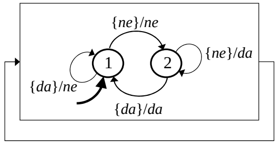
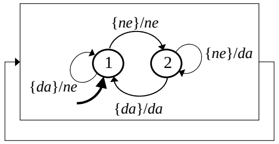
Povratna veza – automati bez ulaza (primjeri a,b i c - zaključak)

- zaključujemo da automati u primjerima b i c ne mogu biti spojeni u povratnu vezu kako je to prikazano
- jedina mogućnost ovako konstruirane povratne veze je za automat u primjeru a



Povratna veza – izlaz određen stanjem



- ovo je ujedno i primjer automata za koji vrijedi da je izlaz određen stanjem jer je jednak za oba moguća ulazna znaka
- dakle $y(n)=ne$ za $x(n)=1$ i $y(n)=da$ za $x(n)=2$

Povratna veza – izlaz određen stanjem

- kažemo da automat A ima izlaz određen stanjem ako za svako dostupno stanje

$$x(n) \in Stanja_A$$

postoji jedinstveni izlazni znak $y(n)=b$ koji ovisi samo o $x(n)$ a ne ovisi o ulaznom znaku

- dakle $$izlaz_A\left(x(n),u(n)\right)=b$$
- očigledno je da je automat s povratnom vezom dobro-formiran

Povratna veza – izlaz određen stanjem

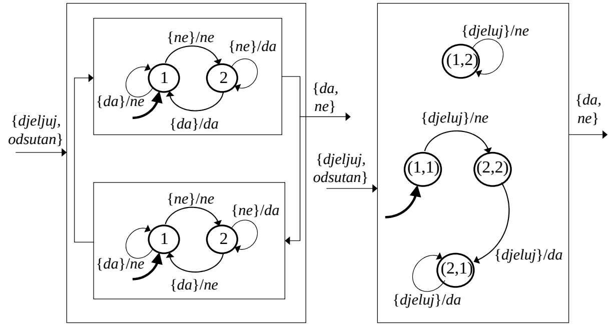
- za ovaj specijalni slučaj automat opisujemo

$$Stanja = Stanja_A$$
$$Ulazi = \{djeluj, odsutan\}$$
$$Izlazi = Izlazi_A$$
$$pocetnoStanje = pocetnoStanje_A$$
$$FunkcijaPrijelaza\left(x(n),u(n)\right) = \begin{cases} FunkcijaPrijelaza_A\left(x(n),b\right), \\ \quad \text{gdje je } b \text{ jedinstveni izlazni znak u stanju } x(n) \text{ ako } u(n)=djeluj \\ \left(x(n),y(n)\right) \quad \text{ako } u(n)=odsutan \end{cases}$$

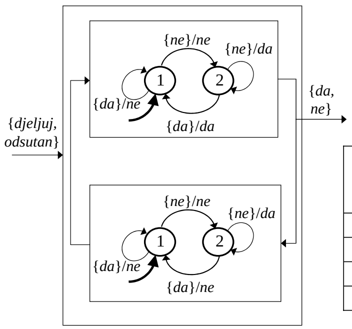
Povratna veza – izlaz određen stanjem

- ako se automat s izlazom određenim stanjem kombinira s bilo kojim drugim automatom u spoj s povratnom vezom rezultirajući spoj će biti *dobro-formiran*
- primjer: kombinacija automata iz prethodnih primjera a i b
- automat A ima izlaz određen stanjem a automat B ne
- ukupna kombinacija je *dobro-formirana*

Povratna veza – izlaz određen stanjem

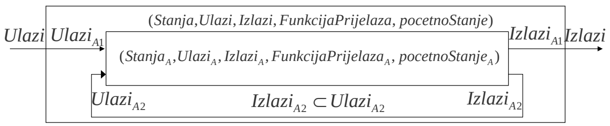


Povratna veza – izlaz određen stanjem



trenutno stanje	*(naredno stanje, izlaz) za ulaz*	
	djeluj	*odsutan*
(1,1)	((2,2),*ne*)	((1,1),*odsutan*)
(2,2)	((2,1),*da*)	((2,2),*odsutan*)
(1,2)	((1,2),*ne*)	((1,2),*odsutan*)
(2,1)	((2,1),*da*)	((2,1),*odsutan*)

Povratna veza – automati s ulazom



- razmatramo dakle automat s dva ulaza i dva izlaza u spoju s povratnom vezom pri čemu je drugi izlaz spojen na drugi ulaz
- želimo definirati složeni automat označen petorkom (*Stanja*, *Ulazi*, *Izlazi*, *FunkcijaPrijelaza*, *pocetnoStanje*) svjetloplavim blokom

Povratna veza – automati s ulazom

- ulazi i izlazi automata A su oblika

$$Ulazi_A = Ulazi_{A1} \times Ulazi_{A2}$$
$$Izlazi_A = Izlazi_{A1} \times Izlazi_{A2}$$

- izlazna funkcija od A je

$$izlaz_A : Stanja_A \times Ulazi_A \to Izlazi_A$$

- odnosno

$$izlaz_A = (izlaz_{A1}, izlaz_{A2})$$

Povratna veza – automati s ulazom

- gdje

$$izlaz_{A1} : Stanja_A \times Ulazi_A \to Izlazi_{A1}$$

daje izlazni znak na prvom izlazu a

$$izlaz_{A2} : Stanja_A \times Ulazi_A \to Izlazi_{A2}$$

na drugom

Povratna veza – automati s ulazom

- neka su za automat A u *n*-tom koraku $x(n) \in Stanja_A$ i trenutni vanjski ulazni znak $u_1(n) \in Ulazi_{A1}$
- naš problem je odrediti "nepoznati" izlazni znak

$(y_1(n), y_2(n)) \in Izlazi_A$ tako da vrijedi

$$izlaz_A(x(n),(u_1(n), y_2(n))) = (y_1(n), y_2(n))$$

- znak $y_2(n)$ se pojavljuje na obje strane jer je drugi ulaz $u_2(n)$ u automat jednak $y_2(n)$

Povratna veza – automati s ulazom

- izlaznu jednadžbu možemo pisati

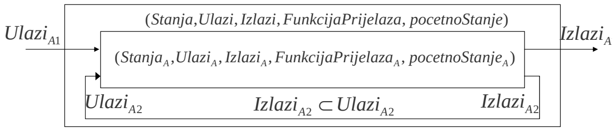
$$izlaz_{A1}(x(n),(u_1(n), y_2(n))) = y_1(n)$$

$$izlaz_{A2}(x(n),(u_1(n), y_2(n))) = y_2(n)$$

u ovim jednadžbama $x(n)$ i $u_1(n)$ su poznati a $y_1(n)$ i $y_2(n)$ su nepoznati

- druga jednadžba ukazuje da će jedinstveno rješenje biti moguće samo za *dobro-formirane* automate

