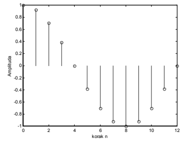
Signali i sustavi

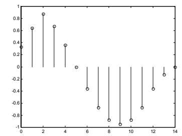
Vremenski diskretni sustavi

Diskretni sustavi

- diskretni sustav transformira ulazni niz $u[n]$ u izlazni niz $y[n]$
- diskretni sustav s jednim ulazom i jednim izlazom:



$$y[n] = H\left(u[n]\right)$$



$u[n]$ → Vremenski diskretan sustav → $y[n]$

Ulazni niz - pobuda

Izlazni niz - odziv

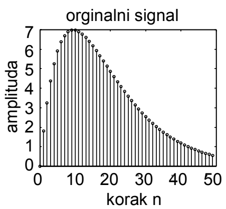
Primjeri diskretnih sustava

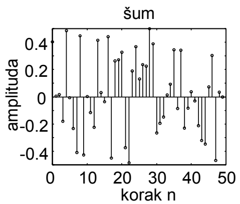
- sustav za izračunavanje srednje vrijednosti susjednih M uzoraka (M-point moving-average system)

$$y[n] = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} u[n-k] = \frac{u[n]+u[n-1]+u[n-2]+\cdots+u[n-M+1]}{M}$$

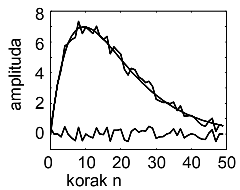
- koristi se za glačanje slučajnih varijacija u podacima

Primjer - MATLAB

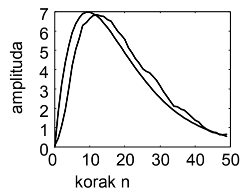




Primjer - nastavak

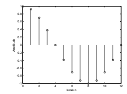


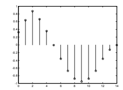
– orginalni signal
– šum
– signal + šum



– orginalni signal
– y[n] - izlaz iz moving average sustava (filtra)

Primjer - nastavak





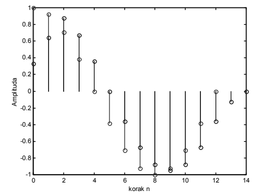
$u[n]$ → Vremenski diskretan sustav → $y[n]$

Ulazni niz - pobuda

Izlazni niz - odziv

$$y[n] = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} u[n-k]$$

$M = 3$



Primjer: štednja na bankovnoj knjižici

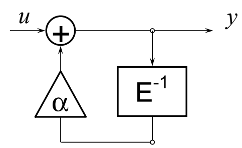
r - godišnja kamata
r / m - dnevna kamata

$$y[n] = y[n-1] + \frac{r}{m}\, y[n-1] + u[n]$$

$y[n]$ - stanje računa n-tog dana
$y[n\text{-}1]$ - stanje računa [n-1]-og dana
$u[n]$ - uplata $u[n] > 0$ ili isplata $u[n] < 0$ n-tog dana

Primjer: štednja na bankovnoj knjižici ...

Blok dijagram ove jednadžbe je:



$$y[n] = \underbrace{\left(1+\frac{r}{m}\right)}_{\alpha} y[n-1] + u[n]$$

$$y[n] = \alpha y[n-1] + u[n]$$

Rješavanje korak po korak (numerički)

Primjer: štednja na bankovnoj knjižici ...

$$y[n] = \alpha y[n-1] + u[n]$$
$$y[0] = \alpha y[-1] + u[0]$$
$$y[1] = \alpha y[0] + u[1] = \alpha^2 y[-1] + \alpha u[0] + u[1]$$
$$y[2] = \alpha y[1] + u[2] = \alpha^3 y[-1] + \alpha^2 u[0] + \alpha u[1] + u[2]$$
$$y[3] = \alpha y[2] + u[3] = \alpha^4 y[-1] + \alpha^3 u[0] + \alpha^2 u[1] + \alpha u[2] + u[3]$$

