Signali i sustavi

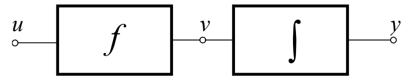
Sustavi prvog reda

Blok dijagram

- Sustav prvog reda se sastoji od jednog integratora i jednog ili više funkcijskih blokova.
- Fizikalno predstavlja sustav koji ima jedan spremnik energije (RC krug, bistabil,…)
- Ovisno o tome da li je integrator u petlji povratne veze ili ne, sustavi I. reda se dijele:
  - Eksplicitne sustave I. reda
  - Implicitne sustave I. reda

Blok dijagram

- Eksplicitni sustav I. reda:

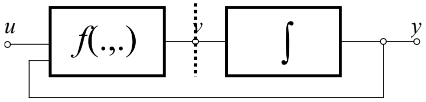


$$v(t) = f(u(t)), \qquad y(t) = \int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau + y(t_0)$$

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} f(u(\tau))d\tau + y(t_0)$$

Blok dijagram

- Implicitni sustav I. reda:

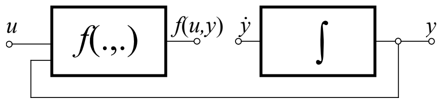


$$v(t) = f(u(t), y(t)) \qquad y(t) = \int_{t_0}^{t} f[u(\tau), y(\tau)]d\tau + y(t_0)$$

- Traženi izlaz sadržan je u jednadžbi implicitno pod integralom, pa se sustav naziva implicitnim.

Blok dijagram

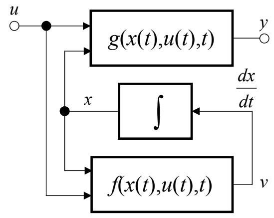
- Implicitni sustav I. reda:



- $\dfrac{dy}{dt} = f(u(t), y(t))$ uz početno stanje $y(t_0) = y_0$
- Jednadžba predstavlja diferencijalnu jednadžbu prvog reda.

Blok dijagram

- Formulacija jednadžbe koja opisuje sustav I. reda pretpostavlja



$v = f(x(t),u(t),t)$ $y = g(x(t),u(t),t)$
bezmemorijski dio sustava

$\dfrac{dx}{dt} = f(x(t),u(t),t)$ *Jednadžba stanja*

$y = g(x(t),u(t),t)$ *Izlazna jednadžba*

$x(t_0) = x_0$ *Početno stanje*

Blok dijagram

- Formulacija jednadžbi sustava prvog reda:
  - $dx/dt = f(x(t),u(t),t)$,
  - $y(t) = g(x(t),u(t),t)$,
  - $x(t_0) = x_0$.

1. Pisanja diferencijalne jednadžbe (jed. stanja)
   - Ulazni signal integratora v izražen je vrijednošću stanja $x(t)$ izlaza integratora i ulaza u sustav $u(t)$.
   - Početnu vrijednost $x_0 = x(t_0)$ treba ustanoviti.

Blok dijagram

2. Pisanje izlazne jednadžbe
   - Veličina izlaza $y(t)$ je određena vrijednostima $x(t)$ i $u(t)$.

- Ovaj model se naziva model stanja kontinuiranog sustava prvog reda.

Klasifikacija sustava I. reda

- Bezmemorijski dio sustava prvog reda $f(x, u, t)$ koji zavisi od x, u i t je vremenski promjenjiv sustav s povratnom vezom (x), pobudom (u).
  - Pobuđeni sustav $f(x, u)$ vremenski stalan.
  - Nepobuđeni sustav $f(x, t)$ vremenski promjenjiv.
  - Autonoman sustav $f(x)$ vremenski stalan.
  - Eksplicitni sustav $f(u)$ vremenski stalan.
  - Eksplicitni sustav $f(u, t)$ vremenski promjenjiv.

