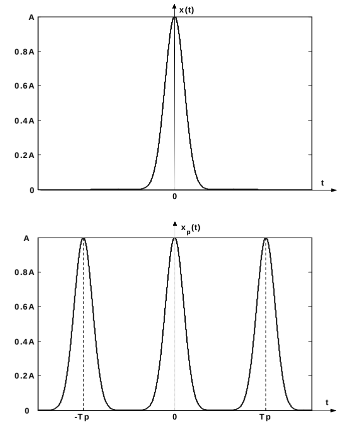
Fourierova transformacija kontinuiranog aperiodičnog signala

Fourierova transformacija kontinuiranog aperiodičnog signala

$x(t)$ aperiodični signal konačnog trajanja

kreiramo periodični signal peiroda T_p periodičnim ponavljanjem signala $x(t)$



Fourierova transformacija kontinuiranog aperiodičnog signala

vrijedi da je: $x(t) = \lim_{T_p \to \infty} x_p(t)$

ova interpretacija kao i prethodni primjer ukazuju da bi spektar $x(t)$ mogli dobiti iz spektra $x_p(t)$ uz $T_p \to \infty$

Fourierova transformacija kontinuiranog aperiodičnog signala

prikaz $x_p(t)$ uz pomoć Fourierovog reda je:

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t} \quad F_0 = \frac{1}{T_p}$$

gdje je

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} x_p(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt$$

Fourierova transformacija kontinuiranog aperiodičnog signala

budući je $x(t) = x_p(t)$ za $-T_p/2 \leq t \leq T_p/2$ možemo pisati:

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} x(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt$$

vrijedi također da je $x(t) = 0$ za $|t| > T_p/2 \Rightarrow$ granice integrala mogu biti zamijenjene s - ∝ odnosno ∝

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt$$

Fourierova transformacija kontinuiranog aperiodičnog signala

Definiramo funkciju $X(F)$ koju nazivamo Fourierovom transformacijom $x(t)$:

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi F t} dt$$

$X(F)$ je funkcija kontinuirane varijable F

$X(F)$ možemo povezati s prije izvedenim c_k na slijedeći način:

Fourierova transformacija kontinuiranog aperiodičnog signala

iz $X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi F t} dt$ i $c_k = \frac{1}{T_p} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt$

$$c_k = \frac{1}{T_p} X(kF_0) \Leftrightarrow T_p c_k = X(kF_0)$$

prema tome Fourierovi koeficijenti c_k su uzorci $X(F)$ uzeti na frekvencijama kF_0 te zatim pomnoženi s F_0 ili sa $1/T_p$

Fourierova transformacija kontinuiranog aperiodičnog signala

Fourierov red za $x_p(t)$ sada možemo pisati

$$x_p(t) = \frac{1}{T_p} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(kF_0) e^{j2\pi k F_0 t} \quad F_0 = \frac{1}{T_p}$$

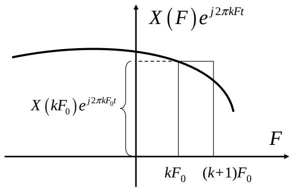
prije je kazano da je $x(t) = \lim_{T \to \infty} x_p(t)$

promotrimo gornji Fourierov red kada $T_p \to \infty$ tj. $F_0 \to 0$

Fourierova transformacija kontinuiranog aperiodičnog signala

pišemo $x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_0 \cdot X\left(kF_0\right) e^{j2\pi kF_0 t}$

interpretirajmo gornju sumaciju grafički



dakle, gornja sumacija predstavlja površinu ispod krivulje $X\left(F\right)e^{j2\pi kFt}$ koja može biti izračunata i pomoću integrala

Fourierova transformacija kontinuiranog aperiodičnog signala

prema tome kada $T_p \to \infty$ tada se $x_p(t)$ reducira na $x(t)$

i slijedi

$$\lim_{T_p \to \infty} x_p(t) = x(t) = \lim_{T_p \to \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(kF_0\right) e^{j2\pi kF_0 t} F_0$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F)\, e^{j2\pi Ft} dF$$

gornji izraz se naziva inverzna Fourierova transformacija

Fourierova transformacija kontinuiranog aperiodičnog signala

konačno pišemo transformacijski par:

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi Ft} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F) e^{j2\pi Ft} dF$$