....

$$y[n] = \alpha^{n+1} y[-1] + \sum_{j=0}^{n} \alpha^{n-j} u[j] \qquad n \ge 0$$

Primjer štednog uloga riješen numerički (korak po korak)

$$y[n]=\left(1+\frac{r}{m}\right)y[n-1]+u[n]$$

n	$u[n]$	$y[n]$
0	10	10
1	-2,4	8,1
2	-0,5	8,0
3	-0,5	7,9
4	-0,2	8,1
5	-0,4	8,1
6	-1,4	7,1
7	-1,1	6,4
$\Sigma=$	3,5 $\neq$	6,4

y(0) = 1,05·y(-1)+10 = 1,05·0+10
y(1) = 1,05·y(0)-2,4 = 1,05·10-2,4
y(2) = 1,05·y(1)-0,5 = 1,05·8,1-0,5
y(3) = 1,05·y(0)-0,5 = 1,05·8,0-0,5
y(4) = 1,05·y(1)-0,2 = 1,05·7,9-0,2

uz kamatu 3% godišnje
Stanje bi bilo 3.50397

10

Veza diferencijalne jednadžbe i jednadžbe diferencija

- Neka je zadana diferencijalna jednadžba

$$y'(t)+ay(t)=bu(t) \quad \text{odnosno} \quad H_c(s)=\frac{b}{s+a}$$

- korištenjem trapezne formule integral $y(t)$

$$y(t)=\int_{t_0}^{t} y'(\tau)d\tau + y(t_0)$$

se može u točkama $t=nT$ i $t_0=(n-1)T$ aproksimirati sa:

11

Veza diferencijalne jednadžbe i jednadžbe diferencija

$$y[nT]=\frac{T}{2}\left(y'[nT]+y'[(n-1)T]\right)+y[(n-1)T]$$

evaluacijom diferencijalne jednadžbe za $t=nT$ slijedi:

$$y'[nT]=-ay[nT]+bu[nT]$$

uvrštenjem u izraz za trapeznu aproksimaciju slijedi:

$$y[nT]=\frac{T}{2}\left(-ay[nT]+bu[nT]-ay[(n-1)T]+bu[(n-1)T]\right)+y[(n-1)T]$$

$$\boxed{\left(1+\frac{aT}{2}\right)y[n]-\left(1-\frac{aT}{2}\right)y[(n-1)]=\frac{bT}{2}\left(u[n]+u[(n-1)]\right)}$$

gdje je $y[n]\equiv y[nT]$ i $u[n]\equiv u[nT]$

12

Veza diferencijalne jednadžbe i jednadžbe diferencija

- z – transformacijom jednadžbe slijedi prijenosna funkcija*

$$H(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{\frac{bT}{2}\left(1+z^{-1}\right)}{\left(1+\frac{aT}{2}\right)-\left(1-\frac{aT}{2}\right)z^{-1}}=\frac{b}{\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)+a}$$

usporedbom s $H_c=\dfrac{b}{s+a}$ može se prepoznati

$$s=\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$ i naziva se bilinearna transformacija

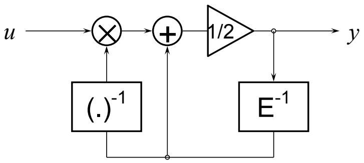
** Biti će kasnije obrađeno*

13

Nelinearni sustav

Primjer: računanje drugog korijena broja $u>0$

$$y[n]=\frac{1}{2}\left[y[n-1]+\frac{u}{y[n-1]}\right]$$ - nelinearan sustav



14

Primjer: računanje drugog korijena broja ...

