z - transformacija

z - transformacija

Linearni, vremenski diskretan sustav je opisan jednadžbom diferencija

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + ... + a_N y[n-N] =$$
$$= b_0 u[n] + b_1 u[n-1] + b_2 u[n-2] + ... + b_M u[n-M]$$

za pobudu oblika $u[n] = Uz^n$ partikularno rješenje je $y[n] = Yz^n$

Uvrštenjem dobivamo

$$(a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + ... + a_N z^{-N}) Yz^n =$$
$$= (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + ... + b_M z^{-M}) Uz^n$$

z - transformacija

$$A(z)\, Y z^n = B(z)\, U z^n$$

kompleksna amplituda odziva je tada

$$Y = \frac{B(z)}{A(z)} U = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}} U = H(z) U$$

$$y[n] = UH(z)z^n$$

$H(z)$ je prijenosna funkcija

z - transformacija - nastavak

odziv $y[n]$ se može dobiti i konvolucijskom sumacijom ako je poznat impulsni odziv $h[n]$

$$y[n] = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h[j]u[n-j]$$

za $u[n] = Uz^n$

$$y[n] = U\sum_{j=-\infty}^{+\infty} h[j]z^{n-j} = Uz^n \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h[j]z^{-j}$$

prije pokazano $y[n] = H(z)Uz^n$

izjednačavanjem rješenja slijedi $H(z) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h[j]z^{-j}$

4

z - transformacija - nastavak

frekvencijsku karakteristiku dobijemo za $z=e^{j\omega}$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

prepoznajemo Fourierov red, pa vrijedi

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$H(e^{j\omega}) = F\{h[n]\}$ Fourierova transformacija niza $\{h[n]\}$

$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = Z\{x[n]\}$ z - transformacija niza $\{x[n]\}$

5

z - transformacija - nastavak

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = Z\{x[n]\}$$

Za opći kompleksni broj $z = re^{j\omega}$

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\left(re^{j\omega}\right)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(x[n]r^{-n}\right)e^{-j\omega n}$$

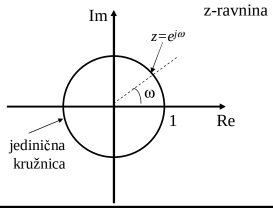
Fourierova transformacija niza $\{x[n]r^{-n}\}$

6

z - transformacija - nastavak

Za r = 1 ⇒ $X(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = F\{x[n]\} = X(e^{j\omega})$

dakle, z – transformacija se reducira na Fourierovu transformaciju na konturi u kompleksnoj ravnini koju nazivamo jedinična kružnica



7

z - transformacija - nastavak

Definiramo područje konvergencije – RoC, *z* – transformacije (*region of convergence* – *RoC*) kao područje za *z* u kojima z – transformacija konvergira pa je potpuna definicija z - transformacije

$$\forall z \in RoC(x), \quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

gdje je $RoC(x) \subset Kompleksni$ definirano s

$$RoC(x) = \left\{ z = re^{j\omega} \in Kompleksni \;\middle|\; \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] r^{-n} \right| < \infty \right\}$$

Ako RoC, *z* – transformacije, uključuje i jediničnu kružnicu tada konvergira i Fourierova transformacija istoga niza.

8

Područje konvergencije z - transformacije

Primjer transformacije niza $x[n] = a^n \mu[n]$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n \mu[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

Da bi $X(z)$ konvergirao mora biti $\sum_{n=0}^{\infty} \left| az^{-1} \right|^n < \infty$

to će biti za: $\left| az^{-1} \right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z| > |a|$

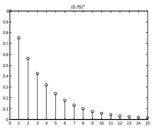
Tada je:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \quad \text{za} \quad |z| > |a|$$

9

Područje konvergencije z - transformacije

primjer: neka je $x[n]=a^n\mu[n]=(0,75)^n\mu[n]$



z - transformacija je

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(0,75)^n s[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(0,75z^{-1})^n=\frac{z}{z-0,75}$$

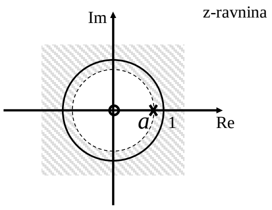
za: $\left|0,75z^{-1}\right|<1 \quad \Leftrightarrow \quad |z|>|0,75|$

10

Područje konvergencije z - transformacije

z – transformacija je racionalna funkcija

Za ovaj primjer ima jednu *nulu* u *z*=0 i jedan *pol* u *z*=*a*

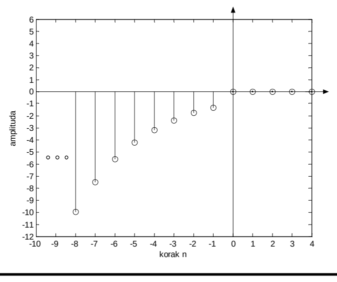


Za |*a* | > 1 RoC ne uključuje jediničnu kružnicu i za tu vrijednost *a* Fourierova transformacija niza $a^n\mu[n]$ ne konvergira

