Signali i sustavi

Kontinuirani sustavi

Podsjetimo se…

- Uvod u predmet
- Primjer tehničkog sustava
  - video prikaz, matematički model, simulacija (MATLAB / Simulink)
- Prikaz i označavanje signala
  - kontinuirani signal, diskretni signal
- Diskretizacija
- Operacije na signalu
  - transformacija vremenske osi, transformacija područja signala, složeno preslikavanje signala
- Operacije među signalima

Signali i sustavi

Kontinuirani sustavi bez memorije

Realni i apstraktni objekti

- Realni objekt – objekt iz stvarnog svijeta s pridruženim atributima (mjerljivim veličinama).
- Apstraktni objekt – skup veličina (varijabli) i relacija među njima.
- Objekt može biti karakteriziran skupom algebarskih relacija:

$$\mathcal{R}_1(u_1, u_2, u_3) = 0,$$
$$\mathcal{R}_2(u_1, u_2, u_3) = 0,$$
$$\mathcal{R}_3(u_1, u_2, u_3) = 0.$$

Realni i apstraktni objekti

- Ako se varijable mijenjaju s vremenom, skup relacija može biti skup diferencijalnih jednadžbi (nezavisna varijabla t):

$$a_{11}\frac{du_1}{dt} + a_{12}\frac{du_2}{dt} + a_{13}u_3 = 0$$
$$a_{21}\frac{du_1}{dt} + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 = 0$$
$$a_{31}\frac{du_1}{dt} + a_{32}\frac{du_2}{dt} + a_{33}\frac{du_3}{dt} = 0$$

Objekti sa zbijenim i raspodijeljenim parametrima

- To su bili diferencijalni sustavi ili sustavi sa zbijenim parametrima.
- Ako postoje i prostorne koordinate kao nezavisne varijable – dobivamo parcijalne diferencijalne jednadžbe.
- Takvi sustavi su sustavi sa raspodijeljenim parametrima.

Orijentirani i neorijentirani objekti

- Neorijentirani objekti: možemo proizvoljno proglasiti ulaze i izlaze sustava.
- Primjer: električni otpor, veza napona i struje.
  - Možemo proizvoljno proglasiti napon ili struju kao ulaz ili izlaz iz sustava.
- Orijentirani objekti: čvrsta uzročno-posljedična veza ulaznih i izlaznih varijabli.
- Primjer: elektroničko pojačalo.

Model i realizacija objekta

- Apstraktni objekt koji ima iste varijable i iste ulazno – izlazne relacije kao neki realni objekt je model realnog objekta.
- Realni objekt je tada (jedna) realizacija apstraktnog objekta.

Definicija apstraktnog objekta

- Neka je (u, y) uređeni par vremenskih funkcija u intervalu $[t_0, t]$.
- Skup uređenih parova varijabli (u, y) je apstraktni objekt **S**.
- **S** je relacija koja vezuje slobodnu varijablu u i zavisnu y:

$$\mathbf{S} = \{(u, y) \mid u \in \mathcal{U}, y \in \mathcal{Y}\}.$$

- **S** predstavlja sveukupnost ul./izl. parova (u, y).

Definicija apstraktnog objekta

- Relacija **S** općenito ne mora davati jednoznačnu vezu pobude i odziva.
- Kada je veza jednoznačna, imamo

  $$y = \boldsymbol{F}(u),$$

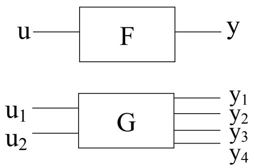
  gdje je $\boldsymbol{F}$ funkcija, operator ili transformacija funkcije pobude.
- Tada sustav vrši operaciju na signalu, odnosno preslikavanje ulazne u u izlaznu y.

Klasifikacija sustava

- Bezmemorijski ili trenutni:
  $y(t) = f\,(t, u(t))$
- Memorijski ili kauzalni:
  $y(t) = F\,(t, u_{(-\infty,\, t]}\,)$
- Prediktivni (anticipativni) ili antikauzalni:
  $y(t) = F\,(t, u_{[t,\, \infty)}\,)$
- Memorijsko – prediktivni ili nekauzalni:
  $y(t) = F\,(t, u_{(-\infty, \infty)}\,)$
- Nekauzalni sustavi često se dobivaju pri sintezi sustava, uslijed idealiziranih zahtjeva.

Spajanje sustava

- Orijentirani apstraktni objekt ili sustav predstavlja se grafički u obliku pravokutnika s označenim ulaznim i izlaznim varijablama.

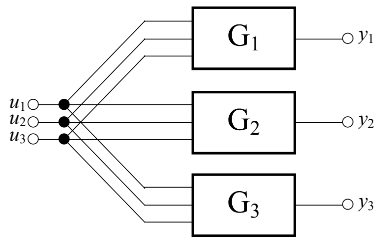


Spajanje sustava

- Sustav s više ulaza i izlaza može se jednostavno razložiti na više sustava s više ulaza, ali samo s po jednim izlazom.
- Dva i više objekata ili podsustava mogu se spojiti tako da zajedno čine jedan složeni sustav.
- Sustavi od kojih je sastavljen složeni sustav zovu se podsustavi.

Spajanje sustava

- Složeni sustav:



Spajanje sustava

- Neka sustavi S_1 i S_2 imaju ulaze

  $\{u_{1i}$ za $i = 1, 2,..., m_1\}$ i $\{u_{2j}$ za $j = 1, 2,..., m_2\}$

  i izlaze

  $\{y_{1k}$ za $k = 1, 2,..., r_1\}$ i $\{y_{2l}$ za $l = 1, 2,..., r_2\}$.
- Sustavi S_1 i S_2 su spojeni ako je barem jedna varijabla $u_{1i}(t)$ ulaza sustava S_1 izjednačena s jednom varijablom $y_{2k}(t)$ izlaza sustava S_2 za svaki t tj.

  $u_{1i}(t) = y_{2l}(t),\ i \in [1, m_1]$ i $l \in [1, r_2]$

  $u_{2j}(t) = y_{1k}(t),\ j \in [1, m_2]$ i $k \in [1, r_1]$.

Primjer

- Neka je $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $m = 2$ i $r = 3$.