Povratna veza – automati s ulazom



- kažemo da će automat s povratnom vezom biti dobro-formiran ako za svako dostupno stanje

$x(n) \in Stanja_A$ i za svaki vanjski znak $u_1(n) \in Ulazi_{A1}$

postoji jedinstveni izlazni simbol $y_2(n) \in Izlazi_{A2}$ koji zadovoljava jednadžbu

$$izlaz_{A2}(x(n),(u_1(n), y_2(n))) = y_2(n)$$

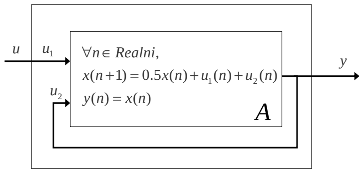
Povratna veza – automati s ulazom

- za *dobro-formirani* automat vrijedi

$$Stanja = Stanja_A$$
$$Ulazi = Ulazi_{A1}$$
$$Izlazi = Izlazi_{A1}$$
$$pocetnoStanje = pocetnoStanje_A$$
$$FunkcijaPrijelaza\big(x(n),u(n)\big) = \big(narednoStanje\big(x(n),u(n)\big), izlaz\big(x(n),u(n)\big)\big):$$
$$narednoStanje\big(x(n),u(n)\big) = narednoStanje_A\big(x(n),(u(n), y_2(n))\big)$$ i
$$izlaz\big(x(n),u(n)\big) = izlaz_A\big(x(n),(u(n), y_2(n))\big)$$ gdje je $y_2(n)$ jedinstveno rješenje jednadžbe $izlaz_{A2}(x(n),(u(n), y_2(n))) = y_2(n)$

Povratna veza – automati s ulazom

- primjer



- A ima dva ulaza i jedan izlaz

$Ulazi_A = Realni \times Realni, \quad Izlazi_A = Realni$

i stanja $Stanja_A = Realni$

Povratna veza – automati s ulazom

- prema tome A ima beskonačni ulazni i izlazni alfabet te beskonačno mnogo stanja
- u *n*-tom koraku označavamo par ulaznih vrijednosti s $(u_1(n), u_2(n))$, trenutno stanje sa $x(n)$, naredno stanje sa $x(n+1)$ i izlaz s $y(n)$
- funkcija prijelaza je tada

$$\big(x(n+1), y(n)\big) = FunkcijaPrijelaza\big(x(n),(u_1(n),u_2(n))\big)$$
$$= \big(0.5x(n) + u_1(n) + u_2(n), x(n)\big)$$

Povratna veza – automati s ulazom

- ekvivalentno pišemo

$$x(n+1) = narednoStanje_A\big(x(n),(u_1(n),u_2(n))\big)$$
$$= 0.5x(n) + u_1(n) + u_2(n)$$

$$y(n) = izlaz_A\big(x(n),(u_1(n),u_2(n))\big) = x(n)$$

- očigledno je da ovaj automat ima izlaz određen stanjem

Povratna veza – automati s ulazom

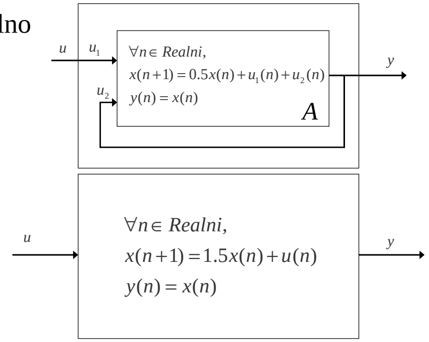
- povratna veza povezuje izlaz i drugi ulaz, $u_2(n) = y(n)$ pa je $izlaz_A\big(x(n),(u_1(n),u_2(n))\big) = u_2(n)$
- iz čega slijedi $x(n) = u_2(n)$
- kako je $u_1(n) = u(n)$
- potpuni je opis automata s povratnom vezom

$Ulazi = Realni, \quad Izlazi = Realni, \quad Stanja = Realni$

$$FunkcijaPrijelaza\big(x(n),u(n)\big) =$$
$$= \big(0.5x(n) + u(n) + x(n), x(n)\big) = \big(1.5x(n) + u(n), x(n)\big)$$

Povratna veza – automati s ulazom

- finalno



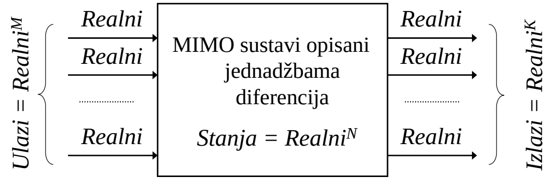
Automati s beskonačnim brojem stanja

- u analizi konačnih automata pokazano je kako je moguće potpuno opisati ponašanje sustava uz poznavanje ulaznog niza znakova te konačnog broja stanja sustava (koje predstavlja prošlost sustava)
- važnu ulogu imaju sustavi s beskonačnim brojem stanja
- razmatramo sustave za koje:
  - *prostor stanja te ulazni i izlazni alfabeti su numerički skupovi*
  - *FunkcijaPrijelaza je linerarna*

Automati

- posebno se razmatraju sustavi s

$$Stanja = Realni^N$$
$$Ulazi = Realni^M$$
$$Izlazi = Realni^K$$



Automati

- dakle, sustav ima *M* različitih ulaza i *K* različitih izlaza
- ovakvi sustavi nazivaju se MIMO sustavi – Multiple-Input, Multiple-Output
- kada je $M = K = 1$ sustav se naziva SISO sustav – Single-Input, Single-Output
- stanje je *N*-torka s *N* realnih elemenata
- *N* se naziva dimenzijom sustava

Automati

- primjer: stereo audio sustav je MIMO sustav s M=K=2 a novi audio sustavi kućnog kina su MIMO sustavi s M=K=5

Automati

- važno:

za $n \in Prirodni_0$

$u(n) \in Realni^M \quad x(n) \in Realni^N \quad y(n) \in Realni^K$

ali su ovo nizovi

$$u \in \left[Prirodni_0 \to Realni^M \right]$$
$$x \in \left[Prirodni_0 \to Realni^N \right]$$
$$y \in \left[Prirodni_0 \to Realni^K \right]$$

Automati

- definiramo MIMO diskretni sustav kao beskonačni automat

$$D = (Stanja, Ulazi, Izlazi, FunkcijaPrijelaza, pocetnoStanje)$$

uz *Stanja* - prostor stanja

Ulazi - ulazni prostor

Izlazi – izlazni prostor

pocetnoStanje – početno stanje

$$FunkcijaPrijelaza : Stanja \times Ulazi \to Stanja \times Izlazi$$

Automati

- ovdje je *FunkcijaPrijelaza*

$$FunkcijaPrijelaza : Realni^N \times Realni^M \to Realni^N \times Realni^K$$

- *FunkcijaPrijelaza* se razlaže na dvije funkcije *narednoStanje* i *izlaz*

$$narednoStanje : Realni^N \times Realni^M \to Realni^N$$
$$izlaz : Realni^N \times Realni^M \to Realni^K$$

$$\forall x \in Realni^N, \forall u \in Realni^M,$$
$$FunkcijaPrijelaza(x,u) = (narednoStanje(x,u), izlaz(x,u))$$