11

Područje konvergencije z - transformacije

Promotrimo niz: $x[n]=-a^n\mu[-n-1]$ $\quad a=0,75<1$



n	$x[n]$
-1	-1.3333
-2	-1.7778
-3	-2.3704
-4	-3.1605
-5	-4.2140
-6	-5.6187
-7	-7.4915
-8	-9.9887

12

Područje konvergencije z - transformacije

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n \mu[-n-1] z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1} z)^n$$

ako je $\left|a^{-1} z\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < |a|$

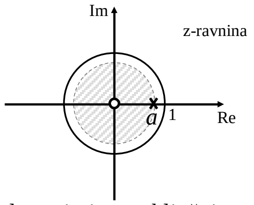
tada gornja suma konvergira i vrijedi:

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1} z} = \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z - a} \quad \text{za} \quad |z| < |a|$$

13

Područje konvergencije z - transformacije

Na slici područje konvergencije, pol i nula



Usporedbom dva primjera zaključujemo da su algebarski izrazi za $X(z)$, kao i pol i nula identični i jedina je razlika u području konvergencije $\Rightarrow$ treba voditi računa o njemu

14

z - transformacija kao racionalna funkcija

- z - transformacije su racionalne funkcije, dakle

$$Y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}} = \frac{\sum_{j=0}^{M} b_j z^{-j}}{\sum_{j=0}^{N} a_j z^{-j}}$$

odnosno

$$Y(z) = z^{(N-M)} \frac{b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \ldots + b_M}{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \ldots + a_N} = z^{(N-M)} \frac{\sum_{j=0}^{M} b_j z^{M-j}}{\sum_{j=0}^{N} a_j z^{N-j}}$$

15

z - transformacija kao racionalna funkcija

- z - transformacija može biti zapisana alterantivno uz pomoć produkta korijenih faktora:

$$Y(z)=\frac{\sum_{j=0}^{M} b_j z^{-j}}{\sum_{j=0}^{N} a_j z^{-j}}=\frac{b_0}{a_0}\cdot\frac{\prod_{j=1}^{M}(1-z_j z^{-1})}{\prod_{j=1}^{N}(1-p_j z^{-1})}$$

- odnosno u obliku

$$Y(z)=z^{(N-M)}\frac{\sum_{j=0}^{M} b_j z^{M-j}}{\sum_{j=0}^{N} a_j z^{N-j}}=z^{(N-M)}\frac{b_0}{a_0}\frac{\prod_{j=1}^{M}(z-z_j)}{\prod_{j=1}^{N}(z-p_j)}$$

z - transformacija kao racionalna funkcija

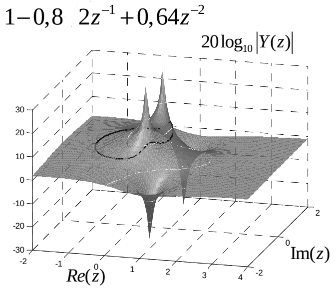
- za korijene $z = s_j$ polinoma u brojniku $Y(s_j)= 0$ i stoga se te vrijednosti od z nazivaju nule od $Y(z)$
- za korijene $z = p_j$ polinoma u nazivniku $Y(s_j)\rightarrow \infty$ i te se vrijednosti od z nazivaju polovi od $Y(z)$

z - transformacija kao racionalna funkcija

- primjer: $Y(z)=\frac{1-1{,}826z^{-1}+2{,}1136z^{-2}}{1-0{,}8\ \ 2z^{-1}+0{,}64z^{-2}}$

$s_{1,2} = 0.9130 \pm \mathrm{j}1.1314$

$p_{1,2} = 0.5657 \pm \mathrm{j}0.5657$



slika3

z - transformacija kao racionalna funkcija

- kako je

$$Y(z) = z^{(N-M)} \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{j=1}^{M}(z - z_j)}{\prod_{j=1}^{N}(z - p_j)}$$

- $Y(z)$ ima M konačnih nula i N konačnih polova
- ako je $N > M$ postoji još N-M nula koje se nalaze u z=0
- ako je $N < M$ postoji još M-N polova koji se nalaze u z=0

19

Područje konvergencije racionalne z - transformacije

- područje konvergencije, RoC, z – transformacije je važna i nužna informacija
- bez informacije o RoC nema jednoznačne veze između niza i njegove z – transformacije
- stoga, z – transformacija mora biti uvijek zadana s njezinim RoC

