Kontinuirani vremenski stalni linearni sustavi

Model sustava s ulazno izlaznim varijablama

Kontinuirani sustavi – model s ulazno izlaznim varijablama

- kontinuirani sustav je općenito opisan s više simultanih diferencijalnih jednadžbi.
- često se više simultanih diferencijalnih jednadžbi svodi na jednu jednadžbu višeg reda koja veže jednu izlaznu i jednu ulaznu varijablu.

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = f(t) =$$
$$= b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) \ldots + b_0 u(t)$$

Kontinuirani sustavi – model s ulazno izlaznim varijablama

- koeficijenti $\{a_i\}$ i $\{b_i\}$
  - konstantni → vremenski stalan linearni sustav
  - funkcija vremena → vremenski promjenjivi linearni sustav
  - zavise od ulaznih ili izlaznih varijabli i njihovih derivacija → nelinearni sustav

Kontinuirani sustavi – model s ulazno izlaznim varijablama

- rješenje diferencijalne jednadžbe

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = f(t) =$$
$$= b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) \ldots + b_0 u(t)$$

ima dvije komponente:

- $y_h(t)$ - rješenje homogene jednadžbe
- $y_p(t)$ - partikularno rješenje

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Klasične metode rješavanja

- jednadžba postaje homogena za $f(t) = 0$:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + ... + \ a_0 y = 0$$

- jednadžba je n - tog reda → ima n linearno nezavisnih rješenja, pa se opće rješenje može prikazati kao linearna kombinacija pojedinačnih rješenja.

$$y_h(t) = K_1 y_1(t) + K_2 y_2(t) + ... + K_n y_n(t)$$

Klasične metode rješavanja

- pretpostavlja se rješenje oblika: $y(t) = e^{pt}$, $p \in$ C.
- supstitucijom se dobije izraz:

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0) e^{pt} = 0.$$

- karakteristična jednadžba gornje diferencijalne jednadžbe

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0$$

Klasične metode rješavanja

- opće rješenje uz n različitih karakterističnih korijena

$$y_h(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \ldots + K_n e^{p_n t} = \sum_{i=1}^{n} K_i e^{p_i t}$$

- opće rješenje uz k jednakih od ukupno n korijena

$$y_h(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 t e^{p_1 t} + \ldots + K_k t^{k-1} e^{p_1 t}$$
$$+ K_{k+1} e^{p_{k+1} t} + \ldots + K_n e^{p_n t}$$

Vremenski stalni sustavi

- opće rješenje uz korijene višestrukosti $m_1, m_2, ..., m_n$

$$y_h(t) = \sum_{i=1}^{n'} e^{p_i t} \sum_{j=1}^{m_i} K_{ij} t^{j-1}$$

gdje je

$$\sum_{i=1}^{n'} m_i = n$$

Vremenski stalni sustavi

- rješenje homogene jednadžbe – komplementarno rješenje ili slobodni odziv sustava,
  - postoji i kada nema pobude za $K_i \neq 0$,
  - naziva se i vlastito gibanje ili titranje sustava jer opisuje titranje energije u sustavu bez vanjskog poticaja.
  - komponente slobodnog odziva titraju isključivo karakterističnim frekvencijama sustava p_i, koje zavise od strukture i parametara sustava, a ne od pobude.
  - komplementarno rješenje prisutno je u općem rješenju nehomogene jednadžbe.

Amplitude vlastitog titranja sustava

- opće rješenje diferencijalne jednadžbe za slučaj nejednakih korijena je:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} K_i e^{p_i t} + y_p(t)$$

- konstante K_i određuju se iz početnih uvjeta danih preko vrijednosti funkcije i njenih derivacija u $t = 0$.
- uzastopnom derivacijom izraza za $y(t)$ u t=0 dobiva se sustav linearnih algebarskih jednadžbi.

Amplitude vlastitog titranja sustava

$$y(0) - y_p(0) = K_1 + K_2 + \ldots + K_n$$
$$\dot{y}(0) - \dot{y}_p(0) = p_1 K_1 + p_2 K_2 + \ldots p_n K_n$$
$$\vdots$$
$$y^{(n-1)}(0) - y_p^{(n-1)}(0) = p_1^{n-1} K_1 + p_2^{n-1} K_2 + \ldots + p_n^{n-1} K_n$$

- Van der Mondova determinanta sustava sastavljena od potencija korijena p_i , p_i^{n-1}.

Amplitude vlastitog titranja sustava

- uz konstantnu ili periodičku pobudu partikularno rješenje se naziva *stacionarno stanje*.
- komplementarno rješenje iščezava s vremenom pa se naziva *prijelazno* ili *prolazno stanje*.