Automati

- za dani ulazni niz *u*(0), *u*(1), …. *M*-torki iz skupa *Realni^M*, sustav rekurzivno generira odziv stanja, dakle niz, *x*(0), *x*(1), …. *N*-torki iz skupa *Realni^N* i odziv izlaza *y*(0), *y*(1), …. *K*-torki iz skupa *Realni^K* kako slijedi

$$x(0) = pocetnoStanje$$

jednadžba prijelaza u naredno stanje je

$$\forall n \in Cjelobrojni, n \geq 0, \quad x(n+1) = narednoStanje(x(n), u(n))$$

izlazna jednadžba je

$$\forall n \in Cjelobrojni, n \geq 0, \quad y(n) = izlaz(x(n), u(n))$$

Automati

- u dosadašnjim razmatranjima automata *n* je predstavljao korak u kojem promatramo automat
- ako se korak *n* promotri kao neki trenutak vremena *nT*, gdje je *T* razmak između koraka tada *n* nazivamo vremenskim indeksom (ili opet korakom)
- govorimo o vremenski diskretnim sustavima
- *u*(*n*), *y*(*n*) imaju realne, fizikalne vrijednosti za svaki korak *n* i ovdje se ne koristi znak *odsutan*

Oznake

- vremenski indeks (ili korak) *n* je iz skupa cjelobrojnih brojeva pa je *u*(*n*) vremenski diskretan signal
- većina autora i vizualno naglašava diskretnost signala označavajući ga kao *u*[*n*]
- precizna definicija domene potpuno definira signal (i sustav) no ovaj vizualni dodatak daje bolju preglednost u izrazima u kojima domena može biti i diskretna i realna

Automati

- ako *FunkcijaPrijelaza* ovisi o vremenskom indeksu *n* tada govorimo o *vremenski promjenljivom sustavu*, inače se radi o vremenski stalnom sustavu
- isto tako *FunkcijaPrijelaza* određuje *linearnost* odnosno *nelinearnost* sustava

Linearnost

- funkcija *f:Realni*^{N}→*Realni*^{M} je *linearna* ako

$\forall a \in Realni, \forall u \in Realni^N, \forall v \in Realni^N$ vrijedi

$f(au) = af(u)$ homogenost

$f(u+v) = f(u) + f(v)$ aditivnost

- ova dva svojstva zajedno su ekvivalentni svojstvu *superpozicije*

$\forall a, b \in Realni, \forall u, v \in Realni^N$ vrijedi

$$f(au+bv) = af(u) + bf(v)$$

Linearnost

- svaka matrica definira linearnu funkciju na slijedeći način

neka je *A* matrica dimenzije *M*×*N* tada je funkcija

$f : Realni^N \to Realni^M$ definirana s

$$\forall x \in Realni^N, \quad f(x) = Ax$$

- pokažimo da svaka linearna funkcija može biti prikazana s ovakvom matričnom multiplikacijom kao što to vrijedi za skalarni slučaj $\forall x \in Realni, \quad f(x) = ax$

Linearnost

- definiraju se vektori

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}, ..., e_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{bmatrix}$$

- uz pomoć njih možemo prikazati bilo koji vektor $x \in Realni^N$ kao sumu

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_N e_N$$

gdje je x_i (skalar) ***i***-ti element vektora *x*

Linearnost

- koristeći svojstvo superpozicije

$$y = f(x) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + ... + x_N f(e_N)$$

- pišemo stupčani vektor $f(e_j) \in Realni^M$ kao

$$f(e_j) = \begin{bmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ ... \\ a_{M,j} \end{bmatrix}$$

Linearnost

- pa gornja jednadžba

$$y = f(x) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + ... + x_N f(e_N)$$

prelazi u

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_M \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ ... \\ a_{M,1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ ... \\ a_{M,2} \end{bmatrix} + ... + x_N \begin{bmatrix} a_{1,N} \\ a_{2,N} \\ ... \\ a_{M,N} \end{bmatrix}$$

Linearnost

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1,N} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & ... & a_{2,N} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{M,1} & a_{M,2} & ... & a_{M,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_N \end{bmatrix}$$

odnosno $y = Ax$

gdje je *A* matrica dimenzije *M*×*N*

$$A = \left[a_{i,j}, 1 \le i \le M, 1 \le j \le N \right]$$

Linearni vremenski diskretni sustavi

- razmotrimo diskretni sustav opisan s

$$Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K$$

i jednadžbama

$$\forall n \in Cjelobrojni_+$$

$$x[n+1] = narednoStanje(x[n], u[n])$$

$$y[n] = izlaz(x[n], u[n])$$

- za sustav kažemo da je linearan ako je početno stanje N-torka nula i ako su funkcije *narednoStanje* i *izlaz* linearne

Linearni vremenski diskretni sustavi

- ako su funkcije *narednoStanje* i *izlaz* linearne i vremenski stalne (ne mijenjaju se s vremenom) govorimo o vremenski stalnom linearnom diskretnom sustavu – LTI (linear time – invariant system)

Linearni vremenski diskretni sustavi

- razmotrimo ponovo jednadžbu stanja

$$x[n+1] = narednoStanje(x[n], u[n])$$

- ako uređeni par ($x[n]$,$u[n]$) zamislimo kao (N+M)-torku u kojoj prvih N elemenata predstavlja $x[n]$ i preostalih M elemenata predstavljaju $u[n]$ tada bilo koju linearnu funkciju narednoStanje možemo prikazati kao

$$narednoStanje(x[n], u[n]) = P(x[n], u[n])$$

gdje je P matrica dimenzije $N\times(N+M)$

Linearni vremenski diskretni sustavi - [*A*,*B*,*C*,*D*] prikaz

- kako se prvih N stupaca od P (označimo ih s A) množi sa $x[n]$ a preostalih M stupaca (označimo ih s B) s $u[n]$ vrijedi

$$narednoStanje(x[n], u[n]) = Ax[n] + Bu[n]$$

gdje je A matrica dimenzije $N\times N$ a B dimenzije $N\times M$

- slično vrijedi za izlaznu funkciju

$$izlaz(x[n], u[n]) = Cx[n] + Du[n]$$

gdje je C dimenzije $K\times N$ a D dimenzije $K\times M$

Linearni vremenski diskretni sustavi - [*A*,*B*,*C*,*D*] prikaz

- model s varijablama stanja diskretnog vremenski stalnog linearnog sustava je dakle

$$Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K$$

$$x[n+1] = Ax[n] + Bu[n]$$

$$y[n] = Cx[n] + Du[n]$$

- ovaj način prikaza sustava naziva se i $[A, B, C, D]$ prikaz

Linearni vremenski diskretni sustavi [*A*,*B*,*C*,*D*] prikaz - primjer

- neka je zadan diskretni sustav s [A,B,C,D] prikazom

$$Stanja = Realni^3, Ulazi = Realni,$$
$$Izlazi = Realni$$
$$x[n+1] = Ax[n] + Bu[n]$$
$$y[n] = Cx[n] + Du[n]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} x_1[n+1] \\ x_2[n+1] \\ x_3[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ x_3[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u[n] \\ y[n] = \begin{bmatrix} -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ x_3[n] \end{bmatrix} + [b_0] u[n] \end{cases}$$

