

Signali i sustavi

Vremenski diskretni linearni sustavi

1

Sadržaj

- Impulsni odziv diskretnog sustava
- Konvolucijska sumacija
- Dekonvolucija

2

Impulsni odziv diskretnog sustava

- Specijalni tipovi pobuda
 - Kroneckerov ili delta niz $\{\delta[n]\}$ → jedinični impuls
 - Heavisideov niz $\{s[n]\}$ → stepenica
- Odzivi na ove pobude
 - $\{\delta[n]\} \rightarrow \{h[n]\}$
 - $\{s[n]\} \rightarrow \{g[n]\}$
- Poznavanje ovih odziva može poslužiti za određivanje odziva na bilo koji oblik pobude

3

Impulsni odziv diskretnog sustava

- Određivanje odziva mirnog sustava na jedinični impuls

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + \dots + a_N y[n-N] = b_0 u[n] + b_1 u[n-1] + b_2 u[n-2] + \dots + b_M u[n-M]$$

$$u[n] = \delta[n]; \quad u[n] = 0 \text{ za } n > 0 \text{ pa je } y_p[n] = 0$$

Odziv sustava na pobudu $u[n] = \delta[n]$ nazivamo impulsni odziv

Impulsni odziv je dakle jednak komplementarnom rješenju

4

Impulsni odziv diskretnog sustava

Rješenje je tada linearna kombinacija

$$h[n] = y_v[n] = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n + \dots + C_N q_N^n \text{ za } n \geq 0$$

N je nepoznanica $\{C_i\} \Rightarrow$ potrebno je izračunati N početnih vrijednosti $h[0], h[1], \dots, h[N]$

Uvjeti proizlaze iz jednadžbe diferencija i svojstva δ niza

$$\delta[n-i] = 1, \text{ za } n = i$$

$$\delta[n-i] = 0, \text{ za } n \neq i$$

5

Impulsni odziv diskretnog sustava

Iz jednadžbe diferencija za $u[n] = \delta[n]$ i $n \in [0, N]$ možemo dobiti $N+1$ jednadžbu

$$n=0 \Rightarrow a_0 h[0] + a_1 h[-1] + a_2 h[-2] + \dots + a_N h[-N] = b_0$$

$$n=1 \Rightarrow a_0 h[1] + a_1 h[0] + a_2 h[-1] + \dots + a_N h[1-N] = b_1$$

$$n=2 \Rightarrow a_0 h[2] + a_1 h[1] + a_2 h[0] + \dots + a_N h[2-N] = b_2$$

$$n=N-1 \Rightarrow a_0 h[N-1] + a_1 h[N-2] + a_2 h[N-3] + \dots + a_N h[-1] = b_{N-1}$$

$$n=N \Rightarrow a_0 h[N] + a_1 h[N-1] + a_2 h[N-2] + \dots + a_N h[0] = b_N$$

6

Impulsni odziv diskretnog sustava

Budući je sustav miran, $h[n]=0$, za $n < 0$

$$\begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_N & a_{N-1} & a_{N-2} & \dots & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ h[2] \\ \vdots \\ h[N] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{Ah} = \mathbf{b} \quad \mathbf{h} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Rješenje za $\{h[n]\}$, $n \in [0, N]$ može se dobiti inverzijom matrice \mathbf{A}

7

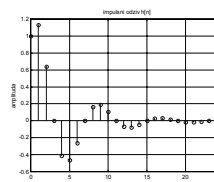
Primjer: određivanje impulsnog odziva

odrediti impulsni odziv sustava (stalni primjer)

$$y[n] - 0.8\sqrt{2}y[n-1] + 0.64y[n-2] = u[n]$$

$$\text{za } u[n] = \delta[n] \text{ \& } y[n-1] = y[n-2] = 0 \rightarrow y[n] = h[n]$$

$$\begin{aligned} h[0] &= 1.0000 \\ h[1] &= 1.1314 \\ h[2] &= 0.6400 \\ h[3] &= 0.0000 \\ h[4] &= -0.4096 \\ h[5] &= -0.4634 \\ h[6] &= -0.2621 \\ h[7] &= 0.0000 \\ h[8] &= 0.1678 \\ h[9] &= 0.1898 \\ h[10] &= 0.1074 \\ h[11] &= 0.0000 \\ h[12] &= -0.0687 \end{aligned}$$