Amplitude vlastitog titranja sustava

- Prijelazno stanje sastoji se od titranja vlastitim frekvencijama p_i sustava.
- Amplitude titranja u prijelaznom stanju određene su razlikom početnog stanja $\{y^{(i)}(0)\}$ i iznosa partikularnog rješenja $\{y_p^{(i)}(0)\}$ u trenutku $t = 0$.

Amplitude vlastitog titranja sustava

- Prvi specijalni slučaj: početni uvjeti jednaki partikularnom rješenju u $t = 0$

$$y^{(i)}(0) - y_{\mathrm{p}}^{(i)}(0) = 0, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

  - trivijalno rješenje, $K_i = 0$.
  - prijelaznog procesa nema, već stacionarno stanje kreće odmah i ima frekvenciju pobude.

Amplitude vlastitog titranja sustava

- drugi specijalni slučaj: *početni uvjeti jednaki 0*

$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0, \; \ldots \; , y^{(n-1)}(0) = 0.$$

- sustav je bez početne energije **-** *miran sustav*
- označimo s K_{pi} konstante koje slijede iz početnih uvjeta kada je sustav miran

Amplitude vlastitog titranja sustava

- Treći specijalni slučaj: $f(t) = 0$ – nepobuđen sustav

$$y_{\mathrm{p}}(t) = 0, \quad \dot{y}_{\mathrm{p}}(t) = 0 \;\; ,\ldots \; , y_{\mathrm{p}}^{(n-1)}(t) = 0.$$

- označimo s K_{0i} konstante koje slijede iz početnih uvjeta $y_{\mathrm{p}}^{(i)}(0) = 0.$

Amplitude vlastitog titranja sustava

- ukupno rješenje prikazano pomoću K_{0i} i K_{pi}:

$$y(t) = \left[\sum_{i=1}^{n} K_{0i} e^{p_i t} + \sum_{i=1}^{n} K_{pi} e^{p_i t} \right] + y_p(t)$$

- dio s *vlastitim titranjem* frekvencijom p_{i} u zagradi te *prisilno titranje* $y_{\mathrm{p}}(t)$ frekvencijom pobude.

Amplitude vlastitog titranja sustava

- ukupno rješenje prikazano pomoću K_{0i} i $K_{\mathrm{p}i}$ može biti prikazano i ovako

$$y(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} K_{0i} e^{p_i t}}_{\text{odziv nepobuđenog sustava}} + \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n} K_{pi} e^{p_i t} + y_p(t) \right]}_{\text{odziv mirnog sustava}}$$

- odziv *nepobuđenog sustava* koji titra s p_i
- u zagradi je odziv *mirnog sustava* koji titra s p_i i frekvencijom pobude.

Prisilni odziv sustava

- Prisilni odziv sustava predstavlja partikularno rješenje nehomogene jednadžbe.
  - Općenito se može dobiti Lagrangeovom metodom varijacije parametara.
- Za pobudu eksponencijalnom funkcijom računanje odziva je jednostavno jer se $y_p(t)$ može predstaviti eksponencijalom (deriviranjem se mijenja samo kompleksna amplituda eksponencijale).
- Određivanje kompleksne amplitude temelji se na metodi neodređenih koeficijenata.

Odziv sustava primjer

- naći odziv sustava opisanog diferencijalnom jednadžbom

$$\ddot{y}(t)+0,2\dot{y}(t)+0,16y(t)=u(t)$$

$$\text{uz } u(t)=0,64s(t) \text{ i } y(0)=-3;\ \dot{y}(0)=-1$$

- karakteristična jednadžba i karakteristične frekvencije su

$$p^2+0,2p+0,16=0 \Rightarrow p_{1,2}=-0,1\pm j0,3873$$

Odziv sustava primjer

- pa je rješenje homogene jednadžbe

$$y_h(t)=K_1e^{(-0,1+j0,3873)t}+K_2e^{(-0,1-j0,3873)t}$$

- partikularno rješenje je oblika

$$y_p(t)=As(t)\ =4s(t)$$

- uvrštenjem u polaznu jednadžbu i

$$\text{za } \ddot{y}_p(t)=0, \dot{y}_p(t)=0 \Rightarrow$$

$$0,16A=0,64 \Rightarrow A=4$$

Odziv sustava primjer

- totalno rješenje je

$$y(t)=K_1e^{(-0,1+j0,3873)t}+K_2e^{(-0,1-j0,3873)t}+4s(t)$$

- konstante K_1 i K_2 određuju se iz početnih vrijednosti
- rješenje i njegova derivacija su

$$y(t)=K_1e^{p_1t}+K_2e^{p_2t}+4s(t)$$

$$\dot{y}(t)=p_1K_1e^{p_1t}+p_2K_2e^{p_2t}$$

Odziv sustava primjer

- za $t=0$

$$\left.\begin{aligned} y(0)&=K_1+K_2+4 \\ \dot{y}(0)&=p_1K_1+p_2K_2 \end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$K_1=-3,5+2,1947j=4,1312e^{j2,5815}$$

