Signali i sustavi

Vremenski diskretni signali

Vremenski diskretni signali

- Signali prikazani nizom brojeva – uzorcima $\{x[n]\} = \{... \ 1.41, 1.78, \underline{2.05}, 2.19, 2.18, ...\}$
- diskretni signal označavamo kao $\{x[n]\}$
- vremenski diskretan signal definiran je za svaki cjelobrojni n iz
- $x[n]$ je n – ti uzorak niza $\{x[n]\}$
- $x[n]$ je definiran samo za cjelobrojne vrijednosti n, a za ostale nije definiran

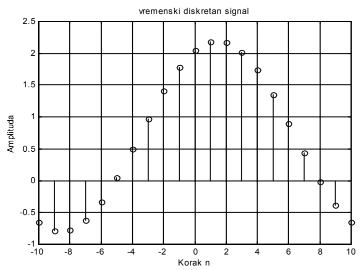
Primjer vremenski diskretnog signala

- $\{x[n]\} = \{... \ 1.41, 1.78, \underline{2.05}, 2.19, 2.18, ...\}$
- Ovdje su prikazani uzorci

  $x[-2]=1.41$, $x[-1]=1.78$, $x[0]=2.05$,

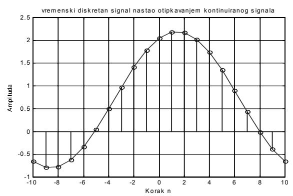
  $x[1]=2.19$ i $x[2]=2.18$
- Podcrtani uzorak označava uzorak za $n=0$ tj. $x[0]$

Grafički prikaz vremenski diskretnog signala



Diskretni signal rezultat otipkavanja

- U nekim primjenama diskretni signal može biti rezultat otipkavanja kontinuiranog signala $x_a(t)$:



Diskretni signal rezultat otipkavanja

- ovdje je n-ti uzorak diskretnog signala

  $x[n]=x_a(t)|_{t=nT}= x_a(nT)$, $n=...-2,-1,0,1...$
- kvant vremena T tj. razmak između dva susjedna uzorka naziva se interval otipkavanja
- frekvencija otipkavanja je:

  $F_T=1/T$ [Hz]

Diskretni signal rezultat otipkavanja

- $x[n]$ označava n-ti uzorak niza $\{x[n]\}$ bez obzira na način generiranja diskretnog signala
- $\{x[n]\}$ je realni niz ako je n-ti uzorak $x[n]$ realan za svaki n
- inače je $\{x[n]\}$ kompleksan niz

Kompleksan diskretni signal

- kompleksan niz $\{x[n]\}$ se može napisati kao:

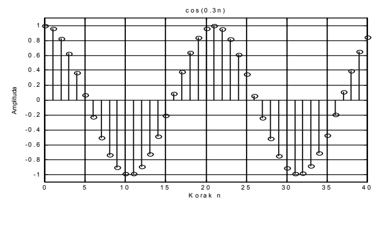
  $$\{x[n]\}=\{x_{re}[n]\} + j\{x_{im}[n]\}$$

  gdje su $x_{re}[n]$ i $x_{im}[n]$ realni i imaginarni dio od $x[n]$
- konjugirano kompleksan niz je

  $$\{x^*[n]\}=\{x_{re}[n]\} - j\{x_{im}[n]\}$$
- često se vitičaste zagrade ispuštaju u označavanju niza

Primjeri diskretnih signala

- $\{x[n]\}=\{\cos(0.3n)\}$ je realni niz



Primjeri diskretnih signala

- $\{z[n]\}=\{e^{j0.3n}\}$ je kompleksan niz
- može se napisati:

$\{z[n]\}=\{\cos[0.3n]+j\sin[0.3n]\}=$

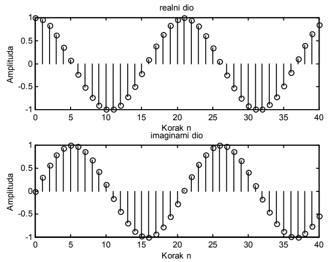
$=\{\cos(0.3n)\}+j\{\sin(0.3n)\}$,

gdje je $\{z_{re}[n]\}=\{\cos(0.3n)\}$

$\{z_{im}[n]\}=\{\sin(0.3n)\}$

Primjeri diskretnih signala

- $\{z[n]\}=\{e^{j0.3n}\}=\{\cos(0.3n)\}+j\{\sin(0.3n)\}$



Diskretni signali

- vremenski diskretan signal je konačne duljine (finite length) ako je definiran za konačni vremenski interval

$$N_1 < n < N_2$$

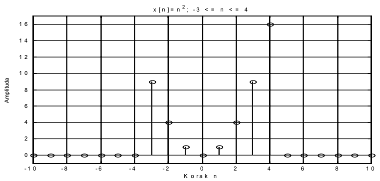
gdje je $-\infty < N_1$ i $N_2 < +\infty$ i