  $y_{11} = F_{11}(u_{11}, u_{12})$

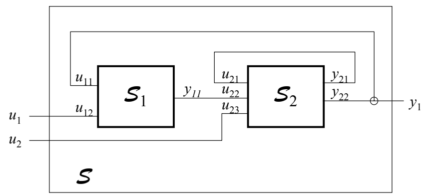
  $y_{12} = F_{12}(u_{11}, u_{12})$

  $y_{21} = F_{21}(u_{21}, u_{22}, u_{23})$

  $y_{22} = F_{22}(u_{21}, u_{22}, u_{23})$

  $y_{23} = F_{23}(u_{21}, u_{22}, u_{23})$

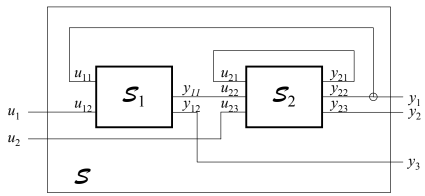
Primjer-nastavak



- Jednadžbe spajanja mogu biti:

Ulazi u S_1	Ulazi u S_2
$u_{11}(t) = y_{22}(t)$ $u_{12}(t) = u_1(t)$	$u_{21}(t) = y_{21}(t)$ $u_{22}(t) = y_{11}(t)$ $u_{23}(t) = u_2(t)$

Primjer-nastavak



- Varijable složenog sustava:

Ulazi u S	Izlazi S
$u_1(t)$ $u_2(t)$	$y_1(t) = y_{22}(t)$ $y_2(t) = y_{23}(t)$ $y_3(t) = y_{12}(t)$

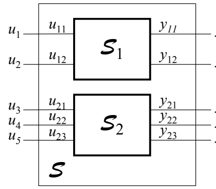
Pravila spajanja

- Izlazi iz blokova se ne spajaju međusobno.
- Svaki ulaz bloka spaja se na izlaz nekog bloka ili je ulaz u spojeni složeni sustav.
- Svi ulazi podsustava su angažirani.
- Izlaz bloka može biti izlaz složenog sustava. Najmanje jedan izlaz podsustava je izlaz spojenog sustava.

Primjer

Sustav složen od dva nezavisna podsustava:

Ulazi u *S*	Izlazi iz *S*
$u_1(t)$	$y_1(t) = y_{11}(t)$
$u_2(t)$	$y_2(t) = y_{12}(t)$
$u_3(t)$	$y_3(t) = y_{21}(t)$
$u_4(t)$	$y_4(t) = y_{22}(t)$
$u_5(t)$	$y_4(t) = y_{23}(t)$



- Ulazi u_1, u_2 ne djeluju na izlaze y_3, y_4, y_5.
- Ulazi u_3, u_4, u_5 ne utječu na izlaze y_1 i y_2.

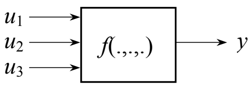
Primjer-nastavak

- Sustav *S* složen od dva nezavisna podsustava.
- Složeni sustav zadanih ili željenih svojstava može se dobiti sintezom jednostavnih sustava u kompleksniji.
- Razlaganjem ili analizom sustava možemo dobiti dobar uvid u vladanje sustava i utjecaj pojedinih podsustava.

Funkcijski blok

- Izlaz u trenutku t ovisi samo o vrijednosti ulaznog signala u trenutku t.
- Elementi sustava su prikazani funkcijskim blokom.
- Funkcijski blok je opisan funkcijom.

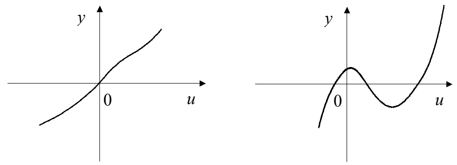
$$y(t) = f(u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t))$$
$$y(t), u_i(t) \in \mathbf{R}$$



Funkcijski blok s jednim ulazom i jednim izlazom

- $y(t) = f(u(t))$, za svaki t
- f je funkcija koja broju pridružuje broj.
- Blok označen s f nazivamo funkcijski blok.
- Funkcijska veza ulaza i izlaza može se dati:
  - analitičkim izrazom pomoću poznatih funkcija
  - krivuljom u u-y ravnini
  - tablicom diskretnih vrijednosti

Funkcijski blok s jednim ulazom i jednim izlazom

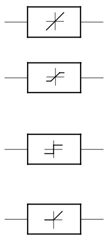


- Svakoj vrijednosti u-a pridružena je jedna vrijednost y-a.
- Funkcijski blok upravljan od strane ulaza (apcisa na slici).
- Ulazna varijabla slobodna, a izlazna zavisna (ordinata).

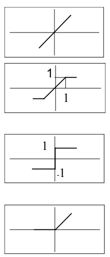
MATLAB

Primjeri funkcijskih blokova s jednim ulazom i jednim izlazom

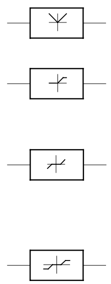
Skokovite i lomljene karakteristike



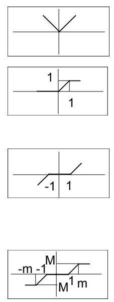
linearno pojačalo	$y = u$
limiter	$y = -1,\ u < -1$ $y = u,\ -1 < u < 1$ $y = 1,\ u > 1$
komparator jedne razine	$y = \mathrm{sgn}(u),\ u \neq 0$ $y = 0,\ u = 0$
prag	$y = u,\ u > 0$ $y = 0,\ u < 0$



Skokovite i lomljene karakteristike



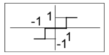
apsolutna vrijednost	$y = \|u\|$
prag s zasićenjem	$y = 0,\ u < 0$ $y = u,\ u > 0$ $y = 1,\ u > 1$
mrtva zona	$y = u + 1,\ u < -1$ $y = 0,\ -1 < u < 1$ $y = u - 1,\ u > 1$
mrtva zona s zasićenjem	$y = -M + 1,\ u < -m$ $y = u + 1,\ -m < u < -1$ $y = 0,\ -1 < u < 1$ $y = u - 1,\ 1 < u < m$ $y = M - 1,\ u > m$



Skokovite i lomljene karakteristike

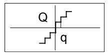
komparator s dvije razine

$y = -1,\ u < -1$
$y = 0,\ -1 < u < 1$
$y = 1,\ u > 1$



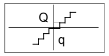
kvantizator (A/D pretvornik)