$\sqrt{10}=?$

$$y[n]=\frac{1}{2}\left[y[n-1]+\frac{u}{y[n-1]}\right]$$

$\sqrt{10}=3{,}162277660|16838$

n	$y[n]$
0	10,000000000
1	5,500000000
2	3,659090909
3	3,196005082
4	3,162455623
5	3,162277665
6	3,162277660
7	3,162277660
8	3,162277660

15

Akumulator – primjer sustava prvog reda

- Akumulator je definiran s:

$$y[n]=\sum_{j=-\infty}^{n}u[j]=\sum_{j=-\infty}^{n-1}u[j]+u[n]$$

$$y[n]=y[n-1]+u[n]$$

- dakle radi se u sustavu prvog reda u kojem se trenutna vrijednost ulaza $u[n]$ pribraja prethodnoj vrijednosti izlaza $y[n-1]$ koja je zbroj svih ulaza za n od $-\infty$ do $n-1$
- sustav prema tome kumulativno zbraja odnosno akumulira sve uzorke ulaznog niza

16

Akumulator – primjer sustava prvog reda

- neka je uzlazni signal kauzalni niz $u[n]$ za $n_0 \geq 0$, i želimo odrediti odziv $y[n]$ za $n \geq n_0$
- iz $y[n]=y[n-1]+u[n]$ slijedi za $n=n_0$, n_0+1, ...

$y[n_0]=y[n_0-1]+u[n_0]$
$y[n_0+1]=y[n_0]+u[n_0+1]$
$y[n_0+2]=y[n_0+1]+u[n_0+2]$
. . . .

- da bi se odredilo $y[n]$ za $n \geq n_0$ treba poznavati i $y[n_0-1]$ jer $y[n_0]$ ovisi o njemu

17

Akumulator – primjer sustava prvog reda

- prema definiciji akumulatora je:

$$y[n_0-1]=\sum_{j=-\infty}^{n_0-1}u[j]$$

što znači da $y[n_0-1]$ "sažimlje" utjecaj svih ulaza u sustav prije koraka n_0.

- $y[n_0-1]$ predstavlja početni uvjet
- zaključimo: da bi jednoznačno odredili $y[n]$ za $n \geq n_0$ treba poznavati jednadžbu sustava, pobudu $u[n]$ za $n \geq n_0$ i $y[n_0-1]$.

18

Akumulator – primjer sustava prvog reda

- ako nije postojala pobuda sustava prije n_0 tada je početni uvjet $y[n_0 - 1] = 0$ i sustav nazivamo "mirnim" ili "relaksiranim"
- ako je $y[n_0 - 1] = 0$ tada odziv akumulatora ovisi samo o ulaznom nizu $u[n]$ za $n \geq n_0$
- uobičajnim su uzima da je svaki sustav miran u $n = -\infty$ ako se u tom slučaju sustav pobudi s $u[n]$ u $n = -\infty$ tada će odziv $y[n]$ ovisiti isključivo o pobudi

Akumulator – primjer sustava prvog reda

- neka je uzlazni signal $u[n]$ za $n \geq 0$

$$y[n] = \sum_{j=-\infty}^{n} u[j] = \sum_{j=-\infty}^{-1} u[j] + \sum_{j=0}^{n} u[j]$$

$$y[n] = y[-1] + \sum_{j=0}^{n} u[j] \quad \text{za} \quad n \geq 0$$

- u gornjem izrazu $\mathbf{y}[-1]$ predstavlja početni uvjet

Primjer iz ekonomije

Australian National University
Department of Economics
Faculty of Economics and Commerce

Mathematical Techniques for Advanced Economic Analysis.

Primjer iz ekonomije

February 2002

(For handing in by 4pm, Thursday 19 February and discussion in the tutorial to follow that day. To plan your work, recall that the final examination will be on the morning of Friday 22 February)

7. Difference and differential equations and dynamic optimisation

1. A closed economy has GDP, *Yt* = *Ct* + *It* + *Gt*, where the consumption function is *Ct* = 0.6 *Yt*, government spending, *Gt*, is exogenous and constant, and investment, *It*, depends on both a long-term trend growth rate, *g*, and the most recent change in GDP, *It* = (1 + *g*)*t* + 0.2 (*Yt*-1 – *Yt*-2). Consider, first, the case in which the long term growth rate of investment is *g*= 0.

