Signali i sustavi

Z - transformacija

Z - transformacija

Linearni, vremenski diskretan sustav je opisan jednadžbom diferencija

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + ... + a_N y[n-N] =$$
$$= b_0 u[n] + b_1 u[n-1] + b_2 u[n-2] + ... + b_M u[n-M]$$

za pobudu oblika $u[n]=Uz^n$ partikularno rješenje je $y_p[n] = Yz^n$

Uvrštenjem dobivamo

$$(a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + ... + a_N z^{-N}) Y z^n =$$
$$= (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + ... + b_M z^{-M}) U z^n$$

Z - transformacija

$$A(z)\, Y z^n = B(z)\, U z^n$$

kompleksna amplituda odziva je tada

$$Y = \frac{B(z)}{A(z)} U = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}} U = H(z) U$$

$$y_p[n] = UH(z) z^n$$

$H(z)$ je prijenosna funkcija

Z transformacija - nastavak

Odziv $y[n]$ se može dobiti i konvolucijskom sumacijom ako je poznat jedinični odziv $h[n]$

$$y[n] = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h[j] u[n-j]$$

Za $u[n] = Uz^n$

$$y[n] = U \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h[j] z^{n-j}$$

Izjednačavanjem rješenja slijedi

$$H(z) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h[j] z^{-j}$$

Z transformacija - nastavak

frekvencijsku karakteristiku dobijemo za $z=e^{j\omega}$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n}$$

prepoznajemo Fourierov red, pa vrijedi

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$H(e^{j\omega}) = F\{h[n]\}$ Fourierova transformacija niza $\{h[n]\}$

$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = Z\{x[n]\}$ Z - transformacija niza $\{x[n]\}$

Z transformacija - nastavak

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = Z\{x[n]\}$$

Za opći kompleksni broj $z=re^{j\omega}$

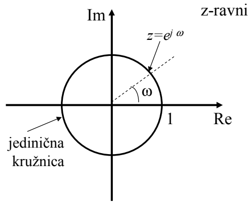
$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] (re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x[n] r^{-n}) e^{-j\omega n}$$

Fourierova transformacija niza $\{x[n]r^{-n}\}$

Z transformacija - nastavak

Za r = 1 ⇒ $F\{x[n]\} = X(e^{j\omega})$

dakle, Z – transformacija se reducira na Fourierovu transformaciju na konturi u kompleksnoj ravnini koju nazivamo jedinična kružnica



Z transformacija - nastavak

Definiramo područje konvergencije Z – transformacije (*region of convergence – ROC)* kao područje za z u kojima Z – transformacija konvergira

Ako ROC, Z – transformacije, uključuje i jediničnu kružnicu tada konvergira i Fourierova transformacija istoga niza.

Primjer transformacije niza $x[n] = a^n s[n]$

Područje konvergencije Z - transformacije

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n s[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

Da bi $X(z)$ konvergirao mora biti $\sum_{n=0}^{\infty} \left|az^{-1}\right|^n < \infty$

to će biti za: $\left|az^{-1}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z| > |a|$

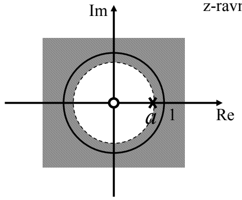
Tada je:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \quad \text{za} \quad |z| > |a|$$

Područje konvergencije Z- transformacije

Z – transformacija je racionalna funkcija

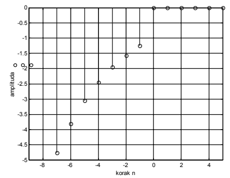
Za ovaj primjer ima jednu *nulu* u z=0 i jedan *pol* u $z=a$



Za $|a| > 1$ ROC ne uključuje jediničnu kružnicu i za tu vrijednost a Fourierova transformacija niza $a^n s[n]$ ne konvergira

Područje konvergencije Z- transformacije

Promotrimo niz: $x[n] = -a^n s[-n-1] \qquad a = 0{,}75 < 1$



Područje konvergencije Z- transformacije

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n s[-n-1] z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1} z)^n$$

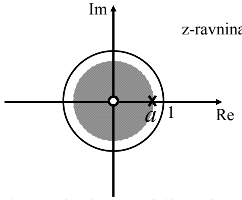
ako je $\left|a^{-1} z\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < |a|$

tada gornja suma konvergira i vrijedi:

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1} z} = \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

Područje konvergencije Z- transformacije

Na slici područje konvergencije, pol i nula



Usporedbom dva primjera zaključujemo da su algebarski izrazi za $X(z)$, kao i pol i nula identični i jedina je razlika u području konvergencije $\Rightarrow$ treba voditi računa o njemu

Inverzna Z - transformacija

Inverziju dobijemo na temelju izraza za Fourierove koeficijente

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(re^{j\omega}) \left(re^{j\omega}\right)^n d\omega = \left| \begin{array}{l} re^{j\omega} = z \\ dz = jre^{j\omega} d\omega \end{array} \quad d\omega = \frac{dz}{jz} \right|$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz$$

opći izraz za inverznu Z transformaciju

Konvergencija Z transformacije

Za kauzalne signale $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$ jednostrana Z transformacija

Ako niz $\{x[n]\}$ zadovoljava slijedeće uvjete:

1. $|x[n]| < \infty$ za sve n
2. postoje pozitivni brojevi A, r i K takvi da vrijedi

$|x[n]| \le Ar^n$ za sve $n > K$

tada jednostrana Z transformacija $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$

konvergira apsolutno za svaki z sa svojstvom $|z| = \zeta > r$.