Linearnost sustava I. reda

- Sustav je linearan kada:

$$f(x,u,t) = a(t)\,x + b(t)\,u,$$
$$g(x,u,t) = c(t)\,x + d(t)\,u.$$

Stanje ravnoteže sustava i njegova stabilnost

- Stanje ravnoteže je stanje sustava u kojem sustav može ostati neodređeno dugo, ako nema pobude.
- Stanje ravnoteže autonomnog sustava I reda je:

$$\frac{dx}{dt} = 0 = f(\mathrm{x}_e)$$

- Ako je pobuda konstantna $u = \mathrm{u}_0 =$ konst. sustav se smatra autonomnim. Njegovo ravnotežno stanje x_e je dano s $f(\mathrm{x}_e, \mathrm{u}_0) = 0$

Stanje ravnoteže sustava i njegova stabilnost

- Nelinearni sustav može imati nijedno, jedno ili više stanja ravnoteže.
- Za linearni vremenski nepromjenljivi sustav $dx/dt = \mathrm{a}x$ stanje ravnoteže je $\mathrm{x}_e = 0$ za $\mathrm{a} \neq 0$, dok za $\mathrm{a} = 0$ ima ih beskonačno.

Stanje ravnoteže sustava i njegova stabilnost

- Stanje ravnoteže x_e je:
  - stabilno, ako se sustav iz bilo kojeg stanja x_0 vraća u stanje ravnoteže x_e,
  - nestabilno, ako se sustav udaljuje iz stanja ravnoteže x_e na najmanji mogući poremećaj,
  - polustabilno, ako se sustav iz nekih stanja x_0 vraća, a iz nekih ne u ravnotežno stanje x_e.

Stanje ravnoteže sustava i njegova stabilnost

- Za autonomni nelinearni sustav I reda može se funkcija $f(x, u_0)$ razviti u Taylorov red u okolišu ravnotežnog stanja x_e

$$f(x,u_0) = f(x_e,u_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_e} \Delta x + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=x_e} (\Delta x)^2 + \text{ više derivacije}$$

- Budući da je sustav u ravnoteži $f(x_e, u_0) = 0$ izlazi jednadžba stanja za okoliš $x = x_e$

$$\frac{d}{dt}(x_e + \Delta x) = \frac{d}{dt}(\Delta x) = \alpha\Delta x + \beta(\Delta x)^2 + \ldots \qquad \alpha = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_e} \qquad \beta = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=x_e}$$

Stanje ravnoteže sustava i njegova stabilnost

- Ako je $\alpha \neq 0$ i $\beta = 0$ rješenjem linearne diferencijalne jednadžbe može se odrediti u koju kategoriju stabilnosti spada ravnotežno stanje sustava.

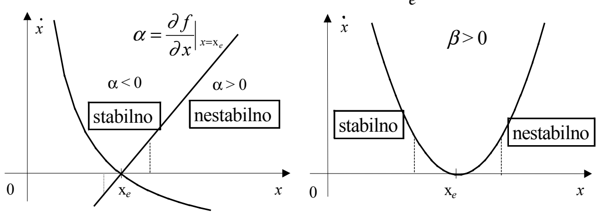
$$\frac{d\Delta x}{dt} = \alpha\Delta x, \rightarrow \Delta x = (\Delta x)_0 e^{\alpha t}$$

- Ako je $\alpha = 0$ trebat će uzeti drugi član razvoja, odnosno prvi član razvoja koji je različit od nule.

$$\frac{d\Delta x}{dt} = \beta(\Delta x)^2, \rightarrow \Delta x = \frac{(\Delta x)_0}{1-(\Delta x)_0\beta t}$$

Stanje ravnoteže sustava i njegova stabilnost

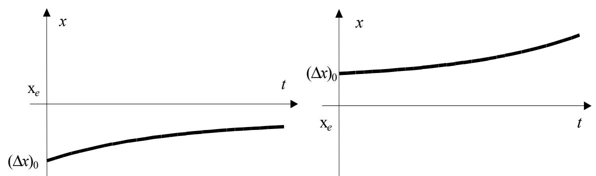
Karakteristika sustava u okolišu x_e



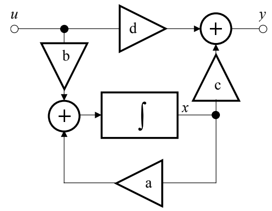
- Ako je $\beta(\Delta x)_0 > 0$, (Δx) može postati vrlo velik.
- Ako je $\beta(\Delta x)_0 < 0$, otklon (Δx) od x_e teži nuli, sustav stabilan.