20

Područje konvergencije racionalne z - transformacije

- postoji veza između RoC z – transformacije impulsnog odziva diskretnog vremenski stalnog sustava i njegove BIBO stabilnosti
- BIBO (bounded-input, bounded-output) stabilnost je jedan od načina definiranja stabilnosti
- sustav je BIBO stabilan ako

$$\forall n \in Cjelobrojan,\ B_x < \infty, \quad \left|x[n]\right| < B_x$$

$$\Rightarrow \forall n \in Cjelobrojan,\ B_y < \infty, \quad \left|y[n]\right| < B_y$$

21

Područje konvergencije racionalne z - transformacije

- RoC racionalne z – transformacije je ograničeno mjestom polova
- da bi se razumjelo odnose između polova i RoC korisno je razmotriti položaj polova i nula z – transformacije
- razmotrimo z – transformacije dvaju nizova

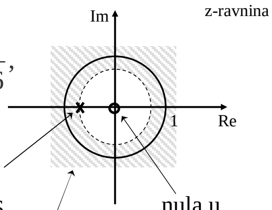
22

Područje konvergencije racionalne z - transformacije

- primjer : z- transformacija $H(z)$ niza $h[n]=(-0{,}6)^n\mu[n]$ je

$$H(z)=\frac{1}{1+0{,}6\ \ z^{-1}}=\frac{z}{z+0{,}6},$$

$$|z|>|-0{,}6|$$



pol u
z = -0,6

nula u
z = 0

područje konvergencije - RoC

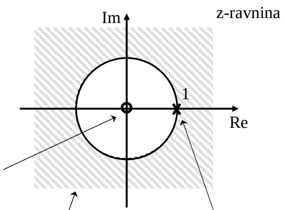
23

Područje konvergencije racionalne z - transformacije

- z- transformacija niza $\mu[n]$ je

$$H(z)=\frac{1}{1+z^{-1}}=\frac{z}{z-1},$$

$$|z|>1$$



nula u
z = 0

pol u
z = 1

područje konvergencije - RoC

24

Područje konvergencije racionalne z - transformacije

- razmotrimo tri tipa nizova:
  - niz konačne duljine
  - niz omeđen s lijeva – desni niz
  - niz omeđen s desna – lijevi niz
- RoC ovisi o tipu niza

25

Područje konvergencije racionalne z – transformacije niza konačnog trajanja

- primjer: neka je $x[n]$ niz konačnog trajanja definiranog za

$$-M \le n \le N, \quad M, N \in Prirodni$$

i $\left|x[n]\right| < \infty$

- njegova z – transformacija je

$$X(z) = \sum_{n=-M}^{N} x[n] z^{-n} = \frac{\sum_{n=0}^{N+M} x[n-M] z^{N+M-n}}{z^N}$$

26

Područje konvergencije racionalne z – transformacije niza konačnog trajanja

$$X(z) = \sum_{n=-M}^{N} x[n] z^{-n} = \frac{\sum_{n=0}^{N+M} x[n-M] z^{N+M-n}}{z^N}$$

- dakle, $X(z)$ ima M polova u $z = \infty$ i N polova u $z = 0$
- z- transformacija $X(z)$ niza konačnog trajanja konvergira za sve vrijednosti z ravnine osim možda u $z = 0$ i/ili u $z = \infty$

27

Područje konvergencije racionalne z – transformacije desnog niza

- primjer: desni niz (omeđen s lijeva) zadan za $n \geq 0$ se često naziva kauzalni niz
- neka je $u_1[n]$ kauzalni niz
- njegova z – transformacija je

$$U_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_1[n] \quad z^{-n}$$

28

Područje konvergencije racionalne z – transformacije desnog niza

- $U_1(z)$ konvergira izvan kruga $|z| = R_1$ uključujući točku $z = \infty$
- međutim, desni niz $u_2[n]$ zadan za $n \geq -M$, za M pozitivan, ima z – transformaciju $U_2(z)$ s M polova u $z = \infty$
- $U_2(z)$ konvergira izvan kruga $|z| = R_2$ ali isključujući točku $z = \infty$

29

Područje konvergencije racionalne z – transformacije lijevog niza

- primjer: lijevi niz (omeđen s desna) zadan za $n \leq 0$ naziva se nekauzalni niz
- neka je $v_1[n]$ nekauzalni niz
- njegova z – transformacija je

$$V_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} v_1[n] \quad z^{-n}$$

30

Područje konvergencije racionalne z – transformacije lijevog niza

- pokazano je da lijevi niz $V_1(z)$ konvergira unutar kruga $|z| = R_3$ uključujući točku $z = 0$
- međutim, lijevi niz $v_2[n]$ zadan za $n \le N$, za N pozitivan, ima z – transformaciju $V_2(z)$ s N polova u $z = 0$
- $V_2(z)$ konvergira unutar kruga $|z| = R_4$ ali isključujući točku $z = 0$

