# Signali i sustavi

## Sustavi drugog reda

SIMULINK primjer

iired1



## Prisilni odziv sustava

- prisilni odziv sustava predstavlja partikularno rješenje nehomogene jednadžbe.
  - općenito se može dobiti Lagrangeovom metodom varijacije parametara.
- za pobudu eksponencijalnom funkcijom računanje odziva je jednostavno jer se $y_p(t)$ može predstaviti eksponencijalom (deriviranjem se mijenja samo kompleksna amplituda eksponencijale).
- određivanje kompleksne amplitude temelji se na metodi neodređenih koeficijenata.



## Prisilni odziv sustava

- opći oblik diferencijalne jednadžbe:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) =$$
$$= b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) \ldots + b_0 u(t)$$

- pobudni signal $u(t)$ u obliku eksponencijale

$$u(t) = U e^{st}, \qquad U = |U| e^{j\varphi}$$

$U$ kompleksna amplituda ($|U|$ amplituda, $\varphi$ faza),
$s$ - kompleksna frekvencija, $s = \sigma + j\Omega$,



## Prisilni odziv sustava

- pretpostavljeno rješenje ($Y$ neodređeni koeficijent): $y(t) = Ye^{st}$
- uvrštavanjem u polaznu jednadžbu

$$\left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots a_0\right) Ye^{st} = \left(b_m s^m + \ldots + b_0\right) Ue^{st}$$

$$Y = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0} U = H(s) U$$

- amplituda partikularnog rješenja $Y$ određena je amplitudom pobude, svojstvima sustava te kompleksnom frekvencijom $s$.



## Prijenosna funkcija

- Transfer ili prijenosna funkcija sustava $H(s)$ - veličina koja određuje odnos kompleksne amplitude prisilnog odziva $Ye^{st}$ i kompleksne amplitude pobude $Ue^{st}$ .

$$H(s) = \frac{b_m s^m + \ldots + b_0}{a_n s^n + \ldots a_0} = \frac{Y}{U}$$

- $H(s)$ ima značenje faktora kojim treba množiti kompleksnu amplitudu ulaza da se dobije amplituda izlaza

$$Y = H(s)U$$



## Prijenosna funkcija

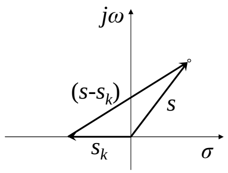
- općenito je transfer ili prijenosna funkcija sustava $H(s)$ racionalna funkcija koju možemo prikazati kao

$$H(s) = K \frac{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

- $K$ je realni faktor a $s_i$ ($i$=1,..,$m$) i $p_i$ ($i$=1,..,$n$) su nule odnosno polovi prijenosne funkcije
- svaki od članova ($s$-$s_k$) može biti predstavljen kao vektor u kompleksnoj $s$ ravnini



## Prijenosna funkcija




- vektor ($s$-$p_k$) je usmjeren od $s_k$ do $s$ i može biti prikazan u polarnom obliku

$$(s - s_k) = |s - s_k| e^{j\angle(s-s_k)}$$

- stoga se prijenosna funkcija sastoji od produkta i kvocijenta vektora



## Prijenosna funkcija

$$H(s) = K \frac{|s-s_1| e^{j\angle(s-s_1)} |s-s_2| e^{j\angle(s-s_2)} \cdots |s-s_m| e^{j\angle(s-s_m)}}{|s-p_1| e^{j\angle(s-p_1)} |s-p_2| e^{j\angle(s-p_2)} \cdots |s-s_p| e^{j\angle(s-p_n)}}$$

tako da vrijedi

$$|H(s)| = K \frac{|s-s_1||s-s_2|\cdots|s-s_m|}{|s-p_1||s-p_2|\cdots|s-s_p|}$$

i

$$\boxed{\begin{aligned}\angle H(s) = \angle K + \angle(s-s_1) + \angle(s-s_2) + \angle(s-s_m) \\ - \angle(s-p_1) - \angle(s-p_2) - \angle(s-p_n)\end{aligned}}$$

pa je $H(s) = |H(s)| e^{j\angle H(s)}$

## Prisilni odziv sustava

- primjer:

$$\ddot{y}(t)+0,2\dot{y}(t)+0,16y(t)=u(t)$$

- za pobudu $u(t)=Ue^{st}$

  partikularno rješenje je oblika $y(t)=Ye^{st}$

- kompleksna amplituda partikularnog rješenja $Y$ je

$$Y=\frac{1}{s^2+0,2s+0,16}U$$



## Prisilni odziv sustava

- partikularno rješenje je

$$y(t)=UH(s)e^{st}=\frac{1}{s^2+0,2s+0,16}Ue^{st}$$

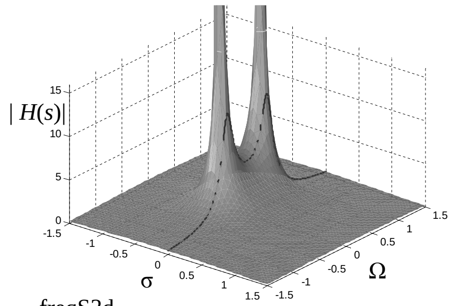
- prijenosna funkcija je

$$H(s)=\frac{1}{s^2+0,2s+0,16}$$

$$p_{1,2}=-0.1\ \pm \text{j } 0.3873$$

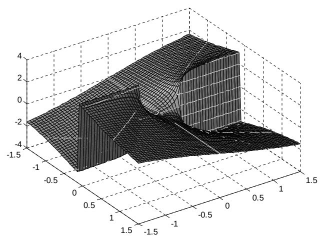


## Prijenosna funkcija

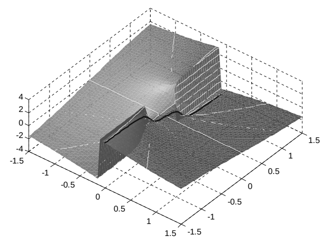



freqS3d



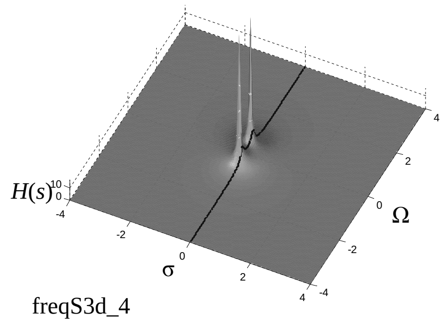






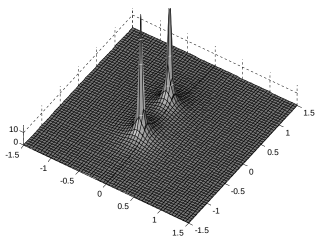
freqS3d_faza






freqS3d_4





freqS3d_4



## Prisilni odziv sustava

- specijalni slučajevi kompleksne frekvencije pobude s:
  - $s = 0$ - prisilni odziv na pobudu konstantom

$$u=Ue^{0t}=U,\quad H(0)=\frac{b_0}{a_0}$$



## Prisilni odziv sustava

- $s=j\Omega$ – odziv na harmonijsku (ili sinusnu) pobudu

$$u(t)=Ue^{(0+j\Omega)t}=Ue^{j\Omega t}=U\cos(\Omega t)+jU\sin(\Omega t)$$

kompleksna amplituda odziva je

$$Y=\frac{b_m(j\Omega)^m+b_{m-1}(j\Omega)^{m-1}+\ldots+b_0}{a_n(j\Omega)^n+a_{n-1}(j\Omega)^{n-1}+\ldots+a_0}U=H(j\Omega)U$$

a odziv $y(t)=UH(j\Omega)e^{j\Omega t}$

## Prisilni odziv sustava

$$H(j\Omega) = H(\Omega) = H_r(\Omega) + jH_i(\Omega) = A(\Omega)e^{j\varphi(\Omega)},$$

$H(j\Omega)$ se naziva frekvencijska karakteristika sustava.

- $A(\Omega)$ – amplitudno frekvencijska karakteristika.
- $\varphi(\Omega)$ – fazno frekvencijska karakteristika.



## Prisilni odziv sustava

- za pobudu $u(t) = Ue^{-j\Omega t}; \quad U \in Realni$

kompleksna amplituda odziva je

$$Y = \frac{b_m(-j\Omega)^m + b_{m-1}(-j\Omega)^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n(-j\Omega)^n + a_{n-1}(-j\Omega)^{n-1} + \ldots + a_0} U = H(-j\Omega)U$$

a odziv

$$y(t) = UH(-j\Omega)e^{-j\Omega t}$$



## Prisilni odziv sustava

- za pobudu $u(t) = \frac{Ue^{j\Omega t} + Ue^{-j\Omega t}}{2} = U\cos(\Omega t)$

odziv je

$$y(t) = \frac{UH(j\Omega)e^{j\Omega t} + UH(-j\Omega)e^{-j\Omega t}}{2}$$

$$y(t) = \frac{UH(j\Omega)e^{j\Omega t}}{2} + \left(\frac{UH(j\Omega)e^{j\Omega t}}{2}\right)^*$$