$y = -mQ,$
$\quad -mq < u < (1 - m)q$
$y = mQ,$
$\quad (m - 1)q < u < mq$



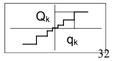
stepeničasta linearna funkcija

$y = -mQ,$
$\quad (-1 - m)q < u < -mq$
$y = mQ,$
$\quad mq < u < (m + 1)q$



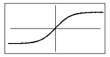
stepeničasta nelinearna funkcija

$y = Q_k,\ q_{k-1} < u < q_k$

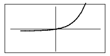


Glatke karakteristike (neprekinuta derivacija)

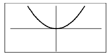
simetrična nelinearna funkcija — $y{=}\mathrm{th}(x)$ — $y = \mathrm{th}(u)$



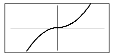
asimetrična nelinearna funkcija — $y{=}e^x{-}1$ — $y = e^u - 1$



parabola (2. stupanj) — $y = u^2$

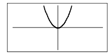


neparna parabola (3. stupanj) — $y = -u^2,\ u < 0$; $y = u^2,\ u > 0$

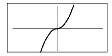


Glatke karakteristike (neprekinuta derivacija)

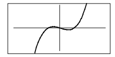
parna parabola višeg reda — $y{=}x^{2n}$ — $y = u^{2n}$



neparna parabola višeg reda — $y{=}x^{2n+1}$ — $y = u^{2n+1}$

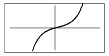


parabola 3. reda + pravac negativnog nagiba — $y{=}x^3{-}x$ — $y = u^3 - u$

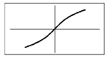


Glatke karakteristike (neprekinuta derivacija)

bipolarni kompresor — $y{=}\mathrm{sh}(x)$ — $y = \mathrm{sh}(u)$

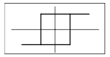


bipolarni dekompresor — $y{=}\mathrm{Arsh}(x)$ — $y = \mathrm{Arsh}(u)$

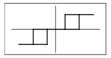


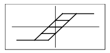
Relacijski blokovi (višeznačne funkcije)

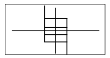
komparator s histerezom



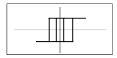
komparator s dvije razine s histerezom



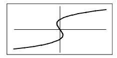




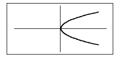
Relacijski blokovi (višeznačne funkcije)



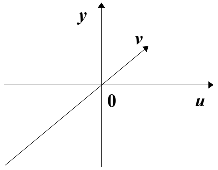
$x{=}f(y)$ — $y = f(u)$

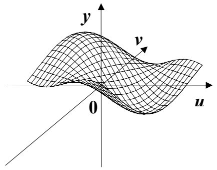


horizontalna parabola — $x{=}y^2$ — $u = y^2$



Funkcijski blok s više ulaza





- u, v – ulazne varijable.
- y – izlazna varijabla.
- Skup krivulja $y = f(u,v)$, uz parametar v.

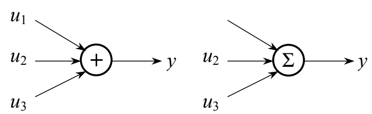
Funkcijski blok s više ulaza

- Prikaz funkcijskih veza ulaza i izlaza:
  - analitički često pomoću elementarnih funkcija (polinomi, transcedentne funkcije),
  - grafički prikazi,
  - tablice numeričkih podataka.
- Grublje aproksimacije po odsječcima funkcija:
  - linearne funkcije,
  - parabolične funkcije.

Funkcijski blok s više ulaza

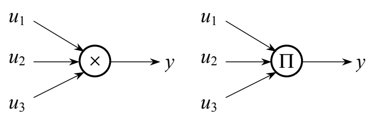
- Složeni funkcijski blokovi mogu se rastaviti na elemente zbrajala i množila:

$$y(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$$

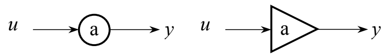


Funkcijski blok s više ulaza

$y(t) = u_1(t) \bullet u_2(t) \bullet u_3(t)$



$y(t) = a \bullet u_1(t)$



Funkcijski blok s više ulaza

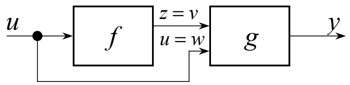
- Ako je f polinom
  $y(t) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + ... + a_n u^n$,
  funkcijski blok se može predstaviti konačnim brojem zbrajala i množila.
- Ako je f transcedentna funkcija aproksimacija je moguća konačnim brojem elemenata.

Spajanje funkcijskih blokova u sustav

- Pravila za spajanje elemenata ili funkcijskih blokova:
  - Izlazi dva bloka se ne spajaju.
  - Svaki ulaz bloka se spaja na izlaz nekog bloka ili je ulaz u spojeni sustav.
  - Samo jedan izlaz bloka je izlaz spojenog sustava. Svi ostali izlazi moraju biti spojeni na ulaze nekih blokova.
- Rezultirajući sustav će opet biti sustav s više ulaza i jednim izlazom.

Spajanje funkcijskih blokova u sustav

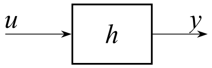
$z = f(u)$
$y = g(v,w)$



- Jednadžbe spajanja:

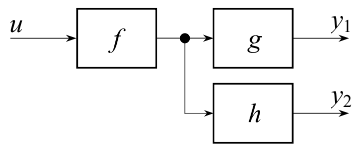
$$\left.\begin{array}{l} v = z \\ w = u \end{array}\right\} \quad y = g(f(u),u)$$

$y = h(u)$
jedan funkcijski blok



Spajanje funkcijskih blokova u sustav

- Sustav s jednim ulazom i više izlaza:

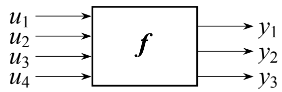


$y_1 = g(v)$
$y_2 = h(v)$
$v = \mathrm{f}(u)$
$y_1 = f_1(u)$
$y_2 = f_2(u)$

Spajanje funkcijskih blokova u sustav

- Sustav s više ulaza i više izlaza:

$y_1 = f_1(u_1,u_2,u_3,u_4)$
$y_2 = f_2(u_1,u_2,u_3,u_4)$
$y_3 = f_3(u_1,u_2,u_3,u_4)$



Uvođenjem vektora:

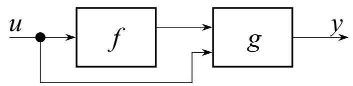
$$\left.\begin{array}{l} \text{ulaz: } [u_1,\ u_2,\ ...\ u_m]^{\mathrm{T}} \\ \text{izlaz: } [y_1, y_2,\ ...\ y_r]^{\mathrm{T}} \end{array}\right\} \quad \mathbf{y} = f(\mathbf{u}) \text{ ... }$$

gdje je f vektorska funkcija

Eksplicitni i implicitni sustavi

- Dvije grupe sustava bez memorije:
  - eksplicitni sustavi,
  - implicitni sustavi.
- Podjela prema tome da li signal na svom putu kroz sustav ne čini petlju:
  - eksplicitni sustav – nema petlje,
  - implicitni sustav – ima jednu ili više petlji.