31

Područje konvergencije racionalne z – transformacije neomeđenog niza

- primjer: z – transformacija neomeđenog niza $w[z]$ je

$$W(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} w[n]z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} w[n]z^{-n}$$

- prvi član desne strane, $\sum_{n=0}^{\infty} w[n]z^{-n}$, može biti interpretiran kao z – transformacija desnog niza i zato konvergira izvan kruga $|z| = R_5$

32

Područje konvergencije racionalne z – transformacije neomeđenog niza

- drugi član desne strane $\sum_{n=-\infty}^{-1} w[n]z^{-n}$, može se interpretirati kao z – transformacija lijevog niza i zato konvergira unutar kruga $|z| = R_6$
- ako je $R_5 < R_6$, postoji preklapajuće područje konvergencije $R_5 < |z| < R_6$
- ako je $R_5 > R_6$, ne postoji preklapajuće područje konvergencije i z – transformacija ne postoji

33

Područje konvergencije racionalne z – transformacije neomeđenog niza

- primjer: neka je $u[n]$ neomeđen niz $u[n] = \alpha^n$ gdje α može biti realan ili kompleksan
- njegova z – transformacija je

$$U(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha^n z^{-n}$$

- prvi član desne strane konvergira za $|z| > |\alpha|$, dok drugi član konvergira za $|z| < |\alpha|$

34

Područje konvergencije racionalne z – transformacije neomeđenog niza

- ne postoji preklapanje između tih dvaju područja konvergencije
- prema tome, z – transformacija niza $u[n] = \alpha^n$ ne postoji

35

Područje konvergencije racionalne z – transformacije

- područje konvergencije z – transformacija ne može sadržavati ni jedan pol i omeđeno je polovima
- da bi ilustrirali da je z – transformacija omeđena polovima, pretpostavimo da z – transformacija $X(z)$ ima jednostruke polove u $z = \alpha$ i $z = \beta$
- pretpostavimo da je odgovarajući niz $x[n]$ desni niz

36

Područje konvergencije racionalne z – transformacije

- tada je niz $x[n]$ oblika

$$x[n] = \left(r_1\alpha^n + r_2\beta^n\right) \ \mu[n - N_o], \qquad |\alpha| < |\beta|$$

gdje je N_0 pozitivan ili negativan cijeli broj

- z – transformacija nekog desnog niza oblika $\gamma^n \ \mu[n - N_o]$ postoji ako

$$\sum_{n=N_0}^{\infty} \left|\gamma^n \ \mu[n - N_o]\right| < \infty$$

37

Područje konvergencije racionalne z – transformacije

- uvjet $\sum_{n=N_0}^{\infty} \left|\gamma^n \ \mu[n - N_o]\right| < \infty$

je ispunjen za $|z| > |\gamma|$ a nije za $|z| \leq |\gamma|$

- z – transformacija desnog niza

$$x[n] = \left(r_1\alpha^n + r_2\beta^n\right) \ \mu[n - N_o], \qquad |\alpha| < |\beta|$$

ima zato područje konvergencije $|\beta| < |z| \leq \infty$

38

Područje konvergencije racionalne z – transformacije

- slično z – transformacija lijevog niza

$$x[n] = \left(r_1\alpha^n + r_2\beta^n\right) \ \mu[- \ n - N_o], \qquad |\alpha| < |\beta|$$

ima područje konvergencije $0 \leq |z| < |\alpha|$

- konačno, za neomeđeni niz, neki od polova doprinose članovima u izvornom nizu za $n < 0$ dok ostali članovi ostali polovi doprinose članovima za $n \geq 0$

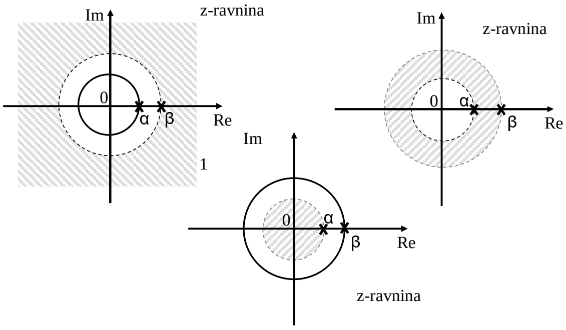
39

Područje konvergencije racionalne z – transformacije

- područje konvergencije je omeđeno s vanjske strane s polom najmanjeg modula koji pridonosi za $n < 0$ i omeđeno s unutarnje strane s polom s najvećim modulom koji doprinosi za $n \geq 0$
- postoji tri različita područja konvergencije za racionalnu z – transformaciju se polovima u $z = \alpha$ i $z = \beta$ $(|\alpha| < |\beta|)$

