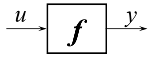
Signali i sustavi

Odziv i frekvencijske karakteristike vremenski diskretnih linearnih sustava

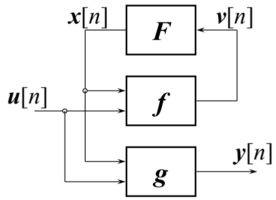
---

Model vremenski diskretnog sustava

Bezmemorijski sustav 

$y[n] = f(u[n])$

Memorijski sustav $\boldsymbol{y}[n] = F(\boldsymbol{x}[n_0], \boldsymbol{u}[n_0, n])$ za $n > n_0$



Bezmemorijski dio:

$\boldsymbol{v}[n] = f(\boldsymbol{x}[n], \boldsymbol{u}[n])$

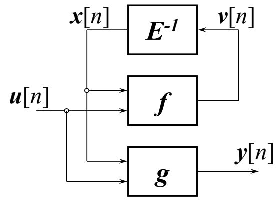
$\boldsymbol{y}[n] = g(\boldsymbol{x}[n], \boldsymbol{u}[n])$

Memorijski dio:

$\boldsymbol{x}[n] = F(\boldsymbol{x}[n_0], \boldsymbol{v}[n_0, n])$

Posebno važan memorijski element u memorijskom podsustavu je element jediničnog kašnjenja.

$\mathbf{u}[n]$, $\mathbf{x}[n]$, $\mathbf{y}[n]$ - vektori sustava



jednadžbe sustava

$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{f}(\mathbf{x}[n], \mathbf{u}[\mathrm{n}])$

$\mathbf{y}[n] = \mathbf{g}(\mathbf{x}[n], \mathbf{u}[\mathrm{n}])$

Veza s kontinuiranim sustavom u slučaju da se derivacija aproksimira s diferencijom

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \cong \frac{\mathbf{x}[n+1] - \mathbf{x}[n]}{T} = \mathbf{f}(\mathbf{x}[n], \mathbf{u}[n])$$

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{x}[n] + T\mathbf{f}(\mathbf{x}[n], \mathbf{u}[n])$$

linearni sustav

$$\frac{\mathbf{x}[n+1] - \mathbf{x}[n]}{T} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{x}[n+1] = (\mathbf{I} + T\mathbf{A})\,\mathbf{x}[n] + T\mathbf{B}\,\mathbf{u}[n]$$

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{A}_d\mathbf{x}[n] + \mathbf{B}_d\,\mathbf{u}[n]$$

Sustavi prvog reda

- Jedan element za kašnjenje + jedan ili više funkcijskih blokova
- Podaci o stanju $x[n]$ i ulazu $u[n]$ dovoljni su da se odredi stanje u narednom koraku $x[n+1]$

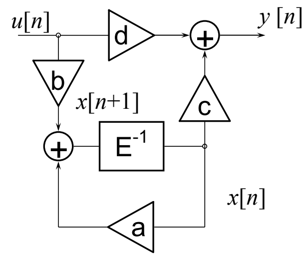
$$x[n+1] = f(x[n], u[n], n)$$
$$y[n] = g(x[n], u[n], n)$$

- Rješenje gornje jednadžbe diferencija
  $\Rightarrow$ numeričko, korak po korak

Linearni vremenski invarijantan sustav prvog reda

f - linearna funkcija

$$x[n+1] = ax[n] + bu[n]$$
$$y[n] = cx[n] + du[n]$$



Sustavi drugog reda

Opis sustava s dvije jednadžbe diferencija prvog reda

$$x_1[n+1] = f_1(x_1[n], x_2[n], u[n]), \quad x_1[0] = x_{10}$$
$$x_2[n+1] = f_2(x_1[n], x_2[n], u[n]), \quad x_2[0] = x_{20}$$
$$y[n] = g(x_1[n], x_2[n], u[n])$$

Zapisano u vektorskom obliku $\mathbf{x}[n] = [x_1[n], x_2[n]]^t$

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{f}[\mathbf{x}[n], \mathbf{u}[n]], \quad \mathbf{x}[0] = \mathbf{x}_0$$
$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{g}[\mathbf{x}[n], \mathbf{u}[n]]$$

Sustavi drugog reda ...

Rješenje možemo dobiti korak po korak počevši od $\mathbf{x}[0] = \mathbf{x}_0$

$$\mathbf{x}[1] = \mathbf{f}(\mathbf{x}[0], \mathbf{u}[0]),$$
$$\mathbf{x}[2] = \mathbf{f}(\mathbf{x}[1], \mathbf{u}[1]) = \mathbf{f}\{\mathbf{f}(\mathbf{x}[0], \mathbf{u}[0]), \mathbf{u}[1]\},$$
$$\mathbf{x}[3] = \mathbf{f}(\mathbf{x}[2], \mathbf{u}(2)) = \mathbf{f}\{\mathbf{f}\{\mathbf{f}(\mathbf{x}[0], \mathbf{u}[0]), \mathbf{u}[1]\}, \mathbf{u}[2]\}$$

ulazni niz $\{u[n]\}$ mora biti poznat.

Sustavi drugog reda ...

