



Kontinuirani vremenski stalni linearni sustavi

Model sustava s ulazno izlaznim varijablama



Kontinuirani sustavi – model s ulazno izlaznim varijablama

- kontinuirani sustav je općenito opisan s više simultanih diferencijalnih jednačbi.
- često se više simultanih diferencijalnih jednačbi svodi na jednu jednačbu višeg reda koja veže jednu izlaznu i jednu ulaznu varijablu.

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = f(t) = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) \dots + b_0 u(t)$$

2



Kontinuirani sustavi – model s ulazno izlaznim varijablama

- koeficijenti $\{a_i\}$ i $\{b_i\}$
 - konstantni \rightarrow vremenski stalan linearni sustav
 - funkcija vremena \rightarrow vremenski promjenjivi linearni sustav
 - zavise od ulaznih ili izlaznih varijabli i njihovih derivacija \rightarrow nelinearni sustav

3



Kontinuirani sustavi – model s ulazno izlaznim varijablama

- rješenje diferencijalne jednačbe

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = f(t) = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \dots + b_0 u(t)$$

ima dvije komponente:

- $y_h(t)$ - rješenje homogene jednačbe
- $y_p(t)$ - partikularno rješenje

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

4



Klasične metode rješavanja

- jednačba postaje homogena za $f(t) = 0$:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_0 y = 0$$

- jednačba je n - tog reda \rightarrow ima n linearno nezavisnih rješenja, pa se opće rješenje može prikazati kao linearna kombinacija pojedinačnih rješenja.

$$y_h(t) = K_1 y_1(t) + K_2 y_2(t) + \dots + K_n y_n(t)$$

5



Klasične metode rješavanja

- pretpostavlja se rješenje oblika: $y(t) = e^{pt}$, $p \in \mathbb{C}$.
- supstitucijom se dobije izraz:

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) e^{pt} = 0.$$

- karakteristična jednačba gornje diferencijalne jednačbe

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0$$

6



Klasične metode rješavanja

- opće rješenje uz n različitih karakterističnih korijena

$$y_h(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \dots + K_n e^{p_n t} = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t}$$

- opće rješenje uz k jednakih od ukupno n korijena

$$y_h(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 t e^{p_1 t} + \dots + K_k t^{k-1} e^{p_1 t} + K_{k+1} e^{p_{k+1} t} + \dots + K_n e^{p_n t}$$

7



Vremenski stalni sustavi

- opće rješenje uz korijene višestrukosti m_1, m_2, \dots, m_n

$$y_h(t) = \sum_{i=1}^{n'} e^{p_i t} \sum_{j=1}^{m_i} K_{ij} t^{j-1}$$

gdje je

$$\sum_{i=1}^{n'} m_i = n$$

8



Vremenski stalni sustavi

- rješenje homogene jednadžbe – komplementarno rješenje ili slobodni odziv sustava,
 - postoji i kada nema pobude za $K_i \neq 0$,
 - naziva se i vlastito gibanje ili titranje sustava jer opisuje titranje energije u sustavu bez vanjskog poticaja.
 - komponente slobodnog odziva titraju isključivo karakterističnim frekvencijama sustava p_i , koje zavise od strukture i parametara sustava, a ne od pobude.
 - komplementarno rješenje prisutno je u općem rješenju nehomogene jednadžbe.

9



Amplitude vlastitog titranja sustava

- opće rješenje diferencijalne jednadžbe za slučaj nejednakih korijena je:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t} + y_p(t)$$

- konstante K_i određuju se iz početnih uvjeta danih preko vrijednosti funkcije i njenih derivacija u $t = 0$.
- uzastopnom derivacijom izraza za $y(t)$ u $t=0$ dobiva se sustav linearnih algebarskih jednadžbi.

10



Amplitude vlastitog titranja sustava

$$y(0) - y_p(0) = K_1 + K_2 + \dots + K_n$$

$$\dot{y}(0) - \dot{y}_p(0) = p_1 K_1 + p_2 K_2 + \dots + p_n K_n$$

⋮

$$y^{(n-1)}(0) - y_p^{(n-1)}(0) = p_1^{n-1} K_1 + p_2^{n-1} K_2 + \dots + p_n^{n-1} K_n$$

- Van der Mondova determinanta sustava sastavljena od potencija korijena p_i, p_i^{n-1} .

11



Amplitude vlastitog titranja sustava

- uz konstantnu ili periodičku pobudu partikularno rješenje se naziva *stacionarno stanje*.
- komplementarno rješenje iščezava s vremenom pa se naziva *prijelazno ili prolazno stanje*.

12



Amplitude vlastitog titranja sustava

- Prijelazno stanje sastoji se od titranja vlastitim frekvencijama p_i sustava.
- Amplitude titranja u prijelaznom stanju određene su razlikom početnog stanja $\{y^{(i)}(0)\}$ i iznosa partikularnog rješenja $\{y_p^{(i)}(0)\}$ u trenutku $t = 0$.