Prikaz sustava listom spajanja



g: *f*, *u*
f: *u*

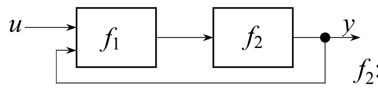
- Svaki funkcijski blok ima jedan redak u listi.
- Izlazne varijable označene su oznakom funkcijskog bloka.
- Ulazne varijable označene su:
  - ulazima u dotični blok,
  - oznakama bloka čiji izlaz ulazi u dotični blok.

Prikaz sustava listom spajanja

- Sortirana lista:
  - kada su redci u listi spajanja složeni tako da u svakom retku ime funkcije ili varijable desno od dvotočke možemo naći lijevo od dvotočke negdje iznad tog retka ili je to ulaz sustava, kažemo da je lista sortirana.

nesortirana lista		sortirana lista
g: *f*, *u*	⇨	*f*: *u*
f: *u*		*g*: *f*, *u*

Prikaz sustava listom spajanja



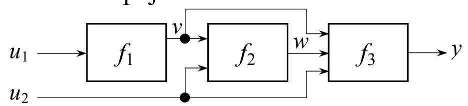
$f_2 : f_1$ ili $f_1 : f_2,\ u$

$f_1 : f_2,\ u$ $f_2 : f_1$

- Lista se ne može sortirati $\Rightarrow$ sustav je implicitan.
- Implicitni sustav je sustav s povratnom vezom.
- Spojna lista je način ustanovljavanja da li je sustav eksplicitni ili implicitni u slučaju da to nije moguće ustanoviti vizualnom inspekcijom.

Formulacije i rješenje jednadžbi sustava (eksplicitni sustav)

- Ulazno izlazne jednadžbe na osnovu sortirane spojne liste:



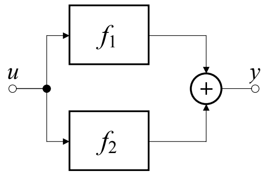
$f_1 : u_1$

$f_2 : f_1,\ u_2$

$f_3 : f_1, f_2,\ u_2$

$$v = f_1(u_1)$$
$$w = f_2(v,\ u_2)$$
$$y = f_3(v,\ w,\ u_2)$$
$$y = f_3\{f_1(u_1),\ f_2[f_1(u_1),\ u_2],\ u_2\}$$

Formulacije i rješenje jednadžbi sustava (spajanje u paralelni slog)



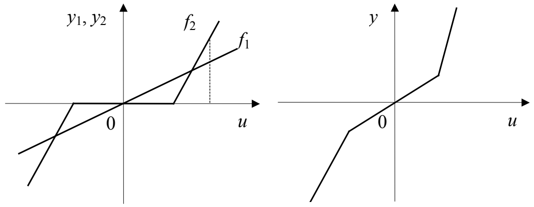
$$y = y_1 + y_2$$
$$y_1 = f_1(u)$$
$$y_2 = f_2(u)$$
$$y = f(u) = f_1(u) + f_2(u)$$
$$f = f_1 + f_2$$

- Paralelni spoj ili slog.
- Veći broj sustava složenih paralelno:

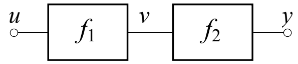
$$y = f(u) = \sum_{1}^{n} f_i(u)$$

Formulacije i rješenje jednadžbi sustava (spajanje u paralelni slog)

- Karakteristika paralelnog sloga dobiva se zbrajanjem karakteristika blokova.



Formulacije i rješenje jednadžbi sustava (spajanje u kaskadu)



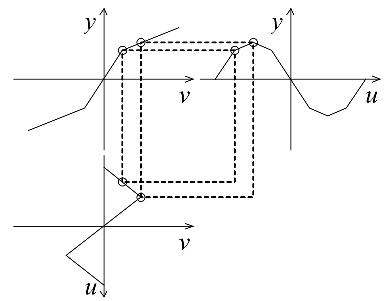
$$y = f_2(v)$$
$$v = f_1(u)$$
$$y = f_2(f_1(u))$$

- Kaskada sustava.
- Funkcija kaskade je kompozicija funkcija:
  - $f = f_1 \circ f_2$
- Za kaskadu s većim brojem blokova vrijedi:

$$y = f_n(f_{n-1}(f_{n-2}(\ldots(f_1(u))\ldots))).$$
$$f = f_n \circ f_{n-1} \circ f_{n-2} \circ \ldots \circ f_1.$$

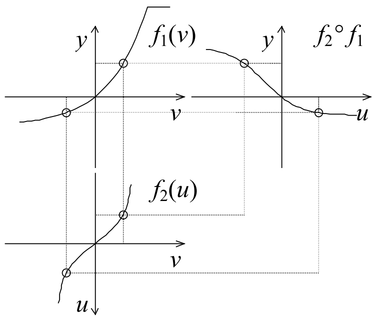
Formulacije i rješenje jednadžbi sustava (spajanje u kaskadu)

- Funkcija kaskade ovisi o redoslijedu blokova.



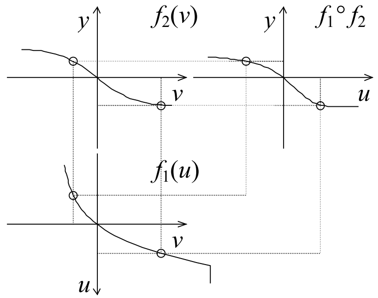
Formulacije i rješenje jednadžbi sustava (spajanje u kaskadu)

- Funkcija kaskade ovisi o redoslijedu blokova.

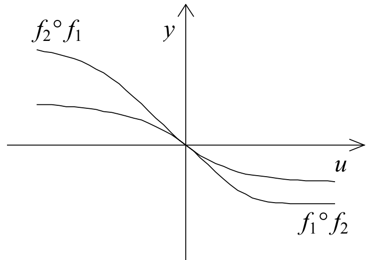


Formulacije i rješenje jednadžbi sustava (spajanje u kaskadu)

- Obrnuti redoslijed kaskada.



