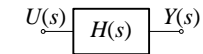


- zadnji puta razmatrali:
 - Z - transformaciju

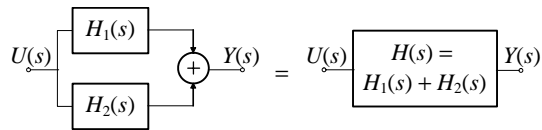
- danas ćemo razmotriti:
 - Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja – diskretnih sustava
 - Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja – kontinuiranih sustava
 - Odziv kontinuiranih sustava L – transformacijom
 - Odziv diskretnih sustava z – transformacijom
 - Sustav s povratnom vezom
 - Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih periodičnih signala

- funkcija $H(s)$ zove se transfer funkcija ili prijenosna funkcija sustava.
- definirana je za miran sustav kao:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{L\{y(t)\}}{L\{u(t)\}} \quad u(t)=0 \text{ za } t < 0 .$$
- ako znamo $H(s)$, sustav možemo predstaviti kao blok:



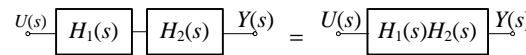
- paralelni spoj podsustava:



$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = [H_1(s) + H_2(s)]U(s) = H(s)U(s)$$

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s)$$

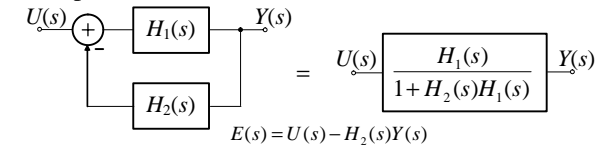
- kaskadni spoj podsustava:



$$Y(s) = H_2(s)V(s) = H_2(s)H_1(s)U(s)$$

$$H(s) = H_2(s)H_1(s)$$

- prstenasti spoj podsustava – sustav s povratnom vezom:



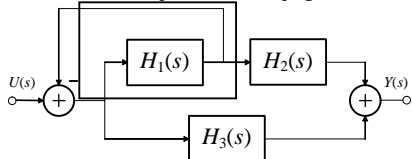
$$E(s) = U(s) - H_2(s)Y(s)$$

$$Y(s) = H_1(s)E(s) = H_1(s)[U(s) - H_2(s)Y(s)] = Y(s)$$

$$Y(s)(1 + H_1(s)H_2(s)) = H_1(s)U(s)$$

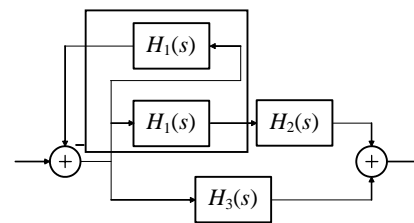
$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$$

- korištenjem pokazanih pravila za kaskadu, prsten i paralelni spoj, složene blok dijagrame možemo sažeti i tako odrediti transfer funkciju cijelog sustava
- primjer: odrediti transfer funkciju sustava sažimanjem blok dijagrama



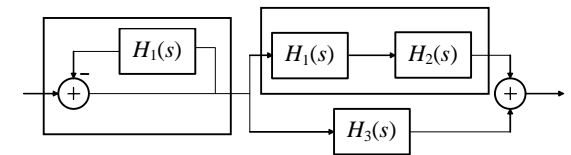
- transformirajmo označeni dio blok dijagrama.

- dobivamo rezultat:



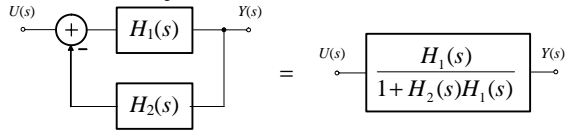
- nacrtajmo ponovo isti blok dijagram

- dobivamo:

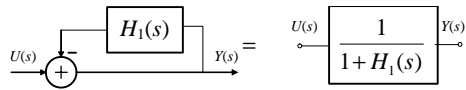


- na dobivenom blok dijagramu prepoznajemo:
 - kaskadu,
 - spoj s povratnom vezom.
- kaskada se može nadomjestiti blokom čija je transfer funkcija: H_1H_2

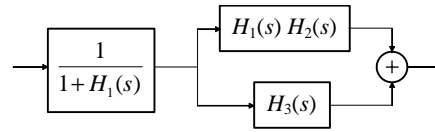
- ranije je pokazano da za spoj s povratnom vezom vrijedi:



- u našem primjeru bit će:

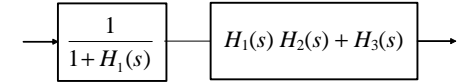


- prema tome, naš blok dijagram možemo sažeti:

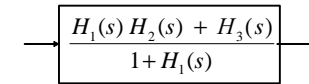


- desnu stranu blok dijagrama čini paralelni spoj podsustava pa ga možemo nadomjestiti podsustavom čija je prijenosna funkcija: $H_1H_2 + H_3$.

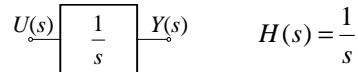
- daljnijim sažimanjem dobivamo kaskadu:



- cijeli sustav prikazan jednim blokom ima oblik:



- jedan često korišten element sustava je integrator
- transfer funkcija integratora:



$$H(s) = \frac{1}{s}$$

Opis linearnih sustava i njihov odziv gdje smo do sada?

Stanja = Realniⁿ, Ulazi = Realni^u, Izlazi = Realni^z
 $\forall n \in \text{Cjelobrojni}, \quad x[n+1] = Ax[n] + Bu[n]$
 $y[n] = Cx[n] + Du[n]$

Stanja = Realniⁿ, Ulazi = Realni^u, Izlazi = Realni^z
 $\forall t \in \text{Realni}, \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$
 $y(t) = Cx(t) + Du(t)$

$x[n] = A^n x[0] + \sum_{m=0}^{n-1} A^{n-1-m} Bu[m], \quad n > 0$
 $x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$

$y[n] = \begin{cases} Cx[0] + Du[0], & n = 0 \\ CA^n x[0] + \sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m} Bu[m] + Du[n], & n > 0 \end{cases}$
 $y(t) = Ce^{At} x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t)$

$y[n] = \sum_{m=0}^n h[n-m] u[m], \quad n \geq 0$
 $y(t) = \int_0^t h(t-\tau) u(\tau) d\tau$

$a_n y[n] + a_{n-1} y[n-1] + a_{n-2} y[n-2] + \dots + a_0 y[n-N] = b_n u[n] + b_{n-1} u[n-1] + b_{n-2} u[n-2] + \dots + b_0 u[n-N]$
 $a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = b_n u^{(n)}(t) + b_{n-1} u^{(n-1)}(t) + \dots + b_0 u(t)$

$Y(z) = H(z)U(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 + \sum_{m=1}^N a_m z^{-m}} U(z)$
 $Y(s) = H(s)U(s) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m s^m}{\sum_{m=0}^N a_m s^m} U(s)$

Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja – diskretni sustavi

- diskretni sustav opisujemo jednačbom diferencija

$$y[n] = -\sum_{m=1}^N a_m y[n-m] + \sum_{m=0}^M b_m u[n-m]$$

- ili z - transformacijom prijenosnom funkcijom:

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 + \sum_{m=1}^N a_m z^{-m}}$$