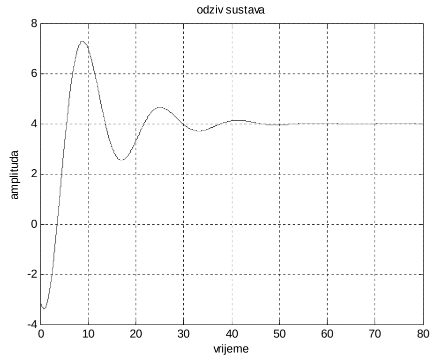
$$K_2=-3,5-2,1947j=4,1312e^{-j2,5815}$$

- konačno totalno rješenje je

$$y(t)=4,1312e^{j2,5815}e^{-0,1t}e^{j0,3873t}+4,1312e^{-j2,5815}e^{-0,1t}e^{-j0,3873t}+4s(t)$$

$$y(t)=8,2624e^{-0,1t}\cos(0,3873t+2,5815)+4s(t)$$

Odziv sustava primjer



Odziv nepobuđenog sustava primjer

- totalno rješenje možemo naći i kao zbroj nepobuđenog i odziv mirnog sustava
- odziv nepobuđenog sustava je

$$y_{nep}(t)=K_{01}e^{(-0,1+j0,3873)t}+K_{02}e^{(-0,1-j0,3873)t}$$

- konstante K_{01} i K_{02} određuju se iz početnih vrijednosti
- rješenje i njegova derivacija su

$$y_{nep}(t)=K_{01}e^{p_1t}+K_{02}e^{p_2t}$$

$$\dot{y}_{nep}(t)=p_1K_{01}e^{p_1t}+p_2K_{02}e^{p_2t}$$

Odziv sustava primjer

- za $t=0$

$$\left.\begin{aligned} y_{nep}(0)&=K_{01}+K_{02} \\ \dot{y}_{nep}(0)&=p_1K_{01}+p_{02}K_2 \end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$K_{01}=-1,5+1,6783j=2,2509e^{j2,3002}$$

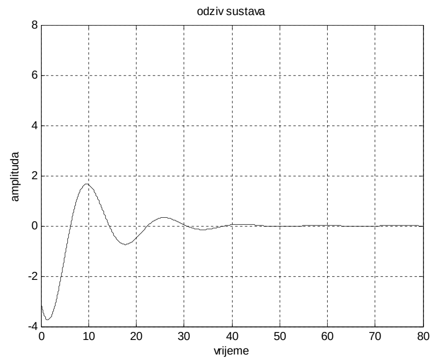
$$K_{02}=-1,5-1,6783j=2,2509e^{-j2,3002}$$

- konačno, rješenje nepobuđenog sustava je

$$y_{nep}(t)=2,2509e^{j2,3002}e^{-0,1t}e^{j0,3873t}+2,2509e^{-j2,3002}e^{-0,1t}e^{-j0,3873t}$$

$$y_{nep}(t)=4,5018e^{-0,1t}\cos(0,3873t+2,3002)$$

Odziv sustava primjer



Odziv mirnog sustava primjer

- odziv mirnog sustava je

$$y_{mirn}(t)=K_{p1}e^{(-0,1+j0,3873)t}+K_{p2}e^{(-0,1-j0,3873)t}+4s(t)$$

- konstante K_{p1} i K_{p2} određuju se iz početnih vrijednosti
- rješenje i njegova derivacija su

$$y_{mirn}(t)=K_{p1}e^{p_1t}+K_{p2}e^{p_2t}+4$$
$$\dot{y}_{mirn}(t)=p_1K_{p1}e^{p_1t}+p_2K_{p2}e^{p_2t}$$

Odziv sustava primjer

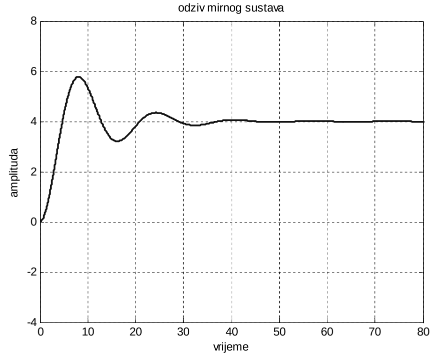
- za $t=0$

$$\left.\begin{aligned} y_{mirn}(0)&=K_{p1}+K_{p2}+4\\ \dot{y}_{mirn}(0)&=p_1K_{p1}+p_2K_{p2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$
$$K_{p1}=-2+0,5164\,j=2,0656e^{j2,8889}$$
$$K_{p2}=-2-0,5164\,j=2,0656e^{-j2,8889}$$

