z - transformacija

z - transformacija

Linearni, vremenski diskretan sustav je opisan jednadžbom diferencija

$$a_0 y[n]+a_1 y[n-1]+a_2 y[n-2]+....+a_N y[n-N]=$$
$$=b_0 u[n]+b_1 u[n-1]+b_2 u[n-2]+....+b_M u[n-M]$$

za pobudu oblika $u[n]=Uz^n$ partikularno rješenje je $y[n] = Yz^n$

Uvrštenjem dobivamo

$$(a_0+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}+....+a_N z^{-N})Yz^n=$$
$$=(b_0+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}+....+b_M z^{-M})Uz^n$$

z - transformacija

$$A(z)\,Y z^n = B(z)\,U z^n$$

kompleksna amplituda odziva je tada

$$Y=\frac{B(z)}{A(z)}U=\frac{b_0+b_1 z^{-1}+\ldots+b_M z^{-M}}{a_0+a_1 z^{-1}+\ldots+a_N z^{-N}}U=H(z)U$$

$$y[n] = UH(z)z^n$$

$H(z)$ je prijenosna funkcija

z - transformacija - nastavak

odziv $y[n]$ se može dobiti i konvolucijskom sumacijom ako je poznat impulsni odziv $h[n]$

$$y[n]=\sum_{j=-\infty}^{+\infty} h[j]u[n-j]$$

za $u[n] = Uz^n$

$$y[n]=U\sum_{j=-\infty}^{+\infty} h[j]z^{n-j} = Uz^n\sum_{j=-\infty}^{+\infty} h[j]z^{-j}$$

prije pokazano $y[n] = H(z)Uz^n$

izjednačavanjem rješenja slijedi $H(z)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty} h[j]z^{-j}$

z - transformacija - nastavak

frekvencijsku karakteristiku dobijemo za $z=e^{j\omega}$

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

prepoznajemo Fourierov red, pa vrijedi

$$h[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$H(e^{j\omega}) = F\,\{h[n]\}$ Fourierova transformacija niza $\{h[n]\}$

$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}=Z\{x[n]\}$ z - transformacija niza $\{x[n]\}$

z - transformacija - nastavak

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}=Z\{x[n]\}$$

Za opći kompleksni broj $z = re^{j\omega}$

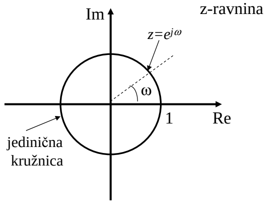
$$X(re^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\left(re^{j\omega}\right)^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(x[n]r^{-n}\right)e^{-j\omega n}$$

Fourierova transformacija niza $\{x[n]r^{-n}\}$

z - transformacija - nastavak

Za r = 1 $\Rightarrow$ $X(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = F\{x[n]\} = X(e^{j\omega})$

dakle, z – transformacija se reducira na Fourierovu transformaciju na konturi u kompleksnoj ravnini koju nazivamo jedinična kružnica



z - transformacija - nastavak

Definiramo područje konvergencije – RoC, z – transformacije (*region of convergence – RoC*) kao područje za z u kojima z – transformacija konvergira pa je potpuna definicija z - transformacije

$$\forall z\in RoC(x),\quad X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

gdje je $RoC(x)\subset Kompleksni$ definirano s

$$RoC(x)=\left\{z=re^{j\omega}\in Kompleksni\,\middle|\,\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|x[n]r^{-n}\right|<\infty\right\}$$

Ako RoC, z – transformacije, uključuje i jediničnu kružnicu tada konvergira i Fourierova transformacija istoga niza.

Područje konvergencije z - transformacije

Primjer transformacije niza $x[n]=a^n\mu[n]$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n\mu[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(az^{-1})^n$$

Da bi $X(z)$ konvergirao mora biti $\sum_{n=0}^{\infty}\left|az^{-1}\right|^n<\infty$

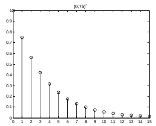
to će biti za: $\left|az^{-1}\right|<1 \quad\Leftrightarrow\quad |z|>|a|$

Tada je:

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(az^{-1})^n=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}\quad \text{za}\quad |z|>|a|$$

Područje konvergencije z - transformacije

primjer: neka je $x[n]=a^n\mu[n]=(0{,}75)^n\mu[n]$



z - transformacija je

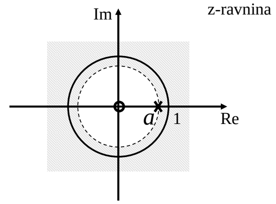
$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(0{,}75)^n s[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(0{,}75z^{-1})^n=\frac{z}{z-0{,}75}$$

$$\text{za: } \left|0{,}75z^{-1}\right|<1 \quad\Leftrightarrow\quad |z|>|0{,}75|$$