- polinomi od z^{-1} u brojniku i nazivniku
- sustav ima nule i polove

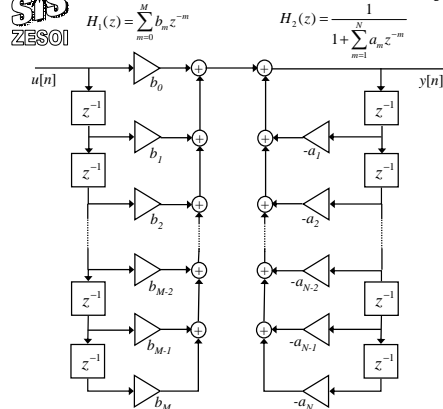
Direktna realizacija diskretnih sustava

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 + \sum_{m=1}^N a_m z^{-m}} = H_1(z) \cdot H_2(z)$$

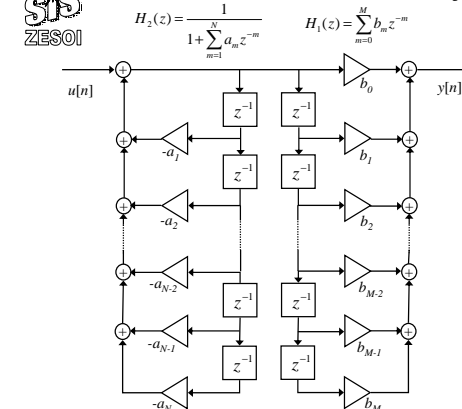
- nule od $H(z)$:
- polovi od $H(z)$:

$$H_1(z) = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m} \quad H_2(z) = \frac{1}{1 + \sum_{m=1}^N a_m z^{-m}}$$

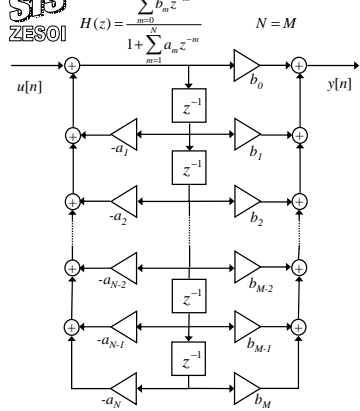
Direktna I realizacija



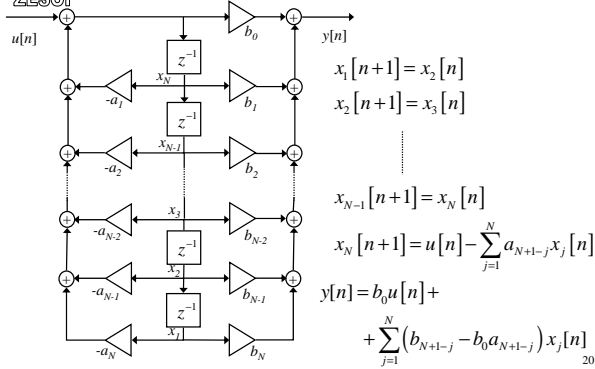
Direktna II realizacija



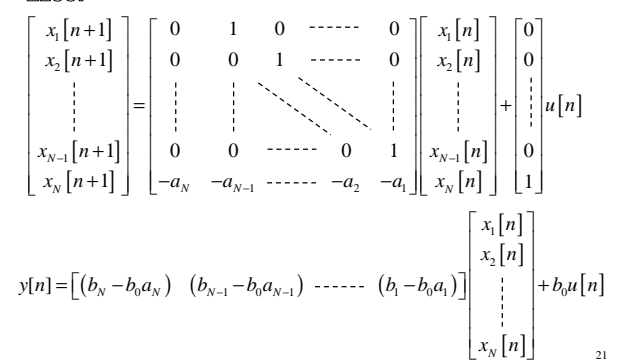
Direktna II realizacija



Direktna II realizacija – jednađbe stanja



Direktna II realizacija – jednađbe stanja



Kaskadna realizacija diskretnih sustava

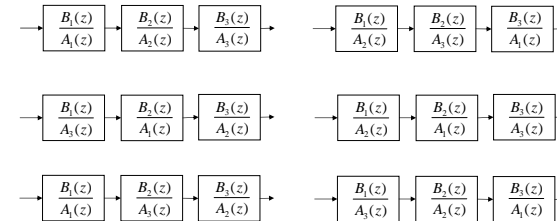
- razlaganje transfer funkcije $H(z)$ na sekcije nižeg reda
- polinomi u brojniku i nazivniku prikazuju se kao produkti polinoma nižeg reda

primjer:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B_1(z) \cdot B_2(z) \cdot B_3(z)}{A_1(z) \cdot A_2(z) \cdot A_3(z)}$$

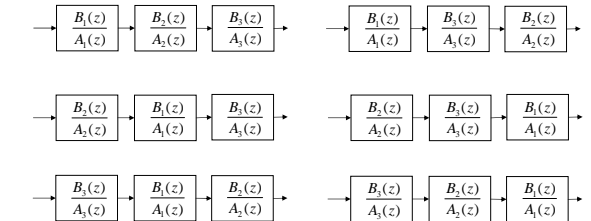
- različite kaskadne realizacije (36) postiže se različitim uparivanjem polova i nula ili/i izmjenom redoslijeda sekcija u kaskadi

Kaskadna realizacija diskretnih sustava



- različite ekvivalentne kaskadne realizacije različitim uparivanjem polova

Kaskadna realizacija diskretnih sustava



- različite ekvivalentne kaskadne realizacije promjenom redoslijeda sekcija

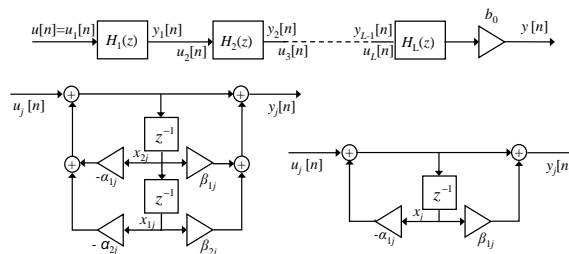
Kaskadna realizacija diskretnih sustava

- razlaganje transfer funkcije $H(z)$ na sekcije prvog i drugog reda

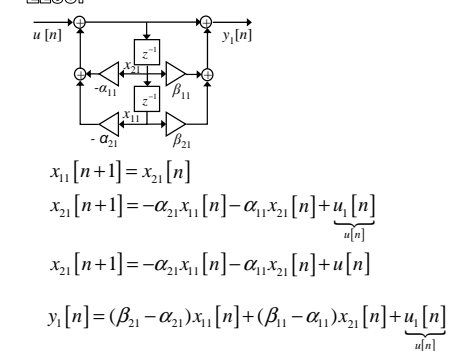
$$H(z) = b_0 \cdot \prod_{j=1}^L H_j(z) \quad H_j(z) = \frac{1 + \beta_{1j} z^{-1} + \beta_{2j} z^{-2}}{1 + \alpha_{1j} z^{-1} + \alpha_{2j} z^{-2}}$$

$$H_j(z) = \frac{1 + \beta_{1j} z^{-1}}{1 + \alpha_{1j} z^{-1}}$$

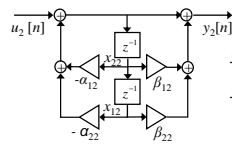
Kaskadna realizacija diskretnih sustava



Kaskadna realizacija diskretnih sustava



Kaskadna realizacija diskretnih sustava



$$x_{12}[n+1] = x_{22}[n]$$

$$x_{22}[n+1] = -\alpha_{22}x_{12}[n] - \alpha_{12}x_{22}[n] + u_2[n]$$

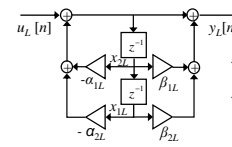
$$x_{22}[n+1] = (\beta_{21} - \alpha_{21})x_{11}[n] + (\beta_{11} - \alpha_{11})x_{21}[n] - \alpha_{22}x_{12}[n] - \alpha_{12}x_{22}[n] + u[n]$$

$$y_2[n] = (\beta_{22} - \alpha_{22})x_{12}[n] + (\beta_{12} - \alpha_{12})x_{22}[n] + u_2[n]$$

$$y_2[n] = (\beta_{21} - \alpha_{21})x_{11}[n] + (\beta_{11} - \alpha_{11})x_{21}[n] + (\beta_{22} - \alpha_{22})x_{12}[n] + (\beta_{12} - \alpha_{12})x_{22}[n] + u[n]$$