## Prisilni odziv sustava

$$y(t) = 2Re\left\{\frac{UH(j\Omega)e^{j\Omega t}}{2}\right\}$$

$$y(t) = Re\left\{U\left|H(j\Omega)\right|e^{\angle H(j\Omega)}e^{j\Omega t}\right\}$$

$$y(t) = U\left|H(j\Omega)\right|\cos(\Omega t + \angle H(j\Omega))$$



SIMULINK primjer

primjer1



## Frekvencijska karakteristika kontinuiranog sustava

- za naš primjer

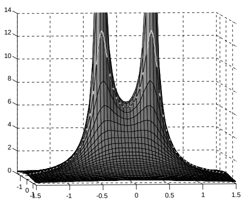
$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 0,2s + 0,16}$$

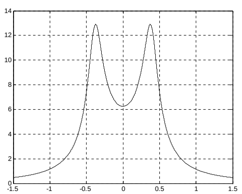
$$= \frac{1}{(s + 0,1 - j0,3873)(s + 0,1 + j0,3873)}$$

$$H(j\Omega) = \frac{1}{(j\Omega)^2 + 0,2(j\Omega) + 0,16}$$



## Frekvencijska karakteristika kontinuiranog sustava

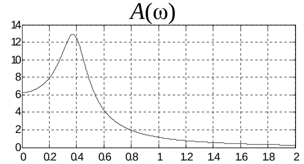




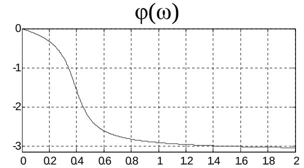


## Frekvencijske karakteristike

$A(\omega)$



$\varphi(\omega)$

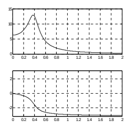


| $\Omega$ | $A(\Omega)$ | $\varphi(\Omega)$ |
|---|---|---|
| 0.0 | 6.2500 | 0.0000 |
| 0.2 | 7.9057 | -0.3218 |
| 0.4 | 12.5000 | -1.5708 |
| 0.6 | 4.2875 | -2.6012 |
| 0.8 | 1.9764 | -2.8198 |
| 1.0 | 1.1581 | -2.9078 |
| 1.2 | 0.7679 | -2.9562 |
| 1.4 | 0.5490 | -2.9873 |
| 1.6 | 0.4130 | -3.0090 |
| 1.8 | 0.3225 | -3.0252 |
| 2.0 | 0.2590 | -3.0378 |

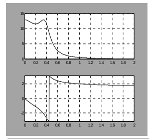


## Frekvencijske karakteristike

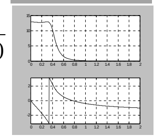
$$H(s) = \frac{1}{(s + 0,1 - j0,3873)(s + 0,1 + j0,3873)}$$



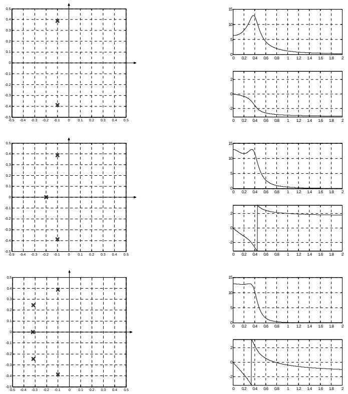
$$H(s) = \frac{0,413}{(s + 0,2)(s + 0,1 - j0,3873)(s + 0,1 + j0,3873)}$$



$$H(s) = \frac{0.1059}{(s + 0,322)(s + 0,1 - j0,3873)(s + 0,1 + j0,3873)} \cdot \frac{1}{(s + 0.3162 - j0.2450)(s + 0.3162 + j0.2450)}$$



## *Frekvencijske karakteristike*





## *Diskretni sustavi – model s ulazno izlaznim varijablama*

- opis linearnog sustava jednadžbom diferencija

$$a_0 y[n]+a_1 y[n-1]+a_2 y[n-2]+....+a_N y[n-N]=$$
$$=b_0 u[n]+b_1 u[n-1]+b_2 u[n-2]+....+b_M u[n-M]$$

- rješenje ove jednadžbe je:

$$y[n]=y_h[n]+y_p[n]$$

- dakle, zbroj rješenja homogene jednadžbe i partikularnog rješenja



## *Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija*

- Određivanje partikularnog rješenja
  - Lagrangeova metoda varijacije parametara
    - rješenje se dobiva u eksplicitnom obliku
    - primjena rezultira složenim sumacijama
  - Metoda neodređenog koeficijenta
    - ograničena na pobude oblika polinoma i eksponencijalnih nizova
    - veliki broj pobuda može se aproksimirati gore navedenim nizovima
    - češće se upotrebljava u analizi sustava