Sustav se može opisati s jednom jednadžbom diferencija drugog reda u obliku

$$y[n] = f(y[n-1], y[n-2], u[n], u[n-1], u[n-2])$$

ali i

$$y[n+2] = f(y[n+1], y[n], u[n+2], u[n+1], u[n])$$

što predstavlja model s ulazno izlaznim varijablama

Linearni sustav drugog reda

Ako su f_1 i f_2 linearne funkcije

$$x_1[n+1] = a_{11}x_1[n] + a_{12}x_2[n] + u_1[n]$$
$$x_2[n+1] = a_{21}x_1[n] + a_{22}x_2[n] + u_2[n]$$

sustav se može transformirati u

$$x_1[n+2] - Tx_1[n+1] + \Delta x_1[n] = u[n+1]$$
$$x_2[n+2] - Tx_2[n+1] + \Delta x_2[n] = v[n+1]$$

gdje je

$$T = a_{11} + a_{22} \qquad u[n+1] = u_1[n+1] + a_{12}u_2[n] - a_{22}u_1[n]$$
$$\Delta = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}, \qquad v[n+1] = u_2[n+1] + a_{21}u_1[n] - a_{11}u_2[n]$$

Linearni sustav drugog reda

- promotrimo jednu od dvije jednadžbi:
  $x_1[n+2] - Tx_1[n+1] + \Delta x_1[n] = u[n+1]$
- radi se o jednadžbi diferencija drugog reda koju rješavamo tako da prvo nađemo rješenje homogene jednadžbe i zatim partikularno rješenje
- homogena jednadžba je:
  $x_1[n+2] - Tx_1[n+1] + \Delta x_1[n] = 0$
- pretpostavimo rješenje u obliku $x_1[n]=Cq^n$

Linearni sustav drugog reda

- uvrštenjem u jednadžbu slijedi:
  $$Cq^n(q^2 - Tq + \Delta) = 0$$
  pa je karakteristična jednadžba:
  $$(q^2 - Tq + \Delta) = 0$$

Homogeni sustav jednadžbi s varijablama stanja

Rješenje jednadžbi sustava drugog reda može se odrediti supstitucijom $x_1[n] = X_1q^n$ i $x_2[n] = X_2q^n$ u jednadžbe stanja

$$x_1[n+1] = a_{11}x_1[n] + a_{12}x_2[n]$$
$$x_2[n+1] = a_{21}x_1[n] + a_{22}x_2[n]$$

$\Downarrow$

$$X_1q^{n+1} = a_{11}X_1q^n + a_{12}X_2q^n$$
$$X_2q^{n+1} = a_{21}X_1q^n + a_{22}X_2q^n$$

$\Downarrow$

$$qX_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2$$
$$qX_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2$$

Homogeni sustav jednadžbi s varijablama stanja

Da bi sustav algebarskih jednadžbi imao rješenje za X_1 i X_2 mora determinanta isčezavati tj.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-q & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-q \end{vmatrix} = 0$$

Determinanta daje polinom

$$q^2 - Tq + \Delta = 0,$$

čiji su korijeni q_1 i q_2 prirodne ili vlastite frekvencije sustava

Model sustava s ulazno-izlaznim varijablama

- Opis linearnog sustava jednadžbom diferencija
  $$a_0y[n] + a_1y[n-1] + a_2y[n-2] + ... + a_Ny[n-N] =$$
  $$= b_0u[n] + b_1u[n-1] + b_2u[n-2] + ... + b_Mu[n-M]$$
- odnosno, sažeto pisano
  $$\sum_{j=0}^{N} a_j y[n-j] = \sum_{j=0}^{M} b_j u[n-j]$$

Model sustava s ulazno-izlaznim varijablama

- u - jedan ulaz, y - jedan izlaz
- Vremenski stalan sustav
  $\rightarrow$ koeficijenti $\{a_i\}$ i $\{b_i\}$ konstante
- Sustav promjenjiv po koraku
  $\rightarrow$ koeficijenti $\{a_i\}$ i $\{b_i\}$ funkcije koraka n
- Izravni način određivanja odziva je izračunavanje $y[n]$ rješavanjem jednadžbe oblika

$$y[n]=F\{y[n-1], y[n-2], ..., y[n-N], u[n], u[n-1],....., u[n-M]\}$$

Model sustava s ulazno-izlaznim varijablama

- Dakle $$y[n] = -\sum_{j=1}^{N} a_j y[n-j] + \sum_{j=0}^{M} b_j u[n-j]$$
- gdje je pretpostavljeno (ili je izvršena normalizacija) da je $a_0=1$
- da bi se odredio odziv sustava $y[n]$, za $n \geq n_0$, treba poznavati $u[n]$ i početne uvjete $y[n_0-1]$, $y[n_0-2]$, …, $y[n_0-N]$
- ovaj prikaz pokazuje da je moguće izravno izračunati odziv sustava postupkom korak po korak

Rješavanje jednadžbe diferencija analitički

- Rješenje linearne jednadžbe dobiva se kao rješenje homogene jednadžbe $y_h[n]$
  $$\sum_{j=0}^{N} a_j y[n-j] = 0$$
  i partikularnog rješenja $y_p[n]$ koje ovisi o funkciji pobude $f[n]$
  $$f[n] = \sum_{j=0}^{M} b_j u[n-j]$$

Rješenje homogene jednadžbe – odziv nepobuđenog sustava

- najopćenitije rješenje homogene jednadžbe je linearna kombinacija od N posebnih linearno nezavisnih rješenja
  $y_1[n], y_2[n], \dots, y_N[n]$
  s proizvoljnim konstantama
  $y_h[n] = C_1 y_1[n] + C_2 y_2[n] + \dots + C_n y_n[n]$
- linearnu jednadžbu diferencija zadovoljava niz e^{an} ili bolje $y[n] = Cq^n$ gdje je $q \in \mathbf{C}$