13



Amplitude vlastitog titranja sustava

- Prvi specijalni slučaj: početni uvjeti jednaki partikularnom rješenju u $t = 0$

$$y^{(i)}(0) - y_p^{(i)}(0) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

- trivijalno rješenje, $K_i = 0$.
- prijelaznog procesa nema, već stacionarno stanje kreće odmah i ima frekvenciju pobude.

14



Amplitude vlastitog titranja sustava

- drugi specijalni slučaj: početni uvjeti jednaki 0

$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = 0.$$

- sustav je bez početne energije - miran sustav
- označimo s K_{p_i} konstante koje slijede iz početnih uvjeta kada je sustav miran

15



Amplitude vlastitog titranja sustava

- Treći specijalni slučaj: $f(t) = 0$ – nepobuđen sustav

$$y_p(t) = 0, \quad \dot{y}_p(t) = 0, \dots, y_p^{(n-1)}(t) = 0.$$

- označimo s K_{0i} konstante koje slijede iz početnih uvjeta $y_p^{(i)}(0) = 0$.

16



Amplitude vlastitog titranja sustava

- ukupno rješenje prikazano pomoću K_{0i} i K_{pi} :

$$y(t) = \left[\sum_{i=1}^n K_{0i} e^{p_i t} + \sum_{i=1}^n K_{pi} e^{p_i t} \right] + y_p(t)$$

- dio s *vlastitim titranjem* frekvencijom p_i u zagradi te *prisilno titranje* $y_p(t)$ frekvencijom pobude.

17



Amplitude vlastitog titranja sustava

- ukupno rješenje prikazano pomoću K_{0i} i K_{pi} može biti prikazano i ovako

$$y(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^n K_{0i} e^{p_i t}}_{\text{odziv nepobuđenog sustava}} + \underbrace{\left[\sum_{i=1}^n K_{pi} e^{p_i t} + y_p(t) \right]}_{\text{odziv mirnog sustava}}$$

- odziv *nepobuđenog sustava* koji titra s p_i
- u zagradi je odziv *mirnog sustava* koji titra s p_i i frekvencijom pobude.

18



Prisilni odziv sustava

- Prisilni odziv sustava predstavlja partikularno rješenje nehomogene jednačbe.
 - Općenito se može dobiti Lagrangeovom metodom varijacije parametara.
- Za pobudu eksponencijalnom funkcijom računanje odziva je jednostavno jer se $y_p(t)$ može predstaviti eksponencijalom (deriviranjem se mijenja samo kompleksna amplituda eksponencijale).
- Određivanje kompleksne amplitude temelji se na metodi neodređenih koeficijenata.

19



Odziv sustava primjer

- naći odziv sustava opisanog diferencijalnom jednačbom

$$\ddot{y}(t) + 0,2\dot{y}(t) + 0,16y(t) = u(t)$$

$$\text{uz } u(t) = 0,64s(t) \text{ i } y(0) = -3; \dot{y}(0) = -1$$

- karakteristična jednačba i karakteristične frekvencije su

$$p^2 + 0,2p + 0,16 = 0 \Rightarrow p_{1,2} = -0,1 \pm j0,3873$$

20



Odziv sustava primjer

- pa je rješenje homogene jednačbe

$$y_h(t) = K_1 e^{(-0,1+j0,3873)t} + K_2 e^{(-0,1-j0,3873)t}$$

- partikularno rješenje je oblika

$$y_p(t) = As(t) = 4s(t)$$

- uvrštenjem u polaznu jednačbu i

$$\text{za } \ddot{y}_p(t) = 0, \dot{y}_p(t) = 0 \Rightarrow$$

$$0,16A = 0,64 \Rightarrow A = 4$$

21



Odziv sustava primjer

- totalno rješenje je

$$y(t) = K_1 e^{(-0,1+j0,3873)t} + K_2 e^{(-0,1-j0,3873)t} + 4s(t)$$

- konstante K_1 i K_2 određuju se iz početnih vrijednosti

- rješenje i njegova derivacija su

$$y(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + 4s(t)$$

$$\dot{y}(t) = p_1 K_1 e^{p_1 t} + p_2 K_2 e^{p_2 t}$$

22



Odziv sustava primjer

- za $t = 0$

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= K_1 + K_2 + 4 \\ \dot{y}(0) &= p_1 K_1 + p_2 K_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$K_1 = -3,5 + 2,1947j = 4,1312 e^{j2,5815}$$