- konačno, rješenje mirnog sustava je

$$y_{mirn}(t)=2,0656e^{j2,8889}e^{-0,1t}e^{j0,3873t}+2,0656e^{-j2,8889}e^{-0,1t}e^{-j0,3873t}+4s(t)$$
$$y_{mirn}(t)=4,1312e^{-0,1t}\cos(0,3873t+2,8889)+4s(t)$$

Odziv sustava primjer

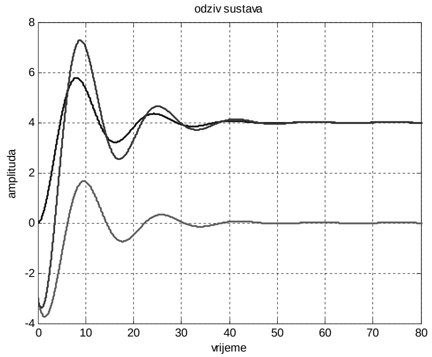


Odziv nepobuđenog sustava primjer

- totalno rješenje možemo naći i kao zbroj nepobuđenog i odziv mirnog sustava

$$y(t)=y_{nep}(t)+y_{mirn}(t)$$
$$y(t)=(-1,5+1,6783\,j)e^{(-0,1+j0,3873)t}+(-1,5-1,6783\,j)e^{(-0,1-j0,3873)t}$$
$$+(-2,0+0,5164\,j)e^{(-0,1+j0,3873)t}+(-2,0-0,5164\,j)e^{(-0,1-j0,3873)t}+4s(t)$$
$$y(t)=(-3,5+2,1947\,j)e^{(-0,1+j0,3873)t}+(-3,5-2,1947\,j)e^{(-0,1-j0,3873)t}+4s(t)$$
$$y(t)=4,5018e^{-0,1t}\cos(0,3873t+2,3002)+$$
$$+4,1312e^{-0,1t}\cos(0,3873t+2,8889)+4s(t)$$
$$y(t)=8,2624e^{-0,1t}\cos(0,3873t+2,5815)+4s(t)$$

Odziv sustava primjer



Signali i sustavi

Sustavi drugog reda

Vladanje i svojstva kontinuiranih sustava drugog reda

- linearni vremenski stalan sustav drugog reda s jednim ulazom i jednim izlazom opisan je s

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}c_1 & c_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+du$$

- jednadžba stanja se može transformirati u diferencijalnu jednadžbu drugog reda:

$$\ddot{x}_1-\mathrm{T}\dot{x}_1+\Delta x_1=w(t)\quad \text{ili}$$
$$\ddot{x}_2-\mathrm{T}\dot{x}_2+\Delta x_2=v(t).$$

Vladanje i svojstva kontinuiranih sustava drugog reda

- pri tom su:

$T=a_{11}+a_{22}$ trag matrice A

$\Delta=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ determinanta od A

$$w(t)=-a_{22}b_1u+a_{12}b_2u+b_1\dot{u}$$
$$v(t)=-a_{11}b_2u+a_{21}b_1u+b_2\dot{u}$$

- Ako su obje konstante $a_{12}=a_{21}=0$ (matrica ***A*** je dijagonalna) sustav je opisan s dvije razvezane jednadžbe prvog reda.

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- uobičajeno je jednadžbu drugog reda nepobuđenog sustava pisati u obliku:

$$\ddot{y}+2\alpha\dot{y}+\omega_0^2y=0,$$

$2\alpha=-\mathrm{T}$, α je faktor prigušenja,

$\omega_0^2=\Delta$, ω_0 je frekvencija neprigušenog titranja.

- analizirajmo odziv ovog sustava

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- karakteristična jednadžba je:

$$p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 = 0,$$

- njezina rješenja su karakteristične ili prirodne frekvencije sustava drugog reda.

$$p_{12} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \begin{cases} -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} & \text{za} \quad \alpha > \omega_0 > 0 \\ -\alpha & \text{za} \quad \alpha = \omega_0 > 0 \\ -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} & \text{za} \quad 0 < \alpha < \omega_0 \end{cases}$$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- rješenje je oblika: $y(t) = Y_1 e^{p_1 t} + Y_2 e^{p_2 t}$
- proizvoljne konstante određuju početni uvjeti $y(0)$ i $\dot{y}(0)$.
- rješenje se može napisati u obliku:

$$y(t) = \frac{y(0)\,p_2 - \dot{y}(0)}{p_2 - p_1} e^{p_1 t} + \frac{\dot{y}(0) - y(0)\,p_1}{p_2 - p_1} e^{p_2 t}.$$

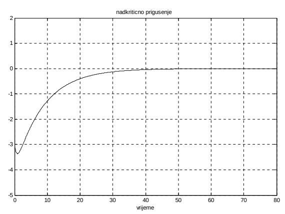
Vladanje i svojstva sustava drugog reda

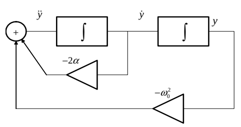
- zavisno od veličina α i ω_0 postoji tzv.
  - nadkritično prigušenje $\alpha > \omega_0$,
  - kritično prigušenje $\alpha = \omega_0$,
  - podkritično prigušenje $\alpha < \omega_0$,
  - neprigušeni slučaj $\alpha = 0$.