Područje konvergencije z - transformacije

z – transformacija je racionalna funkcija

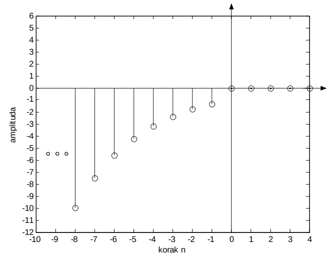
Za ovaj primjer ima jednu *nulu* u z=0 i jedan *pol* u $z=a$



Za $|a|>1$ RoC ne uključuje jediničnu kružnicu i za tu vrijednost a Fourierova transformacija niza $a^n\mu[n]$ ne konvergira

Područje konvergencije z - transformacije

Promotrimo niz: $x[n]=-a^n\mu[-n-1]$ $\qquad a=0{,}75<1$



n	$x[n]$
-1	-1.3333
-2	-1.7778
-3	-2.3704
-4	-3.1605
-5	-4.2140
-6	-5.6187
-7	-7.4915
-8	-9.9887

Područje konvergencije z - transformacije

$$X(z)=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^n\mu[-n-1]z^{-n}=-\sum_{n=-\infty}^{-1}a^n z^{-n}$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}a^{-n}z^{n}=1-\sum_{n=0}^{\infty}(a^{-1}z)^n$$

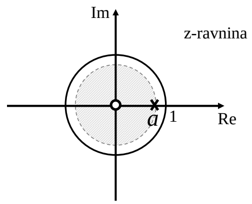
ako je $\left|a^{-1}z\right|<1\Leftrightarrow|z|<|a|$

tada gornja suma konvergira i vrijedi:

$$X(z)=1-\frac{1}{1-a^{-1}z}=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}\quad\text{za}\quad |z|<|a|$$

Područje konvergencije z - transformacije

Na slici područje konvergencije, pol i nula



Usporedbom dva primjera zaključujemo da su algebarski izrazi za $X(z)$, kao i pol i nula identični i jedina je razlika u području konvergencije $\Rightarrow$ treba voditi računa o njemu

z - transformacija kao racionalna funkcija

- z - transformacije su racionalne funkcije, dakle

$$Y(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\ldots+b_Mz^{-M}}{a_0+a_1z^{-1}+\ldots+a_Nz^{-N}}=\frac{\sum_{j=0}^{M}b_jz^{-j}}{\sum_{j=0}^{N}a_jz^{-j}}$$

odnosno

$$Y(z)=z^{(N-M)}\frac{b_0z^M+b_1z^{M-1}+\ldots+b_M}{a_0z^N+a_1z^{N-1}+\ldots+a_N}=z^{(N-M)}\frac{\sum_{j=0}^{M}b_jz^{M-j}}{\sum_{j=0}^{N}a_jz^{N-j}}$$

z - transformacija kao racionalna funkcija

- z - transformacija može biti zapisana alterantivno uz pomoć produkta korijenih faktora:

$$Y(z)=\frac{\sum_{j=0}^{M}b_jz^{-j}}{\sum_{j=0}^{N}a_jz^{-j}}=\frac{b_0}{a_0}\cdot\frac{\prod_{j=1}^{M}(1-z_jz^{-1})}{\prod_{j=1}^{N}(1-p_jz^{-1})}$$

- odnosno u obliku

$$Y(z)=z^{(N-M)}\frac{\sum_{j=0}^{M}b_jz^{M-j}}{\sum_{j=0}^{N}a_jz^{N-j}}=z^{(N-M)}\frac{b_0}{a_0}\frac{\prod_{j=1}^{M}(z-z_j)}{\prod_{j=1}^{N}(z-p_j)}$$

z - transformacija kao racionalna funkcija

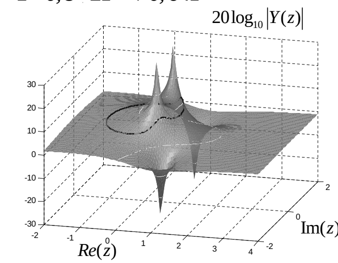
- za korijene $z=s_j$ polinoma u brojniku $Y(s_j)$= 0 i stoga se te vrijednosti od z nazivaju nule od $Y(z)$
- za korijene $z=p_j$ polinoma u nazivniku $Y(s_j)\rightarrow\infty$ i te se vrijednosti od z nazivaju polovi od $Y(z)$

z - transformacija kao racionalna funkcija

- primjer: $Y(z)=\dfrac{1-1{,}826z^{-1}+2{,}1136z^{-2}}{1-0{,}8\ \ 2z^{-1}+0{,}64z^{-2}}$