Rješenje homogene jednadžbe – odziv nepobuđenog sustava

- Iz $\sum_{j=0}^{N} a_j y[n-j] = \sum_{j=0}^{N} a_j C q^{n-j} = 0$
  slijedi
  $Cq^{n-N}(q^N + a_1 q^{N-1} + a_2 q^{N-2} + \dots + a_{N-1} q + a_N) = 0$
- karakteristična jednadžba je
  $$q^N + a_1 q^{N-1} + a_2 q^{N-2} + \dots + a_{N-1} q + a_N = 0$$
  koja ima N korijena $q_1, q_2, q_3, \dots, q_N$

Rješenje homogene jednadžbe – odziv nepobuđenog sustava

Za različite korjene dobivamo rješenje oblika

$$y_h[n] = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n + \dots + C_N q_N^n$$

Za višestruke korjene (npr. q_1 višestrukosti m)

$$y_h[n] = C_1 q_1^n + C_2 n q_1^n + \dots + C_m n^{m-1} q_1^n + \\ + C_{m+1} q_{m+1}^n + \dots + C_N q_N^n$$

Korijen $q = 0$ se ne uzima obzir jer on samo smanjuje red jednadžbe za jedan, odnosno za m u slučaju njegove višestrukosti

Rješenje homogene jednadžbe – odziv nepobuđenog sustava

- kompleksni korijeni u jednadžbi s realnim koeficijentima dolaze u konjugiranim parovima tj. $q_1 = r e^{j\theta}$ i $q_2 = r e^{-j\theta}$

  $y_h[n] = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n = C_1 r^n e^{jn\theta} + C_2 r^n e^{-jn\theta}$

  vrijedi također za realni $y_h[n]$

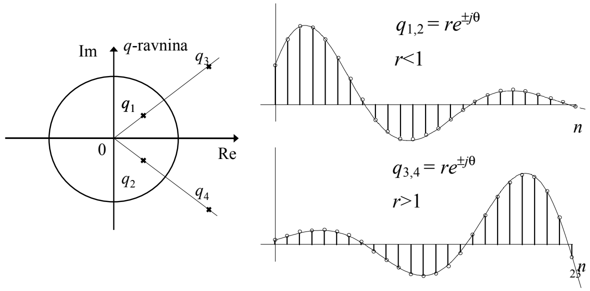
  $C_1 = C e^{j\phi} \rightarrow C_2 = C e^{-j\phi}$

  pa se rješenje može zapisati u obliku

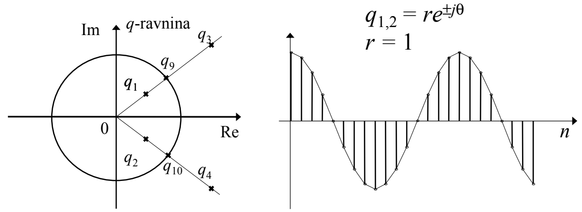
  $y_h[n] = C r^n e^{j\phi} e^{jn\theta} + C r^n e^{-j\phi} e^{-jn\theta} = 2C r^n \cos[n\theta + \phi]$

Rješavanje homogene jednadžbe diferencija ...

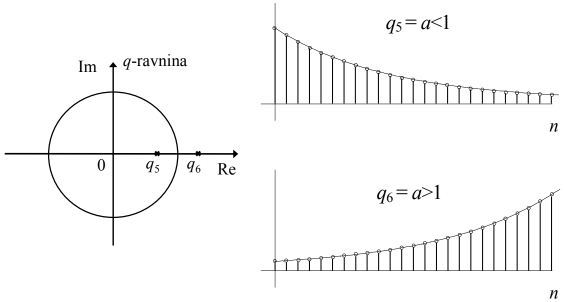
Predstavljanje korijena u kompleksnoj q-ravnini



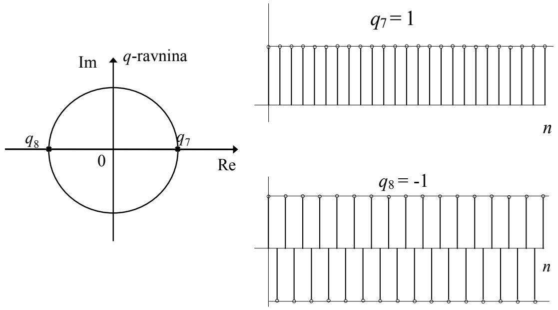
Rješavanje homogene jednadžbe diferencija ...



Rješavanje homogene jednadžbe diferencija ...



Rješavanje homogene jednadžbe diferencija ...



Rješavanje homogene jednadžbe diferencija - primjer

$y[n] - 0.5y[n-1] + 0.06y[n-2] = 0$

pretpostavimo rješenje oblika $y[n] = Cq^n$

$Cq^n - 0.5Cq^{n-1} + 0.06Cq^{n-2} = 0$

$Cq^{n-2}(q^2 - 0.5q + 0.06) = 0$

pa je karakterist. jednadžba

$q^2 - 0.5q + 0.06 = 0 \quad \Rightarrow q_1 = 0.2, \quad q_2 = 0.3$

pa je

$y_h[n] = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n = C_1 (0.2)^n + C_2 (0.3)^n \quad$ za $n \geq 0$

Rješavanje homogene jednadžbe diferencija - primjer

- iz osnovne jednadžbe postupkom korak po korak slijedi:

$$
\begin{aligned}
y[n] &= 0.5y[n-1] - 0.06y[n-2] \\
y[0] &= 0.5y[-1] - 0.06y[-2] \\
y[1] &= 0.5y[0] - 0.06y[-1] = \\
&= 0.5\{0.5y[-1] - 0.06y[-2]\} - 0.06y[-1] \\
&= 0.19y[-1] - 0.03y[-2]
\end{aligned}
$$