28

Kaskadna realizacija diskretnih sustava



$$x_{1L}[n+1] = x_{2L}[n]$$

$$x_{2L}[n+1] = -\alpha_{2L}x_{1L}[n] - \alpha_{1L}x_{2L}[n] + u_L[n]$$

$$x_{2L}[n+1] = (\beta_{21} - \alpha_{21})x_{11}[n] + (\beta_{11} - \alpha_{11})x_{21}[n] + (\beta_{22} - \alpha_{22})x_{12}[n] + (\beta_{12} - \alpha_{12})x_{22}[n] + \dots - \alpha_{2L}x_{1L}[n] - \alpha_{1L}x_{2L}[n] + u[n]$$

$$y_L[n] = (\beta_{2L} - \alpha_{2L})x_{1L}[n] + (\beta_{1L} - \alpha_{1L})x_{2L}[n] + u_L[n]$$

$$y[n] = (\beta_{21} - \alpha_{21})x_{11}[n] + (\beta_{11} - \alpha_{11})x_{21}[n] + (\beta_{22} - \alpha_{22})x_{12}[n] + (\beta_{12} - \alpha_{12})x_{22}[n] + \dots + (\beta_{2L} - \alpha_{2L})x_{1L}[n] + (\beta_{1L} - \alpha_{1L})x_{2L}[n] + u[n]$$

Kaskadna realizacija diskretnih sustava

$$\begin{bmatrix} x_{11}[n+1] \\ x_{21}[n+1] \\ x_{12}[n+1] \\ x_{22}[n+1] \\ x_{13}[n+1] \\ x_{23}[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_{21} & -\alpha_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta_{21} - \alpha_{21} & \beta_{11} - \alpha_{11} & -\alpha_{22} & -\alpha_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_{21} - \alpha_{21} & \beta_{11} - \alpha_{11} & \beta_{22} - \alpha_{22} & \beta_{12} - \alpha_{12} & -\alpha_{23} & -\alpha_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11}[n] \\ x_{21}[n] \\ x_{12}[n] \\ x_{22}[n] \\ x_{13}[n] \\ x_{23}[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u[n]$$

$$y[n] = [\beta_{21} - \alpha_{21} \quad \beta_{11} - \alpha_{11} \quad \beta_{22} - \alpha_{22} \quad \beta_{12} - \alpha_{12} \quad \beta_{23} - \alpha_{23} \quad \beta_{13} - \alpha_{13}] \begin{bmatrix} x_{11}[n] \\ x_{21}[n] \\ x_{12}[n] \\ x_{22}[n] \\ x_{13}[n] \\ x_{23}[n] \end{bmatrix} + b_0 u[n]$$

30

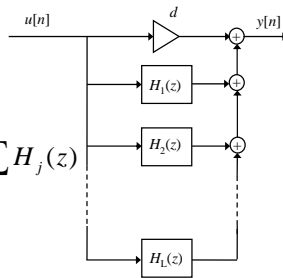
Paralelna realizacija diskretnih sustava

- razlaganje transfer funkcije $H(z)$ na zbroj sekcija nižeg reda dakle,

za $N \geq M$

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 + \sum_{m=1}^N a_m z^{-m}} = d + \sum_j H_j(z)$$

$$d = \frac{b_N}{a_N}$$



31

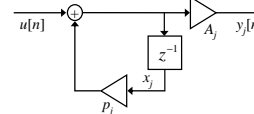
Paralelna realizacija diskretnih sustava

- razlaganje transfer funkcije $H(z)$ na zbroj sekcija prvog reda,

za $N \geq M$

$$H(z) = d + \sum_{j=1}^N H_j(z)$$

$$d = \frac{b_N}{a_N}, \quad H_j(z) = \frac{A_j}{1 - p_j z^{-1}}$$



32

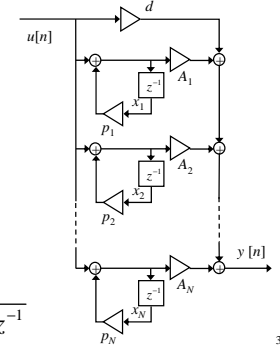
Paralelna realizacija diskretnih sustava

- neka je $H(z)$

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^N b_m z^{-m}}{1 + \sum_{m=1}^N a_m z^{-m}}$$

$$H(z) = d + \sum_{j=1}^N H_j(z)$$

$$d = \frac{b_N}{a_N}, \quad H_j(z) = \frac{A_j}{1 - p_j z^{-1}}$$



33

Paralelna realizacija diskretnih sustava

- jednadžbe stanja su

$$x_1[n+1] = p_1 x_1[n] + u[n]$$

$$x_2[n+1] = p_2 x_2[n] + u[n]$$

$$x_3[n+1] = p_3 x_3[n] + u[n]$$

$$x_N[n+1] = p_N x_N[n] + u[n]$$

$$y[n] = p_1 A_1 x_1[n] + p_2 A_2 x_2[n] + \dots + p_N A_N x_N[n] + (d + A_1 + A_2 + \dots + A_N) u[n]$$

34

Paralelna realizacija diskretnih sustava

$$\begin{bmatrix} x_1[n+1] \\ x_2[n+1] \\ x_3[n+1] \\ \vdots \\ x_N[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & p_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ x_3[n] \\ \vdots \\ x_N[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u[n]$$

$$y[n] = [p_1 A_1 \quad p_2 A_2 \quad \dots \quad p_N A_N] \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ \vdots \\ x_N[n] \end{bmatrix} + (d + A_1 + A_2 + \dots + A_N) u[n]$$

35

Paralelna realizacija diskretnih sustava

- u općem slučaju neki od polova mogu biti kompleksni u tom slučaju su i A_j također kompleksni
- želimo li izbjeći množenja s kompleksnim brojevima kombiniramo konjugirano kompleksne korijene kako bi formirali podsustav s dva pola

36

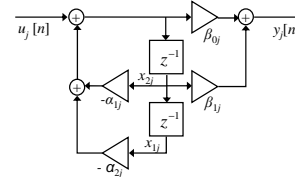
- razlaganje transfer funkcije $H(z)$ na sekcije drugog reda