Fourierova transformacija kontinuiranog aperiodičnog signala

Uobičajeno je Fourirerovu transformaciju prikazati preko kružne frekvencije $\Omega = 2\pi F$, uz $dF = d\Omega / 2\pi \Rightarrow$

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

Fourierova transformacija kontinuiranog aperiodičnog signala

Fourirerova transformacija egzistira ako je signal $x(t)$ konačne energije tj. ako je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)\right|^2 dt < \infty$$

alternativni skup uvjeta za egzistenciju Fourirerove transformacije su i ovdje Dirichletovi uvjeti:

Fourierova transformacija kontinuiranog aperiodičnog signala

Dirichletovi uvjeti za egzistenciju Fourirerove transformacije:

1. Signal $x(t)$ ima konačni broj konačnih diskontinuiteta
2. Signal $x(t)$ ima konačni broj maksimuma i minimuma
3. Signal $x(t)$ je apsolutno integrabilan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)\right| dt < \infty$$

Gustoća spektra energije aperiodičnih vremenski kontinuiranih signala

energija aperiodičnog kontinuiranog signala $x(t)$, čija je Fourierova transformacija $X(F)$ je:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)\right|^2 dt$$

kako je

$$\left|x(t)\right|^2 = x(t) \cdot x^*(t)$$

slijedi:

Gustoća spektra energije aperiodičnih vremenski kontinuiranih signala

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot x^*(t) dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} X^*(F) e^{-j2\pi Ft} dF \right] dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X^*(F) dF \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi Ft} dt \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left|X(F)\right|^2 dF$$

Gustoća spektra energije aperiodičnih vremenski kontinuiranih signala

dakle vrijedi:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|X(F)\right|^2 dF$$

što je Parseval-ova relacija za aperiodične kontinuirane signale konačne energije i izražava princip očuvanja energije u vremenskoj i frekvencijskoj domeni

Gustoća spektra energije aperiodičnih vremenski kontinuiranih signala

spektar signala $X(F)$ općenito je kompleksna funkcija pa je uobičajen njegov prikaz u polarnom obliku

$$X(F) = |X(F)| e^{j\Theta(F)}$$

gdje je $|X(F)|$ amplitudni spektar a $\theta(F)$ fazni spektar

s druge strane integrand $|X(F)|^2$ u prethodnom integralu predstavlja distribuciju energije u signalu kao funkciju frekvencije.

Gustoća spektra energije aperiodičnih vremenski kontinuiranih signala

zato se $S_{xx}(F)$

$$S_{xx} = |X(F)|^2$$

naziva gustoća spektra energije signala $x(t)$

kako je prije pokazano integral $S_{xx}(F)$ preko svih frekvencija daje totalnu energiju signala

$S_{xx}(F)$ ne sadrži informaciju o faznom spektru pa nije moguće rekonstruirati signal opisan s $S_{xx}(F)$

Spektar realnih aperiodičnih vremenski kontinuiranih signala

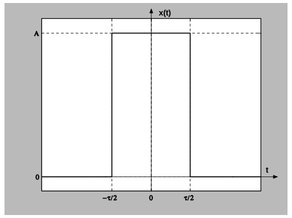
za realni signal $x(t)$ slijedi iz para za Fourierovu transformaciju:

$$|X(-F)| = |X(F)|$$
$$\arg(X(-F)) = -\arg(X(F))$$

Primjer Fourierove transformacije aperiodičnog pravokutnog signala

Zadan je pravokutni signal za koji treba odrediti Fourierovu transformaciju:

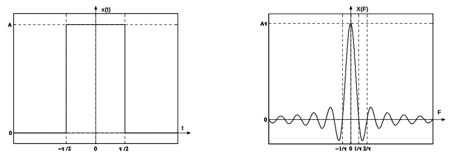
$$x(t) = \begin{cases} A & |t| \le \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases}$$



Primjer Fourierove transformacije aperiodičnog pravokutnog signala

Vremenski kontinuirani signal $x(t)$ je aperiodičan i zadovoljava Dirichletove uvjete pa izračunavamo Fourierovu transformaciju

$$X(F) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ae^{-j2\pi Ft} dt = A\tau \frac{\sin \pi F\tau}{\pi F\tau}$$



Primjer Fourierove transformacije aperiodičnog pravokutnog signala

Očigledno je da je $X(F)$ realna ($x(t)$ je paran) pa je dovoljno crtati samo jedan dijagram.