8

Primjer: određivanje impulsnog odziva

odrediti impulsni odziv sustava

$$y[n] - 0.8\sqrt{2}y[n-1] + 0.64y[n-2] = u[n] + 2u[n-1]$$

$$\text{za } u[n] = \delta[n] \text{ \& } y[n-1] = y[n-2] = 0 \rightarrow y[n] = h[n]$$

karakteristična jednadžba je: $1 - 0.8\sqrt{2}q^{-1} + 0.64q^{-2} = 0$

$$\text{korijeni su : } q_{1,2} = 0.8e^{\pm j\frac{\pi}{4}} = 0.4\sqrt{2}(1 \pm j) \text{ ,}$$

impulsni odziv je:

$$h[n] = C_1 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + C_2 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} \text{ za } n \geq 0$$

9

S druge strane izračunvamo $h[0]$ i $h[1]$ kako bi odredili konstante C_1 i C_2

$$y[n] = 0.8\sqrt{2}y[n-1] - 0.64y[n-2] + u[n] + 2u[n-1]$$

$$n=0 \Rightarrow h[0] = 0.8\sqrt{2}h[-1] - 0.64h[-2] + \delta[0] + 2\delta[-1] = 1$$

$$n=1 \Rightarrow h[1] = 0.8\sqrt{2}h[0] - 0.64h[-1] + \delta[1] + 2\delta[0] = 3.1314$$

10

pa vrijedi:

$$\left. \begin{aligned} h[0] &= 1 = C_1 + C_2 \\ h[1] &= 3.1314 = C_1 \cdot 0.8e^{j\frac{\pi}{4}} + C_2 \cdot 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$C_1 = 0.5000 - 2.2678j = 2.3223e^{-j1.3538}$$

$$C_2 = 0.5000 + 2.2678j = 2.3223e^{j1.3538}$$

11

Impulсни odziv je prema tome

$$h[n] = 2.3223e^{j1.3538}(0.8)^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + 2.3223e^{-j1.3538}(0.8)^n e^{-j\frac{\pi}{4}n}, \quad n \geq 0$$

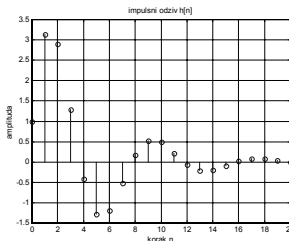
odnosno

$$\begin{aligned} h[n] &= 2.3223(0.8)^n \{e^{j1.3538} e^{j\frac{\pi}{4}n} + e^{-j1.3538} e^{-j\frac{\pi}{4}n}\} \\ &= 2 \cdot 2.3223(0.8)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n - 1.3538\right) \quad \text{za } n \geq 0 \end{aligned}$$

$$h[n] = 4.6446(0.8)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n - 1.3538\right) \quad \text{za } n \geq 0$$

12

h[0] = 1.0000
h[1] = 3.1314
h[2] = 2.9027
h[3] = 1.2800
h[4] = -0.4096
h[5] = -1.2826
h[6] = -1.1890
h[7] = -0.5243
h[8] = 0.1678
h[9] = 0.5254
h[10] = 0.4870
h[11] = 0.2147
h[12] = -0.0687
h[13] = -0.2152
h[14] = -0.1995
h[15] = -0.0880
h[16] = 0.0281



13

razmotrimo sustav opisan jednačbom diferencija:

$$y[n] - 0.8\sqrt{2}y[n-1] + 0.64y[n-2] = u[n-4] + 2u[n-5]$$

$$\text{za } u[n] = \delta[n] \text{ \& } y[n-1] = y[n-2] = 0 \rightarrow y[n] = h[n]$$

prvi uzorak impulsnog odziva $\neq 0$ je za $n \geq 4$
pa je impuslni odziv jednak komplementarnom rješenju za $n \geq 4$

$$h[n] = \begin{cases} 0 & \text{za } n < 4 \\ C_1 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + C_2 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} & \text{za } n \geq 4 \end{cases}$$

14

potrebno je izračunati $h[4]$ i $h[5]$ kako bi odredili konstante C_1 i C_2

$$y[n] = 0.8\sqrt{2}y[n-1] - 0.64y[n-2] + u[n-4] + 2u[n-5]$$

$$n=4 \Rightarrow h[4] = 0.8\sqrt{2}h[3] - 0.64h[2] + \delta[0] + 2\delta[-1] = 1$$

$$n=5 \Rightarrow h[5] = 0.8\sqrt{2}h[4] - 0.64h[3] + \delta[1] + 2\delta[0] = 3.1314$$