Rješavanje homogene jednadžbe diferencija - primjer

iz

$y_h[n] = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n$

slijedi za $n = 0$ i $n = 1$

$y[0] = C_1 + C_2$

$y[1] = 0.2C_1 + 0.3C_2$

pa iz dvije jednadžbe $\Rightarrow C_1$ i C_2

$$
\begin{aligned}
C_1 + C_2 &= 0.5y[-1] - 0.06y[-2] \\
0.2C_1 + 0.3C_2 &= 0.19y[-1] - 0.03y[-2]
\end{aligned}
$$

$\Downarrow$

Rješavanje homogene jednadžbe diferencija - primjer

$C_1 = -0.4y[-1] + 0.12y[-2]$

$C_2 = +0.9y[-1] - 0.18y[-2]$

pa je

$$
\begin{aligned}
\mathrm{y_h}[n] &= \{-0.4y[-1] + 0.12y[-2]\}\cdot(0.2)^n + \\
&+ \{0.9y[-1] - 0.18y[-2]\}\cdot(0.3)^n \quad \text{za } n \ge 0
\end{aligned}
$$

za $y[-1] = 1$ i $y[-2] = 1$

$\mathrm{y_h}[n] = -0.28(0.2)^n + 0.72(0.3)^n \quad \text{za } n \ge 0$

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija

- Određivanje partikularnog rješenja
  - Lagrangeova metoda varijacije parametara
    - rješenje se dobiva u eksplicitnom obliku
    - primjena rezultira složenim sumacijama
  - Metoda neodređenog koeficijenta
    - ograničena na pobude oblika polinoma i eksponencijalnih nizova
    - veliki broj pobuda može se aproksimirati gore navedenim nizovima
    - češće se upotrebljava u analizi sustava

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...

- pobuda polinomom oblika

  $f[n] = A_0 + A_1 n + \ldots + A_M n^M$

  dati će partikularno rješenje u obliku polinoma M-tog stupnja

  $y_p[n] = K_0 + K_1 n + \ldots + K_M n^M$

  Rješenje se uvijek pretpostavlja u obliku kompletnog polinoma tj. sa svim potencijama, bez obzira da li polinom pobude ima sve članove

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...

- slično je i za slijedeće ulazne nizove:

ulazni niz $u[n]$	partikularno rješenje $y_p[n]$
A (konstanta)	K
AM^n	KM^n
An^M	$K_0+K_1n+ \ldots +K_Mn^M$
$A^n n^M$	$A^n(K_0+K_1n+ \ldots +K_Mn^M)$
$A\cos(\omega_0 n)$	$K_1\cos\omega_0 n + K_2\sin\omega_0 n$
$A\sin(\omega_0 n)$	$K_1\cos\omega_0 n + K_2\sin\omega_0 n$

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...

- razmotrimo partikularno rješenje za kompleksni eksponencijalni ulazni niz:
- pobuda eksponencijalog oblika

$$u[n] = U\, e^{\varepsilon n} = U z^n \ \mid\ z,\varepsilon \in \mathbf{C}$$

- Ovo je najzanimljivija pobuda, jer linearni sustavi daju vlastito titranje u oblicima q_i^n
- Partikularno rješenje možemo napisati u obliku

  $y_p[n] = Y z^n$

  U i Y nazivaju se kompleksne amplitude pobude odnosno odziva

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...

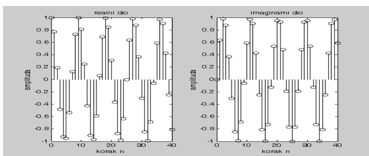
- Primjer neprigušene kompleksne eksponencijale:

  $u[n] = U\, e^{\varepsilon n} = U z^n$

uz parametre: $U = 1 + 0\,j$

$\varepsilon = j0.22\pi \ \Rightarrow z = 0.7705 + j0.6374$

$u[n] = 1e^{j0.22\pi n} = (0.7705 + j0.6374)^n = \cos(0.22\pi n) + j\sin(0.22\pi n)$



Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...

Uvrštenjem pretpostavljenog rješenja Yz^n u jednadžbu

$$
\begin{aligned}
&(a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_N z^{-N})Yz^n = \\
&= (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_M z^{-M})Uz^n
\end{aligned}
$$

$$A(z)\, Y z^n = B(z)\, U z^n$$

izlazi kompleksna amplituda odziva

$$Y = \frac{B(z)}{A(z)}U = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}}U = H(z)U$$

$H(z)$ je prijenosna funkcija

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...

prijenosna ili transfer funkcija daje odnos kompleksnih amplituda prisilnog odziva i pobude, kad je pobuda z^n

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \left.\frac{y_p[n]}{u[n]}\right|_{u[n]=z^n} = \frac{Yz^n}{Uz^n} = \frac{Y}{U}$$

Transfer funkcija se može lako napisati iz jednadžbe diferencija formalno zamjenom operatora E^{-1} s brojem z^{-1}

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...

- partikularno rješenje (prisilni odziv)
  $y_p[n]=H(z)Uz^n$
- ovisno o z, partikularni niz može biti
  - rastući ili padajući aperiodičan ili valovit
  - stalan ili periodičan
- linearna kombinacija eksponencijala može dati realni kosinusni niz
  $\rho e^{j\theta n} + \rho e^{-j\theta n} = 2\rho \cos \theta n$

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...