- dakle N=3, M=1, K=1 tj. sustav je trećeg reda i ima jedan ulaz i jedan izlaz
- raspišimo jednadžbu narednog stanja i izlaznu jednadžbu

Linearni vremenski diskretni sustavi [*A*,*B*,*C*,*D*] prikaz - primjer

$$x_1[n+1] = x_2[n]$$

$$x_2[n+1] = x_3[n]$$

$$x_3[n+1] = -a_3 x_1[n] - a_2 x_2[n] - a_1 x_3[n] + b_0 u[n]$$

$$y[n] = -a_3 x_1[n] - a_2 x_2[n] - a_1 x_3[n] + b_0 u[n]$$

- prikažimo zadani sustav uz pomoć modela ulaz izlaz što postižemo eliminacijom x_1, x_2 i x_3
- iz treće i četvrte jednadžbe slijedi

$x_3[n+1] = y[n]$

Linearni vremenski diskretni sustavi [*A*,*B*,*C*,*D*] prikaz - primjer

- iz $x_3[n+1] = y[n]$ slijedi

$$x_3[n] = y[n-1] \Rightarrow x_2[n+1] = y[n-1] \Rightarrow$$
$$x_2[n] = y[n-2] \Rightarrow x_1[n+1] = y[n-2] \Rightarrow$$
$$x_1[n] = y[n-3]$$

- uvrstimo li x_1, x_2 i x_3 u četvrtu jednadžbu slijedi

$$y[n] = -a_3 y[n-3] - a_2 y[n-2] - a_1 y[n-1] + b_0 u[n]$$

- odnosno

$$y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + a_3 y[n-3] = b_0 u[n]$$

Linearni vremenski diskretni sustavi [*A*,*B*,*C*,*D*] prikaz - primjer

- za dani primjer pokazano je da sustav može biti zadan modelom s varijablama stanja dakle jednadžbom stanja i izlaznom jednadžbom

$$\begin{bmatrix} x_1[n+1] \\ x_2[n+1] \\ x_3[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ x_3[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u[n]$$

$$y[n] = \begin{bmatrix} -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ x_3[n] \end{bmatrix} + [b_0] u[n]$$

- ili modelom ulaz-izlaz dakle jednadžbom diferencija

$$y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + a_3 y[n-3] = b_0 u[n]$$

Linearni vremenski kontinuirani sustavi [A,B,C,D] prikaz - primjer

- pokazano je da vremenski kontinuirani sustav možemo prikazati s diferencijalnom jednadžbom (model ulaz – izlaz)

$$\dddot{y}(t)+d_2\ddot{y}(t)+d_1\dot{y}(t)+d_0 y(t)=c_0 u(t)$$

- da bi riješili ovu jednadžbu trebamo poznavati

$$y(0),\ \dot{y}(0)\ \text{i}\ \ddot{y}(0)$$

- ako početne uvjete interpretiramo kao početna stanja moguć je slijedeći izbor stanja zadanog kontinuiranog sustava

Linearni vremenski kontinuirani sustavi [A,B,C,D] prikaz - primjer

$$x_1(t)=y(t),\quad x_2(t)=\dot{y}(t),\quad x_3(t)=\ddot{y}(t)$$

- deriviranjem x_1, x_2, x_3

$$\dot{x}_1(t)=\dot{y}(t)\Rightarrow \dot{x}_1(t)=x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t)=\ddot{y}(t)\Rightarrow \dot{x}_2(t)=x_3(t)$$
$$\dot{x}_3(t)=\dddot{y}(t)\Rightarrow \dot{x}_3(t)=-d_0x_1(t)-d_1x_2(t)-d_2x_3(t)+c_0u(t)$$
$$y(t)=x_1(t)+0\cdot x_2(t)+0\cdot x_3(t)+0\cdot u(t)$$

Linearni vremenski kontinuirani sustavi [A,B,C,D] prikaz - primjer

- pišemo pomoću matrica

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -d_0 & -d_1 & -d_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ c_0\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}u(t)$$

Linearni vremenski kontinuirani sustavi [A,B,C,D] prikaz - primjer

- dakle jednadžba stanja i izlazna jednadžba

$$Stanja=Realni^N,\ Ulazi=Realni^M,\ Izlazi=Realni^K$$
$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$
$$y(t)=Cx(t)+Du(t)$$

Usporedba diskretnih i kontinuiranih sustava [A,B,C,D] prikaz - primjer

- usporedimo

$$y[n]+a_1y[n-1]+a_2y[n-2]+a_3y[n-3]=b_0u[n] \qquad \dddot{y}(t)+d_2\ddot{y}(t)+d_1\dot{y}(t)+d_0y(t)=c_0u(t)$$

$$\begin{bmatrix}x_1[n+1]\\ x_2[n+1]\\ x_3[n+1]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a_3 & -a_2 & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1[n]\\ x_2[n]\\ x_3[n]\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ b_0\end{bmatrix}u[n] \qquad \begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -d_0 & -d_1 & -d_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ c_0\end{bmatrix}u(t)$$

$$y[n]=\begin{bmatrix}-a_3 & -a_2 & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1[n]\\ x_2[n]\\ x_3[n]\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_0\end{bmatrix}u[n] \qquad y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}u(t)$$

$$x[n+1]=Ax[n]+Bu[n] \qquad \dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$
$$y[n]=Cx[n]+Du[n] \qquad y(t)=Cx(t)+Du(t)$$

Linearni vremenski diskretni sustavi - primjer

- primjer generiranja jeke (eho efekta) signala koja se može postići realizacijom jednadžbe diferencija

$$y[n]=u[n]+\alpha y[n-N]$$

- neka je

$$N=4,\quad \alpha=0.6,\quad u[n]=\begin{cases}0 & \text{za } n<0\\ 1 & \text{za } n=0,1\\ 0 & \text{za } n>1\end{cases}$$