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 + \sum_{m=1}^N a_m z^{-m}} = \frac{b_N}{a_N} + \sum_{j=1}^L H_j(z)$$

$$H_j(z) = \frac{\beta_{0j} + \beta_{1j} z^{-1}}{1 + \alpha_{1j} z^{-1} + \alpha_{2j} z^{-2}}$$

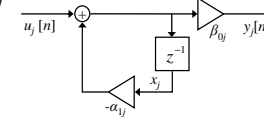
- za N neparan barem jedan realni pol tada je u prijenosnoj funkciji sekcije $\alpha_{2j} = \beta_{1j} = 0$

$$H_j(z) = \frac{\beta_{0j} + \beta_{1j} z^{-1}}{1 + \alpha_{1j} z^{-1} + \alpha_{2j} z^{-2}}$$



- za realni pol $\alpha_{2j} = \beta_{1j} = 0$

$$H_j(z) = \frac{\beta_{0j}}{1 + \alpha_{1j} z^{-1}}$$



- neka je zadani sustav

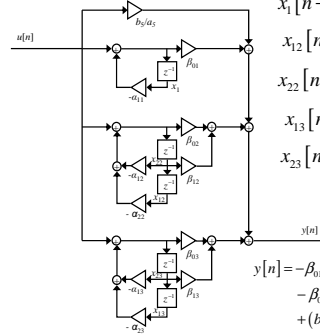
$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4} + b_5 z^{-5}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + a_4 z^{-4} + a_5 z^{-5}}$$

- N je neparan barem je jedan pol realan
- neka je jedan pol realan a preostali neka su konjugirano kompleksni polovi

- razlaganje na parcijalne razlomke je oblika

$$H(z) = \frac{b_5}{a_5} + \frac{\beta_{01}}{1 + \alpha_{11} z^{-1}} + \frac{\beta_{02} + \beta_{12} z^{-1}}{1 + \alpha_{12} z^{-1} + \alpha_{22} z^{-2}} + \frac{\beta_{03} + \beta_{13} z^{-1}}{1 + \alpha_{13} z^{-1} + \alpha_{23} z^{-2}}$$

- blok dijagram je



$$x_{11}[n+1] = -\alpha_{11} x_{11}[n] + u[n]$$

$$x_{12}[n+1] = x_{22}[n]$$

$$x_{22}[n+1] = -\alpha_{22} x_{22}[n] - \alpha_{12} x_{22}[n] + u[n]$$

$$x_{13}[n+1] = x_{23}[n]$$

$$x_{23}[n+1] = -\alpha_{23} x_{13}[n] - \alpha_{13} x_{23}[n] + u[n]$$

$$y[n] = -\beta_{01} \alpha_{11} x_{11}[n] - \beta_{02} \alpha_{22} x_{22}[n] + (\beta_{12} - \beta_{02} \alpha_{12}) x_{22}[n] - \beta_{03} \alpha_{23} x_{13}[n] + (\beta_{13} - \beta_{03} \alpha_{13}) x_{23}[n] + (b_5/a_5 + \beta_{01} + \beta_{02} + \beta_{03}) u[n]$$

$$\begin{bmatrix} x_{11}[n+1] \\ x_{12}[n+1] \\ x_{22}[n+1] \\ x_{13}[n+1] \\ x_{23}[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_{22} & -\alpha_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_{23} & -\alpha_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11}[n] \\ x_{12}[n] \\ x_{22}[n] \\ x_{13}[n] \\ x_{23}[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u[n]$$

$$y[n] = [-\beta_{01} \alpha_{11} \quad -\beta_{02} \alpha_{22} \quad (\beta_{12} - \beta_{02} \alpha_{12}) \quad -\beta_{03} \alpha_{23} \quad (\beta_{13} - \beta_{03} \alpha_{13})] \begin{bmatrix} x_{11}[n] \\ x_{12}[n] \\ x_{22}[n] \\ x_{13}[n] \\ x_{23}[n] \end{bmatrix} + \left(\frac{b_5}{a_5} + \beta_{01} + \beta_{02} + \beta_{03} \right) u[n]$$

- kontinuirani sustav opisujemo diferencijalnom jednačbom

$$\sum_{m=0}^N a_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} = \sum_{m=0}^M b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m}$$

- ili \mathcal{L} - transformacijom prijenosnom funkcijom:

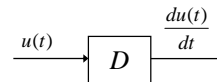
$$H(s) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m s^m}{\sum_{m=0}^N a_m s^m}$$

- polinomi od s u brojniku i nazivniku
- sustav ima nule i polove

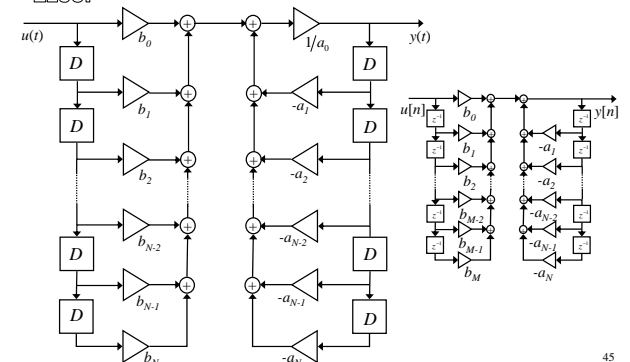
- za $N=M$ možemo prikazati $y(t)$ kao

$$y(t) = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{m=0}^M b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} - \sum_{m=1}^N a_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} \right\}$$

- definicijom funkcijskog bloka za deriviranje D

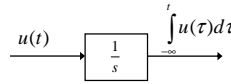


moguće je nacrtati blok dijagram za direktnu realizaciju



Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja – kontinuirani sustavi

- zbog problema u realizaciji sklopova za deriviranje u razlaganju kontinuiranih sustava koristi se funkcijski blok za integriranje



$$\int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\mu(t-\tau) d\tau = u(t) * \mu(t) \Rightarrow \mathcal{L}\left(\int_{-\infty}^t u(\tau)\mu(t-\tau) d\tau\right) = \frac{1}{s}U(s)$$

$$\int_{-\infty}^t \left(\int_{-\infty}^{\tau} u(\sigma) d\sigma\right) d\tau = (u(t) * \mu(t)) * \mu(t) \Rightarrow \mathcal{L}\left(\int_{-\infty}^t \left(\int_{-\infty}^{\tau} u(\sigma) d\sigma\right) d\tau\right) = \frac{1}{s^2}U(s)$$

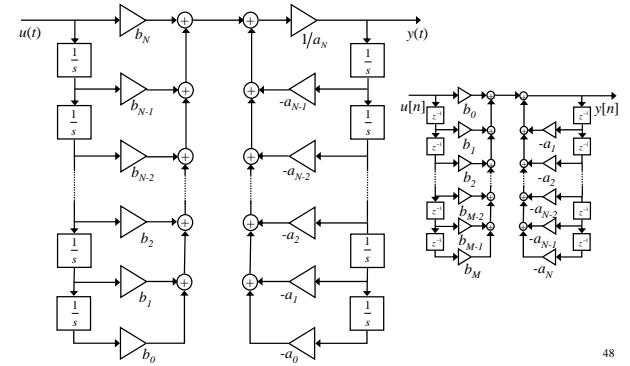
Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja – kontinuirani sustavi

$$H(s) = \frac{b_N s^N + b_{N-1} s^{N-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