15

pa vrijedi

$$\left. \begin{aligned} h[4] &= 1 = C_1 \cdot \left[0.8e^{j\frac{\pi}{4}}\right]^4 + C_2 \cdot \left[0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}\right]^4 \\ h[5] &= 3.1314 = C_1 \cdot \left[0.8e^{j\frac{\pi}{4}}\right]^5 + C_2 \cdot \left[0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}\right]^5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$C_1 = -1.2207 + 5.5365i = 5.6695e^{j1.7878}$$

$$C_2 = -1.2207 - 5.5365i = 5.6695e^{-j1.7878}$$

16

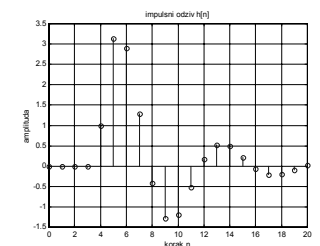
prema tome u ovom primjeru je impulсни odziv:

$$\begin{aligned} h[n] &= 5.5365(0.8)^n \{e^{j1.7878} e^{j\frac{\pi}{4}n} + e^{-j1.7878} e^{-j\frac{\pi}{4}n}\} \\ &= 2 \cdot 5.5365(0.8)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n + 1.7878\right) \quad \text{za } n \geq 4 \end{aligned}$$

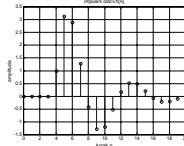
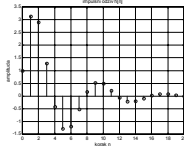
$$h[n] = \begin{cases} 0 & \text{za } n < 4 \\ 11.073(0.8)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n + 1.7878\right) & \text{za } n \geq 4 \end{cases}$$

17

h[0] = 0
h[1] = 0
h[2] = 0
h[3] = 0
h[4] = 1.0000
h[5] = 3.1314
h[6] = 2.9027
h[7] = 1.2800
h[8] = -0.4096
h[9] = -1.2826
h[10] = -1.1890
h[11] = -0.5243
h[12] = 0.1678
h[13] = 0.5254
h[14] = 0.4870
h[15] = 0.2147
h[16] = -0.0687



18



$$y[n] - 0.8\sqrt{2}y[n-1] + 0.64y[n-2] = u[n] + 2u[n-1] \quad y[n] - 0.8\sqrt{2}y[n-1] + 0.64y[n-2] = u[n-4] + 2u[n-5]$$

$h[0] = 1.0000$	$h[0] = 0$
$h[1] = 3.1314$	$h[1] = 0$
$h[2] = 2.9027$	$h[2] = 0$
$h[3] = 1.2800$	$h[3] = 0$
$h[4] = -0.4096$	$h[4] = 1.0000$
$h[5] = -1.2826$	$h[5] = 3.1314$
$h[6] = -1.1890$	$h[6] = 2.9027$
$h[7] = -0.5243$	$h[7] = 1.2800$
$h[8] = 0.1678$	$h[8] = -0.4096$
$h[9] = 0.5254$	$h[9] = -1.2826$
$h[10] = 0.4870$	$h[10] = -1.1890$

19

- Linearni sustav karakteriziran je svojstvom $H(E^{-1})[\alpha \{u_1[n]\} + \beta \{u_2[n]\}] = \alpha H(E^{-1}) \{u_1[n]\} + \beta H(E^{-1}) \{u_2[n]\}$ odnosno za jedinični odziv vrijedi $\{h[n]\} = H(E^{-1}) \{\delta[n]\}; \quad H(E^{-1}) \{c \delta[n]\} = \{ch[n]\}$
- Za vremenski promjenljiv sustav vrijedi $H(E^{-1}) \{\delta[n-i]\} = \{h[n, i]\}$
- Za vremenski nepromjenljiv sustav vrijedi $H(E^{-1}) \{\delta[n-i]\} = \{h[n-i]\}$

20

Pretpostavimo proizvoljni signal oblika $u = \dots u[-1] \{\delta[n+1]\} + u[0] \{\delta[n]\} + u[1] \{\delta[n-1]\} + u[2] \{\delta[n-2]\} + \dots$
 $u[i] \{\delta[n-i]\} \rightarrow u[i] \{h[n-i]\}$
 Odziv na niz u je $y = \dots u[-1] \{h[n+1]\} + u[0] \{h[n]\} + u[1] \{h[n-1]\} + u[2] \{h[n-2]\} + \dots$
 oba se niza mogu napisati kraće u obliku tzv. konvolucijske sumacije

21

$$u = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} u[i] \{\delta[n-i]\} \quad u = u * \delta$$