- Duljina ili trajanje niza konačne duljine je:

$$N = N_2 - N_1 + 1$$

Diskretni signali

- niz $\{x[n]\}=\{\cos(0.3n)\}$ je beskonačnog trajanja
- $x[n]=n^2$; $-3 \le n \le 4$ je niz konačne duljine 4-(-3)+1=8



Osnovne operacije na nizovima i elementi diskretnog sustava

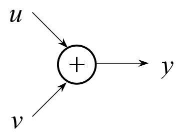
- Zbrajanje nizova

Zbroj dva niza $y = u + v$ ili

$\{y[n]\} = \{u[n]\} + \{v[n]\}$

je niz s općim članom

$y[n] = u[n] + v[n]$ za svaki $n \in \mathbf{Z}$.



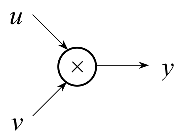
- Produkt nizova

Produkt dva niza $y = uv$ ili

$\{y[n]\} = \{u[n]\} * \{v[n]\}$

je niz s općim članom

$y[n] = u[n]v[n]$ za svaki $n \in \mathbf{Z}$.



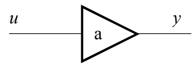
Osnovne operacije na nizovima i elementi diskretnog sustava

- Množenje s konstantom

$y = a\,u$ ili

$\{y[n]\} = a\{u[n]\} = \{a\,u[n]\}$

$y[n] = a\,u[n]$ za svaki $n \in \mathbf{Z}$.

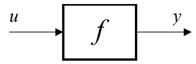


- Funkcijski blok

$y = f[u]$ ili

$\{y[n]\} = f[\{u[n]\}]$

$y[n] = f[u[n]]$ za svaki $n \in \mathbf{Z}$.



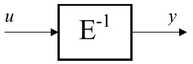
Reverzija vremena

$y[n]=u[-n]$

Osnovne memorijske i predikcijske operacije

- Pomak niza – jedinični pomak daje iz ulaznog niza, niz pomaknut za jedan korak.

unatrag (kašnjenje i pamćenje)

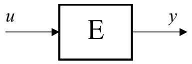


$y = E^{-1}u$ ili $\{y[n]\} = E^{-1}\{u[n]\}$,

$y[n] = (E^{-1}u)[n]$,

$y[n] = u[n - 1]$ $n > 0$.

unaprijed (predikcija)



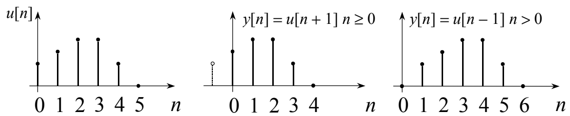
$y = E\,u$ ili $\{y[n]\} = E\,\{u[n]\}$,

$y[n] = (Eu)[n]$,

$y[n] = u[n + 1]$ $n \ge 0$.

Pomak niza

- Operacija pomaka niza unaprijed traži nekauzalan sustav pa je neostvariva u realnim sustavima.
- Zato se služimo redovito jedinicama za kašnjenje, odnosno operacijom E^{-1}.



Pomak niza

- u literaturi je uobičajeno označavati blok za jedinično kašnjenje sa z^{-1} umjesto s E^{-1}
- kašnjenje za N koraka je operacija

$$y[n]=u[n - N]$$

Primjer osnovnih operacija

- Zadana su dva niza duljine 5 zadana za $0 \le n \le 4$

$\{a[n]\}=\{5\ 6\ -2\ 0\ -1\}$

$\{b[n]\}=\{4\ -2\ -2\ 4\ 1\}$

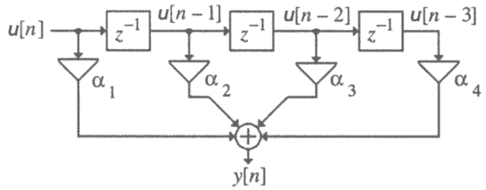
- Generiranje novih nizova primjenom osnovnih operacija