$s_{1,2}=0.9130\ \pm\ \text{j}1.1314$

$p_{1,2}=0.5657\ \pm\ \text{j}0.5657$



slika3

z - transformacija kao racionalna funkcija

- kako je

$$Y(z)=z^{(N-M)}\,\frac{b_0}{a_0}\,\frac{\prod_{j=1}^{M}(z-z_j)}{\prod_{j=1}^{N}(z-p_j)}$$

- $Y(z)$ ima M konačnih nula i N konačnih polova
- ako je $N > M$ postoji još N-M nula koje se nalaze u z=0
- ako je $N < M$ postoji još M-N polova koji se nalaze u z=0

Područje konvergencije racionalne z - transformacije

- područje konvergencije, RoC, z – transformacije je važna i nužna informacija
- bez informacije o RoC nema jednoznačne veze između niza i njegove z – transformacije
- stoga, z – transformacija mora biti uvijek zadana s njezinim RoC

Područje konvergencije racionalne z - transformacije

- postoji veza između RoC z – transformacije impulsnog odziva diskretnog vremenski stalnog sustava i njegove BIBO stabilnosti
- BIBO (bounded-input, bounded-output) stabilnost je jedan od načina definiranja stabilnosti
- sustav je BIBO stabilan ako

$$\forall n \in Cjelobrojan,\ B_x<\infty,\quad \left|x[n]\right|<B_x$$

$$\Rightarrow \forall n \in Cjelobrojan,\ B_y<\infty,\quad \left|y[n]\right|<B_y$$

Područje konvergencije racionalne z - transformacije

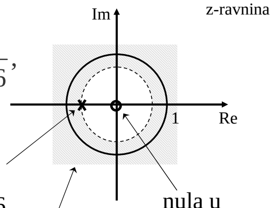
- RoC racionalne z – transformacije je ograničeno mjestom polova
- da bi se razumjelo odnose između polova i RoC korisno je razmotriti položaj polova i nula z – transformacije
- razmotrimo z – transformacije dvaju nizova

Područje konvergencije racionalne z - transformacije

- primjer : z- transformacija $H(z)$ niza $h[n]=(-0,6)^n\mu[n]$ je

$$H(z)=\frac{1}{1+0,6\ \ z^{-1}}=\frac{z}{z+0,6},$$

$$|z|>|-0,6|$$



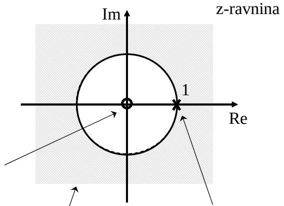
područje konvergencije - RoC

Područje konvergencije racionalne z - transformacije

- z- transformacija niza $\mu[n]$ je

$$H(z)=\frac{1}{1+z^{-1}}=\frac{z}{z-1},$$

$$|z|>1$$



područje konvergencije - RoC

Područje konvergencije racionalne z - transformacije

- razmotrimo tri tipa nizova:
  - niz konačne duljine
  - niz omeđen s lijeva – desni niz
  - niz omeđen s desna – lijevi niz
- RoC ovisi o tipu niza

Područje konvergencije racionalne z – transformacije niza konačnog trajanja

- primjer: neka je $x[n]$ niz konačnog trajanja definiranog za

$$-M\le n\le N,\quad M,N\in Prirodni$$

i $\left|x[n]\right|<\infty$

- njegova z – transformacija je

$$X(z)=\sum_{n=-M}^{N}x[n]z^{-n}=\frac{\sum_{n=0}^{N+M}x[n-M]z^{N+M-n}}{z^N}$$

Područje konvergencije racionalne z – transformacije niza konačnog trajanja

$$X(z)=\sum_{n=-M}^{N}x[n]z^{-n}=\frac{\sum_{n=0}^{N+M}x[n-M]z^{N+M-n}}{z^N}$$

- dakle, $X(z)$ ima M polova u $z=\infty$ i N polova u z = 0
- z- transformacija $X(z)$ niza konačnog trajanja konvergira za sve vrijednosti z ravnine osim možda u z = 0 i/ili u z = ∞

Područje konvergencije racionalne z – transformacije desnog niza

- primjer: desni niz (omeđen s lijeva) zadan za $n \geq 0$ se često naziva kauzalni niz
- neka je $u_1[n]$ kauzalni niz
- njegova z – transformacija je

$$U_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_1[n] \quad z^{-n}$$

Područje konvergencije racionalne z – transformacije desnog niza

- $U_1(z)$ konvergira izvan kruga $|z| = R_1$ uključujući točku $z = \infty$
- međutim, desni niz $u_2[n]$ zadan za $n \geq - M$, za M pozitivan, ima z – transformaciju $U_2(z)$ s M polova u $z = \infty$
- $U_2(z)$ konvergira izvan kruga $|z| = R_2$ ali isključujući točku $z = \infty$