$$K_2 = -3,5 - 2,1947j = 4,1312 e^{-j2,5815}$$

- konačno totalno rješenje je

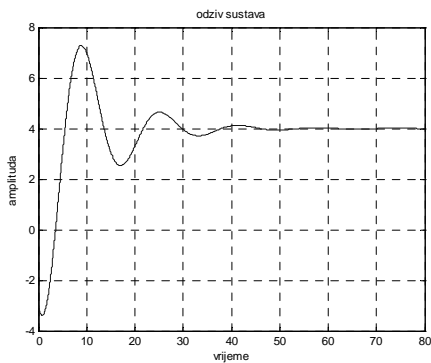
$$y(t) = 4,1312 e^{j2,5815} e^{-0,1t} e^{j0,3873t} + 4,1312 e^{-j2,5815} e^{-0,1t} e^{-j0,3873t} + 4s(t)$$

$$y(t) = 8,2624 e^{-0,1t} \cos(0,3873t + 2,5815) + 4s(t)$$

23



Odziv sustava primjer



24



Odziv nepobuđenog sustava primjer

- totalno rješenje možemo naći i kao zbroj nepobuđenog i odziv mirnog sustava
- odziv nepobuđenog sustava je

$$y_{nep}(t) = K_{01}e^{(-0,1+j0,3873)t} + K_{02}e^{(-0,1-j0,3873)t}$$

- konstante K_{01} i K_{02} određuju se iz početnih vrijednosti

- rješenje i njegova derivacija su

$$y_{nep}(t) = K_{01}e^{p_1t} + K_{02}e^{p_2t}$$

$$\dot{y}_{nep}(t) = p_1K_{01}e^{p_1t} + p_2K_{02}e^{p_2t}$$

25



Odziv sustava primjer

- za $t = 0$

$$\left. \begin{aligned} y_{nep}(0) &= K_{01} + K_{02} \\ \dot{y}_{nep}(0) &= p_1K_{01} + p_2K_{02} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$K_{01} = -1,5 + 1,6783j = 2,2509e^{j2,3002}$$

$$K_{02} = -1,5 - 1,6783j = 2,2509e^{-j2,3002}$$

- konačno, rješenje nepobuđenog sustava je

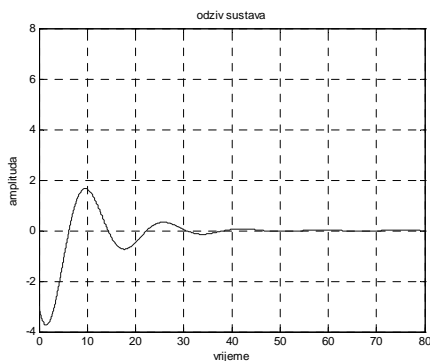
$$y_{nep}(t) = 2,2509e^{j2,3002}e^{-0,1t}e^{j0,3873t} + 2,2509e^{-j2,3002}e^{-0,1t}e^{-j0,3873t}$$

$$y_{nep}(t) = 4,5018e^{-0,1t} \cos(0,3873t + 2,3002)$$

26



Odziv sustava primjer



27



Odziv mirnog sustava primjer

- odziv mirnog sustava je

$$y_{\text{mirn}}(t) = K_{p1}e^{(-0,1+j0,3873)t} + K_{p2}e^{(-0,1-j0,3873)t} + 4s(t)$$

- konstante K_{p1} i K_{p2} određuju se iz početnih vrijednosti
- rješenje i njegova derivacija su

$$y_{\text{mirn}}(t) = K_{p1}e^{p_1t} + K_{p2}e^{p_2t} + 4$$

$$\dot{y}_{\text{mirn}}(t) = p_1K_{p1}e^{p_1t} + p_2K_{p2}e^{p_2t}$$

28



Odziv sustava primjer

- za $t = 0$

$$\left. \begin{aligned} y_{\text{mirn}}(0) &= K_{p1} + K_{p2} + 4 \\ \dot{y}_{\text{mirn}}(0) &= p_1K_{p1} + p_2K_{p2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$K_{p1} = -2 + 0,5164j = 2,0656e^{j2,8889}$$

$$K_{p2} = -2 - 0,5164j = 2,0656e^{-j2,8889}$$

- konačno, rješenje mirnog sustava je

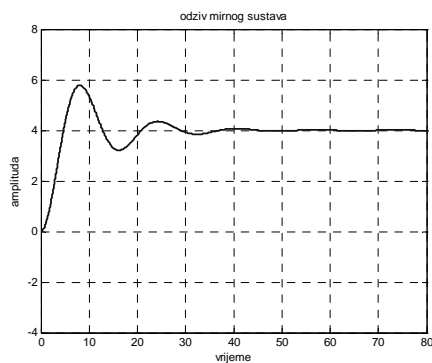
$$y_{\text{mirn}}(t) = 2,0656e^{j2,8889}e^{-0,1t}e^{j0,3873t} + 2,0656e^{-j2,8889}e^{-0,1t}e^{-j0,3873t} + 4s(t)$$

$$y_{\text{mirn}}(t) = 4,1312e^{-0,1t} \cos(0,3873t + 2,8889) + 4s(t)$$

29



Odziv sustava primjer



30



Odziv nepobuđenog sustava primjer

- totalno rješenje možemo naći i kao zbroj nepobuđenog i odziv mirnog sustava

$$y(t) = y_{nep}(t) + y_{mirn}(t)$$

$$y(t) = (-1,5 + 1,6783j)e^{(-0,1 + j0,3873)t} + (-1,5 - 1,6783j)e^{(-0,1 - j0,3873)t} + (-2,0 + 0,5164j)e^{(-0,1 + j0,3873)t} + (-2,0 - 0,5164j)e^{(-0,1 - j0,3873)t} + 4s(t)$$