40

Područje konvergencije racionalne z – transformacije



41

Područje konvergencije racionalne z – transformacije

- općenito, ako racionalna z – transformacija ima N polova s R različitih modula, tada postoji R+1 područje konvergencije
- to znači da postoji R+1različitih nizova s istom z - transformacijom
- finalno, racionalna z – transformacija s definiranim područjem konvergencije ima jednoznačni niz kao svoju inverznu z - transformaciju

42

z – transformacija kauzalnih nizova

43

Konvergencija z - transformacije

Za kauzalne signale

$\forall z \in RoC(x), \quad X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n] z^{-n}$

gdje je $RoC(x) \subset Kompleksni$ definirano s

$RoC(x) = \left\{ z = re^{j\omega} \in Kompleksni \,\middle|\, \sum_{n=0}^{+\infty} \left| x[n] r^{-n} \right| < \infty \right\}$

$X(z)$ se naziva jednostrana z - transformacija

44

z - transformacija osnovnih nizova

$$Z\{\delta[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = 1$$

$$RoC(\delta) = \left\{ z = re^{j\omega} \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} \left| \delta[n] z \right|^{-n} < \infty \right\} = \{ z \,|\, r > 0 \}$$

$$Z\{\mu[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

$$RoC(\mu) = \left\{ z = re^{j\omega} \in Kompleksni \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} |z|^{-n} < \infty \right\}$$

$$= \{ z \,\|z| > 1 \}$$

45

z - transformacija osnovnih nizova

$$x[n] = a^n \mu[n]$$

$$Z\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = \frac{1}{1-\left(\frac{z}{a}\right)^{-1}} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

$$RoC(x) = \left\{ z = re^{j\omega} \in Kompleksni \left| \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n |z|^{-n} < \infty \right. \right\}$$

$$= \{ z \| z| > |a| \}$$

46

z - transformacija osnovnih nizova

$$Z\{a^n \cos(\omega_0 n)\mu[n]\} = \frac{1-az^{-1}\cos\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0 + a^2 z^{-2}} \;, \; |\, z\,| > |a|$$

$$Z\{a^n \sin(\omega_0 n)\mu[n]\} = \frac{az^{-1}\sin\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0 + a^2 z^{-2}} \;, \; |\, z\,| > |a|$$

47

z - transformacija - svojstva

<u>linearnost:</u> neka je $w[n] = ax[n] \pm by[n]$

tada je z – transformacija od $w[n]$

$\forall z \in RoC(w), \quad W(z) = aX(z) \pm bY(z)$

$RoC(w) \supset RoC(x) \cap Roc(y)$

područje konvergencije od w mora uključiti područja konvergencije od x i y

linearnost proizlazi iz definicije z – transformacije

$$W(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(ax[n] \pm by[n]\right) z^{-n} =$$

$$= aX(z) \pm bY(z)$$

48

z - transformacija - svojstva

pomak unaprijed za *j*-koraka

$$Z\left\{x[n+j]\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}x[n+j]z^{-n} = \left|n+j=l\right| = \sum_{l=j}^{\infty}x[l]z^{-l+j} =$$

$$= z^{j}\sum_{l=j}^{\infty}x[l]z^{-l} = z^{j}\left[X(z)-\sum_{l=0}^{j-1}x[l]z^{-l}\right]$$

za $j = 1$ Z $\{x[n+1]\} = z\,X(z) - zx(0)$

49

z - transformacija - svojstva

kašnjenje za *j*-koraka

$$Z\left\{x[n-j]\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}x[n-j]z^{-n} = \left|n-j=l\right| = \sum_{l=-j}^{\infty}x(l)z^{-l-j} =$$

$$= z^{-j}\sum_{l=-j}^{\infty}x[l]z^{-l} = z^{-j}\left(X(z)+\sum_{l=-j}^{-1}x[l]z^{-l}\right)$$

za $n = 1$ Z $\{x[n-1]\} = z^{-1}\,\{X(z) + x[-1]z\} = z^{-1}\,X(z) + x[-1]$

50

z - transformacija - svojstva

konvolucijska sumacija kauzalnih nizova

$$Y(z) = Z\left\{y[n]\right\} = Z\left\{x[n]*h[n]\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{i=0}^{n}x[i]h[n-i]\right\}z^{-n}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}x[i]\sum_{n=0}^{\infty}h[n-i]z^{-n} = \left|n-i=j\right| =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}x(i)\sum_{j=-i}^{\infty}h(j)z^{-(i+j)} = \sum_{i=0}^{\infty}x(i)z^{-i}\sum_{j=0}^{\infty}h(j)z^{-j}$$