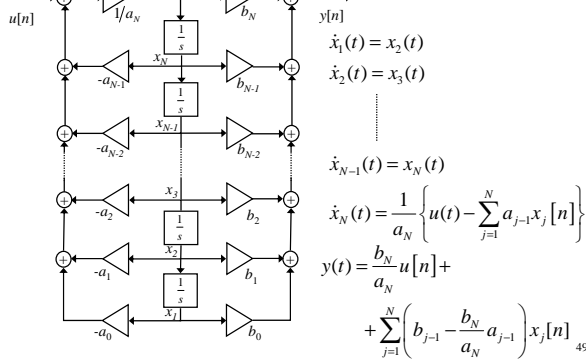
- integrirajući N puta diferencijalnu jednadžbu dobivamo integralnu jednadžbu sustava čemu odgovara i sljedeća formulacija prijenosne funkcije

$$H(s) = \frac{b_N + b_{N-1} s^{-1} + \dots + b_1 s^{-(N-1)} + b_0 s^{-N}}{a_N + a_{N-1} s^{-1} + \dots + a_1 s^{-(N-1)} + a_0 s^{-N}}$$

Direktna I realizacija kontinuiranih sustavi



Direktna II realizacija kontinuiranih sustavi



Direktna II realizacija kontinuiranih sustava

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{N-1}(t) \\ \dot{x}_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_N} & -\frac{a_1}{a_N} & \dots & -\frac{a_{N-2}}{a_N} & -\frac{a_{N-1}}{a_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{N-1}(t) \\ x_N(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_N} \end{bmatrix} u[n]$$

$$y(t) = \left[\left(b_0 - \frac{b_N}{a_N} a_0 \right) \left(b_1 - \frac{b_N}{a_N} a_1 \right) \dots \left(b_{N-1} - \frac{b_N}{a_N} a_{N-1} \right) \right] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{bmatrix} + \frac{b_N}{a_N} u(t)$$

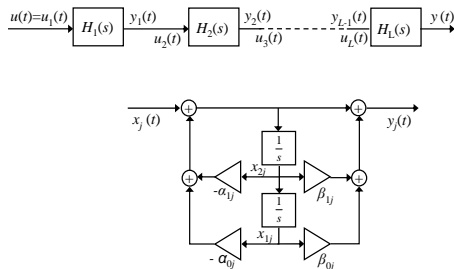
Kaskadna realizacija kontinuiranih sustava

- razlaganje transfer funkcije $H(s)$ na sekcije drugog reda spojenih u kaskadu – iterativna metoda

$$H(s) = \frac{b_M}{a_N} \cdot \prod_{j=1}^L H_j(s) \quad H_j(z) = \frac{s^2 + \beta_{1j}s + \beta_{0j}}{s^2 + \alpha_{1j}s + \alpha_{0j}}$$

gdje je L najveći cijeli broj sadržan u $(N+1)/2$

Kaskadna realizacija kontinuiranih sustava



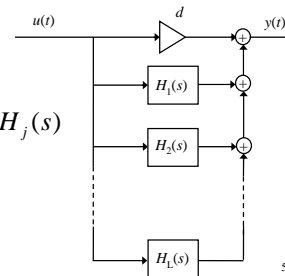
Paralelna realizacija kontinuiranih sustava

- razlaganje transfer funkcije $H(s)$ na zbroj sekcija prvog reda (polovi realni) ili drugog reda (kompleksni polovi)

za $N \geq M$

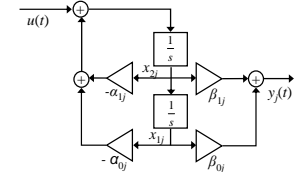
$$H(s) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m s^m}{\sum_{m=0}^N a_m s^m} = d + \sum_j H_j(s)$$

$$d = \frac{b_N}{a_N}$$



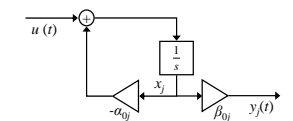
Paralelna realizacija kontinuiranih sustava

$$H_j(s) = \frac{\beta_{1j}s + \beta_{0j}}{s^2 + \alpha_{1j}s + \alpha_{0j}}$$



- za realni pol

$$H_j(s) = \frac{\beta_{0j}}{s + \alpha_{0j}}$$



Odziv kontinuiraih sustava L - transformacijom

Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K

$$\forall t \in \text{Realni}, \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

55

Odziv kontinuiraih sustava L - transformacijom

- L transformacija jednadžbi stanja sustava:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

matrica
karakterističnih
frekvencija –
resolventa

$$X(s) = \Phi(s)x(0) + \Phi(s)BU(s)$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\}x(0) + \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)BU(s)\}$$

fundamentalna
matrica $\Phi(t) = e^{At}$

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

56

Odziv kontinuiraih sustava L - transformacijom

- matrica karakterističnih frekvencija je

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}$$

- elementi matrice karakterističnih frekvencija su razlomljene racionalne funkcije kompleksne frekvencije

- brojnik polinom n-1 stupnja
- nazivnik n-tog stupnja

57

Odziv kontinuiraih sustava L - transformacijom

- det(sI-A) je karakterističan polinom sustava n-tog stupnja i možemo ga pisati kao produkt korijenih faktora:

$$\det(sI - A) = (s - p_1)^{m_1} (s - p_2)^{m_2} \dots (s - p_j)^{m_j} \dots (s - p_n)^{m_n} = \prod_1^n (s - p_j)^{m_j}$$

- korijeni karakterističnog polinoma p_1 do p_n su vlastite vrijednosti matrice A odnosno vlastite frekvencije sustava

- m_j višestrukost j-tog korijena $\sum_{j=1}^n m_j = n$.

58

Odziv kontinuiraih sustava L - transformacijom

- L transformacija izlazne jednadžbe sustava:

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

$$Y(s) = C\Phi(s)x(0) + \{C\Phi(s)B + D\}U(s)$$

- miran sustav: $x(0) = 0$:

$$Y(s) = \{C(sI - A)^{-1}B + D\}U(s) = H(s)U(s)$$

transfer matrica

- elementi matrice H(s) su transfer funkcije između pojedinih ulaza i pojedinih izlaza sustava.

59

Odziv diskretnih sustava z - transformacijom

Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K

$$\forall n \in \text{Cjelobrojni}, \quad x[n+1] = Ax[n] + Bu[n]$$

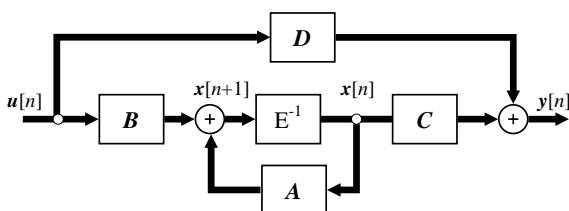
$$y[n] = Cx[n] + Du[n]$$

$$x[n] = A^n x[0] + \sum_{m=0}^{n-1} A^{n-1-m} Bu[m], \quad n > 0$$

$$y[n] = \begin{cases} Cx[0] + Du[0], & n = 0 \\ CA^n x[0] + \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m} Bu[m] \right\} + Du[n], & n > 0 \end{cases}$$