$\{c[n]\}=\{a[n]*b[n]\}=\{20\ -12\ 4\ 0\ -1\}$

$\{d[n]\}=\{a[n]+b[n]\}=\{9\ 4\ -4\ 4\ 0\}$

$\{e[n]\}=0.5*\{a[n]\}=\{2.5\ 3\ -1\ 0\ -0.5\}$

Primjer prikaza sustava uz pomoć osnovnih operacija



$$y[n]=\alpha_1 u[n]+\alpha_2 u[n-1]+\alpha_3 u[n-2]+\alpha_4 u[n-3]$$

Promjena frekvencije otipkavanja

- Moguće je generirati novi niz $y[n]$ sa frekvencijom otipkavanja F_T' većom ili manjom od frekvencije otipkavanja F_T zadanog niza $u[n]$
- Omjer frekvencije otipkavanja je $R=\dfrac{F_T'}{F_T}$

ako je $R > 1$, proces se naziva **interpolacija**

ako je $R < 1$, proces se naziva **decimacija**

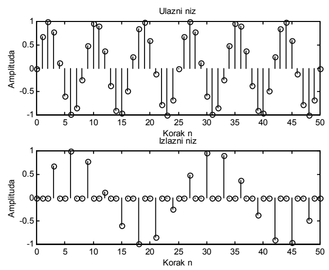
Promjena frekvencije otipkavanja

- u procesu interpolacije (up-sampling) za cjelobrojni faktor L>1 blok za interpolaciju generira L-1 uzorak vrijednosti nula između dva uzorka niza $u[n]$:

$$u_u[n]=\begin{cases} u[n/L], & n=0,\pm L,\pm 2L,... \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$u[n] \longrightarrow \boxed{\uparrow L} \longrightarrow u_u[n]$$

Primjer interpolacije L=3



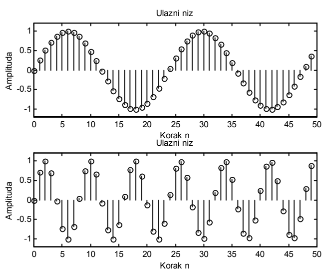
Promjena frekvencije otipkavanja

- u procesu decimacije (down-sampling) za cjelobrojni faktor M>1 blok za decimaciju zadržava svaki M-ti uzorak dok M-1 uzorak između njih uklanja:

$$y[n]=u[nM]$$

$$u[n] \longrightarrow \boxed{\downarrow M} \longrightarrow y[n]$$

Primjer decimacije M=3

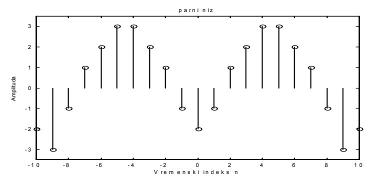


Klasifikacija nizova prema simetričnosti

- konjugirano simetrični niz

$$x[n]=x^*[-n]$$

Za realni $x[n]$ radi se o parnom nizu

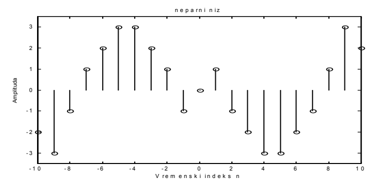


Klasifikacija nizova prema simetričnosti

- konjugirano antisimetrični niz

$$x[n]=-x^*[-n]$$

Za realni $x[n]$ radi se o neparnom nizu



Klasifikacija nizova prema simetričnosti

- svaki kompleksan niz može biti prikazan kao zbroj njegovog konjugiranog simetričnog i konjugiranog antisimetričnog dijela

$$x[n]=x_{cs}[n]+x_{ca}[n]$$

gdje su

$$x_{cs}[n]=0.5(x[n]+x^*[-n])$$
$$x_{ca}[n]=0.5(x[n]-x^*[-n])$$

Klasifikacija nizova prema simetričnosti

- svaki pak realan niz može biti prikazan kao zbroj njegovog parnog i neparnog dijela

$$x[n]=x_p[n]+x_n[n]$$

gdje su

$$x_p[n]=0.5(x[n]+x[-n])$$
$$x_n[n]=0.5(x[n]-x[-n])$$

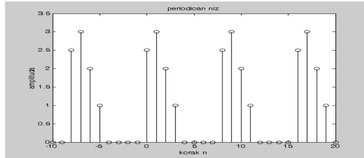
Periodični nizovi

- Za periodičan niz vrijedi

$$\tilde{x}[n]=\tilde{x}[n-kN]$$

N je period ponavljanja, $k \in Z$

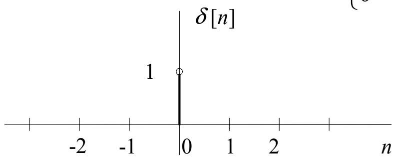
- najmanji N koji zadovoljava $\tilde{x}[n]=\tilde{x}[n-kN]$ je osnovni period



Osnovni nizovi

- Jedinični niz (Niz s jediničnim članom ili uzorkom, Kroneckerov delta, δ – niz).
- δ = ..., 0, 0, <u>1</u>, 0, 0, ...