Stanje ravnoteže sustava i njegova stabilnost

- Sustav će biti:
  - stabilan za $(\Delta x)_0 < 0$, $\beta > 0$,
  - nestabilan za $(\Delta x)_0 > 0$ uz $\beta > 0$.



Vladanje i svojstva sustava I. reda



$$\frac{dx}{dt} = a(t)x(t) + b(t)u(t); \quad x(0) = \mathrm{x}_0$$
$$y(t) = c(t)x(t) + d(t)u(t)$$

- x – stanje
- u – pobuda
- x_0 – početno stanje

Vladanje i svojstva sustava I. reda

- Rješenje je x funkcija vremena koja zadovoljava nehomogenu diferencijalnu jednadžbu i početni uvjet.
- Nepobuđeni sustav ima homogenu jednadžbu

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x(t) \qquad x(0) = x_0$$

Vladanje i svojstva sustava I. reda

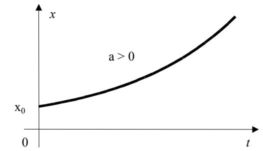
- Rješenje možemo dobiti integracijom jednadžbe

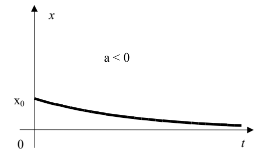
$$\frac{dx}{x} = a(t)dt \;\rightarrow\; \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\xi} = \int_0^t a(\tau)d\tau,$$

$$\ln x - \ln x_0 = \int_0^t a(\tau)d\tau \;\rightarrow\; x = x_0 e^{\int_0^t a(\tau)d\tau}.$$

Vladanje i svojstva sustava I. reda

za a = konst. $x = x_0 e^{at}$





Vladanje i svojstva sustava I. reda

- Odziv pobuđenog sustava može se dobiti metodom varijacije parametara
  - rješenje nehomogene jednadžbe pretpostavi se u obliku rješenja homogene diferencijalne jednadžbe
  - proizvoljan koeficijent u rješenju pretpostavi se u obliku vremenske funkcije, tj.

$$x(t) = z(t)e^{\int_0^t a(\tau)d\tau}$$

Vladanje i svojstva sustava I. reda

$$\frac{dz}{dt} e^{\int_0^t a(\tau)d\tau} = b(t)u(t) \qquad \frac{dz}{dt} = b(t)u(t)e^{-\int_0^t a(\tau)d\tau}$$

$$\int_{z_0}^{z} d\xi = \int_0^t b(\vartheta)u(\vartheta)e^{-\int_0^{\vartheta} a(\tau)d\tau} d\vartheta \qquad z - z_0 = \int_0^t b(\vartheta)u(\vartheta)e^{-\int_0^{\vartheta} a(\tau)d\tau} d\vartheta$$

$$x(t) = \left(z_0 + \int_0^t b(\vartheta)u(\vartheta)e^{-\int_0^{\vartheta} a(\tau)d\tau} d\vartheta \right) e^{\int_0^t a(\tau)d\tau}$$

za $x(0) = x_0$ izlazi: $x(t) = \underbrace{x_0 e^{\int_0^t a(\tau)d\tau}}_{\textbf{\textit{odziv nepobuđenog sustava}}} + \underbrace{\int_0^t b(\vartheta)u(\vartheta)e^{\int_{\vartheta}^t a(\tau)d\tau} d\vartheta}_{\textbf{\textit{odziv mirnog sustava}}}$