Područje konvergencije racionalne z – transformacije lijevog niza

- primjer: lijevi niz (omeđen s desna) zadan za $n \leq 0$ naziva se nekauzalni niz
- neka je $v_1[n]$ nekauzalni niz
- njegova z – transformacija je

$$V_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} v_1[n] \quad z^{-n}$$

Područje konvergencije racionalne z – transformacije lijevog niza

- pokazano je da lijevi niz $V_1(z)$ konvergira unutar kruga $|z| = R_3$ uključujući točku $z = 0$
- međutim, lijevi niz $v_2[n]$ zadan za $n \leq N$, za N pozitivan, ima z – transformaciju $V_2(z)$ s N polova u $z = 0$
- $V_2(z)$ konvergira unutar kruga $|z| = R_4$ ali isključujući točku $z = 0$

Područje konvergencije racionalne z – transformacije neomeđenog niza

- primjer: z – transformacija neomeđenog niza $w[z]$ je

$$W(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} w[n] z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} w[n] z^{-n}$$

- prvi član desne strane, $\sum_{n=0}^{\infty} w[n] z^{-n}$, može biti interpretiran kao z – transformacija desnog niza i zato konvergira izvan kruga $|z| = R_5$

Područje konvergencije racionalne z – transformacije neomeđenog niza

- drugi član desne strane $\sum_{n=-\infty}^{-1} w[n] z^{-n}$, može se interpretirati kao z – transformacija lijevog niza i zato konvergira unutar kruga $|z| = R_6$
- ako je $R_5 < R_6$, postoji preklapajuće područje konvergencije $R_5 < |z| < R_6$
- ako je $R_5 > R_6$, ne postoji preklapajuće područje konvergencije i z – transformacija ne postoji

Područje konvergencije racionalne z – transformacije neomeđenog niza

- primjer: neka je $u[n]$ neomeđen niz $u[n] = \alpha^n$ gdje α može biti realan ili kompleksan
- njegova z – transformacija je

$$U(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha^n z^{-n}$$

- prvi član desne strane konvergira za $|z| > |\alpha|$, dok drugi član konvergira za $|z| < |\alpha|$

Područje konvergencije racionalne z – transformacije neomeđenog niza

- ne postoji preklapanje između tih dvaju područja konvergencije
- prema tome, z – transformacija niza $u[n] = \alpha^n$ ne postoji

Područje konvergencije racionalne z – transformacije

- područje konvergencije z – transformacija ne može sadržavati ni jedan pol i omeđeno je polovima
- da bi ilustrirali da je z – transformacija omeđena polovima, pretpostavimo da z – transformacija $X(z)$ ima jednostruke polove u $z = \alpha$ i $z = \beta$
- pretpostavimo da je odgovarajući niz $x[n]$ desni niz

Područje konvergencije racionalne z – transformacije

- tada je niz $x[n]$ oblika

  $x[n]=\left(r_1\alpha^n + r_2\beta^n\right)\ \mu[n-N_o], \qquad |\alpha|<|\beta|$

  gdje je N_0 pozitivan ili negativan cijeli broj

- z – transformacija nekog desnog niza oblika

  $\gamma^n\ \mu[n-N_o]$

  postoji ako $\sum_{n=N_0}^{\infty}\left|\gamma^n\ \mu[n-N_o]\right|<\infty$

Područje konvergencije racionalne z – transformacije

- uvjet $\sum_{n=N_0}^{\infty}\left|\gamma^n\ \mu[n-N_o]\right|<\infty$

  je ispunjen za $|z| > |\gamma|$ a nije za $|z| \le |\gamma|$

- z – transformacija desnog niza

  $x[n]=\left(r_1\alpha^n + r_2\beta^n\right)\ \mu[n-N_o], \qquad |\alpha|<|\beta|$

  ima zato područje konvergencije $|\beta| < |z| \le \infty$

Područje konvergencije racionalne z – transformacije

- slično z – transformacija lijevog niza

  $x[n]=\left(r_1\alpha^n + r_2\beta^n\right)\ \mu[-\ n-N_o], \qquad |\alpha|<|\beta|$

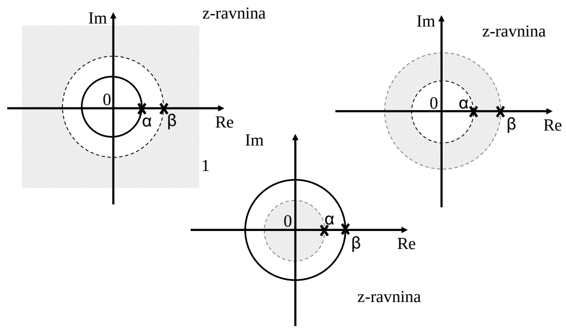
  ima područje konvergencije $0 \le |z| < |\alpha|$