- za sinusnu pobudu imamo (ρ=1)

$$u[n] = |U|\cos(\theta n + \varphi) = \left(Ue^{j\theta n} + U^* e^{-j\theta n}\right)/2 =$$
$$= |U|\left(e^{j\varphi}e^{j\theta n} + e^{-j\varphi}e^{-j\theta n}\right)/2$$

odziv je također superpozicija dvije konjugirane eksponencijale $Y_p[n]= H(e^{j\theta})Ue^{j\theta n} + H(e^{-j\theta})U^*e^{-j\theta n}$

◆ partikularni niz je konstantan za z = 1 ili alternirajuće konstantan za z = -1
$y_p[n]=H(1)U\cdot 1^n$ ili $y_p[n]= H(-1)U \cdot(-1)^n$

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...

Cjeloviti odziv nehomogene jednadžbe diferencija uz pobudu $u[n]=Uz^n$ izlazi

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n] = C_1q_1^{\,n} + C_2q_2^{\,n} + \ldots + C_nq_n^{\,n} + H(z)Uz^n$$

Prijenosna funkcija

- prijenosnu funkciju:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \ldots + b_Mz^{-M}}{a_0 + a_1z^{-1} + \ldots + a_Nz^{-N}} = \frac{\sum_{j=0}^{M} b_j z^{-j}}{\sum_{j=0}^{N} a_j z^{-j}}$$

- možemo pisati i u obliku

$$H(z) = z^{(N-M)}\frac{b_0z^M + b_1z^{M-1} + \ldots + b_M}{a_0z^N + a_1z^{N-1} + \ldots + a_N} = z^{(N-M)}\frac{\sum_{j=0}^{M} b_j z^{M-j}}{\sum_{j=0}^{N} a_j z^{N-j}}$$

Prijenosna funkcija

- prijenosnu funkciju možemo pisati uz pomoć produkta korjenih faktora:

$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^{M} b_j z^{-j}}{\sum_{j=0}^{N} a_j z^{-j}} = \frac{b_0}{a_0}\cdot\frac{\prod_{j=1}^{M}(1 - z_jz^{-1})}{\prod_{j=1}^{N}(1 - p_jz^{-1})}$$

- odnosno u obliku

$$H(z) = z^{(N-M)}\frac{\sum_{j=0}^{M} b_j z^{M-j}}{\sum_{j=0}^{N} a_j z^{N-j}} = z^{(N-M)}\frac{b_0}{a_0}\frac{\prod_{j=1}^{M}(z - z_j)}{\prod_{j=1}^{N}(z - p_j)}$$

$z_1, z_2, \ldots, z_M$ su nule a $p_1, p_2, \ldots, p_N$ polovi prijenosne funkcije

Primjer rješavanja jednadžbe diferencija

Primjer: Riješiti jednadžbu diferencija

$$y[n] - 0.8\sqrt{2}\,y[n-1] + 0.64\,y[n-2] = u[n]$$
$$u[n] = 1\cdot e^{j\omega_0 n}s[n]$$

uz početne uvjete y(-1) = 0 i y(-2) = 0 i ω_0=0.22π

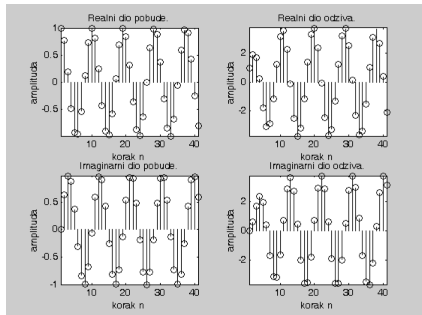
Riješimo jednadžbu diferencija korak po korak n=0,1,2,..30 :

$$y[0]=1\cdot e^0 + 0.8\sqrt{2}\cdot 0 - 0.64\cdot 0 = 1$$
$$y[1]=1\cdot e^{j0.22\pi} + 0.8\sqrt{2}\cdot 1 - 0.64\cdot 0 = 1.902 + j0.637$$
$$y[2]=\ldots\ldots$$

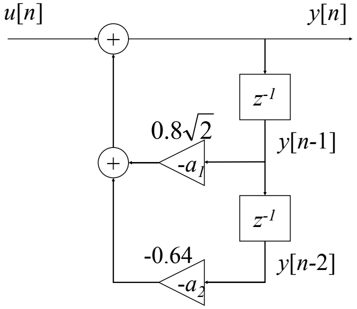
Primjer rješavanja jednadžbe diferencija

Korak 0:	u[0] = 1	y[0] = 1
Korak 1:	u[1] = 0.77051+0.63742i	y[1] = 1.9019+0.63742i
Korak 2:	u[2] = 0.18738+0.98229i	y[2] = 1.6991+1.7035i
Korak 3:	u[3] = -0.48175+0.87631i	y[3] = 0.22337+2.3956i
Korak 4:	u[4] = -0.92978+0.36812i	y[4] = -1.7645+1.9882i
Korak 5:	u[5] = -0.95106-0.30902i	y[5] = -3.0903+0.40722i
Korak 6:	u[6] = -0.53583-0.84433i	y[6] = -2.9028-1.6561i
Korak 7:	u[7] = 0.12533-0.99211i	y[7] = -1.1811-3.1264i
Korak 8:	u[8] = 0.72897-0.68455i	y[8] = 1.2506-3.1617i
Korak 9:	u[9] = 0.99803-0.062791i	y[9] = 3.1688-1.639i

Primjer rješavanja jednadžbe diferencija



Blok dijagram sustava



Primjer rješavanja jednadžbe diferencija

riješimo sada istu jednadžbu analitički …...