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- za: $\alpha = 0,75; \quad \omega_0 = 0,4$

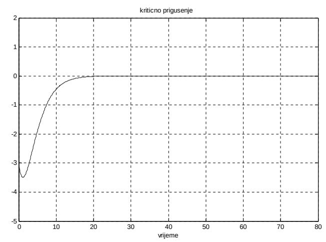
$$\alpha > \omega_0 \Rightarrow p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -0,75 \pm 0,6344$$
$$= -0,1156$$
$$= -1,3844$$





Vladanje i svojstva sustava drugog reda

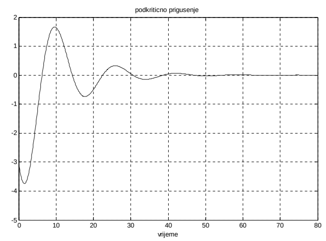
- za: $\alpha = \omega_0 = 0,4 \Rightarrow p_{1,2} = -\alpha = -0,4$



Vladanje i svojstva sustava drugog reda

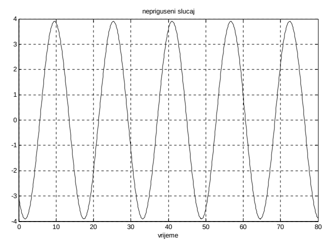
- za: $\alpha = 0,1; \quad \omega_0 = 0,4$

$$\alpha < \omega_0 \Rightarrow p_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -0,1 \pm j0.3873$$



Vladanje i svojstva sustava drugog reda

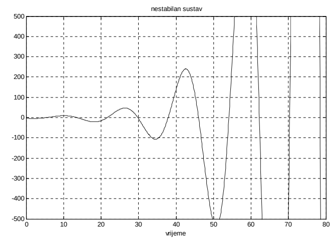
- za: $\alpha = 0; \omega_0 = 0,4 \Rightarrow p_{1,2} = \pm j\sqrt{\omega_0^2} = \pm 0,4$



Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- za: $\alpha = -0,1; \quad \omega_0 = 0,4$

$$\alpha < \omega_0 \Rightarrow p_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 0,1 \pm j0.3873$$



Vladanje i svojstva sustava drugog reda

SIMULINK primjer

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- rješenje homogene jednadžbe stanja može se dobiti pretpostavkom da eksponencijalne funkcije $x_1 = X_1 e^{pt}$, $x_2 = X_2 e^{pt}$ zadovoljavaju skup od dvije jednadžbe:

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$
$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- dobije se sustav karakterističnih algebarskih jednadžbi:

$$\begin{matrix} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{matrix} \xrightarrow[x_2 = X_2 e^{pt}]{x_1 = X_1 e^{pt}} \begin{matrix} pX_1 e^{pt} = \left(a_{11}X_1 + a_{12}X_2\right)e^{pt} \\ pX_2 e^{pt} = \left(a_{21}X_1 + a_{22}X_2\right)e^{pt} \end{matrix}$$

$$pX_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2$$
$$pX_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2$$
$$(a_{11} - p)X_1 + a_{12}X_2 = 0$$
$$a_{21}X_1 + (a_{22} - p)X_2 = 0$$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- da bi sustav karakterističnih jednadžbi dao rješenja za amplitude X_1, X_2 različite od nule, mora determinanta sustava biti jednaka nuli,

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - p) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22} - p) \end{vmatrix} = 0.$$

- to daje polinom drugog stupnja:

$$p^2 - \mathrm{T}p + \Delta = 0.$$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- odakle slijede prirodne frekvencije p_1 i p_2 za koje e^{pt} zadovoljava jednadžbu.
- rješenje se može napisati u obliku:

$$x_1(t) = X_{11}e^{p_1 t} + X_{12}e^{p_2 t},$$
$$x_2(t) = X_{21}e^{p_1 t} + X_{22}e^{p_2 t}.$$

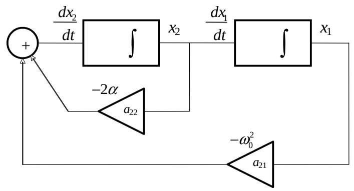
Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- nezavisne su samo dvije konstante i one se odrede iz dva početna uvjeta.
- druge dvije konstante proizlaze iz prvih uvrštenjem u jednadžbe stanja za $t = 0$.