$$= X(z)H(z)$$

jer je $h(j)=0$ za $j<0$

51

z - transformacija - svojstva

multiplikacija s a^n $y[n] = a^n x[n]$

$$Z\{y[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

multiplikacija sa $e^{j\omega n}$ (frekvencijski pomak) $y[n] = x[n]\, e^{j\omega n}$

$$Z\{y[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] e^{j\omega n} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \left(\frac{z}{e^{j\omega}}\right)^{-n}$$

52

z - transformacija - svojstva

multiplikacija s n

$$Z\{nx[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} nx[n] z^{-n} \quad = z \sum_{n=0}^{\infty} x[n] n z^{-n-1} =$$

$$= z \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \left(-\frac{d}{dz} z^{-n}\right) \quad = -z \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}\right) =$$

$$= -z \frac{d}{dz} X(z)$$

multiplikacija s n^j $\quad Z\{n^j x[n]\} = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^j X(z)$

53

z - transformacija - svojstva

početna vrijednost niza n

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} = x[0] + \sum_{n=1}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

$$\Rightarrow \quad x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

konačna vrijednost niza n

$$\lim_{n \to \infty} x[n] = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) X(z), \quad \text{ako postoji } x[\infty]$$

54

z - transformacija - svojstva

konačna vrijednost niza n

$$\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1}\left(1-z^{-1}\right)X(z), \quad \text{ako postoji } x[\infty]$$

limes za z → 1 ima smisla samo kada je točka $z = 1$ locirana unutar područja konvergencije $X(z)$

dokaz započinjemo s nizom $x[n] - x[n-1]$

$$Z\{x[n]-x[n-1]\} = X(z) - z^{-1}X(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(x[n]-x[n-1]\right)z^{-n}$$

$$\left(1-z^{-1}\right)X(z) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\left(x[n]-x[n-1]\right)z^{-n}$$

55

z - transformacija - svojstva

uzmimo limes za z → 1

$$\lim_{z\to 1}\left(1-z^{-1}\right)X(z) = \lim_{z\to 1}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\left(x[n]-x[n-1]\right)z^{-n}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\lim_{z\to 1}\sum_{n=0}^{N}\left(x[n]-x[n-1]\right)z^{-n}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\left(x[n]-x[n-1]\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(x[0]-x[-1]+x[1]-x[0]+x[2]-x[1]+.....\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} x[N]$$

56

Inverzna z - transformacija

z - transformacija je definirana kao

$$\forall z \in RoC(x), \quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

gdje je $RoC(x) \subset Kompleksni$ definirano s

$$RoC(x) = \left\{ z = re^{j\omega} \in Kompleksni \,\middle|\, \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|x[n]r^{-n}\right| < \infty \right\}$$

za opći kompleksni broj $z = re^{j\omega}$

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\left(re^{j\omega}\right)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(x[n]r^{-n}\right)e^{-j\omega n}$$

Fourierova transformacija niza $\{x[n]r^{-n}\}$ 57

Inverzna Z - transformacija

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\left(re^{j\omega}\right)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(x[n]r^{-n}\right)e^{-j\omega n}$$

Fourierova transformacija niza $\{x[n]r^{-n}\}$

Inverziju dobijemo na temelju izraza za Fourierove koeficijente

$$x[n]r^{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(re^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \quad \Big|\cdot r^{n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(re^{j\omega})\left(re^{j\omega}\right)^{n}d\omega \; = \left| \begin{matrix} re^{j\omega} = z \\ dz = jre^{j\omega}d\omega \end{matrix} \quad d\omega = \frac{dz}{jz} \right|$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz$$

opći izraz za inverznu Z transformaciju

Inverzna Z - transformacija
1. razvoj u red

$Y(z) = y[0] + y[1]z^{-1} + y[2]z^{-2} + ...$

razvoj u McLaurentov red oko točke $z^{-1} = 0$

$$y[n] = \frac{1}{n!}\frac{d^{n}Y(z^{-1})}{d(z^{-1})^{n}}\Bigg|_{z^{-1}=0}$$

Primjer :

$$Y(z) = \frac{2-0{,}5z^{-1}}{1-0{,}5z^{-1}-0{,}5z^{-2}} = 2+0{,}5z^{-1}+1{,}25z^{-2}+0{,}875z^{-3}+\dots$$

$y[n] = 2\,\delta[n] + 0{,}5\,\delta[n-1] + 1{,}25\,\delta[n-2] + 0{,}875\,\delta[n-3] + ...$