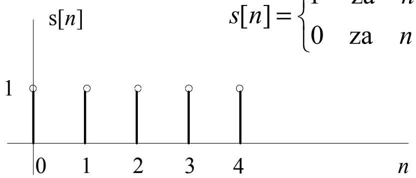
$$\delta[n]=\begin{cases}1 & \text{za} \quad n=0, n\in \mathbf{Z}\\ 0 & \text{za} \quad n\neq 0\end{cases}$$



Osnovni nizovi

- s = ..., 0, 0, <u>1</u>, 1, 1, ...

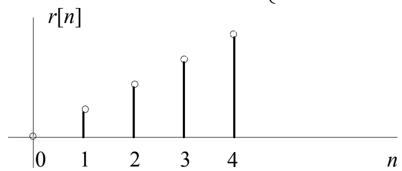
$$s[n]=\begin{cases}1 & \text{za} \quad n\geq 0, n\in \mathbf{Z}\\ 0 & \text{za} \quad n< 0\end{cases}$$



Osnovni nizovi

- r = ..., 0, <u>0</u>, 1, 2, 3, 4, ...

$$r[n]=\begin{cases}n & \text{za} \quad n\geq 0, n\in \mathbf{Z}\\ 0 & \text{za} \quad n< 0\end{cases}$$

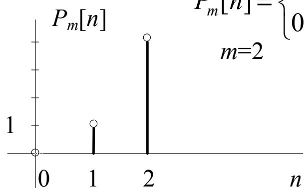


Osnovni nizovi

- Jedinična parabola m–tog stupnja
- P_m = ..., 0, <u>0</u>, 1^m, 2^m, 3^m, ...

$$P_m[n]=\begin{cases}n^m & \text{za} \quad n\geq 0, n\in \mathbf{Z}\\ 0 & \text{za} \quad n< 0\end{cases}$$

m=2



Osnovni nizovi

- Realni sinusni (kosinusni) niz:

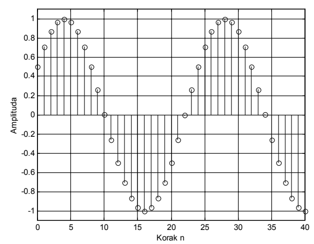
$$x[n]=U\cos(\omega_0 n+\varphi)$$

- gdje je U amplituda, ω_0 [radijana/uzorku] kutna frekvencija a φ [radijana] faza od $x[n]$
- koristi se i varijabla f_0 [perioda/uzorku] definirana kao:

$$\omega_0=2\pi f_0$$

Osnovni nizovi

- Grafički prikaz: $\cos\left(\frac{\pi}{12}n-\frac{\pi}{3}\right)$



$$\omega_0=\frac{\pi}{12}$$
$$f_0=\frac{1}{24}$$

Osnovni nizovi

- kompleksna eksponencijala:

$$u[n] = A\alpha^n, \quad -\infty < n < \infty$$

gdje su A i α realni ili kompleksni brojevi

- ako označimo: $\alpha = e^{(\sigma_0 + j\omega_0)}, \; A = |A|e^{j\varphi}$

tada možemo pisati:

$$u[n] = |A|e^{j\varphi}e^{(\sigma_0+j\omega_0)n} = u_{re}[n] + ju_{im}[n]$$

gdje je

$$u_{re}[n] = |A|e^{\sigma_0 n}\cos(\omega_0 n + \varphi)$$

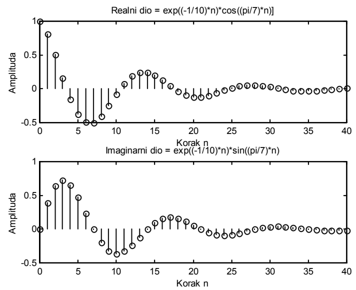
$$u_{im}[n] = |A|e^{\sigma_0 n}\sin(\omega_0 n + \varphi)$$