Koeficijenti Fourierovog reda (linijski spektar) periodičnog pravokutnog signala također su bili oblika sinx/x.

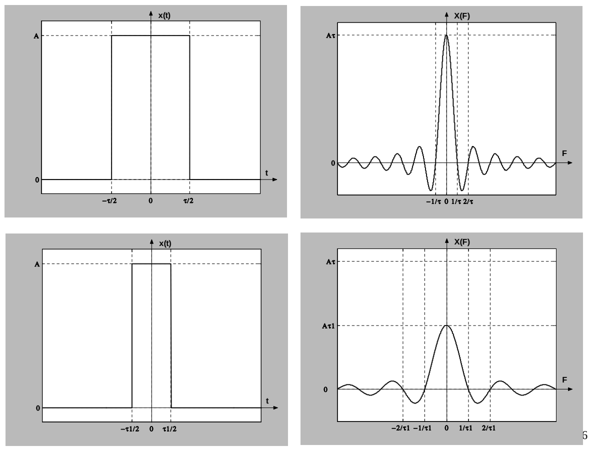
$X(F)$ je zapravo dodirnica linijskog spektra periodičnog signala koji je nastao periodičnim ponavljanjem (s periodom T_p) aperiodičnog signala $x(t)$

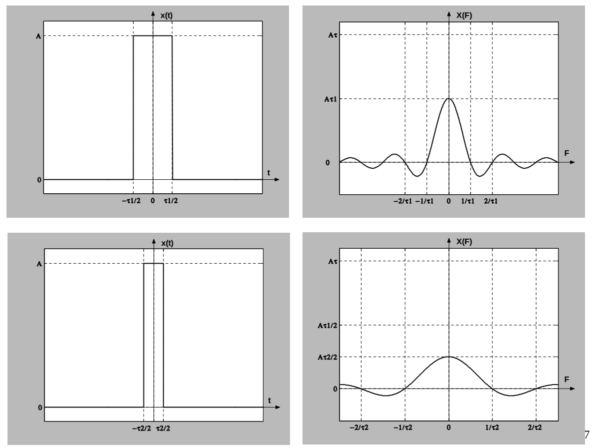
$$X(F) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ae^{-j2\pi Ft} dt = A\tau \frac{\sin \pi F\tau}{\pi F\tau}$$

Primjer Fourierove transformacije aperiodičnog pravokutnog signala

Drugim riječima Fourierovi koeficijenti c_k periodičnog signala $x_p(t)$ su jednostavno uzorci $X(F)$ na frekvencijama $kF_0 = k/T_p$ dakle:

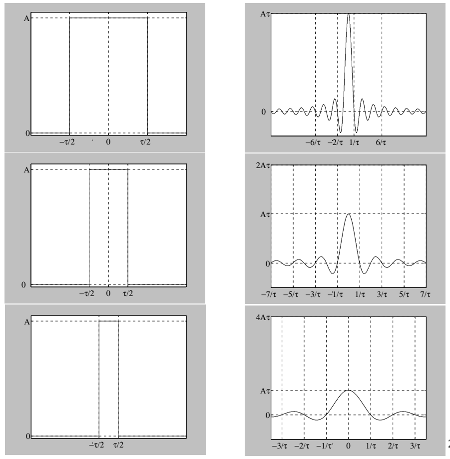
$$c_k = \frac{1}{T_p} X(kF_0) = \frac{1}{T_p} X\left(\frac{k}{T_p}\right)$$

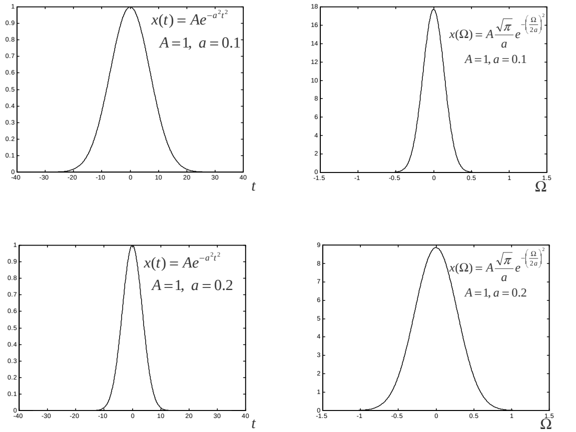




Usporedba Fourierovih transformacija za različite vrijednosti širine aperiodičnog pravokutnog signala