$y[n] = 1+(-0{,}5)^{n}$ za $n \geq 0$

Inverzna Z - transformacija
2. rastavljanje racionalne funkcije na parcijalne razlomke

$$Z\left\{ a^{n}\right\} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A}{z-q_1} + \frac{B}{z-q_2} + \dots \quad \Big(\cdot z$$

$$Y(z) = \frac{Az}{z-q_1} + \frac{Bz}{z-q_2} + \dots$$

$$y[n] = Aq_1^{n} + Bq_2^{n} + \dots$$

Inverzna Z - transformacija
2. rastav racionalne funkcije na parcijalne razlomke - primjer

$$Y(z)=\frac{2z^2-0{,}5z}{z^2-0{,}5z-0{,}5}$$

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{2z-0{,}5}{z^2-0{,}5z-0{,}5}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+0{,}5}\quad\Big|\cdot z$$

$$Y(z)=\frac{z}{z-1}+\frac{z}{z+0{,}5}$$

u domeni koraka izlazi $y[n]=1^n+(-0{,}5)^n=1+(-0{,}5)^n$

61

Inverzna Z - transformacija
3. integralom po zatvorenoj krivulji radijusa većeg od radijusa apsolutne konvergencije

$$y(k)=\frac{1}{2\pi j}\oint Y(z)z^{n-1}dz=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}_i\left[Y(z)z^{n-1}\right]$$

$$\mathrm{Res}_i\left[Y(z)z^{n-1}\right]=\lim_{z\to z_i}\left[Y(z)z^{n-1}(z-z_i)\right]$$

62

Rješenje jednadžbi diferencija upotrebom Z - transformacije

$$a_0y[n]+a_1y[n-1]+a_2y[n-2]=b_0x[n]+b_1x[n-1]$$

Iz $Z\{x[n-1]\}=z^{-1}\{X(z)+x[-1]z\}=z^{-1}X(z)+x[-1]$

i iz $Z\{x[n-2]\}=z^{-2}X(z)+x[-1]z^{-1}+x[-2]$

$\{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}\}Y(z)=$

$=\{b_0+b_1z^{-1}\}X(z)+b_1x[-1]-a_2x[-2]-(a_1+a_2z^{-1})y[-1]$

$$Y(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}}{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}X(z)+E(z)$$

uz početne uvjete jednake nuli $Y(z)=\dfrac{b_0+b_1z^{-1}}{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}X(z)=H(z)X(z)$

63

Rješenje jednadžbi diferencija upotrebom Z - transformacije

$H(z)$ - transfer funkcija vremenski diskretnog sustava

Za pobudu jediničnim uzorkom $x[n] = \delta[n]$, $X(z) = 1$

dobivamo $Y(z) = H(z)$

Transfer funkcija je Z - transformat odziva na pobudu $\{\delta[n]\}$ uz početne uvjete jednake nuli

64

primjer: Pobuđeni mirni sustav drugog reda

$$y[n]-0.8\;\;2y[n-1]+0.64y[n-2]=x[n]+2x[n-1]$$

$$H(z)=\frac{1+2z^{-1}}{1-0.8\sqrt{2}\cdot z^{-1}+0.64z^{-2}}=\frac{z^2+2z}{z^2-0.8\sqrt{2}\cdot z+0.64}$$

program za rastav na parcijalne razlomke:

```
%program za rastav na parcijalne razlomke
num = input('unesi koeficijente brojnika =');
den = input('unesi koeficijente nazivnika =');
[r,p,k] = residuez(num,den);
disp('residuumi'); disp(r');
disp('polovi'); disp(p');
disp('konstante'); disp(k);
```

65

primjer: Pobuđeni mirni sustav drugog reda

```
>>parcrazl
unesi koeficijente brojnika =[1 2 0]
unesi koeficijente nazivnika =[1 -.8*sqrt(2) .64]
residuumi
   0.5000 - 2.2678i   0.5000 + 2.2678i

polovi
   0.5657 + 0.5657i   0.5657 - 0.5657i

konstante
```

66

primjer: Pobuđeni mirni sustav drugog reda

$$x[n] = \delta[n] \Rightarrow X(z) = 1$$

$$Y(z) = H(z) \cdot 1 = H(z)$$

$$Y(z) = \frac{0.5 - 2.2678j}{1-(0.5657+0.5657j)z^{-1}} + \frac{0.5+2.2678j}{1-(0.5657-0.5657j)z^{-1}}$$

$$y[n] = (0.5 - 2.2678j)\cdot(0.5657+0.5657j)^n + (0.5+2.2678j)\cdot(0.5657-0.5657j)^n$$