- konačno, za neomeđeni niz, neki od polova doprinose članovima u izvornom nizu za $n < 0$ dok ostali članovi ostali polovi doprinose članovima za $n \ge 0$

Područje konvergencije racionalne z – transformacije

- područje konvergencije je omeđeno s vanjske strane s polom najmanjeg modula koji pridonosi za $n < 0$ i omeđeno s unutarnje strane s polom s najvećim modulom koji doprinosi za $n \ge 0$
- postoji tri različita područja konvergencije za racionalnu z – transformaciju se polovima u $z = \alpha$ i $z = \beta$ $(|\alpha| < |\beta|)$

Područje konvergencije racionalne z – transformacije



Područje konvergencije racionalne z – transformacije

- općenito, ako racionalna z – transformacija ima N polova s R različitih modula, tada postoji R+1 područje konvergencije
- to znači da postoji R+1različitih nizova s istom z - transformacijom
- finalno, racionalna z – transformacija s definiranim područjem konvergencije ima jednoznačni niz kao svoju inverznu z - transformaciju

z – transformacija kauzalnih nizova

Konvergencija z - transformacije

Za kauzalne signale

$\forall z \in RoC(x), \quad X(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} x[n]z^{-n}$

gdje je $RoC(x) \subset Kompleksni$ definirano s

$$RoC(x)=\left\{ z=re^{j\omega} \in Kompleksni \,\middle|\, \sum_{n=0}^{+\infty}\left|x[n]r^{-n}\right|<\infty \right\}$$

$X(z)$ se naziva jednostrana z - transformacija

z - transformacija osnovnih nizova

$$Z\{\delta[n]\}=\sum_{n=0}^{\infty}\delta[n]z^{-n}=1$$

$$RoC(\delta)=\left\{ z=re^{j\omega} \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty}\left|\delta[n]z\right|^{-n}<\infty \right\}=\left\{z\,\middle|\,r>0\right\}$$

$$Z\{\mu[n]\}=\sum_{n=0}^{\infty}\mu[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(z^{-1})^n=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}$$

$$RoC(\mu)=\left\{ z=re^{j\omega} \in Kompleksni \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty}|z|^{-n}<\infty \right\}$$

$$=\left\{z\,\middle|\,|z|>1\right\}$$

z - transformacija osnovnih nizova

$$x[n] = a^n \mu[n]$$

$$Z\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = \frac{1}{1-\left(\frac{z}{a}\right)^{-1}} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

$$RoC(x) = \left\{ z = re^{j\omega} \in Kompleksni \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n |z|^{-n} < \infty \right\}$$

$$= \left\{ z \,\middle|\, |z| > |a| \right\}$$

z - transformacija osnovnih nizova

$$Z\left\{a^n \cos(\omega_0 n)\mu[n]\right\} = \frac{1 - az^{-1}\cos\omega_0}{1 - 2az^{-1}\cos\omega_0 + a^2 z^{-2}} \;, \; |z| > |a|$$

$$Z\left\{a^n \sin(\omega_0 n)\mu[n]\right\} = \frac{az^{-1}\sin\omega_0}{1 - 2az^{-1}\cos\omega_0 + a^2 z^{-2}} \;, \; |z| > |a|$$

z - transformacija - svojstva

linearnost: neka je $w[n] = ax[n] \pm by[n]$

tada je z – transformacija od $w[n]$

$$\forall z \in RoC(w), \quad W(z) = aX(z) \pm bY(z)$$

$$RoC(w) \supset RoC(x) \cap Roc(y)$$

područje konvergencije od w mora uključiti područja konvergencije od x i y

linearnost proizlazi iz definicije z – transformacije

$$W(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(ax[n] \pm by[n]\right) z^{-n} =$$

$$= aX(z) \pm bY(z)$$

z - transformacija - svojstva

pomak unaprijed za j-koraka

$$Z\{x[n+j]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n+j] z^{-n} = \left| n+j = l \right| = \sum_{l=j}^{\infty} x[l] z^{-l+j} =$$

$$= z^j \sum_{l=j}^{\infty} x[l] z^{-l} = z^j \left[X(z) - \sum_{l=0}^{j-1} x[l] z^{-l} \right]$$

za $j = 1$ Z $\{x[n+1]\} = z\,X(z) - zx(0)$

z - transformacija - svojstva

kašnjenje za j-koraka

$$Z\{x[n-j]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n-j] z^{-n} = \left| n-j = l \right| = \sum_{l=-j}^{\infty} x(l) z^{-l-j} =$$

$$= z^{-j} \sum_{l=-j}^{\infty} x[l] z^{-l} = z^{-j} \left(X(z) + \sum_{l=-j}^{-1} x[l] z^{-l} \right)$$