## *Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...*

- razmotrimo partikularno rješenje za kompleksni eksponencijalni ulazni niz:
- pobuda eksponencijalog oblika

$$u[n]=Ue^{\varepsilon n}=Uz^n; \quad e,\varepsilon\in \textit{Kompleksni}$$

- partikularno rješenje možemo napisati u obliku

$$y_p[n] = Y z^n$$

- $U$ i $Y$ su kompleksne amplitude pobude i odziva



## *Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...*

- uvrštenjem pretpostavljenog rješenja $Yz^n$ u jednadžbu

$$(a_0+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}+....+a_N z^{-N})Yz^n=$$
$$=(b_0+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}+....+b_M z^{-M})Uz^n$$

$$A(z)\, Y z^n = B(z)\, U z^n$$

pa je kompleksna amplituda odziva

$$Y=\frac{B(z)}{A(z)}U=\frac{b_0+b_1 z^{-1}+\ldots+b_M z^{-M}}{a_0+a_1 z^{-1}+\ldots+a_N z^{-N}}U=H(z)U$$



## *Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...*

- partikularno rješenje (prisilni odziv) je dakle
  $y_p[n]=H(z)Uz^n$

- odziv nehomogene jednadžbe diferencija uz pobudu $u[n]=Uz^n$ je prema tome

$$y[n]=y_h[n]+y_p[n]$$
$$=C_1 q_1^n+C_1 q_2^n+.....+C_1 q_N^n+H(z)Uz^n$$



## *Prijenosna funkcija diskretnog sustava*

- transfer funkcija se definira kao

$$H(z)=\frac{b_0+b_1 z^{-1}+\ldots+b_M z^{-M}}{a_0+a_1 z^{-1}+\ldots+a_N z^{-N}}$$

  a može se formalno napisati iz jednadžbe diferencija zamjenom operatora $E^{-1}$ s brojem $z^{-1}$

- jednadžbu diferencija

$$a_0 y[n]+a_1 y[n-1]+a_2 y[n-2]+....+a_N y[n-N]=$$
$$=b_0 u[n]+b_1 u[n-1]+b_2 u[n-2]+....+b_M u[n-M]$$



## *Prijenosna funkcija diskretnog sustava*

možemo prikazati uz pomoć operatora za pomak $E^{-1}$

$$\left\{a_0+a_1 E^{-1}+a_2 E^{-2}+....+a_N E^{-N}\right\}y[n]=$$
$$=\left\{b_0+b_1 E^{-1}+b_2 E^{-2}+....+b_M E^{-M}\right\}u[n]$$

gdje je $\quad (a_N E^{-N} y)[n]\triangleq a_N y[n-N]$

jednadžba diferencija se može prikazati i kao

$$A(\mathrm{E})\,y=B(\mathrm{E})\,u$$



## *Prijenosna funkcija diskretnog sustava*

odnosno $\quad y=H(E)u \quad$ gdje je

$$H(E)=\frac{B(E)}{A(E)}=\frac{b_0+b_1 E^{-1}+b_2 E^{-2}+....+b_M E^{-M}}{a_0+a_1 E^{-1}+a_2 E^{-2}+....+a_N E^{-N}}$$

složeni operator kojeg treba interpretirati kao jednadžbu diferencija

- prema prije kazanom slijedi

$$H(z)=\frac{b_0+b_1 z^{-1}+\ldots+b_M z^{-M}}{a_0+a_1 z^{-1}+\ldots+a_N z^{-N}}$$

## Primjer rješavanja nehomogene jednadžbe diferencija

- Primjer: naći odziv diskretnog sustava opisanog jednadžbom diferencija

$$y[n]-0.8\ \ 2y[n-1]+0.64y[n-2]=u[n]$$

uz $y[-1]=y[-2]=0$

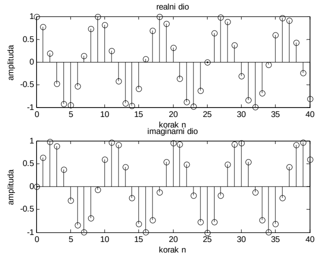
- neka je pobuda neprigušena kompleksna eksponencijala:

$$u[n]=Uz^n=Ue^{j\omega_0 n}=1e^{j0,22\pi n}=(0.7705+j0.6374)^n$$
$$=\cos(0.22\pi n)+j\sin(0.22\pi n)$$



## Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...

$$u[n]=e^{j0,22\pi n}=(0.7705+j0.6374)^n=\cos(0.22\pi n)+j\sin(0.22\pi n)$$






## Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...