Linearni vremenski diskretni sustavi primjer

- jednadžba je dakle

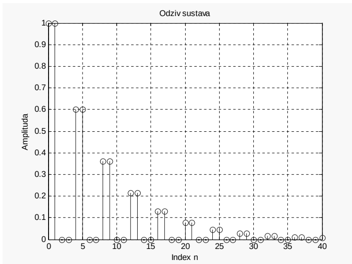
$$y[n]=u[n]+0.6y[n-4]$$

- računamo korak po korak

$$n=0 \quad y[0]=u[n]+0.6y[-4]=1+0,6*0=1$$
$$n=1 \quad y[1]=u[1]+0.6y[-3]=1+0,6*0=1$$
$$n=2 \quad y[2]=u[2]+0.6y[-2]=0+0,6*0=0$$
$$n=3 \quad y[3]=u[3]+0.6y[-1]=0+0,6*0=0$$
$$n=4 \quad y[4]=u[4]+0.6y[0]=0+0,6*1=0.6$$
$$n=5 \quad y[5]=u[5]+0.6y[1]=0+0,6*1=0.6$$
$$n=6 \quad y[6]=u[6]+0.6y[2]=0+0,6*0=0$$

Linearni vremenski diskretni sustavi primjer

- odziv možemo prikazati slikom



Linearni vremenski diskretni sustavi primjer

- konstruirajmo model s varijablama stanja
- polazna jednadžba je

$$y[n]=u[n]+0.6y[n-4]$$

- napišimo je u ovom obliku

$$y[n]=0.6y[n-4]+0y[n-3]$$
$$+0y[n-2]+0y[n-1]+u[n]$$

- pogodno je izabrati

$$x_1[n]=y[n-4],\ x_2[n]=y[n-3]$$
$$x_3[n]=y[n-2],\ x_4[n]=y[n-1]$$

Linearni vremenski diskretni sustavi primjer

- slijedi

$$y[n]=0.6x_1[n]+u[n]$$

$$x_1[n]=y[n-4]\Rightarrow x_1[n+1]=y[n-3]=x_2[n]$$

$$x_2[n]=y[n-3]\Rightarrow x_2[n+1]=y[n-2]=x_3[n]$$

$$x_3[n]=y[n-2]\Rightarrow x_3[n+1]=y[n-1]=x_4[n]$$

$$x_4[n]=y[n-1]\Rightarrow x_4[n+1]=y[n]=0.6x_1[n]+u[n]$$

- iz ovoga slijede jednadžbe stanja i izlazna jednadžba

Linearni vremenski diskretni sustavi primjer

- dakle iz

$$\left.\begin{aligned}
x_1[n]&=y[n-4]\Rightarrow x_1[n+1]=y[n-3]=x_2[n]\\
x_2[n]&=y[n-3]\Rightarrow x_2[n+1]=y[n-2]=x_3[n]\\
x_3[n]&=y[n-2]\Rightarrow x_3[n+1]=y[n-1]=x_4[n]\\
x_4[n]&=y[n-1]\Rightarrow x_4[n+1]=y[n]=0.6x_1[n]+u[n]
\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}
x_1[n+1]=x_2[n]\\
x_2[n+1]=x_3[n]\\
x_3[n+1]=x_4[n]\\
x_4[n+1]=0.6x_1[n]+u[n]\\
y[n]=0.6x_1[n]+u[n]
\end{cases}$$

Linearni vremenski diskretni sustavi primjer

- dakle opet su moguća dva prikaza

model s varijablama stanja

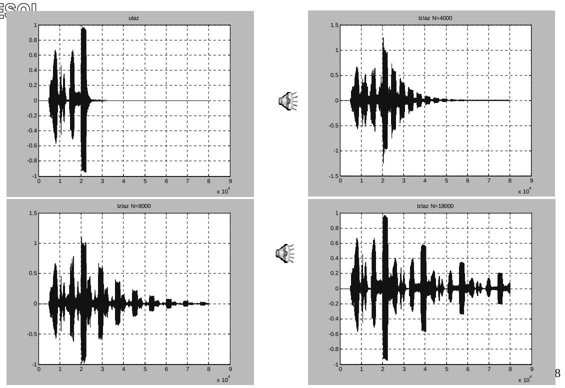
$$\begin{bmatrix}x_1[n+1]\\x_2[n+1]\\x_3[n+1]\\x_4[n+1]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0.6&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1[n]\\x_2[n]\\x_3[n]\\x_4[n]\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}u[n]$$

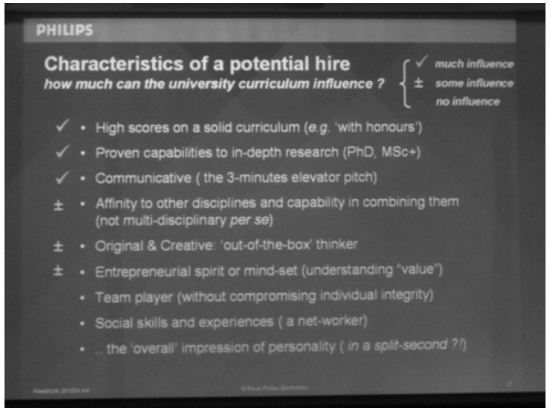
$$y[n]=\begin{bmatrix}0.6&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1[n]\\x_2[n]\\x_3[n]\\x_4[n]\end{bmatrix}+[1]u[n]$$

model ulaz - izlaz

$$y[n]-0.6y[n-4]=u[n]$$

jeka govornog signala $y(n)=u(n)+0.6y(n-N)$





Vremenski diskretni signali

- vremenski diskretni signali definirani su samo u diskretnim trenucima vremena
- neka je signal *nekiDiskretanSignal* vremenski diskretni signal i možemo ga prikazati

nekiDiskretanSignal:DiskretnoVrijeme→Realni

gdje je *DiskretnoVrijeme*=[0,1/11025, ... , 99225/11025] skup diskretnih trenutaka vremena u kojem je definiran signal

Diskretni signali i otipkavanje (*uzorkovanje*)

- vremenski kontinuirani signal *Glazba* otipkan frekvencijom otipkavanja 10 kHz (interval otipkavanja T=0.0001 sekundi) definiran je samo u diskretnim trenucima vremena

$$OtipkanaGlazba:\{0,0.0001,0.0002,....,9.9999,10\}\to Tlak$$

s pridruživanjem

$$OtipkanaGlazba(t)=Glazba(t)$$

$$\forall t\in\{0,0.0001,0.0002,....,9.9999,10\}$$

Diskretni signali

- bez obzira na način generiranja vremenski diskretnog signala on je definiran u diskretnim trenucima vremena *t =nT*, dakle *n*-ti uzorak signala pojavljuje se u trenutku *nT* sekundi u odnosu na vrijeme 0