za $n = 1$ Z $\{x[n-1]\} = z^{-1}\,\{X(z) + x[-1]z\} = z^{-1}\,X(z) + x[-1]$

z - transformacija - svojstva

konvolucijska sumacija kauzalnih nizova

$$Y(z) = Z\{y[n]\} = Z\{x[n] * h[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=0}^{n} x[i] h[n-i] \right\} z^{-n}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} x[i] \sum_{n=0}^{\infty} h[n-i] z^{-n} = \left| n - i = j \right| =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} x(i) \sum_{j=-i}^{\infty} h(j) z^{-(i+j)} = \sum_{i=0}^{\infty} x(i) z^{-i} \sum_{j=0}^{\infty} h(j) z^{-j}$$

$$= X(z) H(z)$$

jer je $h(j) = 0$ za $j < 0$

z - transformacija - svojstva

multiplikacija s a^n $y[n] = a^n x[n]$

$$Z\{y[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

multiplikacija sa $e^{j\omega n}$ (frekvencijski pomak) $y[n] = x[n]\, e^{j\omega n}$

$$Z\{y[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] e^{j\omega n} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \left(\frac{z}{e^{j\omega}}\right)^{-n}$$

z - transformacija - svojstva

multiplikacija s n

$$Z\{nx[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} nx[n] z^{-n} = z \sum_{n=0}^{\infty} x[n] n z^{-n-1} =$$

$$= z \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \left(-\frac{d}{dz} z^{-n} \right) = -z \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} \right) =$$

$$= -z \frac{d}{dz} X(z)$$

multiplikacija s n^j $\quad Z\left\{n^j x[n]\right\} = \left(-z \dfrac{d}{dz}\right)^j X(z)$

z - transformacija - svojstva

početna vrijednost niza n

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} = x[0] + \sum_{n=1}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

$$\Rightarrow \quad x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

konačna vrijednost niza n

$$\lim_{n \to \infty} x[n] = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1})\, X(z), \quad \text{ako postoji } x[\infty]$$

z - transformacija - svojstva

konačna vrijednost niza n

$$\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1}\left(1-z^{-1}\right)X(z), \quad \text{ako postoji } x[\infty]$$

limes za z → 1 ima smisla samo kada je točka z = 1 locirana unutar područja konvergencije $X(z)$

dokaz započinjemo s nizom $x[n] - x[n-1]$

$$Z\{x[n]-x[n-1]\} = X(z) - z^{-1}X(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(x[n]-x[n-1]\right)z^{-n}$$

$$\left(1-z^{-1}\right)X(z) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\left(x[n]-x[n-1]\right)z^{-n}$$

z - transformacija - svojstva

uzmimo limes za z → 1

$$\lim_{z\to 1}\left(1-z^{-1}\right)X(z) = \lim_{z\to 1}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\left(x[n]-x[n-1]\right)z^{-n}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\lim_{z\to 1}\sum_{n=0}^{N}\left(x[n]-x[n-1]\right)z^{-n}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\left(x[n]-x[n-1]\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(x[0]-x[-1]+x[1]-x[0]+x[2]-x[1]+\dots..\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} x[N]$$

Inverzna z - transformacija

z - transformacija je definirana kao

$$\forall z\in RoC(x), \quad X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

gdje je $RoC(x)\subset Kompleksni$ definirano s

$$RoC(x) = \left\{ z = re^{j\omega}\in Kompleksni \;\middle|\; \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|x[n]r^{-n}\right| < \infty \right\}$$

za opći kompleksni broj $z=re^{j\omega}$

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\left(re^{j\omega}\right)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(x[n]r^{-n}\right)e^{-j\omega n}$$

Fourierova transformacija niza $\{x[n]r^{-n}\}$

Inverzna Z - transformacija

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\left(re^{j\omega}\right)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(x[n]r^{-n}\right)e^{-j\omega n}$$

Fourierova transformacija niza $\{x[n]r^{-n}\}$

Inverziju dobijemo na temelju izraza za Fourierove koeficijente

$$x[n]r^{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(re^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \quad \Big| \cdot r^n$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(re^{j\omega})\left(re^{j\omega}\right)^n d\omega = \left| \begin{array}{l} re^{j\omega} = z \\ dz = jre^{j\omega}d\omega \end{array} \quad d\omega = \frac{dz}{jz} \right|$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz$$

opći izraz za inverznu Z transformaciju

Inverzna Z - transformacija
1. razvoj u red

$Y(z) = y[0] + y[1]z^{-1} + y[2]z^{-2} + \dots$

razvoj u McLaurentov red oko točke $z^{-1} = 0$

$$y[n] = \frac{1}{n!}\frac{d^nY(z^{-1})}{d(z^{-1})^n}\bigg|_{z^{-1}=0}$$

Primjer :

$$Y(z) = \frac{2-0{,}5z^{-1}}{1-0{,}5z^{-1}-0{,}5z^{-2}} = 2+0{,}5z^{-1}+1{,}25z^{-2}+0{,}875z^{-3}+\dots$$