$\Rightarrow$ relacija neodređenosti





Frekvencijska analiza vremenski diskretnih signala

Frekvencijska analiza diskretnih aperiodičnih signala

aperiodični diskretni signal možemo generirati iz kontinuiranog aperiodičnog signala otipkavanjem

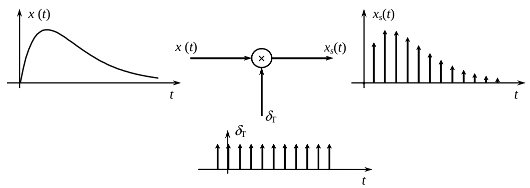
postupak uzimanja uzoraka ili otipkavanja kontinuiranog signala možemo matematički modelirati kao pridruživanje funkciji $x(t)$ niza impulsa, čiji intenzitet je proporcionalan trenutnim vrijednostima kontinuiranog signala

$x_s(t) = S_T\{x(t)\}$

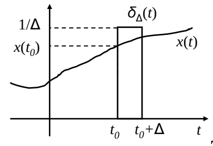
Frekvencijska analiza diskretnih aperiodičnih signala

Možemo to interpretirati kao modulaciju impulsnog niza $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-n\mathrm{T})$ funkcijom $x(t)$, tj.

$$x_s(t) = x(t)\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-n\mathrm{T})$$



Frekvencijska analiza diskretnih aperiodičnih signala



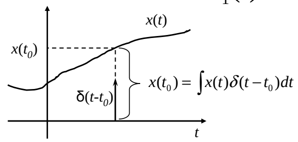
$$x_1(t) = x(t)\delta_\Delta(t)$$

za mali $\Delta \Rightarrow$

$$x_1(t) = x(t)\delta_\Delta(t) \simeq x(t_0)\delta_\Delta(t)$$

za $\Delta \to 0 \Rightarrow$

$$x_1(t) = x(t)\delta(t-t_0) \simeq x(t_0)\delta(t-t_0)$$



Frekvencijska analiza diskretnih aperiodičnih signala

zbog svojstva delta funkcije da vadi vrijednost kontinuirane funkcije $x(t)$ na mjestu diskontinuiteta $t - nT = 0$, tj. $t_n = nT$, može se napisati i u obliku:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

Frekvencijska analiza diskretnih aperiodičnih signala

usporedimo spektre ovih signala

za signal $x(t)$ vrijedi par:

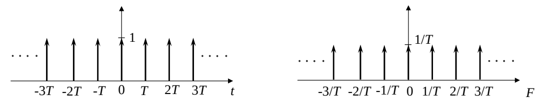
$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi Ft}dt \qquad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F)e^{j2\pi Ft}dF$$

Periodičan niz δ_T nastao ponavljanjem delta funkcije svakih T, kao svaka periodična funkcija se dade predstaviti Fourierovim redom, gdje su Fourierovi koeficijenti dani s:

Frekvencijska analiza diskretnih aperiodičnih signala

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2}\delta(t)e^{-j2\pi kF_s t}dt = \frac{1}{T}, \quad F_s = \frac{1}{T}.$$

F_s je frekvencija otipkavanja



slijedi: $\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j2\pi kF_s t} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi kF_s t}.$

Frekvencijska analiza diskretnih aperiodičnih signala

spektar otipkanog signala $x_s(t)$ dan je s:

$$X_s(F)=\int_{-\infty}^{\infty} x_s(t)e^{-j2\pi Ft}dt \quad =\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\left[\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi kF_s t}\right]e^{-j2\pi Ft}dt$$

zamjenom redoslijeda sumacije i integracije dobivamo:

$$X_s(F)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi(F-kF_s)t}dt$$

integral je spektar signala $x(t)$, ali pomaknut za kF_s, pa izlazi:

$$X_s(F)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(F-kF_s)=F_s\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(F-kF_s)$$