- jednadžbu diferencija se može riješiti korak po korak $n$=0,1,2,..30 :

$$y[0]=1\cdot e^0+0.8\ \ 2\cdot 0-0.64\cdot 0=1$$
$$y[1]=1\cdot e^{j0.22\pi}+0.8\ \ 2\cdot 1-0.64\cdot 0=1.902+j0.637$$
$$y[2]=......$$

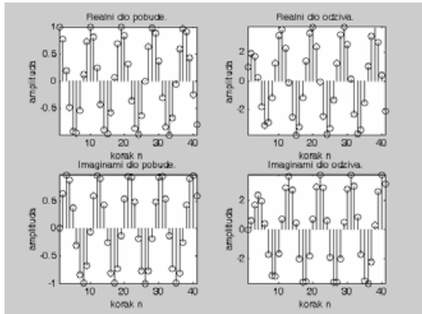


## Primjer rješavanja jednadžbe diferencija

| | | |
|---|---|---|
| korak 0: | $u$[0] = 1 | $y$[0] = 1 |
| korak 1: | $u$[1] = 0.77051+j0.63742 | $y$[1] = 1.9019+j0.6374 |
| korak 2: | $u$[2] = 0.18738+j0.98229 | $y$[2] = 1.6991+j1.7035 |
| korak 3: | $u$[3] = -0.48175+j0.87631 | $y$[3] = 0.2233+j2.3956 |
| korak 4: | $u$[4] = -0.92978+j0.36812 | $y$[4] = -1.7645+j1.9882 |
| korak 5: | $u$[5] = -0.95106- j0.30902 | $y$[5] = -3.0903+j0.4072 |
| korak 6: | $u$[6] = -0.53583- j0.84433 | $y$[6] = -2.9028- j1.6561 |
| korak 7: | $u$[7] = 0.12533- j0.99211 | $y$[7] = -1.1811- j3.1264 |
| korak 8: | $u$[8] = 0.72897- j0.68455 | $y$[8] = 1.2506- j3.1617 |
| korak 9: | $u$[9] = 0.99803- j0.06279 | $y$[9] = 3.1688- j1.6390 |

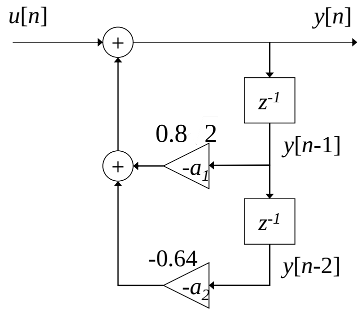


## Primjer rješavanja jednadžbe diferencija






## Blok dijagram sustava






## Primjer rješavanja nehomogene jednadžbe diferencija

- riješimo sada istu jednadžbu analitički
- rješenje homogene jednadžbe :

$$y[n]-0.8\ \ 2y[n-1]+0.64y[n-2]=0$$
$$\Downarrow\ y_h[n]=Cq^n$$
$$1-0.8\ \ 2q^{-1}+0.64q^{-2}=0$$



## Primjer rješavanja jednadžbe diferencija

Korijeni su : $q_{1,2}=0.8e^{\pm j\frac{\pi}{4}}=0.4\ \ 2(1\pm j)$, pa izlazi :

$$y_h[n]=C_1q_1^{\,n}+C_2q_2^{\,n}=0.8^n\left[C_1e^{j\frac{\pi}{4}n}+C_2e^{-j\frac{\pi}{4}n}\right]$$

Partikularno rješenje oblika $y_p[n]=H(e^{j0,22\pi})e^{j0,22\pi n}$

$$H(z)=\frac{1}{1-0.8\ \ 2z^{-1}+0.64z^{-2}}\Rightarrow$$

$$H(e^{j0,22\pi})=\frac{1}{1-0.8\ \ 2e^{-j0,22\pi}+0.64\left(e^{j0,22\pi}\right)^{-2}}=3.54\ -\ j1.32=3.78e^{-j0.114\pi}$$

$$Y=H(e^{j0,22\pi})\cdot 1=3.54\ -\ j1.32=3.78e^{-j0.114\pi}$$



## Primjer rješavanja nehomogene jednadžbe diferencija

pa je partikularno rješenje

$$y_p[n]=(3.54\ -\ j1.32)e^{j0,22\pi n}$$

Kompletno rješenje tj. totalni odziv je :

$$y[n]=y_h[n]+y_p[n]=$$
$$=0.8^n\left[C_1e^{j\frac{\pi}{4}n}+C_2e^{-j\frac{\pi}{4}n}\right]+(3.54\ -\ j1.32)e^{j0,22\pi n}\quad \text{za } n\geq 0$$

## Primjer rješavanja nehomogene jednadžbe diferencija

- iz polazne jednadžbe:

$$y[n]-0.8\ \ 2y[n-1]+0.64y[n-2]=1\cdot e^{j\omega_0 n}$$

za $n$=0,1 slijedi

$$y[0]=1\cdot e^{0}+0.8\ \ 2\cdot 0-0.64\cdot 0=1$$

$$y[1]=1\cdot e^{j0.22\pi}+0.8\ \ 2\cdot 1-0.64\cdot 0=1.902+j0.637$$

vrijednost kompletnog rješenja za $n$=0,1 :

$$y[0]=1=C_1+C_2+3.54-j\cdot 1.32$$

$$y[1]=1.902+j\cdot 0.637=0.8\left[C_1 e^{j\frac{\pi}{4}}+C_2 e^{-j\frac{\pi}{4}}\right]+(3.54-j\cdot 1.32)\cdot e^{j0.22\cdot\pi}$$