60

Opći kabelski blok dijagram diskretnog sustava



61

Odziv diskretnih sustava z - transformacijom

$$U(z) = Z\{u[n]\}, \quad Y(z) = Z\{y[n]\}, \quad X(z) = Z\{x[n]\}$$

transformacija
jednadžbe stanja

$$x[n+1] = Ax[n] + Bu[n]$$

$$zX(z) - zx[0] = AX(z) + BU(z)$$

$$(zI - A)X(z) = zx[0] + BU(z)$$

$$X(z) = z(zI - A)^{-1}x[0] + (zI - A)^{-1}BU(z)$$

transformacija

izlazne jednadžbe $y[n] = Cx[n] + Du[n]$

$$Y(z) = Cz(zI - A)^{-1}x[0] + \{C(zI - A)^{-1}B + D\}U(z)$$

62

Odziv diskretnih sustava z - transformacijom

izlaz mirnog sustava $x[0] = 0$ biti će određen sa

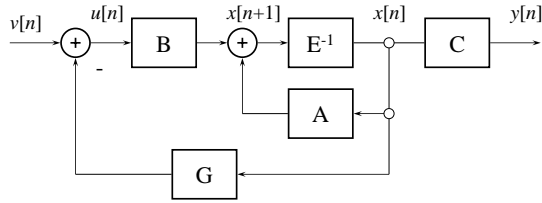
$$Y(z) = H(z)U(z)$$

$$H(z) = C(zI - A)^{-1}B + D \quad \text{transfer matrica vremenski diskretnog sustava}$$

$$\Phi(z) = (zI - A)^{-1}z \quad \text{resolventa sustava}$$

63

Sustav s povratnom vezom



$$\begin{aligned} x[n+1] &= Ax[n] + Bu[n] \\ u[n] &= v[n] - Gx[n] \\ y[n] &= Cx[n] \end{aligned}$$

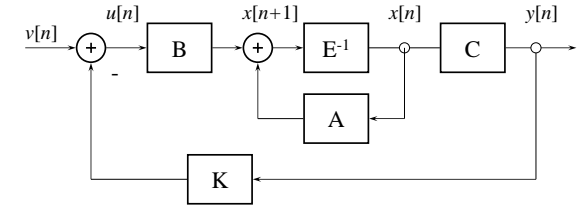
Sustav s povratnom vezom

$$\begin{aligned} x[n+1] &= Ax[n] + B(v[n] - Gx[n]) \\ x[n+1] &= (A - BG)x[n] + Bv[n] \\ x[n+1] &= \bar{A}x[n] + Bv[n] \end{aligned}$$

\bar{A} - matrica sustava uz zatvorene petlje povratne veze
njene karakteristične frekvencije q_k
određuju vladanje sustava

može se pokazati da za upravljivi sustav postoji najmanje jedna matrica G takva da karakteristične vrijednosti q_k matrice \bar{A} budu jednake zadanim

Povratna veza s izlaza sustava



$$\begin{aligned} x[n+1] &= Ax[n] + Bu[n] \\ u[n] &= v[n] - Ky[n] \\ y[n] &= Cx[n] \end{aligned}$$

Povratna veza s izlaza sustava

$$\begin{aligned} x[n+1] &= Ax[n] + B(v[n] - KCx[n]) \\ x[n+1] &= (A - BKC)x[n] + Bv[n] \\ x[n+1] &= \bar{A}x[n] + Bv[n] \end{aligned}$$

\bar{A} matrica ovisi o matricama A, B, C i K. Ako je odziv izvornog sustava nezadovoljavajući treba naći matricu K da bi sustav imao željeni odziv.

Pokazuje se da to nije uvijek moguće za bilo koje matrice B i C.

Zato se pristupa realizaciji povratne veze s varijabli stanja \Rightarrow estimatori

Opis linearnih sustava i njihov odziv gdje smo do sada?

<p>Stanja = Realniⁿ, Ulazi = Realni^m, Izlazi = Realni^l</p> <p>$\forall n \in \text{Cjelobrojni}, \quad x[n+1] = Ax[n] + Bu[n]$</p> <p>$y[n] = Cx[n] + Du[n]$</p> <p>$x[n] = A^n x[0] + \sum_{m=0}^{n-1} A^{n-1-m} Bu[m], \quad n > 0$</p> <p>$y[n] = \begin{cases} Cx[0] + Du[0], & n = 0 \\ CA^n x[0] + \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m} Bu[m] \right\} + Du[n], & n > 0 \end{cases}$</p> <p>$y[n] = \sum_{m=0}^n h[n-m]u[m], \quad n \geq 0$</p> <p>$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + \dots + a_n y[n-N] = b_0 u[n] + b_1 u[n-1] + b_2 u[n-2] + \dots + b_M u[n-M]$</p> <p>$Y(z) = H(z)U(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 + \sum_{m=1}^N a_m z^{-m}} U(z)$</p> <p>$X(z) = z(zI - A)^{-1} x(0) + (zI - A)^{-1} BU(z)$</p> <p>$Y(z) = Cz(zI - A)^{-1} x(0) + \{C(zI - A)^{-1} B + D\}U(z)$</p>	<p>Stanja = Realniⁿ, Ulazi = Realni^m, Izlazi = Realni^l</p> <p>$\forall t \in \text{Realni}, \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$</p> <p>$y(t) = Cx(t) + Du(t)$</p> <p>$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$</p> <p>$y(t) = Ce^{At} x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t)$</p> <p>$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau) d\tau,$</p> <p>$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = b_n u^{(m)}(t) + b_{n-1} u^{(m-1)}(t) + \dots + b_0 u(t)$</p> <p>$Y(s) = H(s)U(s) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m s^m}{\sum_{m=0}^N a_m s^m} U(s)$</p> <p>$X(s) = (sI - A)^{-1} x(0) + (sI - A)^{-1} BU(s)$</p> <p>$Y(s) = C\Phi(s)x(0) + \{C\Phi(s)B + D\}U(s)$</p>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih signala

Signali i sustavi

Uvod

Linearna kombinacija kontinuiranih kompleksnih eksponencijala generira kontinuirani signal $x(t)$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\Omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}$$

koji je periodičan s periodom

$$T_p = 1/F_0$$

što upućuje da linearna kombinacija kompleksnih eksponencijala može poslužiti u prikazu periodičnih kontinuiranih signala

Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih periodičnih signala

dakle, korištenjem kompleksnih eksponencijala

$$\{e^{j2\pi k F_0 t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

moguće je razložiti periodični signal perioda T_p pri čemu F_0 određuje osnovni period $x(t)$ a koeficijenti $\{c_k\}$ određuju oblik signala. Ovakav matematički prikaz signala $x(t)$ naziva se Fourierov red.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}$$

Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih periodičnih signala

Takav razvoj u trigonometrijski red koristio je Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)



- politički aktivan, dva puta izbjegao giljotinu, blizak Napoleonu, bio prefect jedne francuske regije sa sjedištem u Grenobleu i baš u to vrijeme razvio svoje ideje o trigonometrijskim redovima

- 21. prosinca 1807. prezentirao svoj rad o difuziji topline i pokazao kako red harmonijski vezanih sinusoida može biti koristan u prikazu distribucije temperature kroz tijela.
- tada tvrdi i da "bilo koji" periodični signal može biti prikazan s takovim redom.

Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih periodičnih signala

Koncept korištenja "trigonometrijskih suma" potiče još od babilonaca koji su ove ideje koristili u predikciji astronomskih događaja.