$$X_{11} = \frac{(a_{11} - p_2)x_1(0) + a_{12}x_2(0)}{p_1 - p_2} \qquad X_{12} = \frac{(p_1 - a_{11})x_1(0) - a_{12}x_2(0)}{p_1 - p_2}$$

$$X_{21} = \frac{a_{21}x_1(0) + (a_{22} - p_2)x_2(0)}{p_1 - p_2} \qquad X_{22} = \frac{-a_{21}x_1(0) + (p_1 - a_{22})x_2(0)}{p_1 - p_2}$$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda - primjeri



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} T = -2\alpha \\ \Delta = \omega_0^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} \text{karakteristična jednadžba} \\ p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 = 0 \end{matrix}$$

- za

$$\alpha < \omega_0 \Rightarrow p_{1,2} = -\alpha \pm j\underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}_{\omega_d}$$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

$$p_1 = -\alpha + j\omega_d$$
$$p_2 = -\alpha - j\omega_d$$

- neka je $x_2(0) = 0$, za zadani primjer slijedi

$$X_{11} = \frac{-p_2 x_1(0) + x_2(0)}{p_1 - p_2} = \frac{(\alpha + j\omega_d)x_1(0)}{2j\omega_d}$$

$$X_{12} = \frac{(p_1 - a_{11})x_1(0) - x_2(0)}{p_1 - p_2} = \frac{(-\alpha + j\omega_d)x_1(0)}{2j\omega_d}$$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- pa je

$$x_1(t) = \frac{(\alpha + j\omega_d)x_1(0)}{2j\omega_d}e^{(-\alpha + j\omega_d)t} + \frac{(-\alpha + j\omega_d)x_1(0)}{2j\omega_d}e^{(-\alpha - j\omega_d)t}$$

$$x_1(t) = x_1(0)e^{-\alpha t}\left(\frac{\alpha}{2j\omega_d}e^{j\omega_d t} + \frac{1}{2}e^{j\omega_d t} - \frac{\alpha}{2j\omega_d}e^{-j\omega_d t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_d t}\right)$$

$$x_1(t) = e^{-\alpha t}\left(\frac{\alpha}{\omega_d}\sin(\omega_d t) + \cos(\omega_d t)\right)x_1(0)$$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- kako je $x_2(t) = \dot{x}_1(t) \Rightarrow$

$$x_2(t) = -\frac{\alpha^2}{\omega_d} e^{-\alpha t}\sin(\omega_d t)x_1(0) - \omega_d e^{-\alpha t}\sin(\omega_d t)x_1(0)$$

- za $\dfrac{\alpha}{\omega_d} \ll 1$

$$x_1(t) = e^{-\alpha t}\cos(\omega_d t)x_1(0)$$

$$x_2(t) = -\omega_d e^{-\alpha t}\sin(\omega_d t)x_1(0)$$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

$$x_1(t) = e^{-\alpha t}\cos(\omega_d t)x_1(0) \Rightarrow \cos(\omega_d t) = \frac{x_1(t)}{x_1(0)e^{-\alpha t}}$$

$$x_2(t) = -\omega_d e^{-\alpha t}\sin(\omega_d t)x_1(0) \Rightarrow \sin(\omega_d t) = \frac{x_2(t)}{-\omega_d e^{-\alpha t}x_1(0)}$$

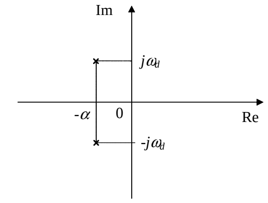
- pa je

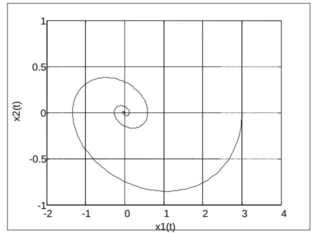
$$\left(\frac{x_1(t)}{e^{-\alpha t}x_1(0)}\right)^2 + \left(\frac{x_2(t)}{-\omega_d e^{-\alpha t}x_1(0)}\right)^2 = 1$$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- za $\alpha = -0{,}1; \quad \omega_0 = 0{,}4; \Rightarrow \omega_d = 0{,}3873;$