$y[n] = 2\,\delta[n] + 0{,}5\,\delta[n-1] + 1{,}25\,\delta[n-2] + 0{,}875\,\delta[n-3] + \dots$

$y[n] = 1+(-0{,}5)^n$ za n ≥ 0

Inverzna Z - transformacija
2. rastavljanje racionalne funkcije na parcijalne razlomke

$$Z\{a^n\} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A}{z-q_1} + \frac{B}{z-q_2} + \dots \quad \Big(\cdot z$$

$$Y(z) = \frac{Az}{z-q_1} + \frac{Bz}{z-q_2} + \dots$$

$$y[n] = Aq_1^n + Bq_2^n + \dots$$

Inverzna Z - transformacija
2. rastav racionalne funkcije na parcijalne razlomke - primjer

$$Y(z) = \frac{2z^2-0{,}5z}{z^2-0{,}5z-0{,}5}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2z-0{,}5}{z^2-0{,}5z-0{,}5} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+0{,}5} \quad \Big| \cdot z$$

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z+0{,}5}$$

u domeni koraka izlazi $y[n] = 1^n + (-0{,}5)^n = 1 + (-0{,}5)^n$

Inverzna Z - transformacija
3. integralom po zatvorenoj krivulji radijusa većeg od radijusa apsolutne konvergencije

$$y(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint Y(z)z^{n-1}dz = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}_i\left[Y(z)z^{n-1}\right]$$

$$\mathrm{Res}_i\left[Y(z)z^{n-1}\right] = \lim_{z\to z_i}\left[Y(z)z^{n-1}(z-z_i)\right]$$

Rješenje jednadžbi diferencija upotrebom Z - transformacije

$a_0y[n] + a_1y[n-1] + a_2y[n-2] = b_0x[n] + b_1x[n-1]$

Iz $Z\{x[n-1]\} = z^{-1}\{X(z) + x[-1]z\} = z^{-1}X(z) + x[-1]$

i iz $Z\{x[n-2]\} = z^{-2}X(z) + x[-1]z^{-1} + x[-2]$

$\{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}]Y(z) =$

$= \{b_0 + b_1z^{-1}\}X(z) + b_1x[-1] - a_2x[-2] - (a_1 + a_2z^{-1})\,y[-1]$

$$Y(z) = \frac{b_0+b_1z^{-1}}{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}X(z) + E(z)$$

uz početne uvjete jednake nuli $Y(z) = \frac{b_0+b_1z^{-1}}{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}X(z) = H(z)X(z)$

Rješenje jednadžbi diferencija upotrebom Z - transformacije

$H(z)$ - transfer funkcija vremenski diskretnog sustava

Za pobudu jediničnim uzorkom $x[n] = \delta[n]$, $X(z) = 1$

dobivamo $Y(z) = H(z)$

Transfer funkcija je Z - transformat odziva na pobudu $\{\delta[n]\}$ uz početne uvjete jednake nuli

primjer: Pobuđeni mirni sustav drugog reda

$$y[n]-0.8\ \ 2y[n-1]+0.64y[n-2]=x[n]+2x[n-1]$$

$$H(z)=\frac{1+2z^{-1}}{1-0.8\sqrt{2}\cdot z^{-1}+0.64z^{-2}}=\frac{z^2+2z}{z^2-0.8\sqrt{2}\cdot z+0.64}$$

program za rastav na parcijalne razlomke:

```
%program za rastav na parcijalne razlomke
num = input('unesi koeficijente brojnika =');
den = input('unesi koeficijente nazivnika =');
[r,p,k] = residuez(num,den);
disp('residuumi'); disp(r');
disp('polovi'); disp(p');
disp('konstante'); disp(k);
```


primjer: Pobuđeni mirni sustav drugog reda

```
>>parcrazl
unesi koeficijente brojnika =[1 2 0]
unesi koeficijente nazivnika =[1 -.8*sqrt(2) .64]
residuumi
   0.5000 - 2.2678i   0.5000 + 2.2678i

polovi
   0.5657 + 0.5657i   0.5657 - 0.5657i

konstante
```


primjer: Pobuđeni mirni sustav drugog reda

$$x[n]=\delta[n]\Rightarrow X(z)=1$$

$$Y(z)=H(z)\cdot 1=H(z)$$

$$Y(z)=\frac{0.5-2.2678j}{1-(0.5657+0.5657j)z^{-1}}+\frac{0.5+2.2678j}{1-(0.5657-0.5657j)z^{-1}}$$