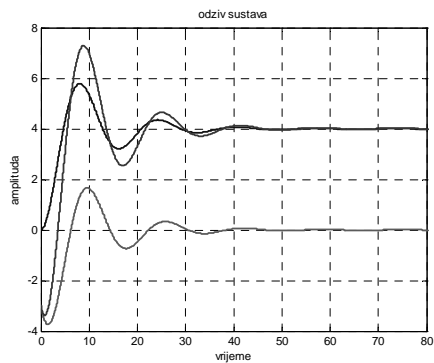
$$y(t) = (-3,5 + 2,1947j)e^{(-0,1 + j0,3873)t} + (-3,5 - 2,1947j)e^{(-0,1 - j0,3873)t} + 4s(t)$$

$$y(t) = 4,5018e^{-0,1t} \cos(0,3873t + 2,3002) + 4,1312e^{-0,1t} \cos(0,3873t + 2,8889) + 4s(t)$$

$$y(t) = 8,2624e^{-0,1t} \cos(0,3873t + 2,5815) + 4s(t) \quad 31$$



Odziv sustava primjer



32



Signali i sustavi

Sustavi drugog reda



Vladanje i svojstva kontinuiranih sustava drugog reda

- linearni vremenski stalan sustav drugog reda s jednim ulazom i jednim izlazom opisan je s

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = [c_1 \quad c_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + du$$

- jednadžba stanja se može transformirati u diferencijalnu jednadžbu drugog reda:

$$\ddot{x}_1 - T\dot{x}_1 + \Delta x_1 = w(t) \quad \text{ili}$$

$$\ddot{x}_2 - T\dot{x}_2 + \Delta x_2 = v(t).$$

34



Vladanje i svojstva kontinuiranih sustava drugog reda

- pri tom su:

$$T = a_{11} + a_{22} \quad \text{trag matrice } A$$

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad \text{determinanta od } A$$

$$w(t) = -a_{22}b_1u + a_{12}b_2u + b_1\dot{u}$$

$$v(t) = -a_{11}b_2u + a_{21}b_1u + b_2\dot{u}$$

- Ako su obje konstante $a_{12} = a_{21} = 0$ (matrica A je dijagonalna) sustav je opisan s dvije razvezane jednadžbe prvog reda.

35



Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- uobičajeno je jednadžbu drugog reda nepobuđenog sustava pisati u obliku:

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \omega_0^2 y = 0,$$

$2\alpha = -T$, α je faktor prigušenja,

$\omega_0^2 = \Delta$, ω_0 je frekvencija neprigušenog titranja.

- analizirajmo odziv ovog sustava

36



Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- karakteristična jednadžba je:

$$p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 = 0,$$

- njezina rješenja su karakteristične ili prirodne frekvencije sustava drugog reda.

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \begin{cases} -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} & \text{za } \alpha > \omega_0 > 0 \\ -\alpha & \text{za } \alpha = \omega_0 > 0 \\ -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} & \text{za } 0 < \alpha < \omega_0 \end{cases}$$

37



Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- rješenje je oblika: $y(t) = Y_1 e^{p_1 t} + Y_2 e^{p_2 t}$
- proizvoljne konstante određuju početni uvjeti $y(0)$ i $\dot{y}(0)$.
- rješenje se može napisati u obliku:

$$y(t) = \frac{y(0)p_2 - \dot{y}(0)}{p_2 - p_1} e^{p_1 t} + \frac{\dot{y}(0) - y(0)p_1}{p_2 - p_1} e^{p_2 t}.$$

38



Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- zavisno od veličina α i ω_0 postoji tzv.
 - nadkritično prigušenje $\alpha > \omega_0$,
 - kritično prigušenje $\alpha = \omega_0$,
 - podkritično prigušenje $\alpha < \omega_0$,
 - neprigušeni slučaj $\alpha = 0$.