Z - transformacija - primjeri

$$Z\{\delta[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = 1 \qquad , \zeta_a = 0$$

$$Z\{s[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} s[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n = \frac{1}{1 - z^{-1}} \qquad , \zeta_a = 1$$

$$Z\{a^n\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{a}\right)^{-1}} = \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z-a}, |z| > a$$

Z - transformacija - svojstva

<u>linearnost</u> Z $\{ax[n] + by[n]\} = a\,X(z) + bY(z)$

<u>pomak unaprijed za *j*-koraka</u>

$$Z\{x[n+j]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n+j] z^{-n} = \left| n + j = l \right| = \sum_{l=j}^{\infty} x[l] z^{-l+j} =$$

$$= z^j \sum_{l=j}^{\infty} x[l] z^{-l} = z^j \left[X(z) - \sum_{l=0}^{j-1} x[l] z^{-l} \right]$$

za $j = 1$ Z $\{x[n+1]\} = z\,X(z) - zx(0)$

Z - transformacija - svojstva

<u>kašnjenje za *j*-koraka</u>

$$Z\{x[n-j]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n-j] z^{-n} \quad \left| n - j = l \right| \quad \sum_{l=-j}^{\infty} x(l) z^{-l-j} =$$

$$= z^{-j} \sum_{l=-j}^{\infty} x[l] z^{-l} = z^{-j} \left(X(z) + \sum_{l=-j}^{-1} x[l] z^{-l} \right)$$

za $n = 1$ Z $\{x[n-1]\} = z^{-1} \{X(z) + x[-1]z\} = z^{-1} X(z) + x[-1]$

Z - transformacija - svojstva

konvolucijska sumacija kauzalnih nizova

$$X(z) = Z\{x[n]\} = Z\{u[n]*h[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{i=0}^{n} u[i]h[n-i]\right\} z^{-n}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} u[i] \sum_{n=0}^{\infty} h[n-i] z^{-n} \quad = |n-i=j| =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} u(i) \sum_{j=-i}^{\infty} h(j) z^{-(i+j)} \quad = \sum_{i=0}^{\infty} u(i) z^{-i} \sum_{j=0}^{\infty} h(j) z^{-j}$$

$$= U(z)H(z)$$

jer je $h(j) = 0$ za $j < 0$

Z - transformacija - svojstva

multiplikacija s a^n $\quad y[n] = a^n x[n]$

$$Z\{y[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

multiplikacija sa $e^{j\omega n}$ (frekvencijski pomak) $\quad y[n] = x[n]\, e^{j\omega n}$

$$Z\{y[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] e^{j\omega n} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\left(\frac{z}{e^{j\omega}}\right)^{-n}$$

Z - transformacija - svojstva

multiplikacija s n

$$Z\{nx[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} nx[n] z^{-n} \quad = z \sum_{n=0}^{\infty} x[n] n z^{-n-1} =$$

$$= z \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\left(-\frac{d}{dz} z^{-n}\right) \quad = -z \frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}\right) =$$

$$= -z \frac{d}{dz} X(z)$$

multiplikacija s n^j $\quad Z\{n^j x[n]\} = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^j X(z)$

Inverzna Z - transformacija 1. razvoj u red

$$Y(z) = y[0] + y[1]z^{-1} + y[2]z^{-2} + \ldots$$

razvoj u McLaurentov red oko točke $z^{-1} = 0$ $\quad y[n] = \frac{1}{n!} \frac{d^n Y(z^{-1})}{d(z^{-1})^n}\bigg|_{z^{-1}=0}$

Primjer :

$$Y(z) = \frac{2 - 0{,}5z^{-1}}{1 - 0{,}5z^{-1} - 0{,}5z^{-2}} = 2 + 0{,}5z^{-1} + 1{,}25z^{-2} + 0{,}875z^{-3} + \ldots$$

$y[n] = 2\, \delta[n] + 0{,}5\, \delta[n-1] + 1{,}25\, \delta[n-2] + 0{,}875\, \delta[n-3] + \ldots$