$x_0 = z_0$

Vladanje i svojstva sustava I. reda

- Odziv stanja linearnog sustava je suma:
  - Nepobuđenog sustava – linearna funkcija početnog stanja x_0
  - Mirnog sustava – linearna funkcija ulaza
- Za vremenski invarijantan sustav (a, b = konst.) izraz će dobiti oblik

$$x(t) = x_0 e^{at} + b\int_0^t u(\vartheta)e^{a(t-\vartheta)}d\vartheta$$

Vladanje i svojstva sustava I. reda

- Za pobudu konstantom $u(t) = U$ dobivamo:

$$x(t) = x_0 e^{at} + bUe^{at}\int_0^t e^{-a\vartheta}d\vartheta$$

$$x(t) = x_0 e^{at} - \frac{bU}{a}\left(1 - e^{at}\right)$$

uz a < 0 i $t \to \infty$ $\quad x(\infty) = -bU / a$

- Stanje ravnoteže: $ax + bU = 0$, $x_e = -bU / a$

$$x(t) = \underbrace{(x_0 - x_e)e^{at}}_{\textbf{\textit{prijelazno stanje}}} + \underbrace{x_e}_{\textbf{\textit{stacionarno stanje}}}$$

Vladanje i svojstva sustava I. reda

- Odziv mirnog sustava kao konvolucija
- Izraz za $x_m(t)$ može se prikazati u obliku

$$x_m(t) = \int_0^t h(t,\vartheta)u(\vartheta)d\vartheta \quad \text{gdje je} \quad h(t,\vartheta) = b(\vartheta)e^{\int_{\vartheta}^t a(\tau)d\tau}$$

- Neka je pobuda Diracova distribucija koja se pojavljuje u t': $u(t) = \delta(t - t')$

$$x_m(t) = \int_0^t \delta(\vartheta - t')b(\vartheta)e^{\int_{\vartheta}^t a(\tau)d\tau} d\vartheta = b(t')e^{\int_{t'}^t a(\tau)d\tau} = h(t,t')$$

- $h(t, t')$ je odziv sustava na impuls u trenutku $t = t'$

Vladanje i svojstva sustava I. reda

- Ako su a i b konstante vrijedi:

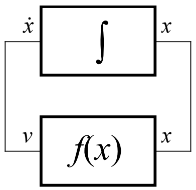
$$h(t, \vartheta) = be^{a(t-\vartheta)} = h(t - \vartheta)$$

pa se odziv može dobiti u obliku konvolucijskog integrala

$$x_m(t) = \int_0 h(t-\vartheta)u(\vartheta)d\vartheta.$$

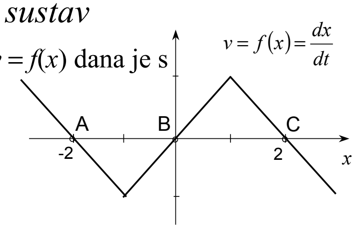
Nelinearni sustav

- Autonomni nelinearni sustav I. reda:



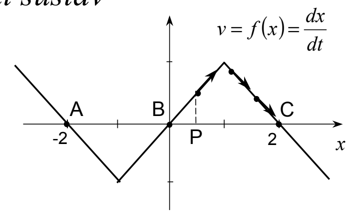
Nelinearni sustav

- Karakteristika $v = f(x)$ dana je s

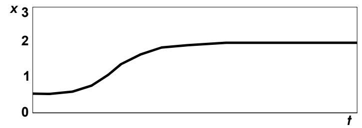


- Iz $v = f(x_e) = 0$ proizlaze točke ravnoteže:
  - za $x > 1$; $-x + 2=0$ $\rightarrow$ $x_{eC} = 2$
  - za $|x| < 1$; $x = 0$ $\rightarrow$ $x_{eB} = 0$
  - za $x < -1$; $-x - 2 = 0$ $\rightarrow$ $x_{eA} = -2$

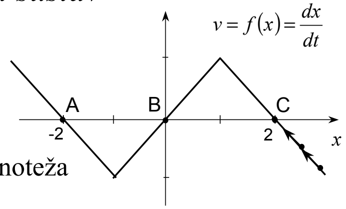
Nelinearni sustav



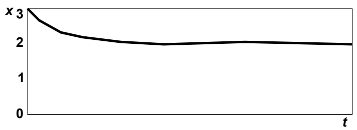
- Tijek stanja za različita početna stanja