Diskretni signali

- primjer

$$u:Cjelobrojni\to Realni$$

gdje $\forall n\in Cjelobrojni,\quad u[n]=\cos(2\pi FnT)$

ili npr. za F = 2000 Hz i T=1/10000 sekundi

$$u:Cjelobrojni\to Realni$$

gdje $\forall n\in Cjelobrojni,\quad u[n]=\cos(0.4\pi n)$

Vremenski diskretni signali

- vremenski diskretni signali mogu biti prikazani i kao niz brojeva - uzorcima

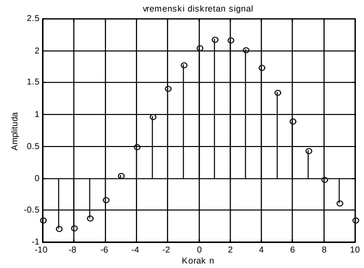
$$\{u[n]\} = \{\ldots, 1.41, 1.78, \underline{2.05}, 2.19, 2.18, \ldots\}$$

- ovdje su prikazani uzorci

$$u[-2] = 1.41, \quad u[-1] = 1.78,$$
$$u[0] = 2.05,$$
$$u[1] = 2.19, \quad u[2] = 2.18,$$

- podcrtani uzorak označava uzorak za $n = 0$

Grafički prikaz vremenski diskretnog signala



Vremenski diskretni signali

- $x[n]$ označava n-ti uzorak niza $\{x[n]\}$ bez obzira na način generiranja diskretnog signala
- $\{x[n]\}$ je realni niz ako je n-ti uzorak $x[n]$ realan za svaki n
- inače je $\{x[n]\}$ kompleksni niz

Kompleksni diskretni signal

- kompleksni niz $\{x[n]\}$ se može napisati kao:

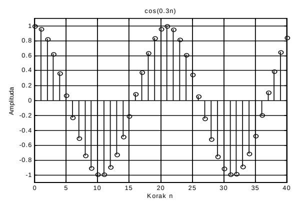
  $\{x[n]\}=\{x_{re}[n]\} + j\{x_{im}[n]\}$

  gdje su $x_{re}[n]$ i $x_{im}[n]$ realni i imaginarni dio od $x[n]$
- konjugirano kompleksni niz je

  $\{x^*[n]\}=\{x_{re}[n]\} - j\{x_{im}[n]\}$
- često se vitičaste zagrade ispuštaju u označavanju niza

Primjeri diskretnih signala

- $\{u[n]\}=\{\cos(0.3n)\}$ je realni niz



Primjeri diskretnih signala

- $\{z[n]\}=\{e^{j0.3n}\}$ je kompleksan niz
- može se napisati:

  $\{z[n]\}=\{\cos(0.3n)+j\sin(0.3n)\}=$

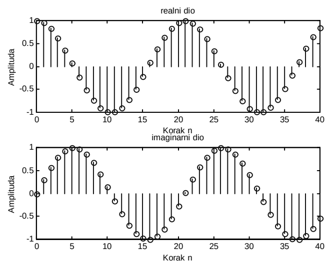
  $=\{\cos(0.3n)\}+j\{\sin(0.3n)\}$,

  gdje je $\{z_{re}[n]\}=\{\cos(0.3n)\}$

  $\{z_{im}[n]\}=\{\sin(0.3n)\}$

Primjeri diskretnih signala

- $\{z[n]\}=\{e^{j0.3n}\} =\{\cos(0.3n)\}+j\{\sin(0.3n)\}$



Diskretni signali

- vremenski diskretan signal je konačne duljine (finite length) ako je definiran za konačni vremenski interval

$$N_1 < n < N_2$$

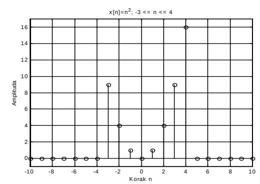
gdje je $-\infty < N_1$ i $N_2 < +\infty$ i $N_1 \le N_2$

- Duljina ili trajanje niza konačne duljine je:

$$N = N_2 - N_1 + 1$$

Diskretni signali

- niz $\{u[n]\}=\{\cos(0.3n)\}$ je beskonačnog trajanja
- $u[n]=n^2 ; -3 \le n \le 4$ je niz konačne duljine 4-(-3)+1=8



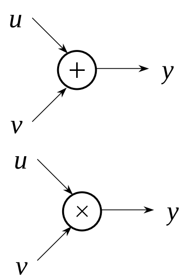
Osnovne operacije na nizovima i elementi diskretnog sustava

- zbrajanje nizova

zbroj dva niza $y = u + v$ ili
$\{y[n]\} = \{u[n]\} + \{v[n]\}$
je niz s općim članom
$y[n] = u[n] + v[n]$ za svaki $n \in \mathbf{Z}$.

- produkt nizova

produkt dva niza $y = uv$ ili
$\{y[n]\} = \{u[n]\} * \{v[n]\}$
je niz s općim članom
$y[n] = u[n]v[n]$ za svaki $n \in \mathbf{Z}$.



Osnovne operacije na nizovima i elementi diskretnog sustava

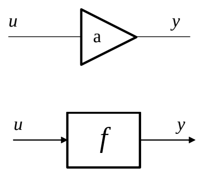
- množenje s konstantom

$y = a\,u$ ili
$\{y[n]\} = a\{u[n]\} = \{a\,u[n]\}$
$y[n] = a\,u[n]$ za svaki $n \in \mathbf{Z}$.

- funkcijski blok

$y = f\,[u]$ ili
$\{y[n]\} = f\,[\{u[n]\}]$
$y[n] = f\,[u[n]]$ za svaki $n \in \mathbf{Z}$.

reverzija vremena
$y[n]=u[-n]$



Osnovne memorijske i predikcijske operacije

- pomak niza – jedinični pomak daje iz ulaznog niza, niz pomaknut za jedan korak.

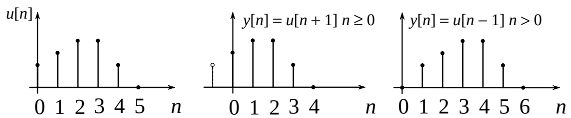
unatrag (kašnjenje i pamćenje) | unaprijed (predikcija)

$y = E^{-1}u$ ili $\{y[n]\} = E^{-1}\{u[n]\}$,
$y[n] = (E^{-1}u)[n]$,
$y[n] = u[n - 1]$ $n > 0$.

$y = E\,u$ ili $\{y[n]\} = E\,\{u[n]\}$,
$y[n] = (Eu)[n]$,
$y[n] = u[n + 1]$ $n \geq 0$.

Pomak niza

- operacija pomaka niza unaprijed traži nekauzalan sustav pa je neostvariva u realnim sustavima.
- zato se služimo redovito jedinicama za kašnjenje, odnosno operacijom E^{-1}.