39



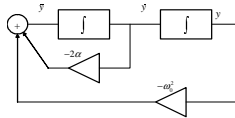
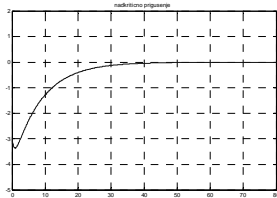
Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- za: $\alpha = 0,75$; $\omega_0 = 0,4$

$$\alpha > \omega_0 \Rightarrow p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -0,75 \pm 0,6344$$

$$= -0,1156$$

$$= -1,3844$$

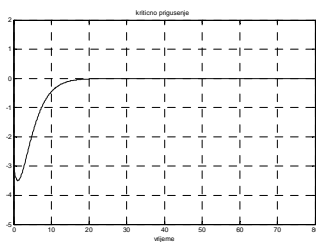


40



Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- za: $\alpha = \omega_0 = 0,4 \Rightarrow p_{1,2} = -\alpha = -0,4$



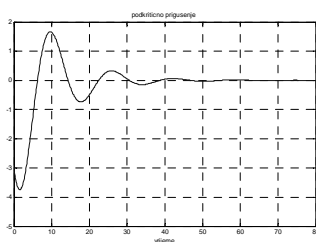
41



Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- za: $\alpha = 0,1$; $\omega_0 = 0,4$

$$\alpha < \omega_0 \Rightarrow p_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -0,1 \pm j0,3873$$

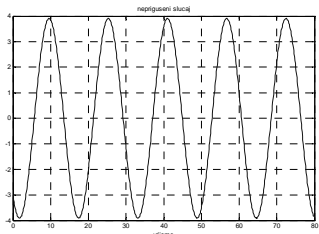


42



Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- za: $\alpha = 0; \omega_0 = 0,4 \Rightarrow p_{1,2} = \pm j\sqrt{\omega_0^2} = \pm j0,4$



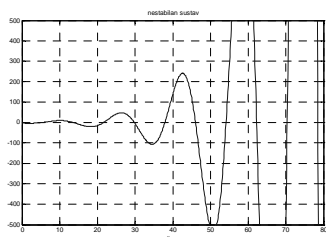
43



Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- za: $\alpha = -0,1; \omega_0 = 0,4$

$$\alpha < \omega_0 \Rightarrow p_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 0,1 \pm j0,3873$$



44



Vladanje i svojstva sustava drugog reda

SIMULINK primjer

45



Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- rješenje homogene jednadžbe stanja može se dobiti pretpostavkom da eksponencijalne funkcije $x_1 = X_1 e^{pt}$, $x_2 = X_2 e^{pt}$ zadovoljavaju skup od dvije jednadžbe:

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

46



Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- dobije se sustav karakterističnih algebarskih jednadžbi:

$$\begin{matrix} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{matrix} \xrightarrow{\substack{x_1 = X_1 e^{pt} \\ x_2 = X_2 e^{pt}}} \begin{matrix} pX_1 e^{pt} = (a_{11}X_1 + a_{12}X_2) e^{pt} \\ pX_2 e^{pt} = (a_{21}X_1 + a_{22}X_2) e^{pt} \end{matrix}$$

$$pX_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2$$

$$pX_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2$$

$$(a_{11} - p)X_1 + a_{12}X_2 = 0$$

$$a_{21}X_1 + (a_{22} - p)X_2 = 0$$

47



Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- da bi sustav karakterističnih jednadžbi dao rješenja za amplitude X_1 , X_2 različite od nule, mora determinanta sustava biti jednaka nuli,

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - p) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22} - p) \end{vmatrix} = 0.$$

- to daje polinom drugog stupnja:

$$p^2 - Tp + \Delta = 0.$$

48



Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- odakle slijede prirodne frekvencije p_1 i p_2 za koje e^{pt} zadovoljava jednadžbu.
- rješenje se može napisati u obliku:

$$x_1(t) = X_{11}e^{p_1t} + X_{12}e^{p_2t},$$

$$x_2(t) = X_{21}e^{p_1t} + X_{22}e^{p_2t}.$$

49



Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- nezavisne su samo dvije konstante i one se odrede iz dva početna uvjeta.
- druge dvije konstante proizlaze iz prvih uvrštenjem u jednadžbe stanja za $t = 0$.

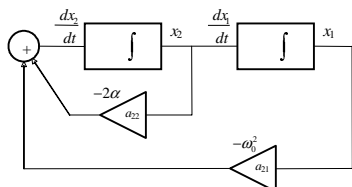
$$X_{11} = \frac{(a_{11} - p_2)x_1(0) + a_{12}x_2(0)}{p_1 - p_2} \quad X_{12} = \frac{(p_1 - a_{11})x_1(0) - a_{12}x_2(0)}{p_1 - p_2}$$

$$X_{21} = \frac{a_{21}x_1(0) + (a_{22} - p_2)x_2(0)}{p_1 - p_2} \quad X_{22} = \frac{-a_{21}x_1(0) + (p_1 - a_{22})x_2(0)}{p_1 - p_2}$$

50



Vladanje i svojstva sustava drugog reda - primjeri



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

51



Vladanje i svojstva sustava drugog reda

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} T = -2\alpha \\ \Delta = \omega_0^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{karakteristična jednačina} \\ p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 = 0$$

▪ za

$$\alpha < \omega_0 \Rightarrow p_{1,2} = -\alpha \pm j \underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}_{\omega_d}$$