67

primjer: Pobuđeni mirni sustav drugog reda

$$y[n] = (0.5 - 2.2678j)\cdot(0.5657+0.5657j)^n + (0.5+2.2678j)\cdot(0.5657-0.5657j)^n$$

$$y[n] = 2.3223\cdot e^{j1.3538}\cdot(0.8\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}})^n + 2.3223\cdot e^{-j1.3538}\cdot(0.8\cdot e^{j\frac{\pi}{4}})^n$$

$$y[n] = 2\cdot 2.3223\cdot(0.8)^n \cos(\frac{\pi}{4}n - 1.3538) \text{ za } n \geq 0$$

68

Impulsni odziv i konvolucija kontinuiranih sustava

- poznavanje impulsnog odziva nekog sustava je dovoljno za potpun opis njegovog vladanja.
- odziv linearnog vremenski stalnog sustava na opću pobudu opisuje se konvolucijskim integralom:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\, x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau) d\tau$$

gdje je $h(t)$ odziv sustava na jedinični impuls

69

Pobuda sustava kompleksnom eksponencijalom

- pokazano je da je odziv linearnog sustava pobuđenog kompleksnom eksponencijalom opet kompleksna eksponencijala:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= Xe^{st} \\ y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\,d\tau \end{aligned}\right\} y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, Xe^{s(t-\tau)}\,d\tau$$

$$y(t) = Xe^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\,d\tau$$

70

Pobuda sustava kompleksnom eksponencijalom

$$y(t) = \underbrace{Xe^{st}}_{x(t)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\,d\tau}_{H(s)}$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau}\,d\tau.$$

- to nam kazuje da je kompleksna eksponencijala svojstvena funkcija (*eigenfunction*) konvolucije!

71

Pobuda sustava kompleksnom eksponencijalom

- izraz za $H(s)$ je ujedno izraz za dvostranu *Laplaceovu* transformaciju impulsnog odziva h

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau}\,d\tau.$$

- izraz za jednostranu *Laplaceovu* transformaciju dobivamo uz kauzalnu pobudu $x(t) = Xe^{st} \cdot \mu(t)$!!!

72

Model sustava s ulazno izlaznim varijablama

- diferencijalni sustavi su oni koji se daju opisati jednom ili više diferencijalnih jednadžbi.
- linearni sustav s jednim ulazom i jednim izlazom:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = f(t) =$$
$$= b_m x^{(m)} + b_{m-1} x^{(m-1)} + \ldots + b_0 x$$

- desna strana od $f(t)$ – funkcija smetnje ili funkcija pobude, općenito funkcija ulaznog signala $x(t)$ i njegovih derivacija do m – tog reda, $m \leq n$

73

Transfer funkcija linearnog, vremenski stalnog sustava

- linearne, vremenski invarijantne sustave možemo proučavati pomoću Laplaceove transformacije:
  - diferencijalne jednadžbe prelaze u algebarske,
  - sustav je predstavljen u domeni kompleksne frekvencije.
- za određivanje transfer funkcije poći ćemo od Laplaceove transformacije ulazno izlaznog modela:

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}, \quad Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}.$$

74

Transfer funkcija linearnog, vremenski stalnog sustava

- transformacija derivacije ulaza i izlaza je:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^m x}{dt^m}\right\} = s^m X(s) - s^{m-1} x(0) - \ldots - x^{(m-1)}(0),$$
$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n y}{dt^n}\right\} = s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - \ldots - y^{(n-1)}(0).$$

- na temelju linearnosti Laplaceove transformacije može se napisati:

$$\left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0\right) Y(s) \;=\; \left(b_m s^m + \ldots + b_0\right) X(s) \;+\; E(s).$$

75

Transfer funkcija linearnog, vremenski stalnog sustava

- ako vrijedi:

$$y^{(\nu)}(0)=0 \quad \text{za} \quad \nu=0,1,2,3,4,\dots,n-1$$
$$x^{(\mu)}(0)=0 \quad \text{za} \quad \mu=0,1,2,3,4,\dots,m-1$$

dobivamo odziv mirnog sustava:

$$Y(s)=\frac{b_m s^m+\ldots+b_0}{a_n s^n+\ldots+a_0}X(s).$$

- dobiveni izraz možemo napisati:

$$Y(s)=H(s)X(s).$$

76

Transfer funkcija linearnog, vremenski stalnog sustava

- funkcija H(s) zove se transfer funkcija ili prijenosna funkcija sustava.
- definirana je za miran sustav kao:

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{x(t)\}} \qquad x(t)=0 \text{ za } t<0\ .$$

- ako znamo H(s), sustav možemo predstaviti kao blok:

$$X(s) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow Y(s)$$

77