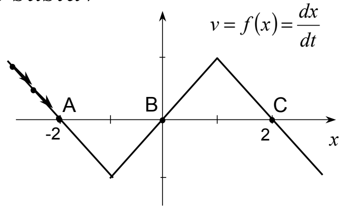
Nelinearni sustav



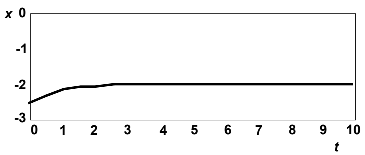
- C stabilna ravnoteža
- Tijek stanja za različita početna stanja



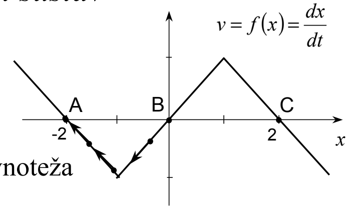
Nelinearni sustav



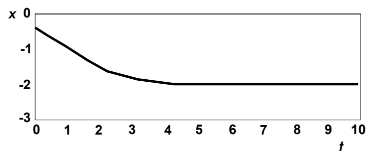
- Tijek stanja za različita početna stanja



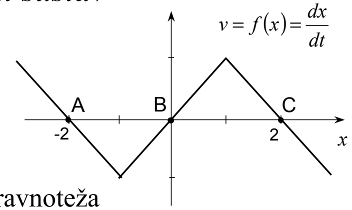
Nelinearni sustav



- A stabilna ravnoteža
- Tijek stanja za različita početna stanja



Nelinearni sustav



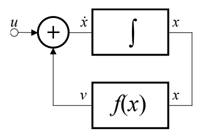
- B nestabilna ravnoteža

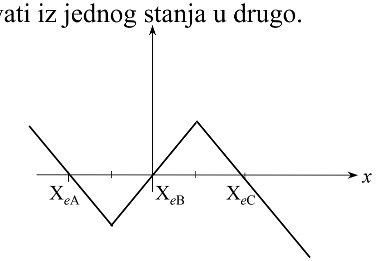
Nelinearni sustav

- Zavisnost od početnog uvjeta nije linearna.
- Sustav ima dva ravnotežna stanja koja su stabilna.
- To je model elektroničkog sklopa bistabila.
- Dva stabilna stanja odgovaraju binarnim stanjima 0 i 1.

Nelinearni sustav

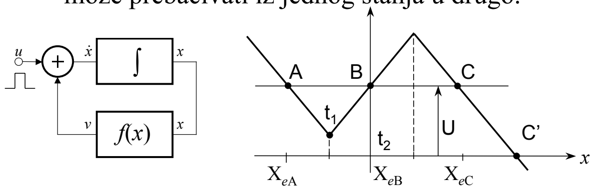
- Dovođenjem okidnog impulsa, bistabil može prebacivati iz jednog stanja u drugo.





Nelinearni sustav

- Dovođenjem okidnog impulsa, bistabil može prebacivati iz jednog stanja u drugo.



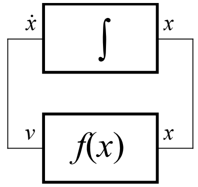
- Vanjski pravokutni impuls mora dovoljno trajati i biti dovoljno velik kako bi stanje prešlo $X_{eB} = 0$.