Formulacije i rješenje jednadžbi sustava (spajanje u kaskadu)



Ekvivalencija i aproksimacija sustava

- Dva sustava su ekvivalentna ako su za sve moguće ulazne vrijednosti njihovi ulazno-izlazni odnosi identični.
- Dva sustava su aproksimativno ekvivalentna ako za sve moguće identične ulaze imaju aproksimativno jednake izlaze.
- Više je načina za definiciju aproksimativno jednakih signala.

Ekvivalencija i aproksimacija sustava

- Definicije aproksimativno jednakih signala:
  - najveći iznos apsolutnog odstupanja

$$\varepsilon_m = \max\left|y_1(x) - y_2(x)\right| < \varepsilon_{md} \qquad \mathrm{a} \le x \le \mathrm{b}$$

  - integral kvadrata odstupanja (efektivna greška)

$$\varepsilon_{ef} = \int_a^b \left[y_1(x) - y_2(x)\right]^2 dx < \varepsilon_{efd} \qquad \mathrm{a} \le x \le \mathrm{b}$$

Ekvivalencija i aproksimacija sustava

- Razvoj u Taylorov red u okolini jedne točke

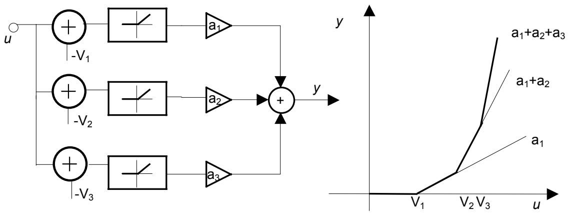
$$\delta_0(x) = \left[y_1(x) - y_2(x)\right]_{x=\mathrm{x}_0} =$$

$$= \delta(\mathrm{x}_0) + \delta'(\mathrm{x}_0)\frac{\Delta x}{1!} + \delta''(\mathrm{x}_0)\frac{(\Delta x)^2}{2!} + \ldots$$

$$+ \delta^{(n)}(\mathrm{x}_0)\frac{(\Delta x)^n}{n!} + R$$

- Greška se procjenjuje (n + 1) članom.

Realizacije nekih karakteristika



MATLAB

Realizacija karakteristike s nekoliko blokova tipa prag

Linearnost sustava

- Definicija:

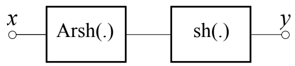
Sustav s jednim ulazom x i jednim izlazom y je linearan ako zadovoljava uvjet

$$f(\mathrm{a}\cdot x_1 + \mathrm{b}\cdot x_2) = \mathrm{a}\cdot f(x_1) + \mathrm{b}\cdot f(x_2)$$

za sve realne vrijednosti a, b, x_1, x_2 , gdje su x_1 i x_2 bilo koje dvije vrijednosti ulaza

Linearnost sustava

- Složeni sustav koji zadovoljava uvjet linearnosti ne mora nužno biti sastavljen od elemenata koji su linearni.
- Primjer:



- Elementi sustava su nelinearni, a sustav je linearan:
  - sustav nije strukturno linearan.
- Svaki sustav koji je strukturno linearan (svi elementi linearni) linearan je i operacijski.

Linearnost sustava

- Sustav s dva ulaza x_1 i x_2 je linearan ako vrijedi

$$f(ax_{11} + bx_{12}, ax_{21} + bx_{22}) = a\,f(x_{11}, x_{21}) + b\,f(x_{12}, x_{22}).$$

- Linearni sustav s n ulaza karakterizira se ulazno izlaznom relacijom:

$$y = \sum_1^n a_i x_i = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- Linearni sustav s n ulaza može se se promatrati kao suma n identičnih sustava (superpozicija):

$$y = f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, 0, 0) + f(0, x_2, 0) + f(0, 0, x_3).$$

Linearnost sustava

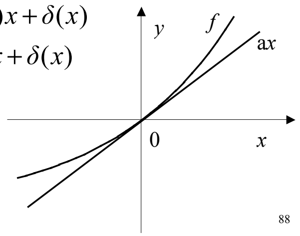
- Sustav s m ulaza i n izlaza:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{1n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Aproksimacija nelinearnog sustava linearnim

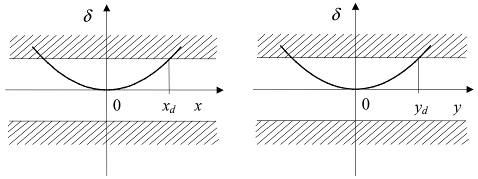
- Razvoj nelinearne funkcije $f(x)$ u Taylorov red u okolini točke x_0:

$$f(x_0+x)=f(x_0)+f'(x_0)x+\delta(x)$$
$$y=f(x_0+x)-f(x_0)=ax+\delta(x)$$



- ax – linearni član
- $\delta(x)$ – odstupanje od linearnosti

Aproksimacija nelinearnog sustava linearnim



- Grafički prikaz odstupanja:

analiza za mali signal ⇨ linearna analiza

analiza za veliki signal ⇨ nelinearna analiza

Signali i sustavi

Kontinuirani sustavi s memorijom

Sustav u konačnom intervalu

- Memorijski kauzalni sustav s beskonačnom memorijom definiran je s:

$$y(t)=F(u_{(-\infty,\,t]}),$$

pri čemu $u_{(-\infty,\,t]}$ ne uključuje trivijalni slučaj $u_{(-\infty,\,t]}=u(t)$ koji bi ga načinio bezmemorijskim.

Sustav u konačnom intervalu

- Vladanje sustava uglavnom pratimo na konačnom vremenskom intervalu

$$(t_0,\,t]$$

koji nazivamo interval promatranja.

- Zanima nas, dakle, odsječak odziva

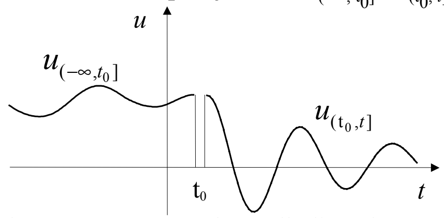
$$y_{(t_0\,,\,t]}$$

kao posljedica odsječka pobude

$$u_{(t_0\,,\,t]}.$$

Sustav u konačnom intervalu

- Pobuda se može podijeliti na $u_{(-\infty,\,t_0]}$, $u_{(t_0,\,t]}$.