Kompleksni eksponencijalni niz

- suglasno prethodnim izrazima $x_{re}[n]$ i $x_{im}[n]$ kompleksne eksponencijale su sinusiodalni nizovi čija se amplituda prigušuje (σ_0<0), raspiruje (σ_0>0) ili je konstantna (σ_0=0).
- Primjer kompleksne eksponencijale

$$x[n] = e^{\left(-\frac{1}{10}+j\frac{\pi}{7}\right)n}$$

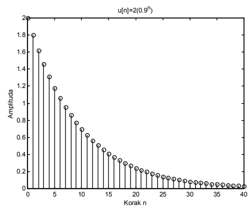
Primjer kompleksnog eksponencijalnog niza

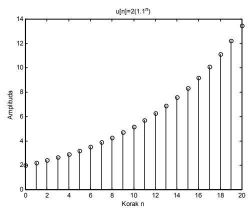


Realni eksponencijalni niz

- primjer realnog eksponencijalnog niza:

$$u[n] = U\alpha^n, \; 0 \le n \le \infty$$





Periodičnost kosinusnog niza

- Niz $u[n] = \cos(\omega_0 n + \varphi)$ je periodičan ako vrijedi $u[n] = \cos(\omega_0 n + \varphi) = \cos(\omega_0(n+N) + \varphi)$ pa slijedi:

$$\cos(\omega_0(n+N)+\varphi) =$$

$$= \cos(\omega_0 n + \varphi)\cos(\omega_0 N) - \sin(\omega_0 n + \varphi)\sin(\omega_0 N)$$

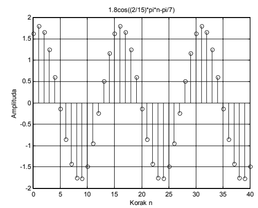
A ovo će biti jednako $\cos(\omega_0 n + \varphi)$ za $\sin(\omega_0 N) = 0$ i $\cos(\omega_0 N) = 1$ a to je za:

$$\omega_0 N = 2\pi k \quad \text{ili} \quad \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{N}{k} \quad \textit{ili} \quad f_0 = \frac{k}{N}$$

Periodičnost sinusnog niza:primjer

- za niz $u[n] = 1.8\cos(\frac{2\pi}{15}n - \frac{\pi}{7})$

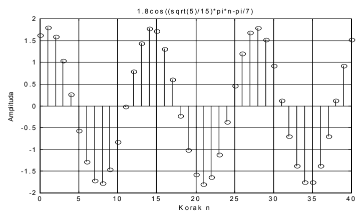
$$\omega_0 = \tfrac{2\pi}{15} \Rightarrow N = \tfrac{2\pi k}{\frac{2}{15}\pi} = 15 \quad \text{za} \quad k = 1$$



Periodičnost sinusnog niza:primjer

- Ako $2\pi/\omega_0$=N/k za cjelobrojne k i N tada će period biti višekratnik od $2\pi/\omega_0$
- inače je niz aperiodičan, primjer:

$$u[n] = 1.8\cos(\tfrac{\sqrt{5}\pi}{15}n - \tfrac{\pi}{7})$$



Svojstva sinusnog niza

Za $\omega = \pi + \Delta$ izlazi

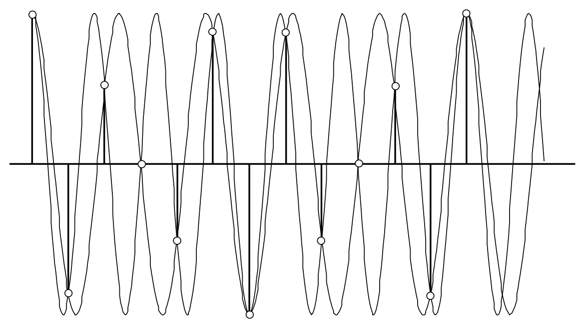
$$u(n) = \cos(\pi + \Delta)n = \cos(-2\pi + \pi + \Delta)n$$
$$= \cos(-\pi + \Delta)n = \cos(\pi - \Delta)n$$

Iz raspoloživog niza se ne može razlikovati da li je kutna frekvencija niza

$\omega_1 = \pi + \Delta$ ili $\omega_2 = \pi - \Delta$

$$u(n) = \cos(\omega n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\omega_1 = 7\pi/6 \quad \omega_2 = 5\pi/6$$