Frekvencijska analiza diskretnih aperiodičnih signala

pokazano je da je spektar otipkanog dakle diskretnog signala periodičan pa Fourierovu transformaciju diskretnog signala $x[n]$ konačne energije možemo pisati:

$$X(\omega)=X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

Frekvencijska analiza diskretnih aperiodičnih signala

važno je primijetiti da je $X(e^{j\omega})$ periodičan s periodom 2π

$$X(\omega+2\pi k)=X(e^{j(\omega+2\pi k)})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j(\omega+2\pi k)n}=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}e^{-j2\pi kn}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}=X(e^{j\omega})=X(\omega)$$

ovo je posljedica činjenice da je za diskretni signal frekvencijsko područje limitirano samo na interval $(-\pi, \pi)$ ili $(0, 2\pi)$ i da su sve frekvencije izvan tog intervala ekvivalentne frekvencijama unutar intervala

Frekvencijska analiza diskretnih aperiodičnih signala

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

gornji izraz predstavlja prikaz $X(e^{j\omega})$ uz pomoć Foureirovog reda pa uzorci $x[n]$ predstavljaju Foureierove koeficijente

izračunavanje $x[n]$ iz $X(e^{j\omega})$

Fourierova transformacija diskretnih aperiodičnih signala

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

izračunavanje $x[n]$ iz $X(e^{j\omega})$ započinje množenjem obje strane s $e^{j\omega m}$ i integracijom preko intervala $(-\pi, \pi)$:

$$\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega m}d\omega=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}\right]e^{j\omega m}d\omega$$

Fourierova transformacija diskretnih aperiodičnih signala

$$\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega m}d\omega=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}\right]e^{j\omega m}d\omega$$

desna strana se preuređuje i izračunava:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\int_{-\pi}^{\pi}e^{j\omega(m-n)}d\omega=\begin{cases}2\pi x[m] & m=n\\ 0 & m\neq n\end{cases}$$

pa je konačno:

$$x[m]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega m}d\omega$$

Fourierova transformacija diskretnih aperiodičnih signala

zaključno, par za Fourierovu transformaciju aperiodičnih diskretnih signala je

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

Gustoća spektra energije aperiodičnih vremenski diskretnih signala

energija aperiodičnog diskretnog signala $x[n]$, čija je Fourierova transformacija $X(e^{j\omega})$, je:

$$E_x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]\right|^2$$

uz

$$\left|x[n]\right|^2=x[n]\cdot x^*[n]$$

izrazimo energiju E_x pomoću spektralne karakteristike $X(e^{j\omega})$

Gustoća spektra energije aperiodičnih vremenski diskretnih signala

$$E_x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\cdot x^*[n]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X^*(e^{j\omega})e^{-j\omega n}d\omega\right]$$

$$E_x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X^*(e^{j\omega})\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}\right]d\omega$$

$$E_x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X^*(e^{j\omega})X(e^{j\omega})d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X(e^{j\omega})\right|^2d\omega$$

Gustoća spektra energije aperiodičnih vremenski diskretnih signala

dakle vrijedi:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x[n]\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega$$

što je Parseval-ova relacija za aperidodične diskretne signala konačne energije

Gustoća spektra energije aperiodičnih vremenski diskretnih signala

kao i u slučaju aperiodskih kontinuiranih signala i ovdje je uobičajen prikaz spektra u polarnom obliku:

$$X(e^{j\omega}) = \left|X(e^{j\omega})\right| e^{j\Theta(\omega)}$$

a

$$S_{xx}(e^{j\omega}) = \left|X(e^{j\omega})\right|^2$$

predstavlja raspodjelu energije kao funkciju frekvencije i naziva se gustoća spektra energije

Spektar realnih aperiodičnih vremenski diskretnih signala

nadalje za realni signal vrijedi:

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$$

čemu je ekvivalentno

$$\left|X(e^{j\omega})\right| = \left|X(e^{-j\omega})\right| \quad \text{i} \quad \arg X(e^{j\omega}) = -\arg X(e^{-j\omega})$$

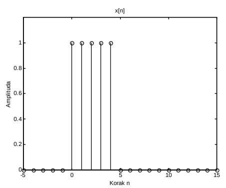
odnosno

$$S_{xx}(e^{-j\omega}) = S_{xx}(e^{j\omega})$$

Primjer Fourierove transformacije aperiodičnog pravokutnog signala

Zadan je pravokutni signal za koji treba odrediti Fourierovu transformaciju:

$$x[n] = \begin{cases} A & 0 \le n \le L-1 \\ 0 & \text{za ostale } n \end{cases}$$



L=5

A=1

Primjer Fourierove transformacije aperiodičnog pravokutnog signala

Fourierova transformacija ovog signala je:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{L-1} Ae^{-j\omega n}$$

$$= A\frac{1-e^{-j\omega L}}{1-e^{-j\omega}} = Ae^{-j(\omega/2)(L-1)}\,\frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)}$$