Za vremenski promjenljiv sustav

$$y = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} u[i] \{h[n, i]\}$$

n -ti uzorak ovog niza dan je s

$$y[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} u[i] h[n, i]$$

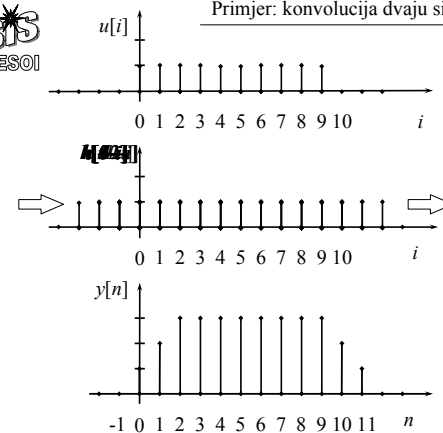
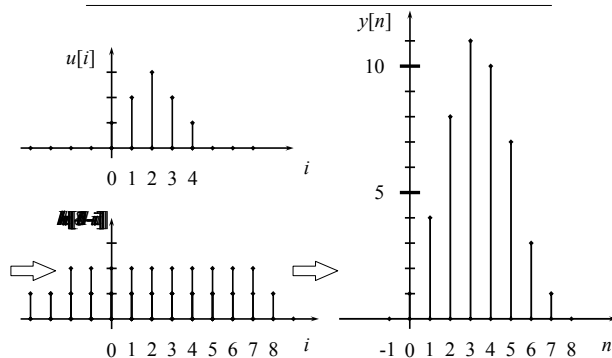
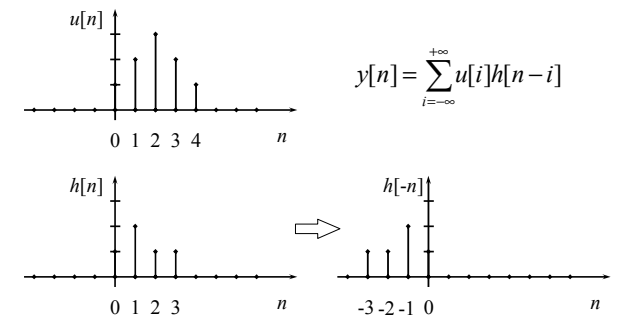
22

Za vremenski stalan sustav je $y = u * h$

$$y[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} u[i] h[n-i] \quad \text{ili} \quad y[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h[i] u[n-i]$$

Konvolucijska sumacija omogućuje određivanje odziva na bilo kakvu pobudu kad je poznat odziv na δ niz

23



- Postupak dobivanja nepoznate pobude $\{u[n]\}$, ako je poznat odziv sustava $\{y[n]\}$

izraz za konvoluciju (diskretni oblik) je

$$y[n] = \sum_{i=0}^n u[n] h[n-i] \quad \text{za } n \geq 0$$

za $n = 0 \Rightarrow y[0] = u[0] h[0] \Rightarrow u[0] = \frac{y[0]}{h[0]}$
 da bi odredili $u[n]$ za $n \geq 1$ konvolucijsku sumaciju pišemo

27

$$y[n] = u[n]h[0] + \sum_{i=0}^{n-1} u[n]h[n-i]$$

odnosno

$$u[n] = \frac{y[n] - \sum_{i=0}^{n-1} u[n]h[n-i]}{h[0]} \quad \text{za } n \geq 1$$

za uzorak $u[n]$ koriste se uzorci $u[0], u[1], \dots u[n-1]$

28

ukoliko je $\{u[n]\} * \{v[n]\} = \{\delta[n]\}$



$$\{v[n]\} = \{u[n]\}^{-1}$$

nizovi su
međusobno
inverzni

29

Ako su poznati $\{u[n]\}$ i $\{y[n]\}$ moguće je istim postupkom odrediti $\{h[n]\}$

$$h[0] = \frac{y[0]}{u[0]}$$

odnosno

$$h[n] = \frac{y[n] - \sum_{i=0}^{n-1} u[n-i]h[i]}{u[0]} \quad \text{za } n \geq 1$$

30

odrediti impulsni odziv sustava kauzalnog sustava
za koji je poznat ulazni niz $\{u[n]\}$ i izlazni niz
 $\{y[n]\}$

$$u[n] = \{2, 1, 2\} \quad \text{i} \quad y[n] = \{4, 6, 8, 5, 2\}$$

$$h[0] = y[0] / u[0] = 2$$

$$h[n] = \frac{y[n] - \sum_{i=0}^{n-1} u[n-i]h[i]}{u[0]} \quad \text{za } n \geq 1$$

$$h[1] = \frac{y[1] - h[0]u[1]}{u[0]} = 2$$

$$h[2] = \frac{y[2] - h[0]u[2] - h[1]u[1]}{u[0]} = 1$$

31

$$h[n] = \frac{y[n] - \sum_{i=0}^{n-1} u[n-i]h[i]}{u[0]} \quad \text{za } n \geq 1$$

$$h[3] = \frac{y[3] - h[0]u[3] - h[1]u[2] - h[2]u[1]}{u[0]} = 0$$

$$h[4] = \frac{y[4] - h[0]u[4] - h[1]u[3] - h[2]u[2] - h[3]u[1]}{u[0]} = 0$$

očito je $h[n]=0$ za $n \geq 3$ pa je

$$h[n] = \{2, 2, 1\}$$

32