Rješenje homogene jednadžbe :

$$y[n]-0.8\sqrt{2}y[n-1]+0.64y[n-2]=0$$

$$\Downarrow \quad y_h[n]=Cq^n$$

$$1-0.8\sqrt{2}q^{-1}+0.64q^{-2}=0$$

Primjer rješavanja jednadžbe diferencija

Korijeni su $q_{1,2}=0.8e^{\pm j\frac{\pi}{4}}=0.4\sqrt{2}(1\pm j)$, pa izlazi :

$$y_h[n]=C_1q_1^{\,n}+C_2q_2^{\,n}=0.8^n\left[C_1e^{j\frac{\pi}{4}n}+C_2e^{-j\frac{\pi}{4}n}\right]$$

Partikularno rješenje oblika $y_p[n]=Y\cdot e^{j\omega_0 n}s[n]$

…. uvrstimo u nehomogenu jednadžbu diferencija :

$$Y\cdot e^{j\omega_0 n}s[n]-0.8\sqrt{2}Y\cdot e^{j\omega_0(n-1)}s[n-1]+0.64Y\cdot e^{j\omega_0(n-2)}s[n-2]=1\cdot e^{j\omega_0 n}s[n]$$

za $n\geq 2$

$$Y\cdot(1-0.8\sqrt{2}e^{-j\omega_0}+0.64e^{-2j\omega_0})=1$$

Primjer rješavanja jednadžbe diferencija

Kompleksna amplituda Y, za $\omega_0=0.22\pi$ ….

$$Y\big|_{\omega_0=0.22\pi}=3.78\cdot e^{j(-0.114\pi)}$$

$$=3.54-1.32j$$

Kompletno rješenje tj. totalni odziv je :

$$y[n]=y_h[n]+y_p[n]=$$

$$=0.8^n\left[C_1e^{j\frac{\pi}{4}n}+C_2e^{-j\frac{\pi}{4}n}\right]+Y\cdot e^{j\omega_0 n}s[n]\quad \text{za } n\geq 0$$

Primjer rješavanja jednadžbe diferencija

Iz polazne jednadžbe:

$$y[n]-0.8\sqrt{2}y[n-1]+0.64y[n-2]=1\cdot e^{j\omega_0 n}$$

Za n=0,1 slijedi

$$y[0]=1\cdot e^0+0.8\sqrt{2}\cdot 0-0.64\cdot 0=1$$

$$y[1]=1\cdot e^{j0.22\pi}+0.8\sqrt{2}\cdot 1-0.64\cdot 0=1.902+j0.637$$

Vrijednost kompletnog rješenja za n=0,1 :

$$y[0]=1=C_1+C_2+3.54-j\cdot 1.32$$

$$y[1]=1.902+j\cdot 0.637=0.8\left[C_1e^{j\frac{\pi}{4}}+C_2e^{-j\frac{\pi}{4}}\right]+(3.54-j\cdot 1.32)\cdot e^{j0.22\cdot\pi}$$

Primjer rješavanja jednadžbe diferencija

dobivamo: $C_1=-2.46+j\cdot 0.86=2.6060\cdot e^{j2.8053}$

$$C_2=-0.08+j\cdot 0.46=0.4669\cdot e^{j1.743}$$

$$Y(\omega_0)=3.78\cdot e^{j(-0.114\pi)}$$

$$=3.54-1.32j$$

$$y[n]=0.8^n\left[C_1e^{j\frac{\pi}{4}n}+C_2e^{-j\frac{\pi}{4}n}\right]+Y(\omega_0)\cdot e^{j\omega_0 n}$$

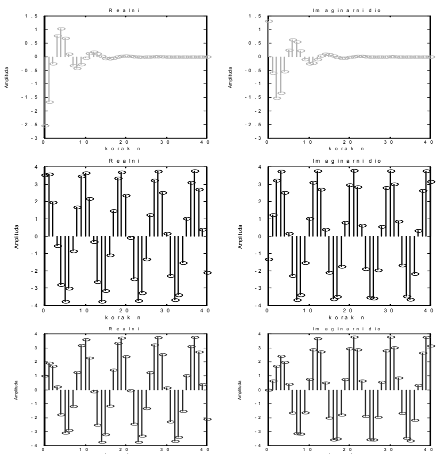
$$y[n]=0.8^n\left[2.61e^{j2.81}e^{j\frac{\pi}{4}n}+0.467e^{j1.74}e^{-j\frac{\pi}{4}n}\right]+3.78e^{-j0.114\pi}\cdot e^{j0.22\pi n}$$

Primjer rješavanja jednadžbe diferencija

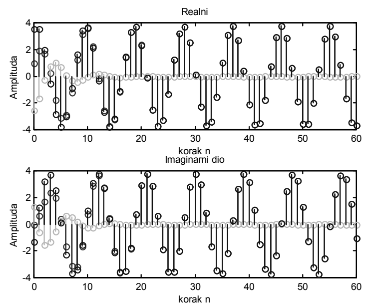
Pogledajmo sada razdvojene odzive:

partikularno rješenje: $y_p[n]=Y\cdot e^{j\omega_0 n}$

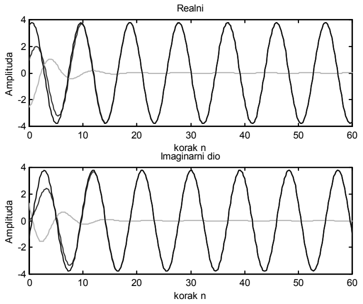
vlastito titranje sustava ili komplementarno rješenje: $y_v[n]=C_1q_1^{\,n}+C_2q_2^{\,n}$



Diskusija rješenja



Ukupno rješenje



Primjer rješavanja jednadžbe diferencija

Obzirom da je $|q_1|=|q_2|=0.8$, vlastito titranje sustava trne u nulu proporcionalno sa 0.8^n

Za linearne sustave kod kojih su moduli svih korijena karakterističnog polinoma $|q_i|<1$, odziv sustava $y[n]$ na trajnu periodičku pobudu postaje jednak prisilnom odzivu $y_p[n]$ za veliki n
….. vlastito titranje $y_v[n]$ isčezava, i kažemo da je sustav ušao u stacionarno stanje.