Primjer Fourierove transformacije aperiodičnog pravokutnog signala

Amplitudni spektar je:

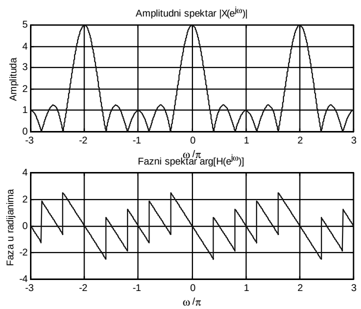
$$\left|X(e^{j\omega})\right| = \begin{cases} \left|A\right| L & \omega = 0 \\ \left|A\right|\left|\dfrac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)}\right| & \text{za ostale } \omega \end{cases}$$

fazni spektar je:

$$\arg\left|X(e^{j\omega})\right| = \arg A - \frac{\omega}{2}(L-1) + \arg\frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)}$$

Napomena: faza realne veličine je *nula* kada je ona pozitivna a π kada je veličina negativna

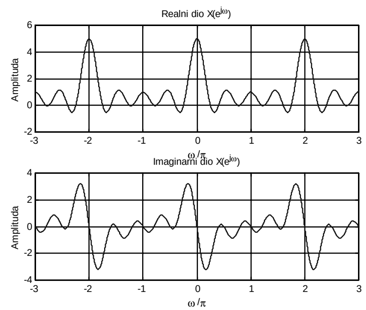
Primjer Fourierove transformacije aperiodičnog pravokutnog signala



L=5

A=1

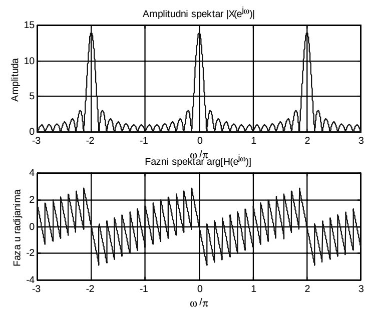
Primjer Fourierove transformacije aperiodičnog pravokutnog signala



L=5

A=1

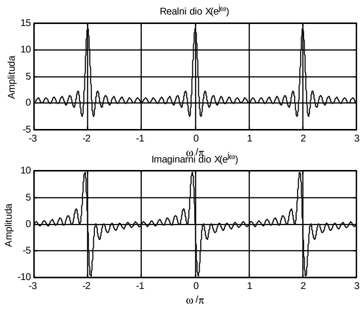
Primjer Fourierove transformacije aperiodičnog pravokutnog signala



L=14

A=1

Primjer Fourierove transformacije aperiodičnog pravokutnog signala



L=14

Veza Fourierove transformacije i z - transforamcije

Z – transformacija je definirana kao

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \qquad \text{ROC: } r_2 < |z| < r_1$$

kompleksna varijabla z izražena u polarnom obliku:

$$z = re^{j\omega}$$

gdje je

$$r = |z| \qquad \& \qquad \omega = \arg(z)$$

Veza Fourierove transformacije i z - transforamcije

Unutar područja konvergencije $X(z)$ možemo supstituirati $z=re^{j\omega}$ u izraz za z – transformaciju pa slijedi:

$$X(z)\big|_{z=re^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] r^{-n} e^{-j\omega n}$$

ovaj izraz možemo interpretirati kao Fourierovu transformaciju niza $x[n]r^{-n}$

alternativno ako $X(z)$ konvergira za $|z|= 1$ tada je

$$X(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \equiv X(e^{j\omega})$$

Dakle Fourierovu transformaciju možemo interpretirati kao z - transformaciju izračunatu na jediničnoj kružnici

Fourierova transformacija diskretnih periodičnih signala

Fourierova transformacija diskretnih periodičnih signala

Fourierov red za kontinuirani periodični signal $x(t)$, perioda T_p, je:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}$$

signal $x(t)$ može biti prikazan s beskonačnim brojem frekvencijskih komponenti

spektar je diskretan pri čemu je razmak između susjednih komponenti $1/T_p$

Fourierova transformacija diskretnih periodičnih signala

diskretni periodični signal $x[n]$ ima periodični spektar (zbog diskretnosti signala u vremenskoj domeni) koji se ponavlja svakih $2\pi \Rightarrow$ područje frekvencija $(-\pi, \pi)$ ili $(0,2\pi)$

diskretni periodični signal $x[n]$ ima diskretan spektar (zbog periodičnosti signala u vremenskoj domeni) pri čemu je razmak između susjednih frekvencijskih komponenti $2\pi/N$ radijana $\Rightarrow$ Fourierov red za periodični diskretni signal sadržavati će najviše N frekvencijskih komponenti