Pomak niza

- u literaturi je uobičajeno označavati blok za jedinično kašnjenje sa z^{-1} umjesto s E^{-1}
- kašnjenje za N koraka je operacija

$$y[n]=u[n-N]$$

Primjer osnovnih operacija

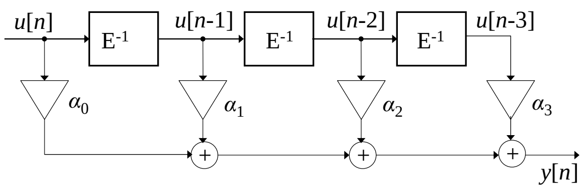
- zadana su dva niza duljine 5 zadana za $0 \leq n \leq 4$

$\{a[n]\}=\{5\ 6\ -2\ 0\ -1\}$
$\{b[n]\}=\{4\ -2\ -2\ 4\ 1\}$

- generiranje novih nizova primjenom osnovnih operacija

$\{c[n]\}=\{a[n]*b[n]\}=\{20\ -12\ 4\ 0\ -1\}$
$\{d[n]\}=\{a[n]+b[n]\}=\{9\ 4\ -4\ 4\ 0\}$
$\{e[n]\}=0.5*\{a[n]\}=\{2.5\ 3\ -1\ 0\ -0.5\}$

Primjer prikaza sustava uz pomoć osnovnih operacija



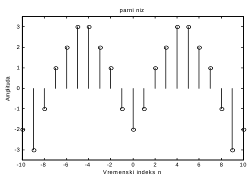
$$y[n]=\alpha_0 u[n]+\alpha_1 u[n-1]+\alpha_2 u[n-2]+\alpha_3 u[n-3]$$

Klasifikacija nizova prema simetričnosti

- konjugirano simetrični niz

$$u[n]=u^*[-n]$$

za realni $u[n]$ radi se o parnom nizu

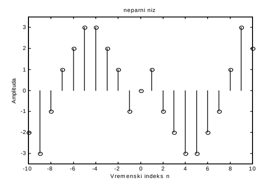


Klasifikacija nizova prema simetričnosti

- konjugirano antisimetrični niz

$$u[n]= -u^*[-n]$$

za realni $u[n]$ radi se o neparnom nizu



Klasifikacija nizova prema simetričnosti

- svaki kompleksan niz može biti prikazan kao zbroj njegovog konjugiranog simetričnog i konjugiranog antisimetričnog dijela

$$u[n]=u_{cs}[n]+u_{ca}[n]$$

gdje su

$$u_{cs}[n]=0.5(u[n]+u^*[-n])$$
$$u_{ca}[n]=0.5(u[n]-u^*[-n])$$

Klasifikacija nizova prema simetričnosti

- svaki pak realan niz može biti prikazan kao zbroj njegovog parnog i neparnog dijela

$$u[n]=u_p[n]+u_n[n]$$

gdje su

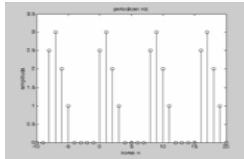
$$u_p[n]=0.5(u[n]+u[-n])$$
$$u_n[n]=0.5(u[n]-u[-n])$$

Periodični nizovi

- za periodičan niz vrijedi

$$\tilde{u}[n]=\tilde{u}[n+kN]$$

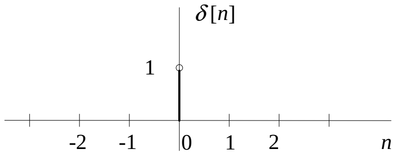
N je period ponavljanja, $k \in Z$ najmanji N koji zadovoljava $\tilde{u}[n]=\tilde{u}[n+kN]$ je osnovni period



Osnovni nizovi

- jedinični niz (niz s jediničnim članom ili uzorkom, Kroneckerov delta, δ – niz).
- δ = ..., 0, 0, <u>1</u>, 0, 0, ...

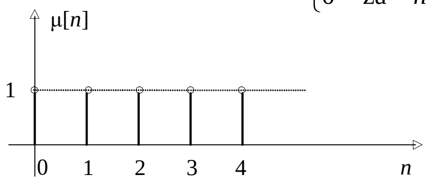
$$\forall n \in Cjelobrojni, \quad \delta[n]=\begin{cases}1 & \text{za} \quad n=0\\ 0 & \text{za} \quad n\neq 0\end{cases}$$



Osnovni nizovi

- jedinična stepenica, jedinični skok
- μ = ..., 0, 0, <u>1</u>, 1, 1, ...

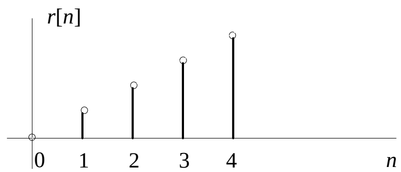
$$\forall n \in Cjelobrojni, \quad \mu[n]=\begin{cases}1 & \text{za} \quad n\geq 0\\ 0 & \text{za} \quad n<0\end{cases}$$



Osnovni nizovi

- jedinična rampa
- r = ..., 0, <u>0</u>, 1, 2, 3, 4, ...

$$\forall n \in Cjelobrojni, \quad r[n]=\begin{cases}n & \text{za} \quad n\geq 0\\ 0 & \text{za} \quad n<0\end{cases}$$



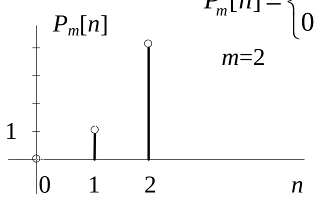
Osnovni nizovi

- jedinična parabola m–tog stupnja

P_m = ..., 0, <u>0</u>, 1^m, 2^m, 3^m, ...

$$P_m[n]=\begin{cases}n^m & \text{za} \quad n\geq 0,\ n\in \mathbf{Z}\\ 0 & \text{za} \quad n<0\end{cases}$$

m=2



Osnovni nizovi

- realni sinusni (kosinusni) niz:

$$\forall n \in Cjelobrojni, \quad x[n]=X\cos(\omega_0 n+\varphi)$$

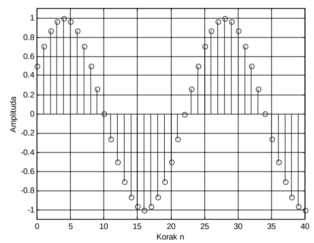
gdje je X amplituda, ω_0 [radijana/uzorku] kutna frekvencija a φ [radijana] faza od $x[n]$

- koristi se i varijabla f_0 [perioda/uzorku] definirana kao:

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

Osnovni nizovi

- grafički prikaz: $\cos\left(\frac{\pi}{12}n-\frac{\pi}{3}\right)$



$$\omega_0=\frac{\pi}{12}$$
$$f_0=\frac{1}{24}$$

Osnovni nizovi

- kompleksna eksponencijala

$$\forall n \in Cjelobrojni, \quad x[n] = A\alpha^n$$

gdje su A i α realni i kompleksni brojevi

- ako označimo: $\alpha = e^{(\sigma_0 + j\omega_0)}, \ A = |A| e^{j\varphi}$

tada možemo pisati

$$x[n] = |A| e^{j\varphi} e^{(\sigma_0 + j\omega_0)\, n} = x_{re}[n] + j x_{im}[n]$$

gdje je

$$x_{re}[n] = |A| e^{\sigma_0 n} \cos(\omega_0 n + \varphi)$$

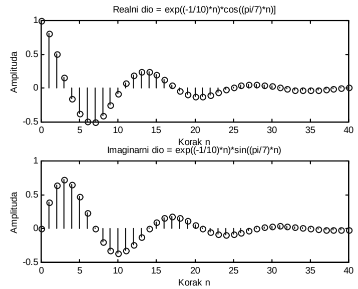
$$x_{im}[n] = |A| e^{\sigma_0 n} \sin(\omega_0 n + \varphi)$$