## Primjer rješavanja nehomogene jednadžbe diferencija

dobivamo:

$$C_1=-2.46+j\cdot 0.86=2.6060\cdot \mathrm{e}^{j2.8053}$$

$$C_2=-0.08+j\cdot 0.46=0.4669\cdot e^{j1.743}$$

$$y[n]=y_h[n]+y_p[n]=$$

$$=0.8^n\left[C_1 e^{j\frac{\pi}{4}n}+C_2 e^{-j\frac{\pi}{4}n}\right]+\underbrace{(3.54\ -\ j1.32)}_{3.78e^{-j0.114\pi}}e^{j0,22\pi n}\quad \text{za } n\geq 0$$

$$y[n]=0.8^n\left[2.61e^{j2.81}e^{j\frac{\pi}{4}n}+0.467e^{j1.74}e^{-j\frac{\pi}{4}n}\right]+3.78e^{-j0.114\pi}\cdot e^{j0.22\pi n}$$



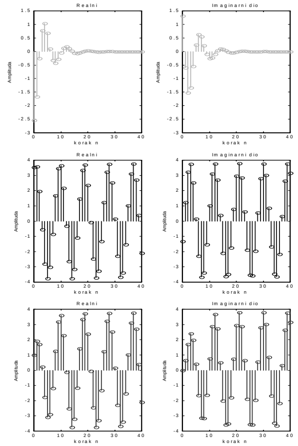
## Primjer rješavanja nehomogene jednadžbe diferencija

Pogledajmo sada razdvojene odzive:

partikularno rješenje: $y_p[n]=Y\cdot e^{j\omega_0 n}$

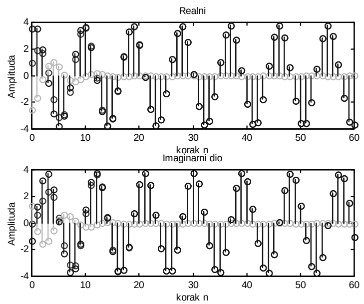
vlastito titranje sustava ili komplementarno rješenje: $y_v[n]=C_1 q_1^{\,n}+C_2 q_2^{\,n}$





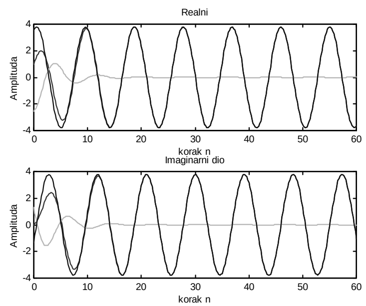



## Diskusija rješenja






## Ukupno rješenje






## Primjer rješavanja nehomogene jednadžbe diferencija

- obzirom da je $|q_1|=|q_2|=0.8$, vlastito titranje sustava trne u nulu proporcionalno sa $0.8^n$
- za linearne sustave kod kojih su moduli svih korijena karakterističnog polinoma $|q_i|<1$,odziv sustava $y[n]$ na trajnu periodičku pobudu postaje jednak prisilnom odzivu $y_p[n]$ za veliki $n$
- ….. vlastito titranje $y_v[n]$ isčezava, i kažemo da je sustav ušao u stacionarno stanje.



## Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...

- $H(z)$ je prijenosna funkcija
- prijenosna ili transfer funkcija daje odnos kompleksnih amplituda prisilnog odziva i pobude, kad je pobuda $Uz^n$

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\left.\frac{y_p[n]}{u[n]}\right|_{u[n]=Uz^n}=\frac{Yz^n}{Uz^n}=\frac{Y}{U}$$

- pokazano je da se transfer funkcija može lako napisati iz jednadžbe diferencija formalnom zamjenom operatora $E^{-1}$ s brojem $z^{-1}$



## Prijenosna funkcija diskretnog sustava

- prijenosnu funkciju:

$$H(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\ldots+b_Mz^{-M}}{a_0+a_1z^{-1}+\ldots+a_Nz^{-N}}=\frac{\sum_{j=0}^{M}b_jz^{-j}}{\sum_{j=0}^{N}a_jz^{-j}}$$

možemo pisati i u obliku

$$H(z)=z^{(N-M)}\frac{b_0z^M+b_1z^{M-1}+\ldots+b_M}{a_0z^N+a_1z^{N-1}+\ldots+a_N}=z^{(N-M)}\frac{\sum_{j=0}^{M}b_jz^{M-j}}{\sum_{j=0}^{N}a_jz^{N-j}}$$