Istom konceptu se vraća Euler 1748 u istraživanju gibanja (titranja) žice. Lagrange 1759 kritizira njegov pristup tvrdeći da su trigonometrijski redovi limitirane uporabivosti.

Fourier je imao jasnu ideju (podržanu od Laplacea no vrlo kritiziranu od Lagrangea) međutim strogu je matematičku podlogu dao tek Dirichlet 1829.

73

Dirichlet, Peter (1805-1859)

German mathematician who gave the first set of conditions sufficient to guarantee the convergence of a Fourier series under the so-called Dirichlet conditions. He also studied analysis and differential equations, giving his name to the Dirichlet boundary conditions. He produced Dirichlet's theorem on primes, gave the first proof of Bertrand's postulate, and investigated Dirichlet series, and is said to have slept with Gauss's Disquisitiones Arithmeticae under his pillow. In any case, he fleshed out many of the concise and rigid proofs.



74

Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih periodičnih signala

Izračunavanje koeficijenta $\{c_k\}$ započinje iz

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}$$

množe se obje strane s $e^{-j2\pi F_0 l t}$, l je cijeli broj

integriraju se obje strane preko jednog perioda, dakle od 0 do T_p , ili općenitije od t_0 do t_0+T_p

$$\int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) e^{-j2\pi F_0 l t} dt = \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j2\pi F_0 l t} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t} \right) dt$$

75

Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih periodičnih signala

desnu stranu transformiramo u

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{j2\pi F_0 (k-l)t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left[\frac{e^{j2\pi F_0 (k-l)t}}{j2\pi F_0 (k-l)} \right]_{t_0}^{t_0+T_p}$$

Izraz u zagradi izračunat za gornju i donju granicu jednak je nuli. S druge strane za $k=l$ imamo

$$\int_{t_0}^{t_0+T_p} dt = t \Big|_{t_0}^{t_0+T_p} = T_p$$

76

Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih periodičnih signala

slijedi

$$\int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) e^{-j2\pi F_0 l t} dt = c_l T_p$$

pa je izraz za Fourierove koeficijente

$$c_l = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) e^{-j2\pi F_0 l t} dt$$

77

Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih periodičnih signala

budući je t_0 proizvoljan, integral može biti izračunat preko bilo kojeg intervala duljine T_p

pa je konačno izraz za Fourierove koeficijente

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt$$

78

Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih periodičnih signala

Uvjeti konvergencije za Fourierov red

Od posebne važnosti je klasa periodičnih signala za koje vrijedi

$$\int_T |x(t)|^2 dt < \infty$$

i za njih su Fourierovi koeficijenti $\{c_k\}$ konačni

79

Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih periodičnih signala

Postojanje Fourierovog reda za periodični niz osigurava ispunjenje *Dirichlet-ovih* uvjeta:

1. signal $x(t)$ ima konačni broj diskontinuiteta u bilo kojem periodu
2. signal $x(t)$ ima konačni broj maksimuma i minimuma u bilo kojem periodu
3. signal $x(t)$ je apsolutno integrabilan u bilo kojem periodu

$$\int_T |x(t)| dt < \infty$$

Svi periodični signali od praktičnog interesa zadovoljavaju gornje uvjete

80

Frekvencijska analiza vremenski kontinuiranih periodičnih signala

Prema tome za periodični signal $x(t)$, koji zadovoljava Dirichletove uvjete, vrijedi par jednadžbi:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}$$

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt$$

81

Frekvencijska analiza realnih vremenski kontinuiranih periodičnih signala

Generalno govoreći, Fourierovi koeficijenti c_k poprimaju kompleksne vrijednosti.

za realni periodični signal $x(t)$ proizlazi da su c_k i c_{-k} konjugirano kompleksni dakle,

$$c_k = |c_k| e^{j\theta_k}$$

i

$$c_{-k} = |c_k| e^{-j\theta_k}$$

82

Frekvencijska analiza realnih vremenski kontinuiranih periodičnih signala

pa za realni periodični signal $x(t)$ Fourierov red možemo pisati u obliku:

$$x(t) = c_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \cos(2\pi k F_0 t + \theta_k)$$

gdje je c_0 realan

postoji i treći oblik Fourierovog reda za realni periodični signal $x(t)$ a temelji se na transformaciji kosinusa u gornjem prikazu

83

Frekvencijska analiza realnih vremenski kontinuiranih periodičnih signala

$$\cos(2\pi k F_0 t + \theta_k) = \cos(2\pi k F_0 t) \cos \theta_k - \sin(2\pi k F_0 t) \sin \theta_k$$

pa za realni periodični signal $x(t)$ prethodni oblik Fourierovog reda možemo transformirati u:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos 2\pi k F_0 t - b_k \sin 2\pi k F_0 t)$$

gdje je su $a_0 = c_0$

$$a_k = 2 |c_k| \cos \theta_k$$

$$b_k = 2 |c_k| \sin \theta_k$$

84

Gustoća spektra snage periodičnih vremenski kontinuiranih signala

periodični kontinuirani signal $x(t)$ ima beskonačnu energiju ali konačnu srednju snagu koja je dana s:

$$P_x = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} |x(t)|^2 dt$$

kako je

$$|x(t)|^2 = x(t) \cdot x^*(t)$$

85

Gustoća spektra snage periodičnih vremenski kontinuiranih signala

možemo pisati

$$P_x = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* e^{-j2\pi k F_0 t} \right) dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* \left(\frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

86

Gustoća spektra snage periodičnih vremenski kontinuiranih signala

iz ovoga pišemo tzv. Parseval-ovu relaciju

$$P_x = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

ilustrirajmo fizikalno značenje Parseval-ove relacije:

87

Gustoća spektra snage periodičnih vremenski kontinuiranih signala

neka se $x(t)$ sastoji od samo jedne kompleksne eksponencijale

$$x(t) = c_k e^{j2\pi k F_0 t}$$

u tom slučaju svi su koeficijenti Fourierovog reda, osim c_k , jednaki nuli

sukladno tomu srednja snaga signala je

$$P_x = |c_k|^2$$

88

Gustoća spektra snage periodičnih vremenski kontinuiranih signala

očigledno je da $|c_k|^2$ predstavlja snagu k -te harmoničke komponente signala

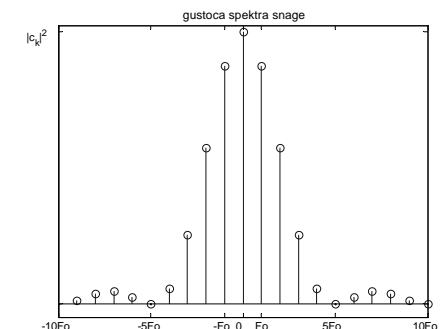
ukupna srednja snaga periodičkog signala je suma srednjih snaga svih harmonika

prikazujemo $|c_k|^2$ kao funkciju frekvencija kF_0 , $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

dijagram pokazuje kako je snaga periodičnog signala raspodijeljena po različitim frekvencijskim (spektralnim) komponentama – dijagram se stoga naziva *gustoća spektra snage*