(a) Formulate this problem as a difference equation in *Yt* and classify the equation.
(b) Calculate the steady state GDP level.
(c) Solve the homogeneous form to determine whether the economy would be locally stable around the steady state and whether its path would be oscillatory or convergent.
(d) Derive a particular solution for the case where *g*=0.05 and assemble the general solution in this case; then describe its behaviour through time.

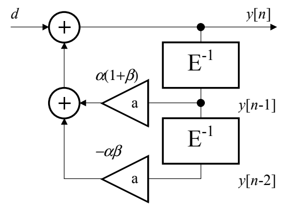
Primjer diskretnog sustava drugog reda

- *Primjer:* model nacionalnog bruto dohotka (Paul A. Samuelson)
  - $y[n]$ – bruto dohodak na kraju n–te godine,
  - $p[n]$ – potrošnja – kupovina dobara,
  - $i[n]$ – investicije – kupovina proizvodnih sredstava,
  - $d[n]$ – troškovi državne uprave,
  - $y[n] = p[n] + i[n] + d[n]$.
- Ustanovljen je slijedeći odnos između navedenih veličina:
  - $p[n] = \alpha \cdot y[n-1]$,
  - $i[n] = \beta \cdot \alpha \cdot (y[n-1] - y[n-2])$,
  - $d[n] = d$.

Primjer diskretnog sustava drugog reda

- Uvršteno u sumu daje:

$$y[n] = \alpha(1+\beta)\, y[n-1] + \alpha\beta\, y[n-2] + d$$



Klasifikacija vremenski diskretnih sustava

- linearni sustavi
- vremenski stalni (invarijantni) sustavi
- kauzalni sustavi
- stabilni sustavi

Linearni diskretni sustavi

- ako je $y_1[n] = H(u_1[n])$
  i $y_2[n] = H(u_2[n])$

  mirni diskretni sustav je linearan ako uz:

  $$u[n] = \alpha\, u_1[n] + \beta\, u_2[n]$$

  vrijedi

  $$y[n] = H(\alpha\, u_1[n] + \beta\, u_2[n]) =$$
  $$= \alpha\, H(u_1[n]) + \beta\, H(u_2[n]) = \alpha\, y_1[n] + \beta\, y_2[n]$$

  za svaki α, β, $u_1[n]$, $u_2[n]$

Primjer

- razmotrimo primjer akumulatora pobuđenog u $n = -\infty$

  $y_1[n] = \sum_{j=-\infty}^{n} u_1[j]$ i $y_2[n] = \sum_{j=-\infty}^{n} u_2[j]$

  a za ulaz $u[n] = \alpha u_1[n] + \beta u_2[n]$

  vrijedi $y[n] = \sum_{j=-\infty}^{n} \left(\alpha u_1[n] + \beta u_2[n]\right)$

  $$= \alpha \sum_{j=-\infty}^{n} u_1[n] + \beta \sum_{j=-\infty}^{n} u_2[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$$

- dakle, radi se o linearnom sustavu

Primjer

- razmotrimo primjer akumulatora pobuđenog u $n = 0$

$$y_1[n] = y_1[-1] + \sum_{j=0}^{n} u_1[j] \quad \text{i} \quad y_2[n] = y_2[-1] + \sum_{j=0}^{n} u_2[j]$$

a za ulaz $u[n] = \alpha u_1[n] + \beta u_2[n]$

vrijedi $y[n] = y[-1] + \sum_{j=0}^{n} (\alpha u_1[n] + \beta u_2[n])$

Primjer

- S druge strane treba biti:

$$\begin{aligned} &\alpha y_1[n] + \beta y_2[n] \\ &= \alpha\left(y_1[-1] + \sum_{j=0}^{n} u_1[j]\right) + \beta\left(y_2[-1] + \sum_{j=0}^{n} u_2[j]\right) \\ &= (\alpha y_1[-1] + \beta y_2[-1]) + \left(\alpha \sum_{j=0}^{n} u_1[j] + \beta \sum_{j=0}^{n} u_2[j]\right) \end{aligned}$$