52



Vladanje i svojstva sustava drugog reda

$$p_1 = -\alpha + j\omega_d$$

$$p_2 = -\alpha - j\omega_d$$

▪ neka je $x_2(0) = 0$, za zadani primjer slijedi

$$X_{11} = \frac{-p_2 x_1(0) + x_2(0)}{p_1 - p_2} = \frac{(\alpha + j\omega_d)x_1(0)}{2j\omega_d}$$

$$X_{12} = \frac{(p_1 - a_{11})x_1(0) - x_2(0)}{p_1 - p_2} = \frac{(-\alpha + j\omega_d)x_1(0)}{2j\omega_d}$$

53



Vladanje i svojstva sustava drugog reda

▪ pa je

$$x_1(t) = \frac{(\alpha + j\omega_d)x_1(0)}{2j\omega_d} e^{(-\alpha + j\omega_d)t} + \frac{(-\alpha + j\omega_d)x_1(0)}{2j\omega_d} e^{(-\alpha - j\omega_d)t}$$

$$x_1(t) = x_1(0)e^{-\alpha t} \left(\frac{\alpha}{2j\omega_d} e^{j\omega_d t} + \frac{1}{2} e^{j\omega_d t} - \frac{\alpha}{2j\omega_d} e^{-j\omega_d t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_d t} \right)$$

$$x_1(t) = e^{-\alpha t} \left(\frac{\alpha}{\omega_d} \sin(\omega_d t) + \cos(\omega_d t) \right) x_1(0)$$

54



Vladanje i svojstva sustava drugog reda

▪ kako je $x_2(t) = \dot{x}_1(t) \Rightarrow$

$$x_2(t) = -\frac{\alpha^2}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t) x_1(0) - \omega_d e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t) x_1(0)$$

▪ za $\frac{\alpha}{\omega_d} \ll 1$

$$x_1(t) = e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t) x_1(0)$$

$$x_2(t) = -\omega_d e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t) x_1(0)$$

55



Vladanje i svojstva sustava drugog reda

$$x_1(t) = e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t) x_1(0) \Rightarrow \cos(\omega_d t) = \frac{x_1(t)}{x_1(0) e^{-\alpha t}}$$

$$x_2(t) = -\omega_d e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t) x_1(0) \Rightarrow \sin(\omega_d t) = \frac{x_2(t)}{-\omega_d e^{-\alpha t} x_1(0)}$$

▪ pa je

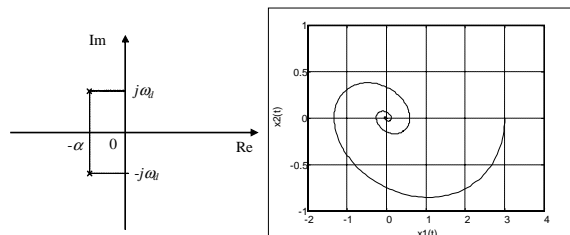
$$\left(\frac{x_1(t)}{e^{-\alpha t} x_1(0)} \right)^2 + \left(\frac{x_2(t)}{-\omega_d e^{-\alpha t} x_1(0)} \right)^2 = 1$$

56



Vladanje i svojstva sustava drugog reda

▪ za $\alpha = -0,1$; $\omega_0 = 0,4$; $\Rightarrow \omega_d = 0,3873$;
 $x_1(0) = 3$; $x_2(0) = 0$;

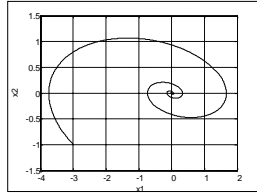
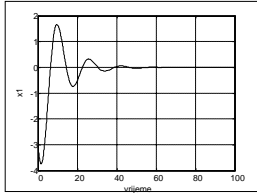


57



Vladanje i svojstva sustava drugog reda

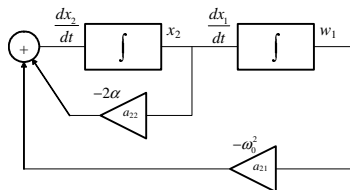
- za $\alpha = -0,1$; $\omega_d = 0,4$; $\Rightarrow \omega_0 = 0,3873$;
 $x_1(0) = -3$; $x_2(0) = -1$;



58



Vladanje i svojstva sustava drugog reda



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

59



Vladanje i svojstva sustava drugog reda

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{matrix} T = -2\alpha \\ \Delta = \omega_0^2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{karakteristična jednačnja} \\ p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 = 0$$

- za $\alpha > \omega_0 \Rightarrow p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$

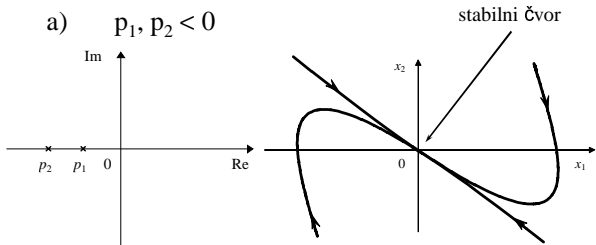
60



Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- slučaj realnih i različitih p_1 i p_2 ,

a) $p_1, p_2 < 0$



61



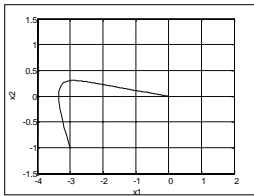
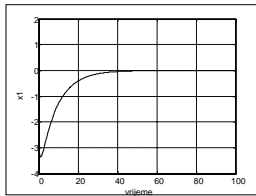
Vladanje i svojstva sustava drugog reda

$\alpha = 0,75$; $\omega_0 = 0,4$; $x_1(0) = -3$; $x_2(0) = -1$;

$$\alpha > \omega_0 \Rightarrow p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -0,75 \pm 0,6344$$

$$p_1 = -0,1156$$

$$p_2 = -1,3844$$



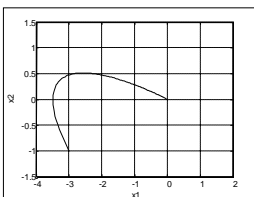
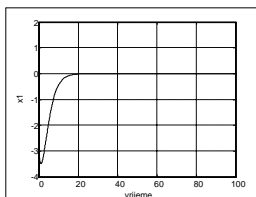
62



Vladanje i svojstva sustava drugog reda

$$\alpha = \omega_0 = 0,4 \Rightarrow p_{1,2} = -\alpha = -0,4$$

$$x_1(0) = -3; \quad x_2(0) = -1;$$



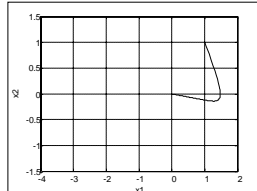
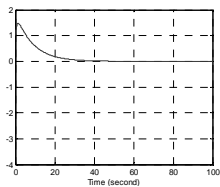
63



Vladanje i svojstva sustava drugog reda

$$\alpha = \omega_0 = 0,4 \Rightarrow p_{1,2} = -\alpha = -0,4$$

$$x_1(0) = 1; \quad x_2(0) = 1;$$



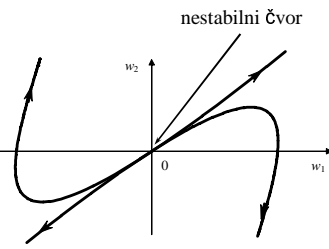
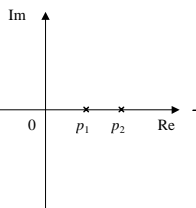
64



Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- slučaj realnih i različitih p_1 i p_2

b) $p_1, p_2 > 0$



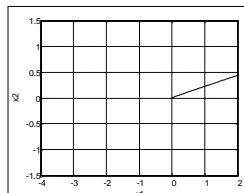
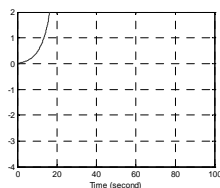
65



Vladanje i svojstva sustava drugog reda

$$p_1 = 0,1; \quad p_2 = 0,2;$$

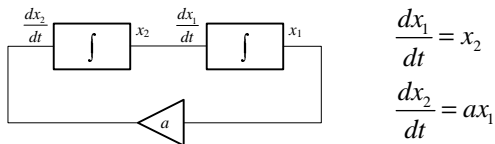
$$x_1(0) = 0.01; \quad x_2(0) = 0.01;$$



66



Vladanje i svojstva sustava drugog reda



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ll} a_{11} = 0 & a_{12} = 1 \\ a_{21} = a & a_{22} = 0 \\ T = 0 & \Delta = -a \end{array}$$

67



Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- karakteristična jednadžba je

$$\begin{vmatrix} -p & 1 \\ a & -p \end{vmatrix} = p^2 - a = 0 \quad p_{1,2} = \pm\sqrt{a} = \pm\alpha$$

za $a > 0$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ch}(\alpha t) & \frac{\text{sh}(\alpha t)}{\alpha} \\ \alpha \text{sh}(\alpha t) & \text{ch}(\alpha t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0$, gdje je $\Phi(t)$ – prijelazna matrica.

68



Vladanje i svojstva sustava drugog reda

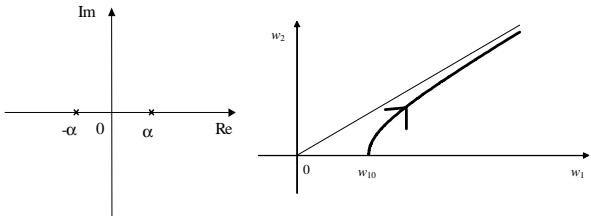
- Veza između $x_1(t)$ i $x_2(t)$.
- Jednadžbu krivulje $F(x_1, x_2) = 0$ možemo dobiti eliminacijom vremena.
- Uzmimo početno stanje $x_1(0), (x_2(0) = 0)$:

$$\left(\frac{x_1}{x_1(0)} \right)^2 - \left(\frac{x_2}{\alpha x_1(0)} \right)^2 = 1.$$

69



Vladanje i svojstva sustava drugog reda



$x_1 \rightarrow \infty$ za $t \rightarrow \infty$ ■ Nestabilan sustav. Ravnoteža
 $x_2 \rightarrow \infty$ za $t \rightarrow \infty$ ■ $\mathbf{x} = 0$ se ne dosegne – sedlo

70

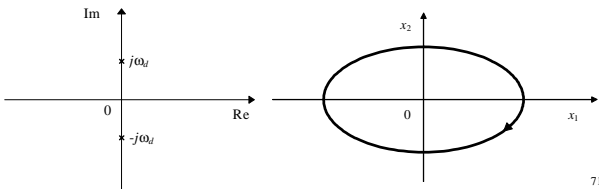


Vladanje i svojstva sustava drugog reda

■ Primjer: za $a < 0$ $p_{1,2} = \pm\sqrt{-\omega_0^2} = \pm j\omega_0$

$$\left(\frac{x_1}{x_1(0)}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\omega_0 x_1(0)}\right)^2 = 1$$

■ Zatvorena krivulja – periodičan proces. Trajektorija obilazi oko točke ravnoteže – fokus.



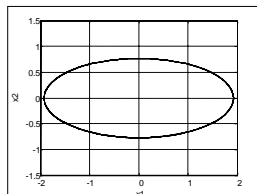
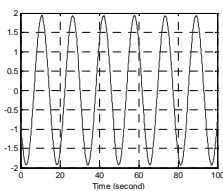
71



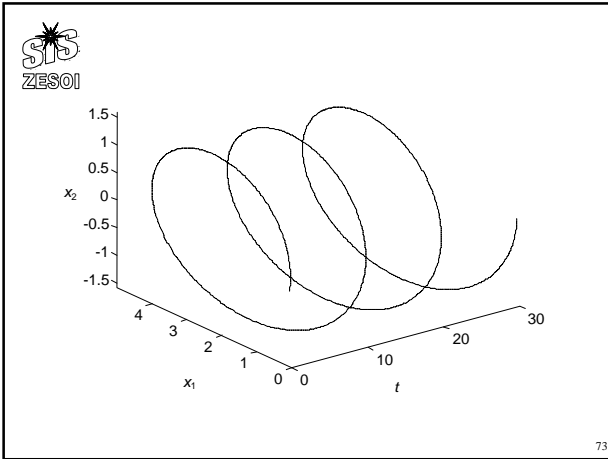
Vladanje i svojstva sustava drugog reda

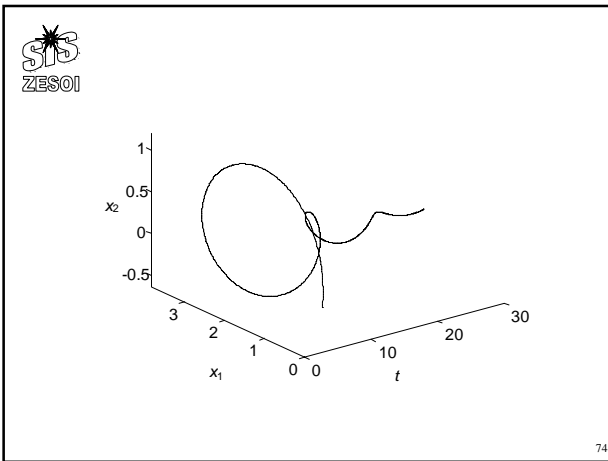
■ Primjer: za $a < 0$ $p_{1,2} = \pm\sqrt{-\omega_0^2} = \pm j0,4$

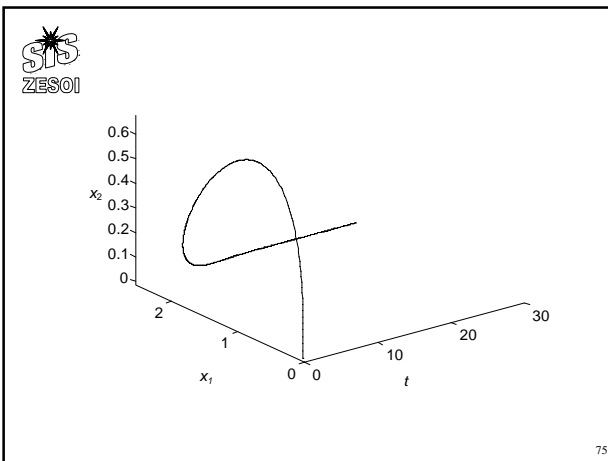
$$x_1(0) = -0.8; \quad x_2(0) = -0.7;$$



72









SIMULINK primjer

76