Primjer rješavanja jednadžbe diferencija

Odredimo omjer kompleksne amplitude odziva u stacionarnom stanju i pobude za još nekoliko karakterističnih frekvencija:

Ω_0=0, 0.15π, 0.20π, 0.23π, 0.25π, 0.27π, 0.30π, 0.35π, 0.40π, 0.50π, 0.70π

Primjer rješavanja jednadžbe diferencija

Ovim postupkom u stvari otipkavamo prijenosnu funkciju sustava $H(z)$ za z oblika:

$$z=e^{j\omega}$$

Ovisnost prijenosne funkcije o ω možemo odrediti i analitički, tako da u izraz za $H(z)$ uvrstimo takav z :

… za naš primjer : $H(z)=\dfrac{1}{(1-0.8\sqrt{2}z^{-1}+0.64z^{-2})}$

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{(1-0.8\sqrt{2}e^{-j\omega}+0.64e^{-2j\omega})}$$

PRIMJER 9

Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava

- Pobuda sustava sinusnim nizom

$$u[n]=|U|\cos(\omega n+\phi)=$$
$$=\frac{|U|}{2}(e^{j(\omega n+\phi)}+e^{-j(\omega n+\phi)})=\mathrm{Re}\{Ue^{j\omega n}\}$$

daje odziv $y_p[n]=\mathrm{Re}\{Ye^{j\omega n}\}$ gdje je Y dobiven iz odziva na $Ue^{j\omega n}$.
To se može pokazati s uvrštenjem u jednadžbu diferencija

$$u[n]=Ue^{j\omega n}=\mathrm{Re}\ \{Ue^{j\omega n}\}+j\ \mathrm{Im}\ \{Ue^{j\omega n}\}$$

Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava ...

Partikularno rješenje dobiva se u obliku
$y_p[n]=Ye^{j\omega n}=\mathrm{Re}\ \{Ye^{j\omega n}\}+j\ \mathrm{Im}\ \{Ye^{j\omega n}\}$

rješenje realnog dijela pobude Re $\{Ue^{j\omega n}\}$

Za naš primjer pobuda je bila: $u[n]=1\cdot e^{j0.22\pi\cdot n}s[n]$

$$\mathrm{Re}\{u[n]\}=\cos(0.22\pi\cdot n)\quad\Rightarrow\quad\mathrm{Re}\{y[n]\}$$
$$\mathrm{Im}\{u[n]\}=\sin(0.22\pi\cdot n)\quad\Rightarrow\quad\mathrm{Im}\{y[n]\}$$

Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava ...

$$\left.\begin{array}{l}A(\mathrm{E}^{-1})\,y=B(\mathrm{E}^{-1})\,u\\ +\ \text{pobuda } e^{j\omega n}\end{array}\right\}\ H(e^{j\omega})=\frac{b_0+b_1e^{-j\omega}+\ldots+b_Me^{-jM\omega}}{a_0+a_1e^{-j\omega}+\ldots+a_Ne^{-jN\omega}}$$

$$\left.\begin{array}{l}H(e^{j\omega})\ \text{funkcija od } e^{j\omega}\\ e^{j\omega}=e^{j(\omega+2\pi i)}\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{vrijednost transfer funkcije}\\ \text{za } z=e^{j\omega}\text{ je periodična s }2\pi\end{array}$$

PRIMJER 11

Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava ...

- Frekvencijska karakteristika $H(e^{j\omega})$ daje stacionarno stanje sustava $y_p=H(e^{j\omega})U$ u ovisnosti o frekvenciji ω pobudnog sinusnog signala

Zapis karakteristike $H(e^{j\omega})$:

$H(e^{j\omega})=H_r(e^{j\omega})+H_i(e^{j\omega})$ PRIMJER 12

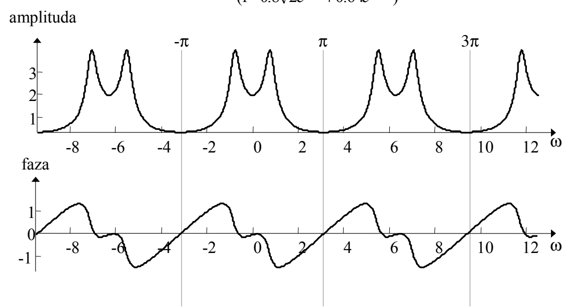
$=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}\longrightarrow$ $A(\omega)=|H(e^{j\omega})|$
$\varphi(\omega)=\arg(H(e^{j\omega}))$

Koeficijent $\{a_i\}$ i $\{b_i\}$ su realni te vrijedi

$H(e^{-j\omega})=H^*(e^{j\omega})\Rightarrow$ $H_r(e^{j\omega})$ i $A(\omega)$ parne funkcije od ω
$H_i(e^{j\omega})$ i $\varphi(\omega)$ neparne funkc. od ω

Frekvencijska karakteristika

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{(1-0.8\sqrt{2}e^{-j\omega}+0.64e^{-2j\omega})}$$

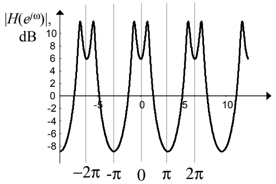


Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava ...