  $x_1(0) = 3; \quad x_2(0) = 0;$

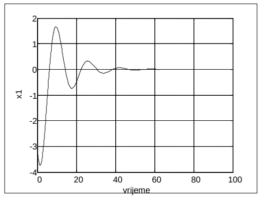


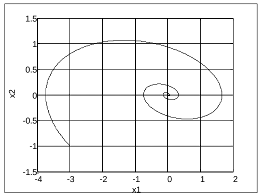


Vladanje i svojstva sustava drugog reda

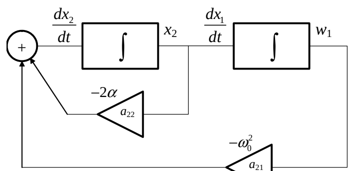
- za $\alpha = -0{,}1; \quad \omega_d = 0{,}4; \Rightarrow \omega_d = 0{,}3873;$

  $x_1(0) = -3; \quad x_2(0) = -1;$





Vladanje i svojstva sustava drugog reda



$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega_0^2 & -2\alpha\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix}T = -2\alpha\\ \Delta = \omega_0^2\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix}\text{karakteristična jednadžba}\\ p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 = 0\end{matrix}$$

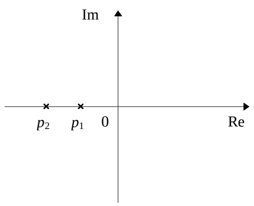
- za $\alpha > \omega_0 \Rightarrow p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$

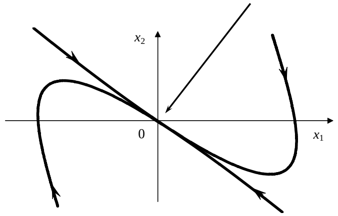
Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- slučaj realnih i različitih p_1 i p_2,

a) $p_1, p_2 < 0$

stabilni čvor





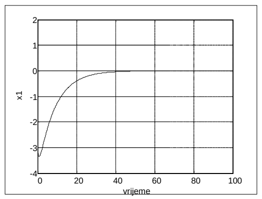
Vladanje i svojstva sustava drugog reda

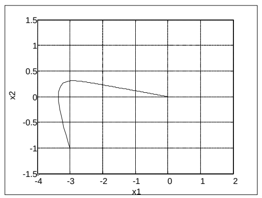
$\alpha = 0{,}75; \quad \omega_0 = 0{,}4; \quad x_1(0) = -3; \quad x_2(0) = -1;$

$$\alpha > \omega_0 \Rightarrow p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -0{,}75 \pm 0{,}6344$$

$$p_1 = -0{,}1156$$

$$p_2 = -1{,}3844$$

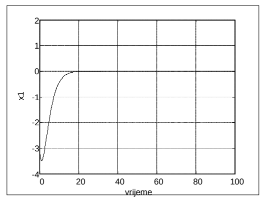


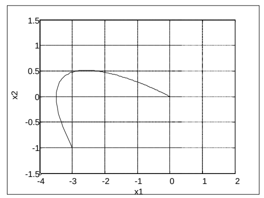


Vladanje i svojstva sustava drugog reda

$$\alpha = \omega_0 = 0{,}4 \Rightarrow p_{1,2} = -\alpha = -0{,}4$$

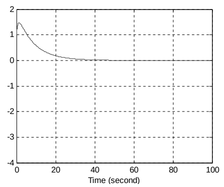
$$x_1(0) = -3; \quad x_2(0) = -1;$$

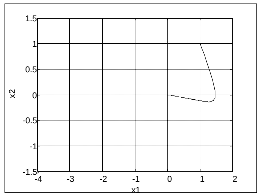




Vladanje i svojstva sustava drugog reda

$$\alpha = \omega_0 = 0,4 \Rightarrow p_{1,2} = -\alpha = -0,4$$
$$x_1(0) = 1; \quad x_2(0) = 1;$$

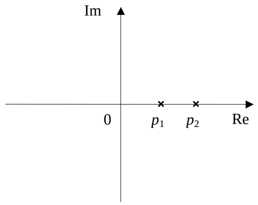


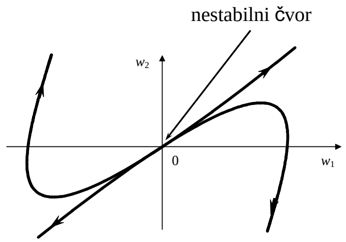


Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- slučaj realnih i različitih p_1 i p_2