$y[n] = 1 + (-0{,}5)^n$ za $n \geq 0$

Inverzna Z - transformacija
2. rastavljanje racionalane funkcije na parcijalne razlomke

$$Z\{a^n\} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A}{z-q_1} + \frac{B}{z-q_2} + \ldots \quad \bigg| \cdot z$$

$$Y(z) = \frac{Az}{z-q_1} + \frac{Bz}{z-q_2} + \ldots$$

$$y[n] = Aq_1^n + Bq_2^n + \ldots$$

Inverzna Z - transformacija
2. rastav racionalne funkcije na parcijalne razlomke - primjer

$$Y(z) = \frac{2z^2 - 0{,}5z}{z^2 - 0{,}5z - 0{,}5}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2z - 0{,}5}{z^2 - 0{,}5z - 0{,}5} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+0{,}5} \quad \bigg| \cdot z$$

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z+0{,}5}$$

u domeni koraka izlazi $\quad y[n] = 1^n + (-0{,}5)^n = 1 + (-0{,}5)^n$

Inverzna Z - transformacija

3. integralom po zatvorenoj krivulji radiusa većeg od radiusa apsolutne konvergencije

$$y(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint Y(z) z^{n-1} dz = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}_i\left[Y(z) z^{n-1}\right]$$

$$\mathrm{Res}_i\left[Y(z) z^{n-1}\right] = \lim_{z \to z_i}\left[Y(z) z^{n-1}(z - z_i)\right]$$

Rješenje jednadžbi diferencija upotrebom Z - transformacije

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = b_0 u[n] + b_1 u[n-1]$$

Iz $\quad Z\{x[n-1]\} = z^{-1}\{X(z) + x[-1]z\} = z^{-1} X(z) + x[-1]$

i iz $\quad Z\{x[n-2]\} = z^{-2} X(z) + x[-1]\, z^{-1} + x[-2]$

$\{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}\,]Y(z) =$

$= \{b_0 + b_1 z^{-1}\}\, U(z) + b_1 u[-1] - a_2 y\,[-2] - (a_1 + a_2 z^{-1})\, y[-1]$

$$Y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} U(z) + E(z)$$

uz početne uvjete jednake nuli $\quad Y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} U(z) = H(z)U(z)$

Rješenje jednadžbi diferencija upotrebom Z - transformacije

$H(z)$ - transfer funkcija vremenski diskretnog sustava

Za pobudu jediničnim uzorkom $\quad u[n] = \delta[n], \quad U(z) = 1$

dobivamo $\quad Y(z) = H(z)$

Transfer funkcija je Z - transformat odziva na pobudu $\{\delta[n]\}$ uz početne uvjete jednake nuli

primjer: Pobuđeni mirni sustav drugog reda

$$y[n]-0.8\sqrt{2}y[n-1]+0.64y[n-2]=u[n]+2u[n-1]$$

$$H(z)=\frac{1+2z^{-1}}{1-0.8\sqrt{2}\cdot z^{-1}+0.64z^{-2}}=\frac{z^2+2z}{z^2-0.8\sqrt{2}\cdot z+0.64}$$

program za rastav na parcijalne razlomke:

```
%program za rastav na parcijalne razlomke
num = input('unesi koeficijente brojnika =');
den = input('unesi koeficijente nazivnika =');
[r,p,k] = residuez(num,den);
disp('residuumi'); disp(r');
disp('polovi'); disp(p');
disp('konstante'); disp(k);
```


primjer: Pobuđeni mirni sustav drugog reda

```
>>parcrazl
unesi koeficijente brojnika =[1 2 0]
unesi koeficijente nazivnika =[1 -.8*sqrt(2) .64]
residuumi
   0.5000 - 2.2678i   0.5000 + 2.2678i

polovi
   0.5657 + 0.5657i   0.5657 - 0.5657i

konstante
```


primjer: Pobuđeni mirni sustav drugog reda

$$u[n]=\delta[n]\Rightarrow U(z)=1$$

$$Y(z)=H(z)\cdot 1=H(z)$$

$$Y(z)=\frac{0.5-2.2678j}{1-(0.5657+0.5657j)z^{-1}}+\frac{0.5+2.2678j}{1-(0.5657-0.5657j)z^{-1}}$$

$$y[n]=(0.5-2.2678j)\cdot(0.5657+0.5657j)^n$$
$$+(0.5+2.2678j)\cdot(0.5657-0.5657j)^n$$

primjer: Pobuđeni mirni sustav drugog reda

$$y[n]=(0.5-2.2678j)\cdot(0.5657+0.5657j)^n$$
$$+(0.5+2.2678j)\cdot(0.5657-0.5657j)^n$$

$$y[n]=2.3223\cdot e^{j1.3538}\cdot(0.8\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}})^n$$
$$+2.3223\cdot e^{-j1.3538}\cdot(0.8\cdot e^{j\frac{\pi}{4}})^n$$

$$y[n]=2\cdot 2.3223\cdot(0.8)^n\cos(\frac{\pi}{4}n-1.3538)\ \text{ za }\ n\geq 0$$