Radi periodičnosti karakteristike, dovoljno je promatrati interval $(-\pi, \pi)$ ili čak $(0, \pi)$

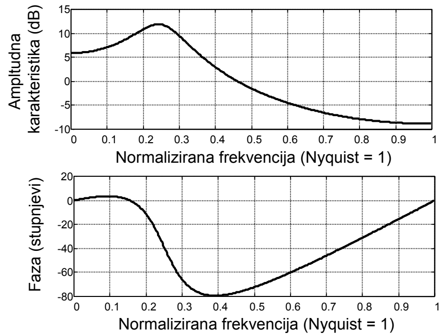
Modul frekvencijske karakterisitke sustava se često prikazuje u logaritamskom prikazu u dB

$A_l = 20\log_{10}(A(\Omega))$, [dB]



Frekvencijska karakteristika

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-0.8\sqrt{2}e^{-j\omega}+0.64e^{-2j\omega})}$$



Frekvencijska karakteristika sustava prvog reda

$$y[n] - \alpha y[n\text{-}1] = Uz^n,\ U \in \mathrm{R}$$

$$\Downarrow \quad y[n] = Yz^n$$

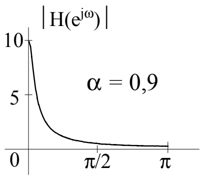
$$\frac{Y}{U} = H(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$

$$H(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = H(e^{j\omega}) =$$

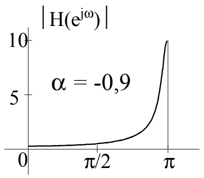
$$= \frac{1}{1\text{-}\alpha e^{-j\omega}} = \frac{1}{1-\alpha(\cos\omega - j\sin\omega)}$$

Frekvencijska karakteristika sustava prvog reda ...

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha\cos\omega)^2 + (\alpha\sin\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\cos\omega}}$$



nisko-propusni filter



visoko-propusni filter

Frekvencijska karakteristika sustava drugog reda

Transfer funkcija:

$$H(z) = \frac{1}{(z-q_1)(z-q_2)}$$

$$\Downarrow \quad z = e^{j\omega}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(e^{j\omega}-q_1)(e^{j\omega}-q_2)}$$

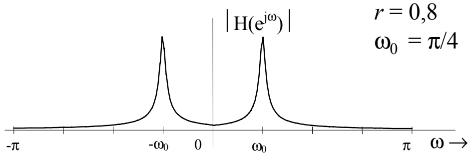
Frekvencijska karakteristika sustava drugog reda ...

Primjer: $\left.\begin{array}{l} q_1 = 0{,}8e^{j\pi/4} \\ q_2 = 0{,}8e^{-j\pi/4} \end{array}\right\}$ $r = 0{,}8 \quad \omega_0 = \pi/4$

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \frac{1}{\left|(e^{j\omega}-re^{j\pi/4})(e^{j\omega}-re^{-j\pi/4})\right|}$$

$r \approx 1$, $r < 1$, $\omega_0 = \pi/4$

Frekvencijska karakteristika sustava drugog reda ...



$r = 0{,}8$

$\omega_0 = \pi/4$

- rezonator na frekvenciji ω_0
- pojasno-propusni filter

Primjer 12 freqz3d

Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava ...

- Frekvencijska karakteristika se može odrediti grafički iz:

$$H(z) = K\frac{\prod_{i=1}^{m}(z-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(z-q_i)}$$

praćenjem apsolutne vrijednosti $|H(e^{j\omega})|$ i argumenta $H(e^{j\omega})$ transfer funkcije na jediničnoj kružnici $z = e^{j\omega}$ ravnine z

Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava ...

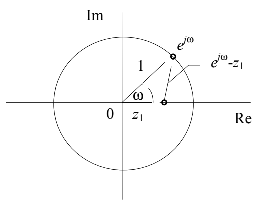
$$\left|H(e^{j\omega})\right| = K\frac{\prod_{i=1}^{m}\left|(e^{j\omega}-z_i)\right|}{\prod_{i=1}^{n}\left|(e^{j\omega}-q_i)\right|}$$

$$\arg H(e^{j\omega}) = \sum\left[\arg(e^{j\omega}-z_i) - \arg(e^{j\omega}-q_i)\right]$$

- Svaki korijeni faktor transfer funkcije daje svoj individualni doprinos veličini (multiplikativno) i fazi (aditivno).

Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava ...

Grafički prikaz u polarnom koordinatnom sustavu



Korjeni faktori → vektori

Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava ...

Vrijednost transfer funkcije na frekvenciji ω

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = K \frac{\prod_{1}^{M} d_i}{\prod_{1}^{N} l_i}$$

$\{d_i\}$ - udaljenost točke na kružnici $e^{j\omega}$ do nultočki $\{z_i\}$

$\{l_i\}$ - udaljenost točke na kružnici $e^{j\omega}$ do polova $\{p_i\}$

Fazni kut transfer funkcije

$$\arg H(e^{j\omega}) = \sum_{1}^{M} \varphi_i - \sum_{1}^{N} \psi_i$$

$\varphi_i = \arg(e^{j\omega}) - \arg(z_i)$

$\psi_i = \arg(e^{j\omega}) - \arg(p_i)$

Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava ...

Primjer:

$$H(z) = K \frac{z - z_1}{(z - q_1)(z - q_2)}$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = K \frac{d_1}{l_1 l_2}$$

$\arg H(e^{j\omega}) = \varphi_l - (\Psi_1 + \Psi_2)$

primjer