$$y[n]=(0.5-2.2678j)\cdot(0.5657+0.5657j)^n$$
$$+(0.5+2.2678j)\cdot(0.5657-0.5657j)^n$$

primjer: Pobuđeni mirni sustav drugog reda

$$y[n]=(0.5-2.2678j)\cdot(0.5657+0.5657j)^n$$
$$+(0.5+2.2678j)\cdot(0.5657-0.5657j)^n$$

$$y[n]=2.3223\cdot e^{j1.3538}\cdot(0.8\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}})^n$$
$$+2.3223\cdot e^{-j1.3538}\cdot(0.8\cdot e^{j\frac{\pi}{4}})^n$$

$$y[n]=2\cdot 2.3223\cdot(0.8)^n\cos(\frac{\pi}{4}n-1.3538)\ \text{ za }\ n\geq 0$$

Impulsni odziv i konvolucija kontinuiranih sustava

- poznavanje impulsnog odziva nekog sustava je dovoljno za potpun opis njegovog vladanja.
- odziv linearnog vremenski stalnog sustava na opću pobudu opisuje se konvolucijskim integralom:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)\,x(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\,x(t-\tau)d\tau$$

gdje je $h(t)$ odziv sustava na jedinični impuls

Pobuda sustava kompleksnom eksponencijalom

- pokazano je da je odziv linearnog sustava pobuđenog kompleksnom eksponencijalom opet kompleksna eksponencijala:

$$\left.\begin{array}{l} x(t)=Xe^{st} \\ y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\,x(t-\tau)d\tau \end{array}\right\} y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\,Xe^{s(t-\tau)}d\tau$$

$$y(t)=Xe^{st}\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\,e^{-s\tau}d\tau$$

Pobuda sustava kompleksnom eksponencijalom

$$y(t)=\underbrace{Xe^{st}}_{x(t)}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\,e^{-s\tau}d\tau}_{H(s)}$$

$$H(s)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau.$$

- to nam kazuje da je kompleksna eksponencijala svojstvena funkcija (*eigenfunction*) konvolucije!

Pobuda sustava kompleksnom eksponencijalom

- izraz za $H(s)$ je ujedno izraz za dvostranu *Laplaceovu* transformaciju impulsnog odziva h

$$H(s)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau.$$

- izraz za jednostranu *Laplaceovu* transformaciju dobivamo uz kauzalnu pobudu $x(t) = Xe^{st}\cdot\mu(t)$!!!

Model sustava s ulazno izlaznim varijablama

- diferencijalni sustavi su oni koji se daju opisati jednom ili više diferencijalnih jednadžbi.
- linearni sustav s jednim ulazom i jednim izlazom:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = f(t) =$$
$$= b_m x^{(m)} + b_{m-1} x^{(m-1)} + \ldots + b_0 x$$

- desna strana od $f(t)$ – funkcija smetnje ili funkcija pobude, općenito funkcija ulaznog signala $x(t)$ i njegovih derivacija do m – tog reda, $m \le n$

Transfer funkcija linearnog, vremenski stalnog sustava

- linearne, vremenski invarijantne sustave možemo proučavati pomoću Laplaceove transformacije:
  - diferencijalne jednadžbe prelaze u algebarske,
  - sustav je predstavljen u domeni kompleksne frekvencije.
- za određivanje transfer funkcije poći ćemo od Laplaceove transformacije ulazno izlaznog modela:

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}, \quad Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}.$$

Transfer funkcija linearnog, vremenski stalnog sustava

- transformacija derivacije ulaza i izlaza je:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^m x}{dt^m}\right\} = s^m X(s) - s^{m-1} x(0) - \ldots - x^{(m-1)}(0),$$
$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n y}{dt^n}\right\} = s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - \ldots - y^{(n-1)}(0).$$

- na temelju linearnosti Laplaceove transformacije može se napisati:

$$\left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0\right) Y(s) = \left(b_m s^m + \ldots + b_0\right) X(s) + E(s).$$

Transfer funkcija linearnog, vremenski stalnog sustava

- ako vrijedi:

$$y^{(\nu)}(0) = 0 \quad \text{za} \quad \nu = 0,1,2,3,4,\ldots,n-1$$
$$x^{(\mu)}(0) = 0 \quad \text{za} \quad \mu = 0,1,2,3,4,\ldots,m-1$$

dobivamo odziv mirnog sustava:

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + \ldots + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_0} X(s).$$

- dobiveni izraz možemo napisati:

$$Y(s) = H(s) X(s).$$

Transfer funkcija linearnog, vremenski stalnog sustava

- funkcija H(s) zove se transfer funkcija ili prijenosna funkcija sustava.
- definirana je za miran sustav kao:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{x(t)\}} \qquad x(t)=0 \text{ za } t<0 .$$

- ako znamo H(s), sustav možemo predstaviti kao blok: