Signali i sustavi

Sustavi drugog reda

SIMULINK primjer

iired1

2

Prisilni odziv sustava

- prisilni odziv sustava predstavlja partikularno rješenje nehomogene jednadžbe.
  - općenito se može dobiti Lagrangeovom metodom varijacije parametara.
- za pobudu eksponencijalnom funkcijom računanje odziva je jednostavno jer se $y_p(t)$ može predstaviti eksponencijalom (deriviranjem se mijenja samo kompleksna amplituda eksponencijale).
- određivanje kompleksne amplitude temelji se na metodi neodređenih koeficijenata.

3

Prisilni odziv sustava

- opći oblik diferencijalne jednadžbe:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) =$$
$$= b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) \ldots + b_0 u(t)$$

- pobudni signal $u(t)$ u obliku eksponencijale

$$u(t) = U e^{st}, \qquad U = |U| e^{j\varphi}$$

U kompleksna amplituda (|*U*| amplituda, φ faza),
s - kompleksna frekvencija, $s = \sigma + j\Omega$,

4

Prisilni odziv sustava

- pretpostavljeno rješenje (*Y* neodređeni koeficijent): $y(t) = Ye^{st}$
- uvrštavanjem u polaznu jednadžbu

$$\left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots a_0\right) Y e^{st} = \left(b_m s^m + \ldots + b_0\right) U e^{st}$$

$$Y = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0} U = H(s) U$$

- amplituda partikularnog rješenja *Y* određena je amplitudom pobude, svojstvima sustava te kompleksnom frekvencijom *s*.

5

Prijenosna funkcija

- Transfer ili prijenosna funkcija sustava *H*(*s*) - veličina koja određuje odnos kompleksne amplitude prisilnog odziva Ye^{st} i kompleksne amplitude pobude Ue^{st} .

$$H(s) = \frac{b_m s^m + \ldots + b_0}{a_n s^n + \ldots a_0} = \frac{Y}{U}$$

- *H*(*s*) ima značenje faktora kojim treba množiti kompleksnu amplitudu ulaza da se dobije amplituda izlaza

$$Y = H(s)U$$

6

Prijenosna funkcija

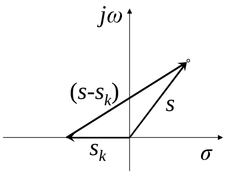
- općenito je transfer ili prijenosna funkcija sustava $H(s)$ racionalna funkcija koju možemo prikazati kao

$$H(s) = K\frac{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

- K je realni faktor a s_i (i=1,..,m) i p_i (i=1,..,n) su nule odnosno polovi prijenosne funkcije
- svaki od članova (s-s_k) može biti predstavljen kao vektor u kompleksnoj s ravnini

7

Prijenosna funkcija



- vektor (s-p_k) je usmjeren od s_k do s i može biti prikazan u polarnom obliku

$$(s-s_k) = \left|s-s_k\right| e^{j\angle(s-s_k)}$$

- stoga se prijenosna funkcija sastoji od produkta i kvocijenta vektora

8

Prijenosna funkcija

$$H(s) = K\frac{\left|s-s_1\right|e^{j\angle(s-s_1)}\left|s-s_2\right|e^{j\angle(s-s_2)}\cdots\left|s-s_m\right|e^{j\angle(s-s_m)}}{\left|s-p_1\right|e^{j\angle(s-p_1)}\left|s-p_2\right|e^{j\angle(s-p_2)}\cdots\left|s-s_p\right|e^{j\angle(s-p_n)}}$$

tako da vrijedi

$$\left|H(s)\right| = K\frac{\left|s-s_1\right|\left|s-s_2\right|\cdots\left|s-s_m\right|}{\left|s-p_1\right|\left|s-p_2\right|\cdots\left|s-s_p\right|}$$

i

$$\angle H(s) = \angle K + \angle(s-s_1) + \angle(s-s_2) + \angle(s-s_m) - \angle(s-p_1) - \angle(s-p_2) - \angle(s-p_n)$$

pa je $H(s) = \left|H(s)\right| e^{j\angle H(s)}$

9

Prisilni odziv sustava

- primjer:

$$\ddot{y}(t) + 0,2\dot{y}(t) + 0,16y(t) = u(t)$$

- za pobudu $u(t) = Ue^{st}$

  partikularno rješenje je oblika $y(t) = Ye^{st}$

- kompleksna amplituda partikularnog rješenja Y je

$$Y = \frac{1}{s^2 + 0,2s + 0,16}U$$

10

Prisilni odziv sustava

- partikularno rješenje je

$$y(t) = UH(s)e^{st} = \frac{1}{s^2 + 0,2s + 0,16}Ue^{st}$$

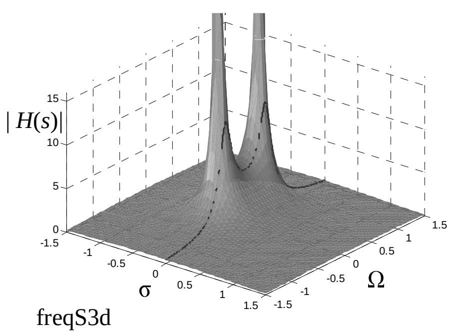
- prijenosna funkcija je

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 0,2s + 0,16}$$

$$p_{1,2} = -0.1 \pm \text{j } 0.3873$$

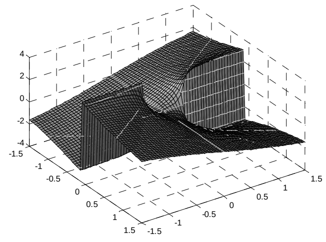
11

Prijenosna funkcija

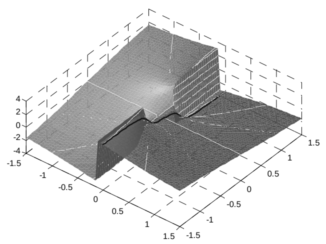


freqS3d

12

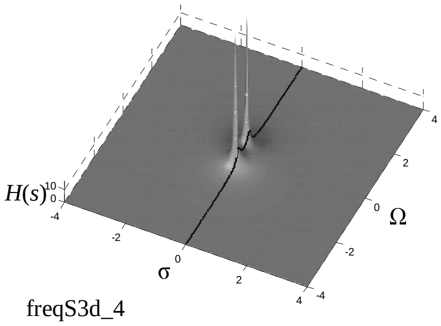


13



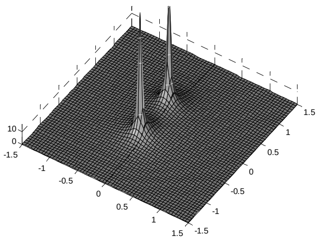
freqS3d_faza

14



freqS3d_4

15



freqS3d_4

16

Prisilni odziv sustava

- specijalni slučajevi kompleksne frekvencije pobude s:
  - $s = 0$ - prisilni odziv na pobudu konstantom

$$u = Ue^{0t} = U, \quad H(0) = \frac{b_0}{a_0}$$

17

Prisilni odziv sustava

- $s = j\Omega$ – odziv na harmonijsku (ili sinusnu) pobudu

$$u(t) = Ue^{(0+j\Omega)t} = Ue^{j\Omega t} = U\cos(\Omega t) + jU\sin(\Omega t)$$

kompleksna amplituda odziva je

$$Y = \frac{b_m(j\Omega)^m + b_{m-1}(j\Omega)^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n(j\Omega)^n + a_{n-1}(j\Omega)^{n-1} + \ldots + a_0} U = H(j\Omega)U$$

a odziv

$$y(t) = UH(j\Omega)e^{j\Omega t}$$

18

Prisilni odziv sustava

$$H(j\Omega) = H(\Omega) = H_r(\Omega) + jH_i(\Omega) = A(\Omega)e^{j\varphi(\Omega)},$$

$H(j\Omega)$ se naziva frekvencijska karakteristika sustava.

- $A(\Omega)$ – amplitudno frekvencijska karakteristika.
- $\varphi(\Omega)$ – fazno frekvencijska karakteristika.

19

Prisilni odziv sustava

- za pobudu $u(t) = Ue^{-j\Omega t}; \quad U \in Realni$

kompleksna amplituda odziva je

$$Y = \frac{b_m(-j\Omega)^m + b_{m-1}(-j\Omega)^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n(-j\Omega)^n + a_{n-1}(-j\Omega)^{n-1} + \ldots + a_0} U = H(-j\Omega)U$$

a odziv

$$y(t) = UH(-j\Omega)e^{-j\Omega t}$$

20

Prisilni odziv sustava

- za pobudu $u(t) = \dfrac{Ue^{j\Omega t} + Ue^{-j\Omega t}}{2} = U\cos(\Omega t)$

odziv je

$$y(t) = \frac{UH(j\Omega)e^{j\Omega t} + UH(-j\Omega)e^{-j\Omega t}}{2}$$

$$y(t) = \frac{UH(j\Omega)e^{j\Omega t}}{2} + \left(\frac{UH(j\Omega)e^{j\Omega t}}{2}\right)^*$$

21

Prisilni odziv sustava

$$y(t) = 2Re\left\{\frac{UH(j\Omega)e^{j\Omega t}}{2}\right\}$$

$$y(t) = Re\left\{U\left|H(j\Omega)\right|e^{\angle H(j\Omega)}e^{j\Omega t}\right\}$$

$$y(t) = U\left|H(j\Omega)\right|\cos(\Omega t + \angle H(j\Omega))$$

SIMULINK primjer

primjer1

Frekvencijska karakteristika kontinuiranog sustava

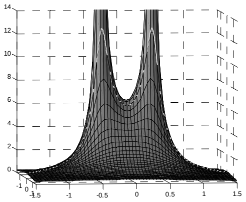
- za naš primjer

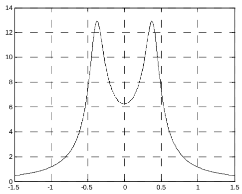
$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 0,2s + 0,16}$$

$$= \frac{1}{(s + 0,1 - j0,3873)(s + 0,1 + j0,3873)}$$

$$H(j\Omega) = \frac{1}{(j\Omega)^2 + 0,2(j\Omega) + 0,16}$$

Frekvencijska karakteristika kontinuiranog sustava

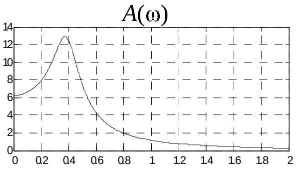




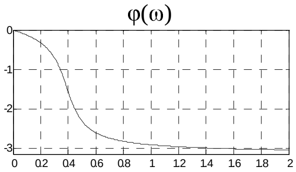
25

Frekvencijske karakteristike

$A(\omega)$



$\varphi(\omega)$

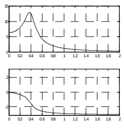


Ω	$A(\Omega)$	$\varphi(\Omega)$
0.0	6.2500	0.0000
0.2	7.9057	-0.3218
0.4	12.5000	-1.5708
0.6	4.2875	-2.6012
0.8	1.9764	-2.8198
1.0	1.1581	-2.9078
1.2	0.7679	-2.9562
1.4	0.5490	-2.9873
1.6	0.4130	-3.0090
1.8	0.3225	-3.0252
2.0	0.2590	-3.0378

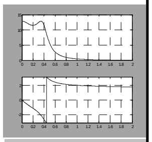
26

Frekvencijske karakteristike

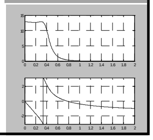
$$H(s)=\frac{1}{(s+0{,}1-j0{,}3873)(s+0{,}1+j0{,}3873)}$$



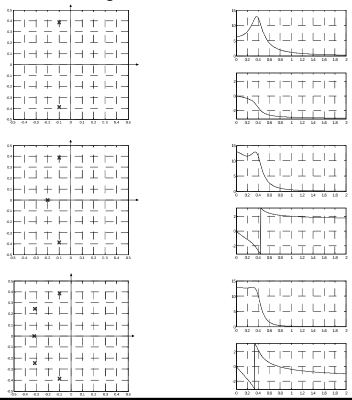
$$H(s)=\frac{0{,}413}{(s+0{,}2)(s+0{,}1-j0{,}3873)(s+0{,}1+j0{,}3873)}$$



$$H(s)=\frac{0.1059}{(s+0{,}322)(s+0{,}1-j0{,}3873)(s+0{,}1+j0{,}3873)}\cdot\frac{1}{(s+0.3162-j0.2450)(s+0.3162+j0.2450)}$$



Frekvencijske karakteristike



28

Diskretni sustavi – model s ulazno izlaznim varijablama

- opis linearnog sustava jednadžbom diferencija

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + ... + a_N y[n-N] =$$
$$= b_0 u[n] + b_1 u[n-1] + b_2 u[n-2] + ... + b_M u[n-M]$$

- rješenje ove jednadžbe je:

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n]$$

- dakle, zbroj rješenja homogene jednadžbe i partikularnog rješenja

29

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija

- Određivanje partikularnog rješenja
  - Lagrangeova metoda varijacije parametara
    - rješenje se dobiva u eksplicitnom obliku
    - primjena rezultira složenim sumacijama
  - Metoda neodređenog koeficijenta
    - ograničena na pobude oblika polinoma i eksponencijalnih nizova
    - veliki broj pobuda može se aproksimirati gore navedenim nizovima
    - češće se upotrebljava u analizi sustava

30

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...

- razmotrimo partikularno rješenje za kompleksni eksponencijalni ulazni niz:
- pobuda eksponencijalog oblika

$$u[n] = Ue^{\varepsilon n} = Uz^n; \quad e, \varepsilon \in Kompleksni$$

- partikularno rješenje možemo napisati u obliku

$$y_p[n] = Y z^n$$

- U i Y su kompleksne amplitude pobude i odziva

31

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...

- uvrštenjem pretpostavljenog rješenja Yz^n u jednadžbu

$$(a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + ... + a_N z^{-N}) Yz^n =$$
$$= (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + ... + b_M z^{-M}) Uz^n$$

$$A(z)\, Y z^n = B(z)\, U z^n$$

pa je kompleksna amplituda odziva

$$Y = \frac{B(z)}{A(z)} U = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}} U = H(z) U$$

32

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...

- partikularno rješenje (prisilni odziv) je dakle

$$y_p[n] = H(z)Uz^n$$

- odziv nehomogene jednadžbe diferencija uz pobudu $u[n]=Uz^n$ je prema tome

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n]$$
$$= C_1 q_1^n + C_1 q_2^n + ... + C_1 q_N^n + H(z)Uz^n$$

33

Prijenosna funkcija diskretnog sustava

- transfer funkcija se definira kao

$$H(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\ldots+b_Mz^{-M}}{a_0+a_1z^{-1}+\ldots+a_Nz^{-N}}$$

a može se formalno napisati iz jednadžbe diferencija zamjenom operatora E^{-1} s brojem z^{-1}

- jednadžbu diferencija

$$a_0y[n]+a_1y[n-1]+a_2y[n-2]+\ldots.+a_Ny[n-N]=$$
$$=b_0u[n]+b_1u[n-1]+b_2u[n-2]+\ldots.+b_Mu[n-M]$$

34

Prijenosna funkcija diskretnog sustava

možemo prikazati uz pomoć operatora za pomak E^{-1}

$$\left\{a_0+a_1E^{-1}+a_2E^{-2}+\ldots.+a_NE^{-N}\right\}y[n]=$$
$$=\left\{b_0+b_1E^{-1}+b_2E^{-2}+\ldots.+b_ME^{-M}\right\}u[n]$$

gdje je $(a_NE^{-N}y)[n]\triangleq a_Ny[n-N]$

jednadžba diferencija se može prikazati i kao

$$A(\mathrm{E})\,y=B(\mathrm{E})\,u$$

35

Prijenosna funkcija diskretnog sustava

odnosno $y=H(E)u$ gdje je

$$H(E)=\frac{B(E)}{A(E)}=\frac{b_0+b_1E^{-1}+b_2E^{-2}+\ldots.+b_ME^{-M}}{a_0+a_1E^{-1}+a_2E^{-2}+\ldots.+a_NE^{-N}}$$

složeni operator kojeg treba interpretirati kao jednadžbu diferencija

- prema prije kazanom slijedi

$$H(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\ldots+b_Mz^{-M}}{a_0+a_1z^{-1}+\ldots+a_Nz^{-N}}$$

36

Primjer rješavanja nehomogene jednadžbe diferencija

- Primjer: naći odziv diskretnog sustava opisanog jednadžbom diferencija

$$y[n]-0.8\ \ 2y[n-1]+0.64y[n-2]=u[n]$$

uz $y[-1]=y[-2]=0$

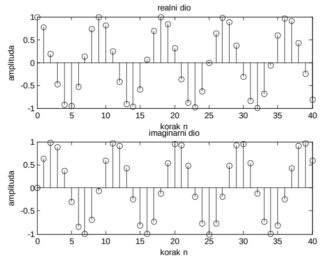
- neka je pobuda neprigušena kompleksna eksponencijala:

$$u[n]=Uz^{n}=Ue^{j\omega_0 n}=1e^{j0,22\pi n}=(0.7705+j0.6374)^{n}$$
$$=\cos(0.22\pi n)+j\sin(0.22\pi n)$$

37

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...

$$u[n]=e^{j0,22\pi n}=(0.7705+j0.6374)^{n}=\cos(0.22\pi n)+j\sin(0.22\pi n)$$



38

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...

- jednadžbu diferencija se može riješiti korak po korak n=0,1,2,..30 :

$$y[0]=1\cdot e^{0}+0.8\ \ 2\cdot 0-0.64\cdot 0=1$$
$$y[1]=1\cdot e^{j0.22\pi}+0.8\ \ 2\cdot 1-0.64\cdot 0=1.902+j0.637$$
$$y[2]=......$$

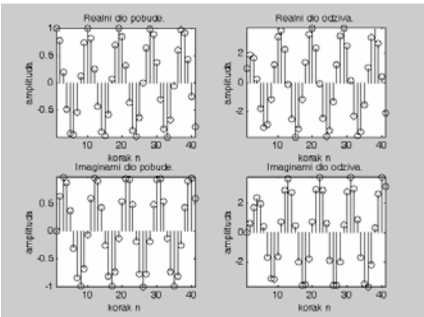
39

Primjer rješavanja jednadžbe diferencija

korak 0:	$u[0] = 1$	$y[0] = 1$
korak 1:	$u[1] = 0.77051+j0.63742$	$y[1] = 1.9019+j0.6374$
korak 2:	$u[2] = 0.18738+j0.98229$	$y[2] = 1.6991+j1.7035$
korak 3:	$u[3] = -0.48175+j0.87631$	$y[3] = 0.2233+j2.3956$
korak 4:	$u[4] = -0.92978+j0.36812$	$y[4] = -1.7645+j1.9882$
korak 5:	$u[5] = -0.95106- j0.30902$	$y[5] = -3.0903+j0.4072$
korak 6:	$u[6] = -0.53583- j0.84433$	$y[6] = -2.9028- j1.6561$
korak 7:	$u[7] = 0.12533- j0.99211$	$y[7] = -1.1811- j3.1264$
korak 8:	$u[8] = 0.72897- j0.68455$	$y[8] = 1.2506- j3.1617$
korak 9:	$u[9] = 0.99803- j0.06279$	$y[9] = 3.1688- j1.6390$

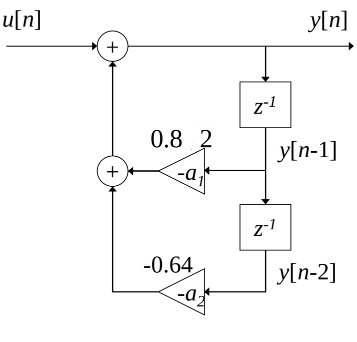
40

Primjer rješavanja jednadžbe diferencija



41

Blok dijagram sustava



42

Primjer rješavanja nehomogene jednadžbe diferencija

- riješimo sada istu jednadžbu analitički
- rješenje homogene jednadžbe :

$$y[n]-0.8\sqrt{2}y[n-1]+0.64y[n-2]=0$$

$$\Downarrow \quad y_h[n]=Cq^n$$

$$1-0.8\sqrt{2}q^{-1}+0.64q^{-2}=0$$

Primjer rješavanja jednadžbe diferencija

Korijeni su : $q_{1,2}=0.8e^{\pm j\frac{\pi}{4}}=0.4\sqrt{2}\left(1\pm j\right)$, pa izlazi :

$$y_h[n]=C_1q_1^{\,n}+C_2q_2^{\,n}=0.8^n\left[C_1e^{j\frac{\pi}{4}n}+C_2e^{-j\frac{\pi}{4}n}\right]$$

Partikularno rješenje oblika $y_p[n]=H(e^{j0,22\pi})e^{j0,22\pi n}$

$$H(z)=\frac{1}{1-0.8\sqrt{2}z^{-1}+0.64z^{-2}}\Rightarrow$$

$$H(e^{j0,22\pi})=\frac{1}{1-0.8\sqrt{2}e^{-j0,22\pi}+0.64\left(e^{j0,22\pi}\right)^{-2}}=3.54\ \text{-}\ j1.32=3.78e^{-j\text{-}0.114\pi}$$

$$Y=H(e^{j0,22\pi})\cdot 1=3.54\ \text{-}\ j1.32=3.78e^{-j0.114\pi}$$

Primjer rješavanja nehomogene jednadžbe diferencija

pa je partikularno rješenje

$$y_p[n]=(3.54\ \text{-}\ j1.32)e^{j0,22\pi n}$$

Kompletno rješenje tj. totalni odziv je :

$$y[n]=y_h[n]+y_p[n]=$$

$$=0.8^n\left[C_1e^{j\frac{\pi}{4}n}+C_2e^{-j\frac{\pi}{4}n}\right]+(3.54\ \text{-}\ j1.32)e^{j0,22\pi n}\quad \text{za } n\geq 0$$

Primjer rješavanja nehomogene jednadžbe diferencija

- iz polazne jednadžbe:

$$y[n]-0.8\sqrt{2}y[n-1]+0.64y[n-2]=1\cdot e^{j\omega_0 n}$$

za n=0,1 slijedi

$$y[0]=1\cdot e^{0}+0.8\sqrt{2}\cdot 0-0.64\cdot 0=1$$

$$y[1]=1\cdot e^{j0.22\pi}+0.8\sqrt{2}\cdot 1-0.64\cdot 0=1.902+j0.637$$

vrijednost kompletnog rješenja za n=0,1 :

$$y[0]=1=C_1+C_2+3.54-j\cdot 1.32$$

$$y[1]=1.902+j\cdot 0.637=0.8\left[C_1e^{j\frac{\pi}{4}}+C_2e^{-j\frac{\pi}{4}}\right]+(3.54-j\cdot 1.32)\cdot e^{j0.22\cdot\pi}$$

Primjer rješavanja nehomogene jednadžbe diferencija

dobivamo:

$$C_1=-2.46+j\cdot 0.86=2.6060\cdot \mathrm{e}^{j2.8053}$$

$$C_2=-0.08+j\cdot 0.46=0.4669\cdot e^{j1.743}$$

$$y[n]=y_h[n]+y_p[n]=$$

$$=0.8^n\left[C_1e^{j\frac{\pi}{4}n}+C_2e^{-j\frac{\pi}{4}n}\right]+\underbrace{(3.54\ \text{-}\ j1.32)}_{3.78e^{-j0.114\pi}}e^{j0,22\pi n}\quad \text{za } n\geq 0$$

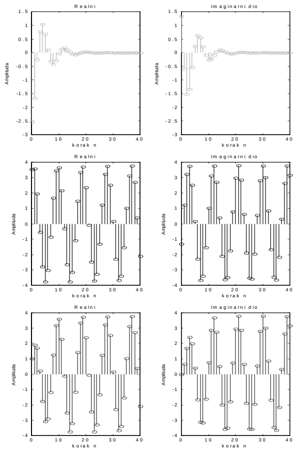
$$y[n]=0.8^n\left[2.61e^{j2.81}e^{j\frac{\pi}{4}n}+0.467e^{j1.74}e^{-j\frac{\pi}{4}n}\right]+3.78e^{-j0.114\pi}\cdot e^{j0.22\pi n}$$

Primjer rješavanja nehomogene jednadžbe diferencija

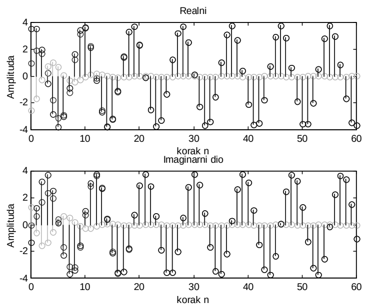
Pogledajmo sada razdvojene odzive:

partikularno rješenje: $y_p[n]=Y\cdot e^{j\omega_0 n}$

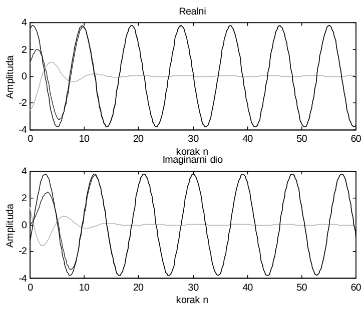
vlastito titranje sustava ili komplementarno rješenje: $y_v[n]=C_1q_1{}^n+C_2q_2{}^n$



Diskusija rješenja



Ukupno rješenje



Primjer rješavanja nehomogene jednadžbe diferencija

- obzirom da je $|q_1|=|q_2|=0.8$, vlastito titranje sustava trne u nulu proporcionalno sa 0.8^n
- za linearne sustave kod kojih su moduli svih korijena karakterističnog polinoma $|q_i|<1$,odziv sustava $y[n]$ na trajnu periodičku pobudu postaje jednak prisilnom odzivu $y_p[n]$ za veliki n
- ….. vlastito titranje $y_v[n]$ isčezava, i kažemo da je sustav ušao u stacionarno stanje.

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...

- $H(z)$ je prijenosna funkcija
- prijenosna ili transfer funkcija daje odnos kompleksnih amplituda prisilnog odziva i pobude, kad je pobuda Uz^n

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\left.\frac{y_p[n]}{u[n]}\right|_{u[n]=Uz^n}=\frac{Yz^n}{Uz^n}=\frac{Y}{U}$$

- pokazano je da se transfer funkcija može lako napisati iz jednadžbe diferencija formalnom zamjenom operatora E^{-1} s brojem z^{-1}

Prijenosna funkcija diskretnog sustava

- prijenosnu funkciju:

$$H(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\ldots+b_Mz^{-M}}{a_0+a_1z^{-1}+\ldots+a_Nz^{-N}}=\frac{\sum_{j=0}^{M}b_jz^{-j}}{\sum_{j=0}^{N}a_jz^{-j}}$$

možemo pisati i u obliku

$$H(z)=z^{(N-M)}\frac{b_0z^M+b_1z^{M-1}+\ldots+b_M}{a_0z^N+a_1z^{N-1}+\ldots+a_N}=z^{(N-M)}\frac{\sum_{j=0}^{M}b_jz^{M-j}}{\sum_{j=0}^{N}a_jz^{N-j}}$$