Svojstva sinusnog niza

Za $\omega = 2\pi - \Delta$ izlazi

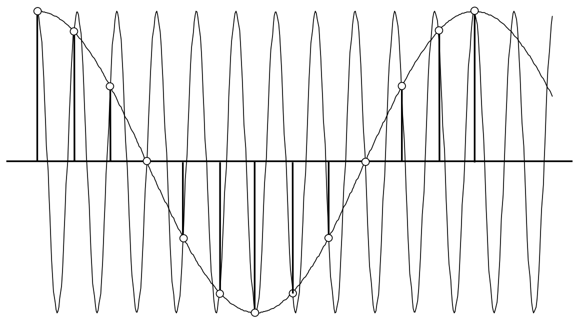
$u(n) = \cos(2\pi - \Delta)n = \cos(-\Delta n) = \cos \Delta n$

Iz raspoloživog niza se ne može razlikovati da li je kutna frekvencija

$\omega_1 = 2\pi - \Delta$ ili $\omega_2 = \Delta$

$u(n) = \cos(\omega n), \quad n \in \mathbb{Z}$

$\omega_1 = \pi / 6 \qquad \omega_2 = 11\pi / 6$



Svojstva sinusnog niza

- iz prethodnog slijedi da su sve sinusoide frekvencije:

$$\omega_k = \omega_0 + 2k\pi \quad -\pi < \omega_0 < \pi, k \in Z$$

identične (i ne možemo ih razlikovati) jer vrijedi:

$$\cos((\omega_0 + 2k\pi)n + \varphi) = \cos((\omega_0 n + \varphi) + 2k\pi n) =$$
$$= \cos(\omega_0 n + \varphi)$$

zato su sve $\cos((\omega_0 + 2k\pi)n + \varphi)$ "alias" kosinusoide $\cos(\omega_0 n + \varphi)$

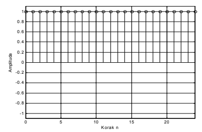
Svojstva sinusnog niza

- Sve diskretne sinusoide s frekvencijom

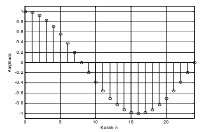
$$|\omega| \le \pi \text{ ili } |f| \le \frac{1}{2}$$

su jednoznačno definirane

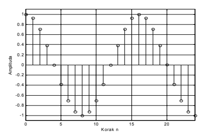
$\cos(\omega n), \quad \omega = 0$



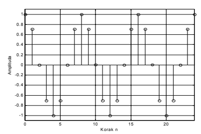
$\cos(\omega n), \quad \omega = \frac{\pi}{16}$



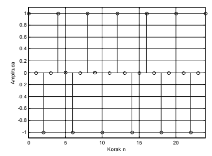
$\cos(\omega n), \quad \omega = \frac{\pi}{8}$



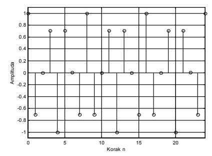
$\cos(\omega n), \quad \omega = \frac{\pi}{4}$



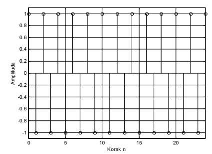
$\cos(\omega n), \quad \omega = \frac{\pi}{2}$



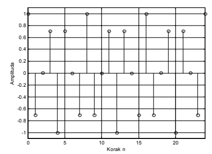
$\cos(\omega n), \quad \omega = \frac{3\pi}{4}$



$\cos(\omega n), \quad \omega = \pi$

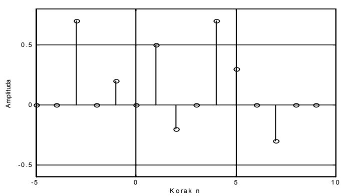


$\cos(\omega n), \quad \omega = \frac{5\pi}{4}$



Prikaz niza uz pomoć $\delta[n]$

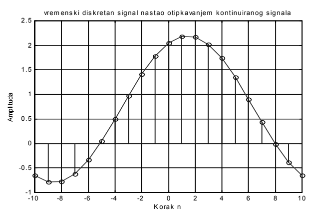
- Svaki niz može biti prikazan uz pomoć sume jediničnih impulsa



$$u[n] = 0.7\delta[n+3] + 0.2\delta[n+1] + 0.5\delta[n-1] - 0.2\delta[n-2]$$
$$+ 0.7\delta[n-4] + 0.3\delta[n-5] - 0.3\delta[n-7]$$

Otipkavanje signala

- U nekim primjenama diskretni signal može biti rezultat otipkavanja kontinuiranog signala $x_a(t)$:



$F_T = 1/T$ je frekvencija otipkavanja

$x[n] = x_a(t)|_{t=nT} = x_a(nT)$, $n = ...-2,-1,0,1...$

Otipkavanje signala

- kontinuirani signal $x_a(t)$ otipkan je u diskretnim trenucima vremena

$$t_n = nT = \frac{n}{F_T} = \frac{2\pi n}{\Omega_T}$$

$\Omega_T = 2\pi F_T$ predstavlja kutnu frekvenciju otipkavanja

Otipkavanje signala

- otipkavanjem kontinuiranog signala

$$u(t) = U\cos(2\pi f_o t + \varphi) = U\cos(\Omega_o t + \varphi)$$

- dobiva se diskretni signal

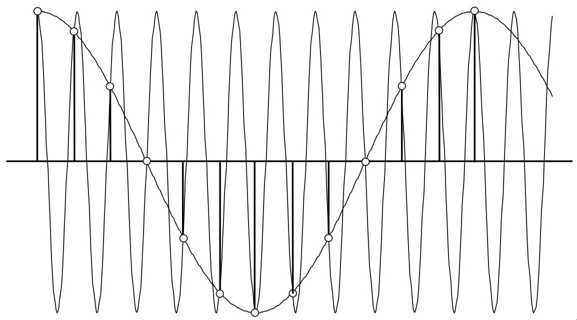
$$u[n] = U\cos(\Omega_o nT + \varphi) = U\cos(\frac{2\pi\Omega_o}{\Omega_T}n + \varphi)$$

$$= U\cos(\omega_o n + \varphi)$$

$$\omega_o = 2\pi\Omega_o / \Omega_T = \Omega_o T$$

je normalizirana kutna frekvencija od $x[n]$

Aliasing kosinusnog signala



Aliasing kod otipkavanja

- Otipkavaju se kosinusi signali $x_1(t)$ i $x_2(t)$ frekvencija 4 kHz i 44 kHz.
- Frekvencija otipkavanja F_T=48 kHz

$$x_1(t) = \cos(2\pi F_1 t) = \cos(2\pi \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot t)$$

$$x_2(t) = \cos(2\pi F_2 t) = \cos(2\pi \cdot 44 \cdot 10^3 \cdot t)$$

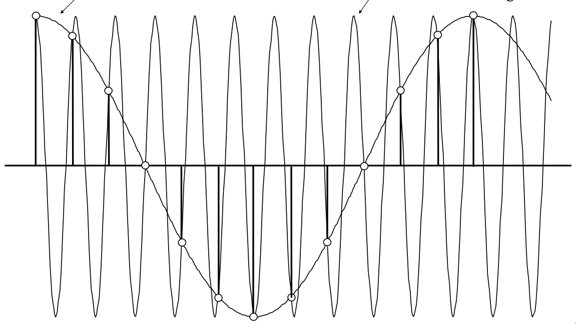
$$t = nT = \frac{n}{F_T} = \frac{n}{48 \cdot 10^3}$$

$$x_1[n] = \cos[2\pi f_1 nT] = \cos\left[2\pi \cdot \tfrac{4 \cdot 10^3}{48 \cdot 10^3} \cdot n\right] = \cos\left[\frac{\pi}{6}n\right]$$

$$x_2[n] = \cos\left[2\pi \cdot \tfrac{44 \cdot 10^3}{48 \cdot 10^3} \cdot n\right] = \cos\left[\frac{11\pi}{6}n\right] = \cos\left[\frac{\pi}{6}n\right]$$

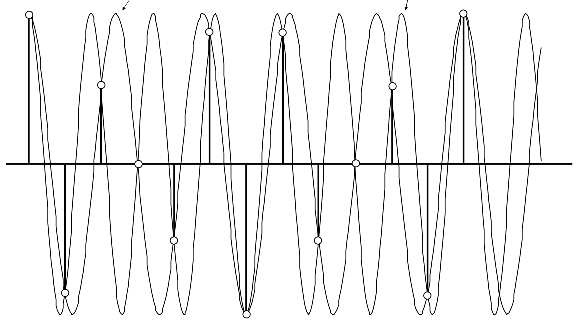
$f_1 = 4\,\mathrm{kHz}$ $\qquad$ $f_2 = 44\,\mathrm{kHz}$