## *Prijenosna funkcija diskretnog sustava*

- prijenosnu funkciju možemo pisati uz pomoć produkta korijenih faktora:

$$H(z)=\frac{\sum_{j=0}^{M} b_j z^{-j}}{\sum_{j=0}^{N} a_j z^{-j}}=\frac{b_0}{a_0}\cdot\frac{\prod_{j=1}^{M}(1-z_j z^{-1})}{\prod_{j=1}^{N}(1-p_j z^{-1})}$$

- odnosno u obliku

$$H(z)=z^{(N-M)}\frac{\sum_{j=0}^{M} b_j z^{M-j}}{\sum_{j=0}^{N} a_j z^{N-j}}=z^{(N-M)}\frac{b_0}{a_0}\frac{\prod_{j=1}^{M}(z-z_j)}{\prod_{j=1}^{N}(z-p_j)}$$

$z_1, z_2, \ldots, z_M$ su nule a $p_1, p_2, \ldots, p_N$ polovi prijenosne funkcije



## *Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...*

- partikularno rješenje (prisilni odziv) je dakle
  $y_p[n]=H(z)Uz^n$
- ovisno o $z$, partikularni niz može biti
  - rastući ili padajući aperiodičan ili valovit
  - stalan ili periodičan
- linearna kombinacija eksponencijala može dati realni kosinusni niz

$$re^{j\omega n}+re^{-j\omega n}=2r\cos(\omega n)$$



## *Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...*

- za pobudu $u[n]=Uz^n=U(1)^n$

  partikularno rješenje je

$$y_p[n]=Yz^n=\left(H(z)Uz^n\right)_{z=1}=H(1)\cdot U\cdot(1)^n$$

- za pobudu $u[n]=Uz^n=U(-1)^n$

  partikularno rješenje je

$$y_p[n]=Yz^n=\left(H(z)Uz^n\right)_{z=-1}=H(-1)\cdot U\cdot(-1)^n$$



## *Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...*

- za pobudu $u[n]=Uz^n=U(e^{j\omega})^n=e^{j\omega n}$ za $U=1$

  partikularno rješenje je

$$y_p[n]=Yz^n=\left(H(z)Uz^n\right)_{z=e^{j\omega}}=H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$$

- pa je

$$H(e^{j\omega})=\frac{b_0+b_1e^{-j\omega}+\ldots+b_Me^{-jM\omega}}{a_0+a_1e^{-j\omega}+\ldots+a_Ne^{-jN\omega}}$$

  frekvencijska karakteristika diskretnog sustava



## *Frekvencijska karakteristika*

- frekvencijska karakteristika diskretnog sustava

$$H(e^{j\omega})=\frac{b_0+b_1e^{-j\omega}+\ldots+b_Me^{-jM\omega}}{a_0+a_1e^{-j\omega}+\ldots+a_Ne^{-jN\omega}}$$

$\left.\begin{array}{l} H(e^{j\omega}) \text{ funkcija od } e^{j\omega} \\ e^{j\omega}=e^{j(\omega+2\pi i)} \end{array}\right\}$ vrijednost transfer funkcije za $z=e^{j\omega}$ je periodična s $2\pi$

$H(e^{j\omega})=H_r(e^{j\omega})+H_i(e^{j\omega})$

$=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \longrightarrow$ $A(\omega)=|H(e^{j\omega})|$
$\varphi(\omega)=\arg(H(e^{j\omega}))$



## *Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...*

- za prije zadani sustav

  $y[n]-0.8\sqrt{2}y[n-1]+0.64y[n-2]=u[n]$

  uz $y[-1]=y[-2]=0$

- i pobudu

$$u[n]=Uz^n=e^{j\omega_0 n}=e^{j0,22\pi n}$$

  prijenosna funkcija je

$$H(z)=\frac{1}{(1-0.8\sqrt{2}z^{-1}+0.64z^{-2})}$$



## *Frekvencijska karakteristika*

- a frekvencijska karakteristika

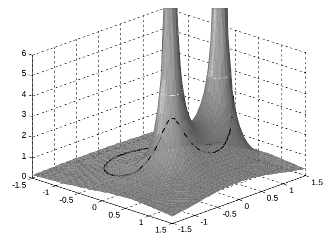
$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{(1-0.8\sqrt{2}e^{-j\omega}+0.64e^{-2j\omega})}$$

- frekvencijsku karakteristiku izračunavamo iz

$$H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}=H(e^{j\omega})$$



## *Frekvencijska karakteristika*




freqz3d



## *Frekvencijska karakteristika*

- za konkretnu frekvenciju pobude omjer kompleksne amplitude odziva i pobude je

$\omega=0,22\pi\Rightarrow$

$$H(e^{j0,22\pi})=\frac{1}{1-0.8\sqrt{2}e^{-j0,22\pi}+0.64\left(e^{j0,22\pi}\right)^{-2}}=3.54\ -\ j1.32$$

