoj blizini nema drugih trajektorija.
- Takve trajektorije se nazivaju *izoliranim*.

52