Primjer

- vrijedi

$$y[n] = (\alpha y_1[n] + \beta y_2[n])$$

ako je

$$y[-1] = (\alpha y_1[-1] + \beta y_2[-1])$$

- to će biti zadovoljeno za miran sustav tj. početni uvjeti = 0
- u suprotnom je sustav nelinearan

Vremenski invarijantni diskretni sustavi

- diskretni sustav vremenski je invarijantan ako vrijedi

$$y[n] = \mathrm{H}(u[n])$$

implicira

$$y[n, n_0] = \mathrm{H}(u[n - n_0]) = y[n - n_0]$$

Primjer

- zadan je sustav opisan jednadžbom diferencija (sustav se naziva i “diferencijator”)

$$y[n] = \mathrm{H}(u[n]) = u[n] - u[n - 1] \quad (*)$$

zakasnimo li ulazni niz za n_0 uzoraka odziv će biti

$$y[n, n_0] = u[n - n_0] - u[n - n_0 - 1]$$

Primjer

- ako pak zakasnimo izlazni niz $y[n]$ za n_0 uzoraka dobiti ćemo prema jednadžbi (*)

$$y[n - n_0] = \mathrm{H}(u[n - n_0]) = u[n - n_0] - u[n - n_0 - 1]$$

- očito je da je

$$y[n, n_0] = y[n - n_0]$$

pa se radi o vremenski stalnom sustavu

Primjer 2

- razmatra se sustav

$$y[n] = \mathrm{H}(u[n]) = n\, u[n]$$

odziv na $u[n - n_0]$ je

$$y[n, n_0] = n\, u[n - n_0]$$

ako pak zakasnimo izlazni niz za n_0 koraka

$$\begin{aligned} y[n - n_0] &= (n - n_0)\, u[n - n_0] \\ &= n\, u[n - n_0] - n_0 u[n - n_0] \end{aligned}$$

sustav je vremenski varijantan jer je

$$y[n, n_0] \neq y[n - n_0]$$

Kauzalni - nekauzalni diskretni sustavi

- Diskretni sustav se naziva kauzalnim ako odziv sustava $y[n]$ ovisi samo o trenutnim i prošlim vrijednostima ($u[n]$, $u[n - 1]$, $u[n - 2]$, …) a ne o ovisi o budućim ($u[n + 1]$, $u[n + 2]$, $u[n + 3]$, …). prema tome odziv sustava zadovoljava jednadžbu:

$$y[n] = \mathrm{F}(u[n], u[n - 1], u[n - 2], \ldots)$$

Primjeri

- primjeri kauzalnih sustava:

$$y[n] = u[n - 1] - u[n - 2]$$

$$y[n] = \alpha\, u[n]$$

- primjeri nekauzalnih sustava:

$$y[n] = u[n] + 3u[n + 6]$$

$$y[n] = u[n^2]$$

$$y[n] = u[2n]$$

Stabilni - nestabilni diskretni sustavi

- postoje različite definicije stabilnosti
- ovdje razmatramo BIBO stabilnost (bounded-input, bounded-output stability)
- Sustav je BIBO stabilan ako je za omeđeni ulazni niz $u[n]$,

$$|u[n]| \le B_u \text{ za sve vrijednosti } n$$

izlazni niz također omeđen

$$|y[n]| \le B_y \text{ za sve vrijednosti } n$$

Primjer stabilnog sustava

- "M-point moving average system" je BIBO stabilan jer iz:

$$y[n] = \frac{1}{M}\sum_{j=0}^{M-1} u[n-j]$$

za omeđeni ulazni niz $|u[n]| \le B_u$ slijedi

$$|y[n]| = \left|\frac{1}{M}\sum_{j=0}^{M-1} u[n-j]\right| \le \frac{1}{M}\sum_{j=0}^{M-1}|u[n-j]| \le \frac{1}{M}(MB_u) \le B_u$$