Fourierova transformacija diskretnih periodičnih signala

Za diskretni periodični signal $x[n]$ perioda N vrijedi:

$$x[n] = x[n+N] \quad \text{za svaki} \quad n$$

Fourierov red periodičnog signala sadrži N harmonički vezanih kompleksnih eksponencijalnih funkcija:

$$e^{j2\pi kn/N} \quad k = 0,\ 1,\ ....,\ N-1$$

Fourierova transformacija diskretnih periodičnih signala

Fourierov red za diskretni periodični signal:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N} \quad n = 0,\ 1,\ ....,\ N-1$$

izvod izraza za Foureriove koeficijente c_k:

obje strane se množe s eksponencijalom $e^{-j2\pi l n/N}$ a zatim se produkti zbrajaju od n=0 do n=N-1

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi ln/N} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi(k-l)n/N}$$

Fourierova transformacija diskretnih periodičnih signala

zamijenimo redoslijed sumacije:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi ln/N} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi(k-l)n/N}$$

uz sumaciju

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi(k-l)n/N} = \begin{cases} N & k-l = 0,\ \pm N,\ \pm 2N,\ ..... \\ 0 & \text{za ostale} \end{cases}$$

desna se strana reducira na Nc_l pa slijedi:

Fourierova transformacija diskretnih periodičnih signala

$$c_l = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi ln/N} \quad l = 0,\ 1,\ ....,\ N-1$$

što je izraz za Fourierove koeficijente signala $x[n]$

Fourierova transformacija diskretnih periodičnih signala

zaključno, par za Fourierovu transformaciju periodičnih diskretnih signala je

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N} \quad k = 0,\ 1,\ ....,\ N-1$$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N} \quad n = 0,\ 1,\ ....,N-1$$

Fourierova transformacija diskretnih periodičnih signala

jednadžba $x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N} \quad n = 0,\ 1,\ ....,N-1$

se u engleskoj terminologiji naziva *discrete-time Fourier series* (*DTFS*)

Fourierovi koeficijenti c_k, k =0, 1, 2, ...,N-1, omogućavaju prikaz $x[n]$ u frekvencijskoj domeni, tako da c_k predstavljaju amplitudu i fazu vezanu uz frekvencijske komponente $e^{j2\pi kn/N} = e^{j\omega_k n}$

gdje je $\omega_k = 2\pi k / N$

Fourierova transformacija diskretnih periodičnih signala

slijedi važno svojstvo periodičnosti c_k

$$c_{k+N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi(k+N)n/N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N} = c_k$$

prema tome $\{c_k\}$ je periodični niz s osnovnim periodom N

prema tome:

Fourierova transformacija diskretnih periodičnih signala

spektar signala $x[n]$, koji je periodičan s periodom N, je periodičan niz s periodom $N \Rightarrow$ bilo kojih N susjednih uzoraka signala ili njegova spektra su dovoljni za potpuni opis signala u vremenskoj ili frekvencijskoj domeni

Gustoća spektra snage vremenski diskretnih periodičnih signala

za periodični diskretni signal $x[n]$, perioda N, srednja snaga je definirana kao:

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$$

i ovdje će srednja snaga biti prikazana pomoću Fourierovih koeficijenata

Gustoća spektra snage vremenski diskretnih periodičnih signala

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cdot x^*[n] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\left(\sum_{k=0}^{N-1} c_k^* e^{-j2\pi kn/N}\right) =$$

$$P_x = \sum_{k=0}^{N-1} c_k^* \left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}\right]$$

$$P_x = \sum_{k=0}^{N-1} c_k^* \cdot c_k = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2$$

pa finalno zaključujemo:

Gustoća spektra snage vremenski diskretnih periodičnih signala

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2$$

predstavlja Parseval-ovu relaciju za diskretne periodične signale

Parseval-ova relacija pokazuje da je za diskretne periodične signale srednja snaga signala jednaka sumi snaga svake pojedine frekvencijske komponente

niz $|c_k|^2$ za k=0, 1, ... , N-1 predstavlja distribuciju snage kao funkciju frekvencije i naziva se gustoća spektra snage