Nelinearni sustav

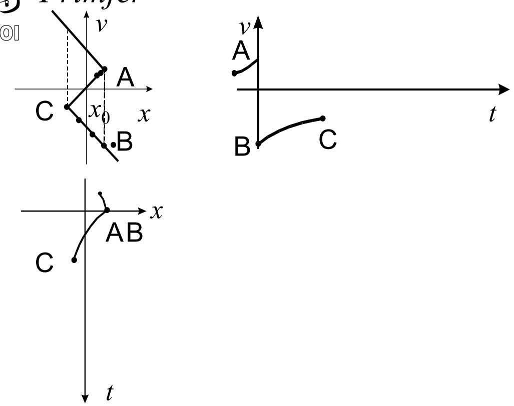
PRIMJER – MATLAB

Pojava skoka i relaksacijskih oscilacija u sustavu prvog reda

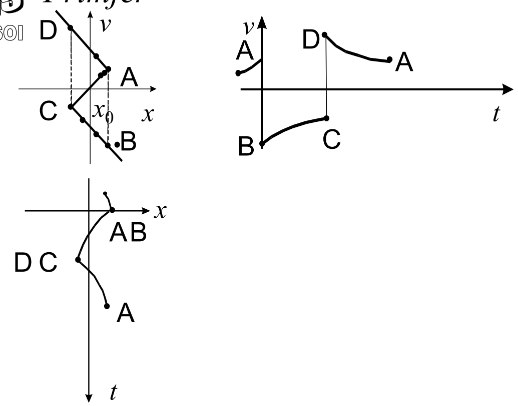
- Pretpostavimo da u sustavu I. reda imamo relacijski blok; $v = f(x)$ nije funkcija već relacija



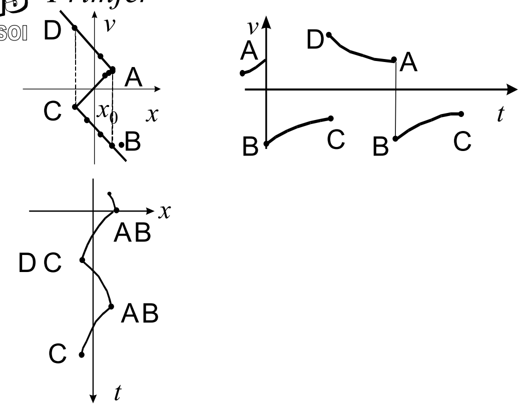
Primjer



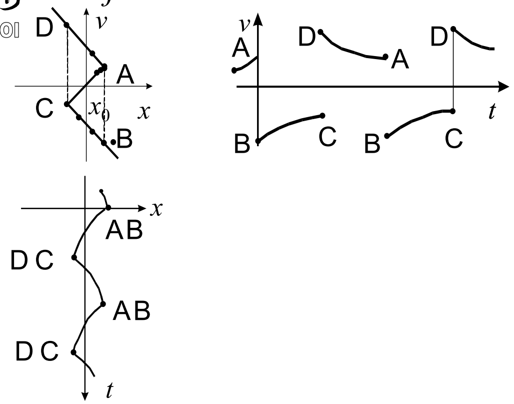
Primjer



Primjer



Primjer



Primjer

- Vladanje sustava će se odrediti rješenjem diferencijalne jednadžbe po sekcijama karakteristike.
- Rješenje jednadžbe na odsječku B → C

$$\frac{dx}{dt} = -x - 2 \qquad x = \mathrm{C}e^{-t} - 2 \qquad \mathrm{x_B} = \mathrm{C} - 2 = 1$$

$$x = 3e^{-t} - 2 \qquad v = \frac{dx}{dt} = -3e^{-t} \quad 0 < t < \mathrm{t}_1$$

Primjer

- Riješimo jednadžbu na odsječku D → A

$$\frac{dx}{dt} = -x + 2 \qquad x = \mathrm{C}e^{-(t-\mathrm{t}_1)} + 2 \qquad \mathrm{x_D} = \mathrm{C} + 2 = -1$$

$$x = -3e^{-(t-\mathrm{t}_1)} + 2 \qquad \frac{dx}{dt} = 3e^{-(t-\mathrm{t}_1)} \quad \mathrm{t}_1 < t < \mathrm{t}_2$$

- Dobili smo relaksacijske oscilacije.
- Razmatrani model sustava je model elektroničkih relaksacijskih oscilatora, Froudeovog njihala, škripanja kočnica...