- Izlaz sustava u $(t_0,\,t]$ je posljedica oba segmenta

$$y(t)=F(u_{(-\infty,\,t_0]},u_{(t_0,\,t]})\ ,\ t>t_0.$$

Sustav u konačnom intervalu

- Uzmimo primjer vremenski stalnog, linearnog sustava $h(t,\,\tau)=h(t-\tau)$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau)h(t-\tau)d\tau\ ;\quad \tau,\ t\in(-\infty,\infty).$$

- Interval integracije možemo podijeliti na tri intervala koji se dodiruju $(-\infty,\,t_0]$, $(t_0,\,t]$, $(t,\,\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{t_0}u(\tau)h(t-\tau)d\tau+\int_{t_0}^{t}u(\tau)h(t-\tau)d\tau+\int_{t}^{+\infty}u(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

Sustav u konačnom intervalu

$$\int_{-\infty}^{t_0}u(\tau)h(t-\tau)d\tau+\int_{t_0}^{t}u(\tau)h(t-\tau)d\tau+\int_{t}^{+\infty}u(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Prvi integral je odziv sustava na pobudu prije t_0. $\tau\in(-\infty,\,t_0]$ predstavlja neku funkciju g

Treći integral je nula za kauzalne sustave $h(t-\tau)=0$ za $\tau>t$

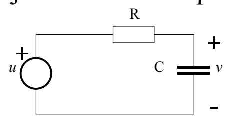
- Vrijednost odziva u t je dana s:

$$y(t)=g(t)\ +\ \int_{t_0}^{t}u(\tau)h(t-\tau)d\tau\ ,\ t>t_0,$$

odnosno jednoznačno s $u_{(t_0,\,t]}$ samo ako znamo $g(t)$

Sustav u konačnom intervalu

- Kako odrediti $g(t)$?
- Uzmimo sustav određen diferencijalnom jednadžbom kao primjer:



$$\mathrm{RC}\frac{dv}{dt}+v=u$$

- uz RC = 1, funkcija h je:

$$h(t)=e^{-t}\ ,\ \text{za}\ t>t_0$$

Sustav u konačnom intervalu

- odziv na pobudu $u_{(t_0, t]}$:

$$v(t) = \int_{-\infty}^{t_0} u(\tau)e^{-(t-\tau)}d\tau + \int_{t_0}^{t} u(\tau)e^{-(t-\tau)}d\tau$$

$$v(t) = e^{-t}\int_{-\infty}^{t_0} u(\tau)e^{\tau}d\tau + \int_{t_0}^{t} u(\tau)e^{-(t-\tau)}d\tau$$

Sustav u konačnom intervalu

- Određeni integral uz fiksni t_0 daje neki broj C

$$v(t) = Ce^{-t} + \int_{t_0}^{t} u(\tau)e^{-(t-\tau)}d\tau.$$

- Pretpostavimo da znamo $v(t_0)$. C izlazi kao:

$$v(t_0) = Ce^{-t_0} + 0 \Rightarrow C = v(t_0)e^{t_0}.$$

Sustav u konačnom intervalu

- Uz poznato $v(t_0)$ i $u_{(t_0, t]}$, odziv sustava glasi:

$$v(t) = v(t_0)e^{-(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} u(\tau)e^{-(t-\tau)}d\tau, \quad t > t_0.$$

- Odziv sustava je određen:
  - Pobudom u ili signalom iz intervala $(t_0, t]$.
  - Stanjem napona kondenzatora u t_0 odnosno jednim brojem $v(t_0)$. U njemu je sadržan efekt pobude do t_0.

Sustav u konačnom intervalu

- Stanje varijable $v(t) = \alpha$ (broj) sadržava efekt pobude do t_0 pa se može napisati:

$$v(t) = F(\alpha, u_{(t_0,t]})$$

za sustave opisane običnim diferencijalnim jednadžbama.
- U daljnjem toku, napon kondenzatora će se mijenjati, ali u bilo kojem trenutku t_1 možemo zaboraviti proces prije t_1 i na temelju iznosa $v(t_1)$ i pobude $u(t_1, t]$ odrediti $v(t)$.

Sustav u konačnom intervalu

- Pogodno je dakle, pratiti stanje sustava. Pomoću stanja i ulaza može se dobiti izlaz.
- U našem primjeru ako bi izlaz $y(t)$ bio napon na otporniku, vrijedilo bi:

$$y(t) = u(t) - v(t).$$

Sustav u konačnom intervalu

- Kauzalne sustave moguće je opisati funkcijama φ i η:

$$x(t) = \varphi[t, t_0, x(t_0), u_{(t_0,t]}], \qquad t > t_0,$$

$$y(t) = \eta[t, x(t), u(t)], \qquad t > t_0.$$

- $x(t)$ je stanje sustava u trenutku t
- Ovakav opis sustava, gdje dominantnu ulogu ima stanje unutarnjih varijabli, zove se:

  model s varijablama stanja ili model stanja

Sustav u konačnom intervalu

- Skup varijabli:

$$\{x_i \mid i = 1,2, \dots, n\}$$

čini stanje sustava, ako se uz njihovo poznavanje u trenutku t_0 i poznavanje $u_{(t_0,t]}$, može jednoznačno odrediti $x(t)$ i $y(t)$ za svako $t > t_0$
- Sustav u kojem nema akumuliranih efekata iz prijašnjih pobuda opisan je samo funkcijom η:

$$y(t) = \eta[t, u(t)], \qquad t > t_0$$

i čini klasu trenutnih, bezmemorijskih ili statičkih sustava

Sustav u konačnom intervalu

- Generalizirano, sustav se može okarakterizirati osmerkom koju čine skupovi i funkcije:

$$\mathcal{S} = \{T, U, \mathcal{U}, Y, \mathcal{Y}, X, \varphi, \eta\}.$$

- Obzirom na skupove i funkcije, sustav se svrstava u klase koje su modeli određenih realnih sustava.
- U predmetu SIS pretpostavljat ćemo da sustav ima determinističko, a ne stohastičko vladanje.
- Jedna klasifikacija sustava
  - vremenski kontinuiran sustav
  - vremenski diskretan sustav

Vremenski kontinuirani sustavi

- Sustav je vremenski kontinuiran ako je vremenska varijabla kontinuirana, $t \in \mathbf{T} \subset \mathbf{R}$.
- Ako je φ neprekinuta funkcija, kažemo da je sustav gladak. U tom slučaju sustav se može opisati diferencijalnom jednadžbom stanja i izlaznom jednadžbom:

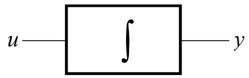
$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0,$$

$$y(t) = g(x(t), u(t), t),$$

gdje su f i g obične funkcije.