Kompleksni eksponencijalni niz

- suglasno prethodnim izrazima za $x_{re}[n]$ i $x_{im}[n]$ kompleksne eksponencijale su sinusiodalni nizovi čija se amplituda prigušuje (σ_0<0), raspiruje (σ_0>0) ili je konstantna (σ_0=0).
- primjer kompleksne eksponencijale

$$x[n] = e^{\left(-\frac{1}{10} + j\frac{\pi}{7}\right) n}$$

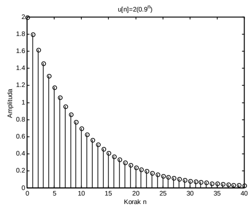
Primjer kompleksnog eksponencijalnog niza

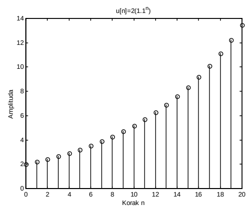


Realni eksponencijalni niz

- primjer realnog eksponencijalnog niza:

$$\forall n \in Cjelobrojni_+, \quad u[n] = U\alpha^n$$





Periodičnost kosinusnog niza

- niz $u[n] = \cos(\omega_0 n + \varphi)$ je periodičan ako vrijedi $u[n] = \cos(\omega_0 n + \varphi) = \cos(\omega_0 (n + N) + \varphi)$ pa slijedi:

$$\cos(\omega_0 (n + N) + \varphi) =$$

$$= \cos(\omega_0 n + \varphi)\cos(\omega_0 N) - \sin(\omega_0 n + \varphi)\sin(\omega_0 N)$$

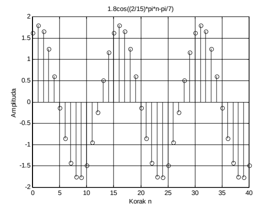
a ovo će biti jednako $\cos(\omega_0 n + \varphi)$ za $\sin(\omega_0 N) = 0$ i $\cos(\omega_0 N) = 1$ a to je za:

$$\omega_0 N = 2\pi k \quad \text{ili} \quad \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{N}{k} \quad ili \quad f_0 = \frac{k}{N}$$

Periodičnost sinusnog niza:primjer

- za niz $u[n] = 1.8\cos(\frac{2\pi}{15} n - \frac{\pi}{7})$

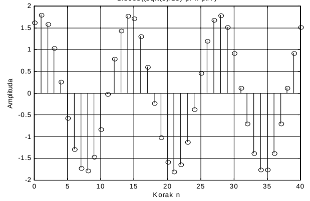
$$\omega_0 = \tfrac{2\pi}{15} \Rightarrow N = \frac{2\pi k}{\frac{2}{15}\pi} = 15 \ \text{ za } \ k = 1$$



Periodičnost sinusnog niza:primjer

- ako $2\pi/\omega_0 = N/k$ za cjelobrojne k i N tada će period biti višekratnik od $2\pi/\omega_0$
- inače je niz aperiodičan, primjer:

$$u[n] = 1.8\cos(\tfrac{\sqrt{5}\pi}{15} n - \tfrac{\pi}{7})$$



Svojstva sinusnog niza

za ω = π + Δ izlazi

$$x(n) = \cos(\pi + \Delta)n = \cos(-2\pi + \pi + \Delta)n$$

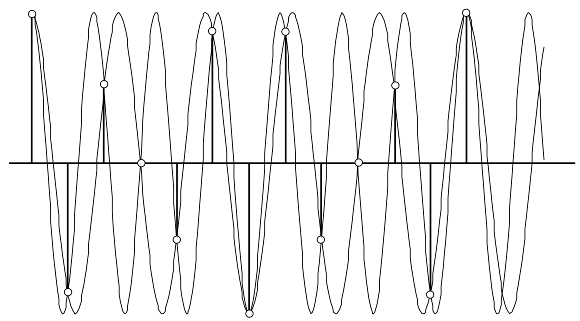
$$= \cos(-\pi + \Delta)n = \cos(\pi - \Delta)n$$

za ovaj niz se ne može razlikovati da li je kutna frekvencija niza

$\omega_1 = \pi + \Delta$ ili $\omega_2 = \pi - \Delta$

$x(n) = \cos(\omega n), \quad n \in \mathbb{Z}$

$\omega = \omega_1 = 7\pi/6 \qquad \omega = \omega_2 = 5\pi/6$



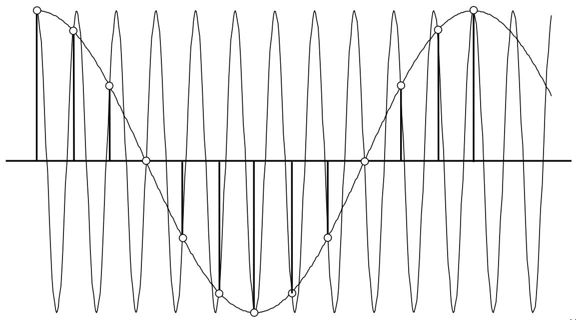
Svojstva sinusnog niza

- za $\omega = 2\pi - \Delta$ izlazi
  $x(n) = \cos(2\pi - \Delta)n = \cos(-\Delta)n = \cos(\Delta n)$

- za zadani niz se ne može razlikovati je li kutna frekvencija
  $\omega_1 = 2\pi - \Delta$ ili $\omega_2 = \Delta$

$x(n) = \cos(\omega n), \quad n \in \mathrm{Z}$

$\omega = \omega_1 = \pi / 6 \qquad \omega = \omega_2 = 11\pi / 6$



Svojstva sinusnog niza

iz prethodnog slijedi da su sve sinusoide frekvencije $\omega_k = \omega_0 + 2k\pi \qquad -\pi < \omega_0 < \pi$ identične (i ne možemo ih razlikovati) jer vrijedi

$$\cos((\omega_0 + 2k\pi)n + \varphi) = \cos((\omega_0 n + \varphi) + 2k\pi n) =$$
$$= \cos(\omega_0 n + \varphi)$$

zato su sve $\cos((\omega_0 + 2k\pi)n + \varphi)$ "alias" kosinusoide $\cos(\omega_0 n + \varphi)$

Svojstva sinusnog niza

sve diskretne sinusoide s frekvencijom

$$|\omega| \le \pi \quad \text{ili} \quad |f| \le \frac{1}{2}$$

su jednoznačno definirane