$\omega_1 = \dfrac{\pi}{6}$ $\qquad$ $\omega_2 = \dfrac{11\pi}{6}$



slično se pokazuje da je

$f_3 = 20\,\mathrm{kHz}$, $\omega_3 = \dfrac{5\pi}{6}$ $\qquad$ $f_4 = 28\,\mathrm{kHz}$, $\omega_4 = \dfrac{7\pi}{6}$



analogni signali		diskretni signali
$\Omega = 2\pi F$		$\omega = 2\pi f$
$\frac{\text{radijan}}{\text{sekunda}}$ Hz		$\frac{\text{radijan}}{\text{uzorak}}$ $\frac{\text{period}}{\text{uzorak}}$
$-\infty < \Omega < \infty$	$\omega = \Omega T$ $\longrightarrow$	$-\pi \le \omega \le \pi$
$-\infty < F < \infty$	$f = F / F_T$	$-\frac{1}{2} \le f \le \frac{1}{2}$
$-\pi / T \le \Omega \le \pi / T$	$\Omega = \omega / T$ $\longleftarrow$	
$-F_T / 2 \le F \le F_T / 2$	$F = f \cdot F_T$	

Aliasing kod otipkavanja

- iz $\omega_o = 2\pi\,\Omega_o / \Omega_T$ i $\omega_0 \le \pi$

  slijedi

$$\frac{2\pi\Omega_0}{\Omega_T} \le \pi \Rightarrow \Omega_T \ge 2\Omega_0$$

- Dakle,kako bi se postiglo otipkavanje bez "aliasing-a", frekvencija otipkavanja Ω_T treba biti barem dvostruko veća od frekvencije Ω_0 sinusoidalnog signala koji se otipkava

Teorem otipkavanja

- poopćimo prethodni zaključak razmatrajući vremenski kontinuirani signal $x_a(t)$ prikazan kao sumu sinusoida
- $x_a(t)$ može biti jednoznačno prikazan otipkanim signalom $\{x[n]\}$ samo ako je frekvencija otipkavanja Ω_T najmanje dva puta veća od najviše frekvencije sadržane u signalu $x_a(t)$
- ovaj uvjet naziva se **teorem otipkavanja**

Energija signala

- totalna energija E_x niza $x[n]$definira se kao:

$$\boxed{E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2}$$

- niz beskonačna trajanja s konačnim vrijednostima uzoraka može imati konačnu ili beskonačnu totalnu energiju
- niz konačnog trajanja ima konačnu energiju

Energija i snaga signala

- Srednja snaga P_x aperiodskog niza definira se kao:

$$P_x = \lim_{M\to\infty} \tfrac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} |x[n]|^2$$

- Srednja snaga niza beskonačne duljine može biti konačna ili beskonačna

Energija i snaga signala

- energija niza konačne duljine $-M \le k \le M$ je pak:

$$E_{x,M} = \sum_{n=-M}^{M} |x[n]|^2$$

- pa je:

$$P_x = \lim_{M\to\infty} \tfrac{1}{2M+1} E_{x,M}$$

- srednja snaga periodičnog niza perioda N je:

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |\tilde{x}[n]|^2$$

Energija i snaga signala

- razmotrimo kauzalni niz:

$$x[n] = \begin{cases} 3(\tfrac{1}{2})^n, & n \ge 0 \\ 3^n, & n < 0 \end{cases}$$

- $\boldsymbol{x}[n]$ je konačne energije jer: $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$

$$E_x = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} 3^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{3}\right)^{2n}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - \frac{1}{1-\frac{1}{9}} - 1 = \tfrac{35}{24}$$

Energija i snaga osnovnih nizova

- Jedinični skok $s[n]$:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} s^2[n] = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty$$

$$P = \lim_{M\to\infty} \tfrac{1}{2M+1} \sum_{n=0}^{M} s^2[n] =$$

$$= \lim_{M\to\infty} \frac{M+1}{2M+1} = \lim_{M\to\infty} \frac{1+1/M}{2+1/M} = \frac{1}{2}$$

Energija i snaga osnovnih nizova

- Kompleksna eksponencijala

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|Ae^{j\omega_0 n}\right|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A^2 = \infty$$

$$P = \lim_{M\to\infty} \tfrac{1}{2M+1} \sum_{n=-N}^{M} \left|Ae^{j\omega_0 n}\right|^2 = \lim_{M\to\infty} \tfrac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} A^2$$

$$= \lim_{M\to\infty} \frac{(2M+1)A^2}{2M+1} = A^2$$

Energija i snaga osnovnih nizova

signal	E	P
$\delta[n]$	1	0
$s[n]$	∞	½
$r[n]$	∞	∞
$Ae^{j\omega n}$	∞	A^2