Klasifikacija vladanja autonomnog sustava I. reda

1. Nelinearni funkcijski blok

a) Jedna ravnotežna točka.
- Karakteristika $f(x)$ siječe os x u točki x_e. Ako je $f'(x) < 0$ točka je stabilna. Sva stanja teže u tu točku ravnoteže.

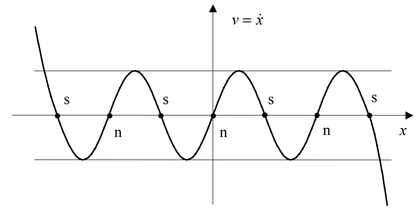
b) Tri ravnotežne točke.
- Dvije su stabilne, a jedna nestabilna (model bistabila).
- Vanjskom pobudom (okidanjem) sustav se može prebaciti iz jednog u drugo stanje ravnoteže.

Klasifikacija vladanja autonomnog sustava I. reda

1. Nelinearni funkcijski blok

c) Više stanja ravnoteže.
- Karakteristika koju daju realni sustavi za veliki x ostaje u drugom i četvrtom kvadrantu
- pa je broj ravnotežnih točaka neparan
- alterniraju stabilna, nestabilna, stabilna, itd. kao na slici.

Klasifikacija vladanja autonomnog sustava I. reda



- Podešavanjem polariteta i trajanja okidnog impulsa, sustav se može prebaciti u bilo koju stabilnu točku.

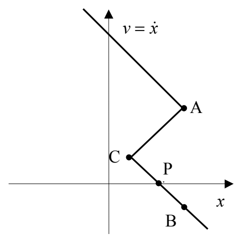
Klasifikacija vladanja autonomnog sustava I. reda

2. Relacijski blok (*višeznačna funkcija*)

a) Jedna nestabilna točka ravnoteže.
- Astabilno vladanje
- Pojava relaksacijskih oscilacija

b) Jedna stabilna točka ravnoteže
- Model elektroničkog monostabila

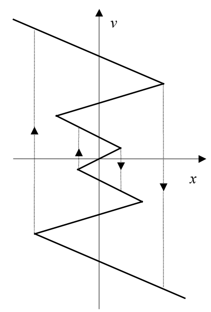
Klasifikacija vladanja autonomnog sustava I. reda



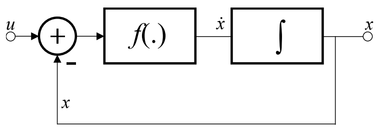
Klasifikacija vladanja autonomnog sustava I. reda

3. Brojnija višeznačnost

- Dvije zatvorene staze tzv. graničnog ciklusa



Pobuđeni nelinearni sustav I. reda



- Model pojačala s povratnom vezom.
- Nelinearni element je bipolarni tranzistor.
- $f(z) = e^z - 1$

$$\dot{x} = e^{u-x} - 1 \qquad (\dot{x}+1)e^{x+t} = e^{u+t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{x+t}\right) = e^{u+t} \qquad e^{x_0} = C$$

Pobuđeni nelinearni sustav I. reda

- Opće rješenje na pobudu $u(t)$ izlazi eksplicitno:

$$x = x_0 + \ln e^{-t}\left[1 + e^{-x_0}\int_0^t e^{u(\tau)+\tau}d\tau\right]$$

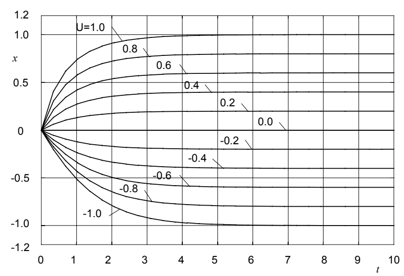
- Slučaj mirnog sustava:

$$x = \ln\left[1 + \int_0^t e^{u(\tau)+\tau}d\tau\right] - t$$

Pobuđeni nelinearni sustav I. reda

- Pobuda stepenicom $u(t) = U\mu(t)$

$$x = x_0 + \ln e^{-t}\left[1 + e^{-x_0}e^{U}(e^t - 1)\right]$$



- Brži odziv pozitivnom stepenicom nego negativnom.