89

Gustoća spektra snage



90

Gustoća spektra snage

periodični signali imaju, dakle, diskretni ili linijski spektar
 razmak između dviju spektralnih linija jednak je
 recipročnoj vrijednosti osnovnog perioda T_p
 oblik spektra tj. raspodjela snage signala ovisi o
 značajkama signala u vremenskoj domeni
 koeficijenti Fourierovog reda poprimaju kompleksne
 vrijednosti pa ih možemo pisati kao $c_k = |c_k| e^{j\theta_k}$
 umjesto crtanja spektra snage možemo crtati amplitudni
 spektar $\{|c_k|\}$ odnosno fazni spektar $\{\theta_k\}$

Spektar realnog periodičkog signala

za realni periodični $x(t)$ vrijedi

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) [\cos(2\pi k F_0 t) - j \sin(2\pi k F_0 t)] dt$$

odnosno:

$$c_{-k} = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) [\cos(-2\pi k F_0 t) - j \sin(-2\pi k F_0 t)] dt =$$

$$= \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) [\cos(2\pi k F_0 t) + j \sin(2\pi k F_0 t)] dt = c_k^*$$

Spektar realnog periodičkog signala

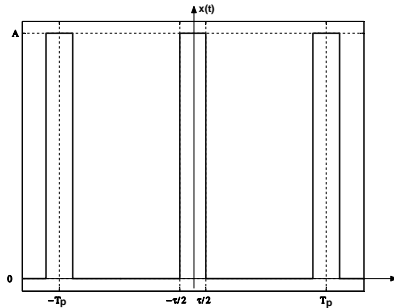
dakle, za realni periodični $x(t)$ koeficijenti Fourierovog
 reda $\{c_k\}$ zadovoljavaju slijedeći uvjet:

$$c_{-k} = c_k^*$$

iz čega slijedi:

$$|c_{-k}| = |c_k| \text{ i } \arg(c_k) = -\arg(c_{-k})$$

Primjer Fourierovog reda periodičnog pravokutnog signala



Primjer Fourierovog reda periodičnog pravokutnog signala

signal je periodičan s osnovnim periodom T_p
 signal je paran tj $x(t) = x(-t)$ pa možemo izabrati interval
 integracije od $-T_p/2$ do $T_p/2$

za $k=0$ slijedi:

$$c_0 = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} x(t) dt = \frac{1}{T_p} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A dt = \frac{A\tau}{T_p}$$

c_0 predstavlja srednju vrijednost (istosmjernu komponentu)
 signala $x(t)$

Primjer Fourierovog reda periodičnog pravokutnog signala

za $k \neq 0$ izračunavamo:

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} x(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt = \frac{1}{T_p} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j2\pi k F_0 t} dt =$$

$$= \frac{A}{T_p - j2\pi k F_0} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{A}{\pi F_0 k T_p} \frac{e^{j\pi k F_0 \tau} - e^{-j\pi k F_0 \tau}}{j2}$$

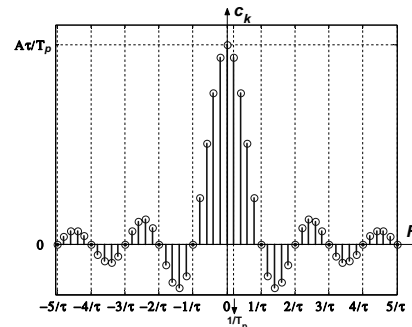
$$= \frac{A\tau}{T_p} \frac{\sin \pi k F_0 \tau}{\pi k F_0 \tau} \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Primjer Fourierovog reda periodičnog pravokutnog signala

$x(t)$ je paran \Rightarrow Fourierovi koeficijenti c_k su realni
 \Rightarrow fazni spektar = 0 za $c_k > 0$
 \Rightarrow fazni spektar = π za $c_k < 0$

za realne c_k umjesto pojedinačnih prikaza amplitudnog i
 faznog spektra obično se prikazuje samo jedan dijagram
 koji označava pozitivne i negativne vrijednosti c_k

Primjer Fourierovog reda periodičnog pravokutnog signala



Primjer Fourierovog reda periodičnog pravokutnog signala

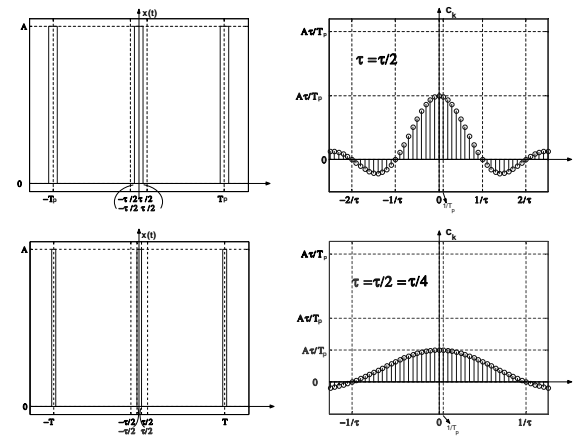
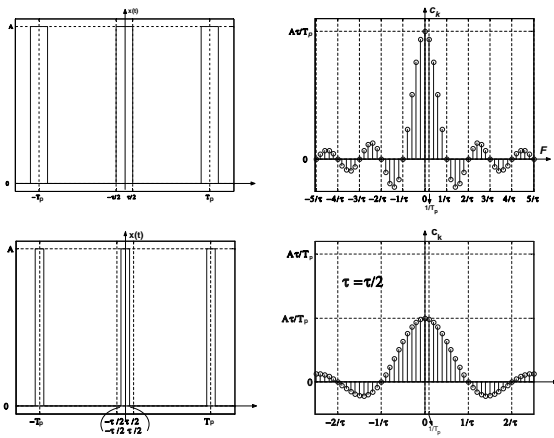
promatraju se Fourierovi koeficijenti za

1. fiksiran T_p i promjenljiv τ
 neka je
 $A = 1$
 i

T_p fiksiran $\Rightarrow F_0 = 1/T_p$ fiksiran

mijenjamo τ :

$$\tau = 0.2 T_p; \quad \tau = 0.1 T_p; \quad \tau = 0.05 T_p;$$



Primjer Fourierovog reda periodičnog pravokutnog signala

zaključujemo:

- razmak između susjednih spektralnih linija je konstantan F_0 tj. proporcionalan osnovnom periodu signala
- razmak između susjednih spektralnih linija je neovisan o τ
- uži pravokutni signal u vremenskoj domeni \Rightarrow širi spektar (snaga signala se širi u frekvencijskom području)



Primjer Fourierovog reda periodičnog pravokutnog signala

- harmonici za koje je snaga jednaka nuli javljaju se na frekvencijama kF_0 za koje vrijedi $\sin \pi k F_0 \tau = 0 \Rightarrow \pi k F_0 \tau = m\pi \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$
- dakle $kF_0 = m/\tau \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$
- tako za $F_0 = 4\text{Hz}$ i $\tau = 0.2T_p$ slijedi da spektralne komponente na frekvencijama $\pm 20\text{ Hz}$, $\pm 40\text{ Hz}$, $\pm 60\text{ Hz}$, (što odgovara Fourierovim koeficijentima c_k za $k = \pm 5, \pm 10, \pm 15, \dots$) su jednake nuli



Primjer Fourierovog reda periodičnog pravokutnog signala

promatraju se Fourierovi koeficijenti za

2. fiksiran τ i promjenljiv T_p

- $A = 1$
- i
- $\tau = \text{fiksiran}$

Mijenjamo T_p :

$$T_p = 2\tau; \quad T_p = 5\tau; \quad T_p = 10\tau;$$