- odredimo omjer kompleksne amplitude odziva u stacionarnom stanju i pobude za još nekoliko frekvencija:

video clip 9

$$\omega=0,\ 0.15\pi,\ 0.20\pi,\ 0.23\pi, 0.25\pi, 0.27\pi,\ 0.30\pi, 0.35\pi, 0.4\pi, 0.5\pi, 0.7\pi$$

## Frekvencijska karakteristika

- frekvencijska karakteristika danog sustava je

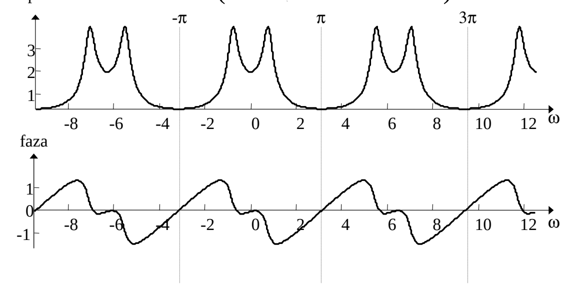
primjer

12.mov



## Frekvencijska karakteristika

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-0.8\;2e^{-j\omega}+0.64e^{-2j\omega})}$$






## Frekvencijska karakteristika

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-0.8\;2e^{-j\omega}+0.64e^{-2j\omega})}$$

Koeficijent $\{a_i\}$ i $\{b_i\}$ su realni te vrijedi

$H(e^{-j\omega}) = H^*(e^{j\omega})$ ⇨ $H_r(e^{j\omega})$ i $A(\omega)$ parne funkcije od $\omega$
$H_i(e^{j\omega})$ i $\varphi(\omega)$ neparne funkc. od $\omega$



## Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava ...

- Frekvencijska karakteristika se može odrediti grafički iz:

$$H(z) = K\frac{\prod_{i=1}^{m}(z-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(z-q_i)}$$

praćenjem apsolutne vrijednosti $|H(e^{j\omega})|$ i argumenta $H(e^{j\omega})$ transfer funkcije na jediničnoj kružnici $z = e^{j\omega}$ ravnine $z$



## Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava ...

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = K\frac{\prod_{i=1}^{m}\left|(e^{j\omega}-z_i)\right|}{\prod_{i=1}^{n}\left|(e^{j\omega}-q_i)\right|}$$

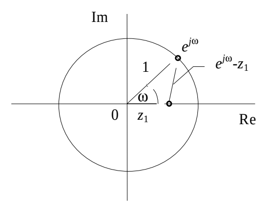
$$\arg H(e^{j\omega}) = \sum\left[\arg(e^{j\omega}-z_i) - \arg(e^{j\omega}-q_i)\right]$$

- svaki korijeni faktor transfer funkcije daje svoj individualni doprinos modulu (multiplikativno) i fazi (aditivno).



## Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava ...

- grafički prikaz u polarnom koordinatnom sustavu




korjeni faktori → vektori



## Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava ...

vrijednost transfer funkcije na frekvenciji $\omega$

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = K\frac{\prod_{1}^{M} d_i}{\prod_{1}^{N} l_i}$$

$\{d_i\}$ - udaljenost točke na kružnici $e^{j\omega}$ do nultočki $\{z_i\}$

$\{l_i\}$ - udaljenost točke na kružnici $e^{j\omega}$ do polova $\{p_i\}$

fazni kut transfer funkcije

$$\arg H(e^{j\omega}) = \sum_{1}^{M}\varphi_i - \sum_{1}^{N}\psi_i$$

$\varphi_i = \arg(e^{j\omega}) - \arg(z_i)$

$\psi_i = \arg(e^{j\omega}) - \arg(p_i)$

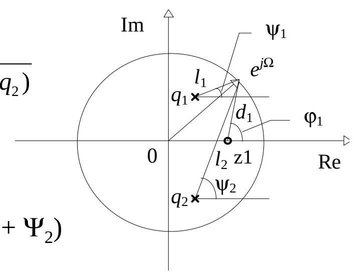


## Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava ...

Primjer:

$$H(z) = K\frac{z-z_1}{(z-q_1)(z-q_2)}$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = K\frac{d_1}{l_1 l_2}$$




$\arg H(e^{j\omega}) = \varphi_1 - (\Psi_1 + \Psi_2)$



## Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava ...

Za naš primjer

$$H(z) = \frac{1}{(z-q_1)(z-q_2)}$$

⇩ $z = e^{j\omega}$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(e^{j\omega}-q_1)(e^{j\omega}-q_2)}$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \frac{1}{\left|(e^{j\omega}-0{,}8e^{j\pi/4})(e^{j\omega}-0{,}8e^{-j\pi/4})\right|}$$

12.mov