Vremenski kontinuirani sustavi

- Jednadžbe se mogu predstaviti blokovskim dijagramima ako se uvede blok koji povezuje:
  $\dot{x}$ i x.
- Integrator:



$$y(t) = y(\mathrm{t}_0) + \int_{\mathrm{t}_0}^{t} u(\tau)d\tau$$

Vremenski kontinuirani sustavi

- Integrator je memorijski element.
- Za određivanje y(t) potrebno je $y(t_0)$ i $u_{(t_0,\, t]}$.
- $y(t)$ je funkcional od $u_{(t_0,\, t]}$.
- $y(t_0)$ je stanje integratora i sadrži svu prošlost do t_0.
- Kod integratora izlaz je ujedno i stanje.

Vremenski kontinuirani sustavi
Model s varijablama stanja

- Sustav je n-tog reda ako treba n varijabli stanja za potpun opis njegovog vladanja
- Pretpostavimo sustav s više varijabli ulaza, izlaza i stanja:

$\mathbf{u} = [u_1, u_2 ,..., u_m]^T \quad \mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$,
$\mathbf{y} = [y_1, y_2 ,..., y_r]^T \quad \mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^r$,
$\mathbf{x} = [x_1, x_2 ,..., x_n]^T \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$.

- Stanje u trenutku t se može izraziti s:

$$\mathbf{x}(t) = \varphi\,(t, t_0, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0, t)),$$

  φ je (jednoznačna) vektorska funkcija

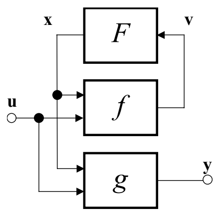
Vremenski kontinuirani sustavi
Model s varijablama stanja

- Izlaz ovisi o stanju i pobudi:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t),$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(t, t_0, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0, t]).$$

- Vremenski kontinuiran sustav s varijablama stanja možemo rastaviti na dva podsustava:
  - memorijski
  - bezmemorijski

Vremenski kontinuirani sustavi
Model s varijablama stanja



- Bezmemorijski dio, f i g

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t),$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t).$$

- Memorijski dio, F, je ovdje integrator

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(\mathrm{t}_0) + \int_{\mathrm{t}_0}^{t} \mathbf{v}(\tau)d\tau.$$

Vremenski kontinuirani sustavi
Model s varijablama stanja

- Preuredimo posljednje tri jednadžbe

$\mathbf{v}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$
$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(\mathrm{t}_0) + \int_{\mathrm{t}_0}^{t} \mathbf{v}(\tau)d\tau$$

1

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(t); \quad \mathbf{x}(\mathrm{t}_0) = \mathbf{x}_0$$

2

- Dobivamo rezultat:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad \mathbf{x}(\mathrm{t}_0) = \mathbf{x}_0,$$
$$\mathbf{y}(t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t).$$

Vremenski kontinuirani sustavi
Model s varijablama stanja

- Funkcija stanja x traži se u eksplicitnom obliku: $x(t) = \varphi\big(t, \mathrm{t}_0, \mathrm{x}_0, u_{(\mathrm{t}_0, t]}\big)$.
- To je rješenje vektorske diferencijalne jednadžbe
- Prilikom rješavanja treba paziti na:
  - postojanje (egzistenciju) rješenja,
  - jedinstvenost rješenje.
- Izlaz $y(t)$ se dobiva kao algebarska funkcija stanja i pobude

$$y(t) = \eta(t, x(t), u(t)).$$

Vremenski kontinuirani sustavi
Geometrijska interpretacija rješenja

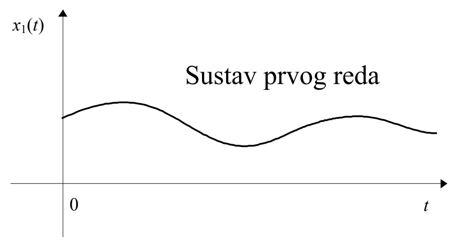
- Vektor $\mathbf{x}(t)$ ima koordinate:

$$x_1(t) = \varphi_1(t), x_2(t) = \varphi_2(t), \ldots , x_n(t) = \varphi_n(t).$$

- Vektor $\mathbf{x}(t)$ možemo prikazati:
  - kao funkciju vremena, x-t prikaz,
  - kao trajektoriju u ravnini stanja (vrijeme je parametar).

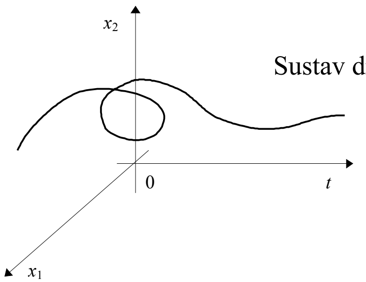
Vremenski kontinuirani sustavi
Geometrijska interpretacija rješenja

- Prikaz vektora $\mathbf{x}(t)$ u x-t ravnini.



Vremenski kontinuirani sustavi Geometrijska interpretacija rješenja

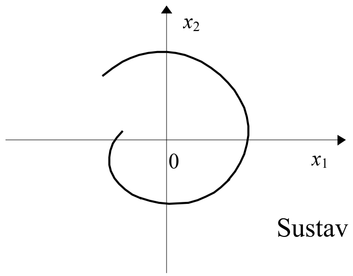
- Prikaz vektora $\mathbf{x}(t)$ u x_1, x_2, t prostoru.



Sustav drugog reda

Vremenski kontinuirani sustavi Geometrijska interpretacija rješenja

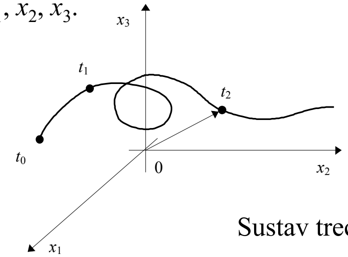
- Prikaz trajektorije vektora $\mathbf{x}(t)$ u ravnini stanja.



Sustav drugog reda

Vremenski kontinuirani sustavi Geometrijska interpretacija rješenja

- Prikaz trajektorije vektora $\mathbf{x}(t)$ u prostoru stanja x_1, x_2, x_3.



Sustav trećeg reda

Vremenski kontinuirani sustavi Klasifikacija sustava

- Vremenski varijantan sustav

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t).$$

- Vremenski invarijantan sustav

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \text{ za } \mathbf{u}(t) = 0.$$

Vremenski kontinuirani sustavi Klasifikacija sustava

- Sustav je otvoren, eksplicitan odnosno bez povratnih veza ako se jednadžbe stanja mogu sortirati:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(u_1, u_2, \cdots, u_m),\\
\dot{x}_2 &= f_2(x_1, u_1, u_2, \cdots, u_m),\\
\dot{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, u_1, u_2, \cdots, u_m),\\
&\vdots\\
\dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, u_1, u_2, \ldots, u_m).
\end{aligned}$$

- Rješenje jednadžbi dobiva se sukcesivnom integracijom.

Vremenski kontinuirani sustavi

- Sustav je linearan ako je funkcija $\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ linearna, tj.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t).$$

- Ako su A i B konstantne, sustav je linearan i vremenski nepromjenjiv

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t).$$

Vremenski kontinuirani sustavi Otvoreni ili eksplicitni sustav

- Nepobuđen linearan sustav (tj. $u(t) = 0$, za sve t) ima homogenu diferencijalnu jednadžbu.
- Vremenski promjenjiv sustav

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t).$$

- Vremenski stalan sustav:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t).$$

Vremenski kontinuirani sustavi Opći model s ulazno izlaznim varijablama

- Promatrajmo primjer sustava s jednim ulazom i jednim izlazom opisanim jednadžbama:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, u) \qquad x_1(\mathrm{t}_0) = \mathrm{x}_{10},\\
\dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, u) \qquad x_2(\mathrm{t}_0) = \mathrm{x}_{20},\\
y &= g(x_1, x_2, u).
\end{aligned}$$

- Model s ulazno izlaznim varijablama ne sadrži varijable stanja $\Rightarrow$ treba ih eliminirati iz gornjih jednadžbi.
- Polazimo od izlazne jednadžbe i deriviramo y po vremenu:

Vremenski kontinuirani sustavi Opći model s ulazno izlaznim varijablama

$$y = g(x_1, x_2, u) \quad \Big| \ \frac{d}{dt}$$

$$\downarrow$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, u)\\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, u)\end{aligned}\right\} \rightarrow \ \dot{y} = h(\dot{x}_1, \dot{x}_2, x_1, x_2, u, \dot{u})$$

$$\downarrow$$

$$\dot{y} = h'(x_1, x_2, u, \dot{u}) \quad \Big| \ \frac{d}{dt}$$

$$\downarrow$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, u)\\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, u)\end{aligned}\right\} \rightarrow \ \ddot{y} = k(\dot{x}_1, \dot{x}_2, x_1, x_2, u, \dot{u}, \ddot{u})$$

$$\downarrow$$

$$\ddot{y} = k'(x_1, x_2, u, \dot{u}, \ddot{u})$$

Vremenski kontinuirani sustavi Opći model s ulazno izlaznim varijablama

$$\left.\begin{aligned} y &= g(x_1, x_2, u) \\ \dot{y} &= h'(x_1, x_2, u, \dot{u}) \\ \ddot{y} &= k'(x_1, x_2, u, \dot{u}, \ddot{u}) \end{aligned}\right\} \rightarrow \varphi(\ddot{y}, \dot{y}, y, \ddot{u}, \dot{u}, u) = 0$$

sustav drugog reda

- Sustav n–tog reda

$$\varphi\left(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, \dot{y}, y, u^{(m)}, u^{(m-1)}, \ldots, \dot{u}, u\right) = 0.$$

- Linearan sustav n–tog reda

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + y = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \ldots + u.$$

Vremenski kontinuirani sustavi Opći model s ulazno izlaznim varijablama

- Koje veličine uzeti kao varijable stanja?

$$\begin{aligned} y &= x_1, \\ \dot{y} &= x_2, \\ &\vdots \\ y^{(n-1)} &= x_n. \end{aligned}$$

- To je dobar izbor jer su početni uvjeti u diferencijalne jednadžbe:

$$y(0), \dot{y}(0), \ldots, y^{(n-1)}(0).$$

Vremenski kontinuirani sustavi Opći model s ulazno izlaznim varijablama

- Izbor varijabli stanja:

$$y = x_1, \dot{y} = x_2, \ldots, y^{(n-1)} = x_n,$$

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, \dot{y}, y, u^{(m)}, u^{(m-1)}, \ldots, \dot{u}, u),$$

daje slijedeći model s varijablama stanja:

$$\begin{array}{lll} y = x_1 & \dot{y} = x_2 & \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{y} = x_2 & \ddot{y} = x_3 & \dot{x}_2 = x_3, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y^{(n-2)} = x_{n-1} & y^{(n-1)} = x_n & \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ & & \dot{x}_n = f\left(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, u^{(m)}, u^{(m-1)}, \ldots, u\right). \end{array}$$

Modeli vremenski diskretnih sustava

- Sustav je vremenski diskretan ako je skup $\mathbf{T} \subset \mathbf{R}$ prebrojiv.
- Signali u, x, y su nizovi brojeva.
- Npr., pobudni niz $u(k)$ može se izraziti u obliku:

$$\bar{u} = \{(k, u(k)) \mid k \in \mathbf{Z}\},$$

$$\{u(k)\}, k \in \mathbf{Z}.$$

- $\mathbf{U} = \mathbf{Y} = \mathbf{X} = \mathbf{R} \Rightarrow$ jednadžba diferencija:

$$\mathbf{x}(k+1) = f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k),$$

$$\mathbf{y}(k) = g(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k).$$

- Diskretni sustavi proizlaze i iz numeričkog rješavanja diferencijalnih jednadžbi.

Modeli vremenski diskretnih sustava Element za kašnjenje

$$u \longrightarrow \boxed{\;\mathrm{T}\;} \longrightarrow y$$

$$y = \mathrm{T}(u)$$

$$y(t) = u(t - \tau)$$

- Operacija T je operacija s pamćenjem.
- Element za kašnjenje je, na primjer, električni vod konačne duljine.