Spektar realnog periodičnog diskretnog signala

za realni periodični $x[n]$ koeficijenti Fourierovog reda $\{c_k\}$zadovoljavaju slijedeći uvjet:

$$c_{-k} = c_k^*$$

iz čega slijedi:

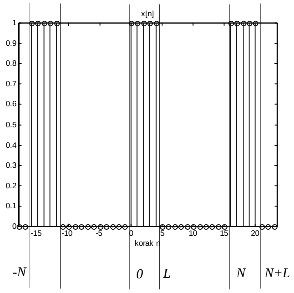
$$|c_{-k}| = |c_k| \ \text{ i } \ \arg(c_k) = -\arg(c_{-k})$$

a zbog $c_k = c_{k+N}$ slijedi

$$|c_k| = |c_{N-k}| \ \text{ i } \ \arg(c_k) = -\arg(c_{N-k})$$

Primjer Fourierove transformacije periodičnog pravokutnog signala

zadan je periodični pravokutni diskretni signal kao na slici:



L=5
N=16

Primjer Fourierove transformacije periodičnog pravokutnog signala

izračunavaju se c_k

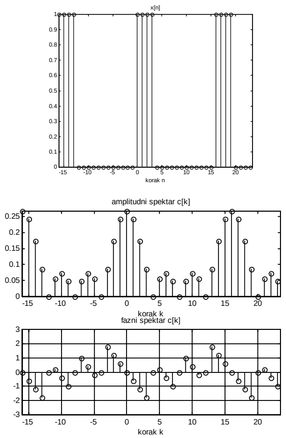
$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{L-1} A e^{-j2\pi kn/N} \quad k = 0,1,\ldots,N-1$$

$$c_k = \frac{A}{N}\sum_{n=0}^{L-1}\left(e^{-j2\pi k/N}\right)^n = \begin{cases} \dfrac{AL}{N} & k=0 \\ \dfrac{A}{N}\dfrac{1-e^{-j2\pi kL/N}}{1-e^{-j2\pi k/N}} & k = 1,2,\ldots,N-1 \end{cases}$$

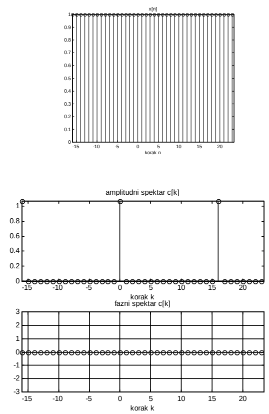
Primjer Fourierove transformacije periodičnog pravokutnog signala

$$c_k = \begin{cases} \dfrac{AL}{N} & k = 0,\ \pm N,\ \pm 2N,\ldots.. \\ \dfrac{A}{N} e^{j\pi k(L-1)/N}\dfrac{\sin(\pi kL/N)}{\sin(\pi k/N)} & \text{za ostale } k \end{cases}$$

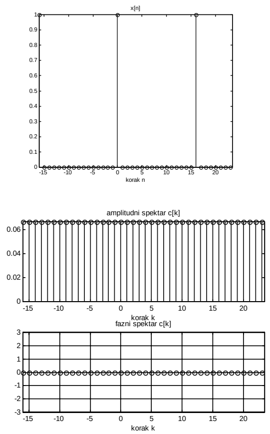
primjeri:



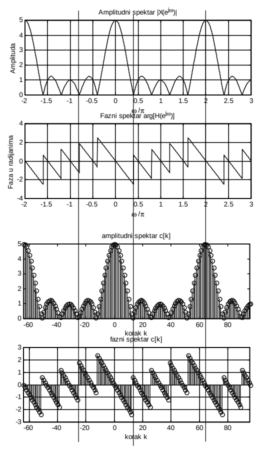
L=4
N=16
A=1



L=16
N=16
A=1



L=1
N=16
A=1



L=5
aperiodični signal $x[n]$

L=5
periodični signal $x[n]$

	aperiodičan	periodičan
kontinuirani	$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$ $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$	$c_k = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} x(t) e^{-j2\pi kF_0 t} dt$ $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi kF_0 t}$
diskretni	$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$ $x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$	$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}$ $x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N}$