Prijenosna funkcija diskretnog sustava

- prijenosnu funkciju možemo pisati uz pomoć produkta korijenih faktora:

$$H(z)=\frac{\sum_{j=0}^{M} b_j z^{-j}}{\sum_{j=0}^{N} a_j z^{-j}}=\frac{b_0}{a_0}\cdot\frac{\prod_{j=1}^{M}(1-z_j z^{-1})}{\prod_{j=1}^{N}(1-p_j z^{-1})}$$

- odnosno u obliku

$$H(z)=z^{(N-M)}\frac{\sum_{j=0}^{M} b_j z^{M-j}}{\sum_{j=0}^{N} a_j z^{N-j}}=z^{(N-M)}\frac{b_0}{a_0}\frac{\prod_{j=1}^{M}(z-z_j)}{\prod_{j=1}^{N}(z-p_j)}$$

$z_1, z_2, \ldots, z_M$ su nule a $p_1, p_2, \ldots, p_N$ polovi prijenosne funkcije

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...

- partikularno rješenje (prisilni odziv) je dakle
  $y_p[n]=H(z)Uz^n$
- ovisno o z, partikularni niz može biti
  - rastući ili padajući aperiodičan ili valovit
  - stalan ili periodičan
- linearna kombinacija eksponencijala može dati realni kosinusni niz

$$re^{j\omega n}+re^{-j\omega n}=2r\cos(\omega n)$$

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...

- za pobudu $u[n]=Uz^n=U(1)^n$

  partikularno rješenje je

$$y_p[n]=Yz^n=\left(H(z)Uz^n\right)_{z=1}=H(1)\cdot U\cdot(1)^n$$

- za pobudu $u[n]=Uz^n=U(-1)^n$

  partikularno rješenje je

$$y_p[n]=Yz^n=\left(H(z)Uz^n\right)_{z=-1}=H(-1)\cdot U\cdot(-1)^n$$

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...

- za pobudu $u[n] = Uz^n = U(e^{j\omega})^n = e^{j\omega n}$ za $U = 1$

  partikularno rješenje je

$$y_p[n] = Yz^n = \left(H(z)Uz^n\right)_{z=e^{j\omega}} = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$$

- pa je

$$H(e^{j\omega}) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\omega} + \ldots + b_M e^{-jM\omega}}{a_0 + a_1 e^{-j\omega} + \ldots + a_N e^{-jN\omega}}$$

  frekvencijska karakteristika diskretnog sustava

58

Frekvencijska karakteristika

- frekvencijska karakteristika diskretnog sustava

$$H(e^{j\omega}) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\omega} + \ldots + b_M e^{-jM\omega}}{a_0 + a_1 e^{-j\omega} + \ldots + a_N e^{-jN\omega}}$$

$H(e^{j\omega})$ funkcija od $e^{j\omega}$
$e^{j\omega} = e^{j(\omega+2\pi i)}$ } vrijednost transfer funkcije za $z = e^{j\omega}$ je periodična s 2π

$H(e^{j\omega}) = H_r(e^{j\omega}) + H_i(e^{j\omega})$

$= A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ ⟶ $A(\omega) = |H(e^{j\omega})|$
$\varphi(\omega) = \arg(H(e^{j\omega}))$

59

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija ...

- za prije zadani sustav

  $y[n] - 0.8\ \ 2y[n-1] + 0.64y[n-2] = u[n]$

  uz $y[-1] = y[-2] = 0$

- i pobudu

$$u[n] = Uz^n = e^{j\omega_0 n} = e^{j0,22\pi n}$$

  prijenosna funkcija je

$$H(z) = \frac{1}{(1 - 0.8\ \ 2z^{-1} + 0.64z^{-2})}$$

60

Frekvencijska karakteristika

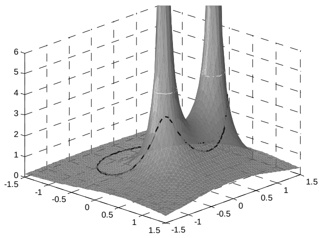
- a frekvencijska karakteristika

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-0.8\ 2e^{-j\omega}+0.64e^{-2j\omega})}$$

- frekvencijsku karakteristiku izračunavamo iz

$$H(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = H(e^{j\omega})$$

Frekvencijska karakteristika



freqz3d

Frekvencijska karakteristika

- za konkretnu frekvenciju pobude omjer kompleksne amplitude odziva i pobude je

$\omega = 0,22\pi \Rightarrow$

$$H(e^{j0,22\pi}) = \frac{1}{1-0.8\ \ 2e^{-j0,22\pi}+0.64\left(e^{j0,22\pi}\right)^{-2}} = 3.54\ -\ j1.32$$

- odredimo omjer kompleksne amplitude odziva u stacionarnom stanju i pobude za još nekoliko frekvencija:

$\omega = 0,\ 0.15\pi,\ 0.20\pi,\ 0.23\pi, 0.25\pi, 0.27\pi,$
$0.30\pi, 0.35\pi, 0.4\pi, 0.5\pi, 0.7\pi$

video clip 9

Frekvencijska karakteristika

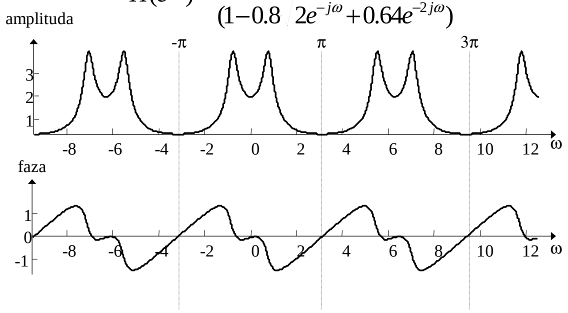
- frekvencijska karakteristika danog sustava je

primjer

12.mov

Frekvencijska karakteristika

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - 0.8\sqrt{2}e^{-j\omega} + 0.64e^{-2j\omega})}$$



Frekvencijska karakteristika

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - 0.8\sqrt{2}e^{-j\omega} + 0.64e^{-2j\omega})}$$

Koeficijent $\{a_i\}$ i $\{b_i\}$ su realni te vrijedi

$H(e^{-j\omega}) = H^*(e^{j\omega})$ ⇒ $H_r(e^{j\omega})$ i $A(\omega)$ parne funkcije od ω
$H_i(e^{j\omega})$ i $\varphi(\omega)$ neparne funkc. od ω

Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava ...

- Frekvencijska karakteristika se može odrediti grafički iz:

$$H(z) = K\frac{\prod_{i=1}^{m}(z-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(z-q_i)}$$

praćenjem apsolutne vrijednosti $|H(e^{j\omega})|$ i argumenta $H(e^{j\omega})$ transfer funkcije na jediničnoj kružnici $z = e^{j\omega}$ ravnine z

67

Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava ...

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = K\frac{\prod_{i=1}^{m}\left|(e^{j\omega}-z_i)\right|}{\prod_{i=1}^{n}\left|(e^{j\omega}-q_i)\right|}$$

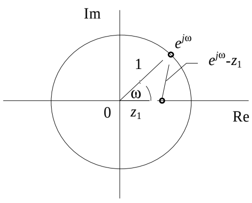
$$\arg H(e^{j\omega}) = \sum\left[\arg(e^{j\omega}-z_i) - \arg(e^{j\omega}-q_i)\right]$$

- svaki korijeni faktor transfer funkcije daje svoj individualni doprinos modulu (multiplikativno) i fazi (aditivno).

68

Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava ...

- grafički prikaz u polarnom koordinatnom sustavu



korjeni faktori → vektori

69

Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava ...

vrijednost transfer funkcije na frekvenciji ω

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = K\,\frac{\prod_{1}^{M} d_i}{\prod_{1}^{N} l_i}$$

$\{d_i\}$ - udaljenost točke na kružnici $e^{j\omega}$ do nultočki $\{z_i\}$

$\{l_i\}$ - udaljenost točke na kružnici $e^{j\omega}$ do polova $\{p_i\}$

fazni kut transfer funkcije

$$\arg H(e^{j\omega}) = \sum_{1}^{M}\varphi_i - \sum_{1}^{N}\psi_i$$

$\varphi_i = \arg(e^{j\omega}) - \arg(z_i)$

$\psi_i = \arg(e^{j\omega}) - \arg(p_i)$

70

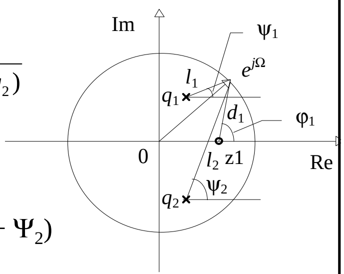
Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava ...

Primjer:

$$H(z) = K\,\frac{z - z_1}{(z-q_1)(z-q_2)}$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = K\,\frac{d_1}{l_1 l_2}$$

$\arg H(e^{j\omega}) = \varphi_1 - (\Psi_1 + \Psi_2)$



71

Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava ...

Za naš primjer

$$H(z) = \frac{1}{(z-q_1)(z-q_2)}$$

⇓ $z = e^{j\omega}$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(e^{j\omega}-q_1)(e^{j\omega}-q_2)}$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \frac{1}{\left|(e^{j\omega}-0{,}8e^{j\pi/4})(e^{j\omega}-0{,}8e^{-j\pi/4})\right|}$$

12.mov

72