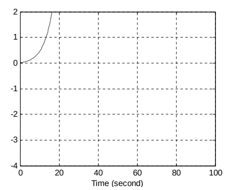
b) p_1, $p_2 > 0$

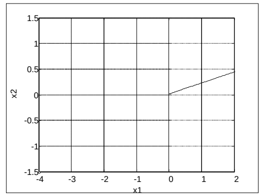




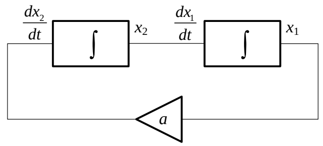
Vladanje i svojstva sustava drugog reda

$$p_1 = 0,1; \quad p_1 = 0,2;$$
$$x_1(0) = 0.01; \quad x_2(0) = 0.01;$$





Vladanje i svojstva sustava drugog reda



$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = ax_1$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = 0 \quad a_{12} = 1$$
$$a_{21} = a \quad a_{22} = 0$$
$$T = 0 \quad \Delta = -a$$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- karakteristična jednadžba je

$$\begin{vmatrix} -p & 1 \\ a & -p \end{vmatrix} = p^2 - a = 0 \qquad p_{12} = \pm\sqrt{a} = \pm\alpha$$
$$\text{za } a > 0$$
$$\vdots$$
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{ch}(\alpha t) & \dfrac{\mathrm{sh}(\alpha t)}{\alpha} \\ \alpha\,\mathrm{sh}(\alpha t) & \mathrm{ch}(\alpha t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

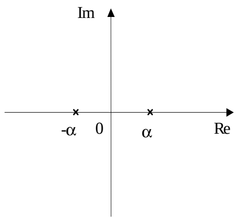
- $\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0$, gdje je $\Phi(t)$ – prijelazna matrica.

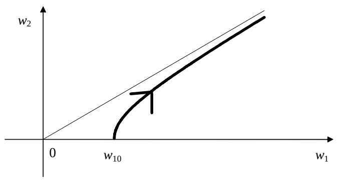
Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- Veza između $x_1(t)$ i $x_2(t)$.
- Jednadžbu krivulje $F(x_1, x_2) = 0$ možemo dobiti eliminacijom vremena.
- Uzmimo početno stanje $x_1(0)$, ($x_2(0) = 0$):

$$\left(\frac{x_1}{x_1(0)}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{\alpha x_1(0)}\right)^2 = 1.$$

Vladanje i svojstva sustava drugog reda





$x_1 \to \infty$ za $t \to \infty$

$x_2 \to \infty$ za $t \to \infty$

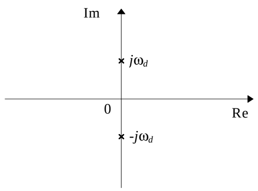
- Nestabilan sustav. Ravnoteža $\mathbf{x} = 0$ se ne dosegne – sedlo

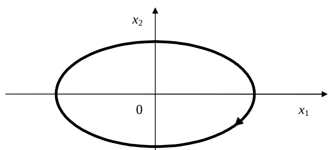
Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- *Primjer:* za $a < 0$ $\qquad p_{12} = \pm\sqrt{-\omega_0^2} = \pm j\omega_0$

$$\left(\frac{x_1}{x_1(0)}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\omega_0 x_1(0)}\right)^2 = 1$$

- Zatvorena krivulja – periodičan proces. Trajektorija obilazi oko točke ravnoteže – fokus.

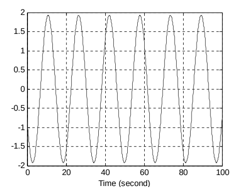


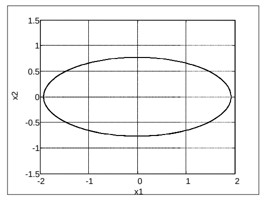


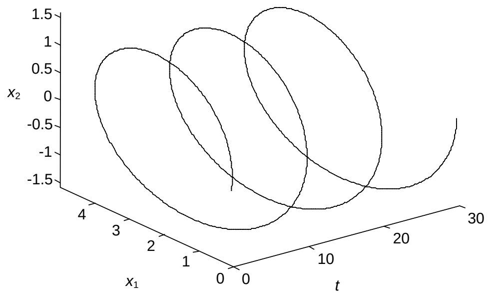
Vladanje i svojstva sustava drugog reda

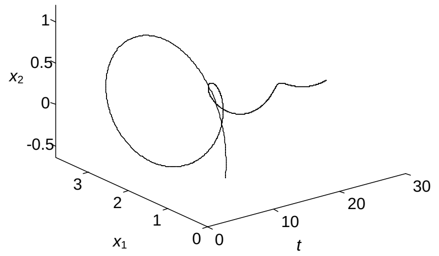
- *Primjer:* za $a < 0$ $\qquad p_{12} = \pm\sqrt{-\omega_0^2} = \pm j0,4$

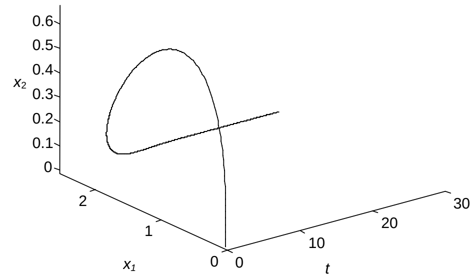
$$x_1(0) = -0.8; \quad x_2(0) = -0.7;$$











SIMULINK primjer