Konvolucijska sumacija

- za ovako određeni impulsni odziv $h[n]$ moguće je izraz za odziv mirnog sustava transformirati u oblik

$$y[n] = \sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m} Bu[m] + Du[n]$$

$$y[n] = \sum_{m=0}^{n-1} h[n-m]u[m] + Du[n]$$

$$y[n] = \sum_{m=0}^{n} h[n-m]u[m]$$

1

Konvolucijska sumacija

- ovime smo dobili još jedan način potpunog opisa diskretnog sustava
- dakle, poznavanjem impulsnog odziva sustava $h[n]$ moguće odrediti odziv sustava na bilo koju pobudu $u[n]$ (uz uvjet da je početno stanje bilo jednako nuli – miran sustav)

$$y[n] = \sum_{m=0}^{n} h[n-m]u[m]$$

2

Konvolucijska sumacija

- neka je

$$u[n] = 0, \text{ za } \forall n < 0 \text{ i } h[n] = 0, \text{ za } \forall n < 0$$

- tada možemo pisati konvolucijsku sumaciju

$$\forall n \in Cjelobrojni, \quad y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m]u[m]$$

- drugi – ekvivalentni - oblik konvolucijske sumacije možemo dobiti odgovarajućom transformacijom

3

Konvolucijska sumacija

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m]u[m]$$

$$k = n - m \Rightarrow$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]u[n-k]$$

- dakle vrijedi

$$y = h * u = u * h$$

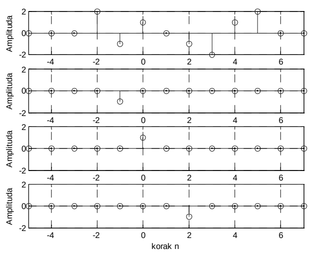
4

Konvolucijska sumacija

- do konvolucijske sumacije moguće je doći i na drugi način
- vremenski diskretan signal moguće je prikazati kao zbroj jediničnih impulsa

5

Prikaz niza uz pomoć $\delta[n]$



$x[n]$

$x[-1]\delta[n+1]$

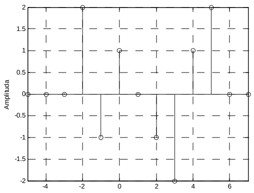
$x[0]\delta[n]$

$x[2]\delta[n-2]$

6

Prikaz niza uz pomoć $\delta[n]$

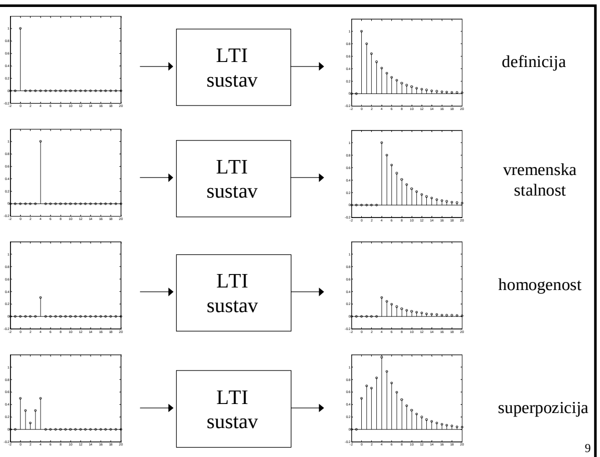
- svaki niz može biti prikazan uz pomoć sume jediničnih impulsa



$$x[n] = 2\delta[n+2] - \delta[n+1] + \delta[n] - \delta[n-2]$$
$$- 2\delta[n-3] + \delta[n-4] + 2\delta[n-5]$$

Odziv sustava na niz impulsa

- razmotrimo odziv linearnog, vremenski, stalnog (LTI) diskretnog sustava na niz impulsa



$u[n]$ $\qquad$ $y[n]$

$\delta[n] \longrightarrow$ LTI sustav $\longrightarrow h[n]$ definicija

$\delta[n-m] \longrightarrow$ LTI sustav $\longrightarrow h[n-m]$ vremenska stalnost

$u[m]\delta[n-m] \longrightarrow$ LTI sustav $\longrightarrow u[m]h[n-m]$ homogenost

$\sum_m u[m]\delta[n-m] \longrightarrow$ LTI sustav $\longrightarrow \sum_m u[m]h[n-m]$ superpozicija

10

Konvolucijska sumacija

- pretpostavimo proizvoljni signal oblika

$$u = \dots + u[-1]\delta[n+1] + u[0]\delta[n] + u[1]\delta[n-1] + u[2]\delta[n-2] + \dots$$

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m]\delta[n-m]$$

- odziv sustava na impuls $\delta[n]$ je $h[n]$ pa za LTI sustav vrijedi

$$u[m]\delta[n-m] \rightarrow u[m]h[n-m]$$

11

Konvolucijska sumacija

- odziv na niz *u* je

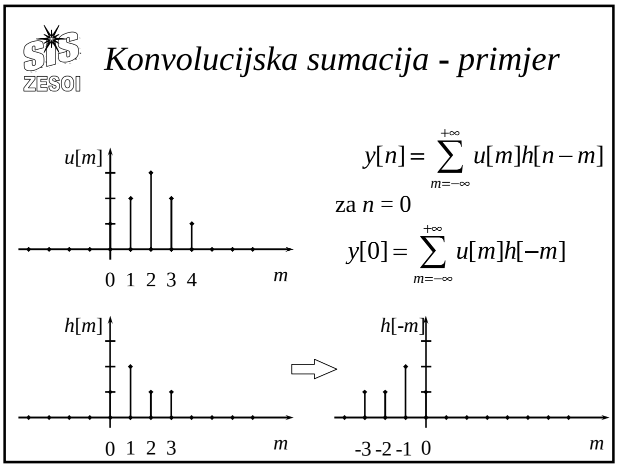
$$y = \dots + u[-1]h[n+1] + u[0]h[n] + u[1]h[n-1] + u[2]h[n-2] + \dots$$

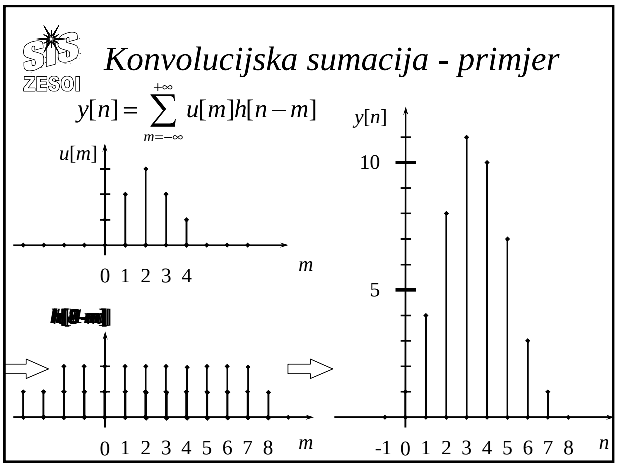
- pa je odziv dan s konvolucijskom sumacijom

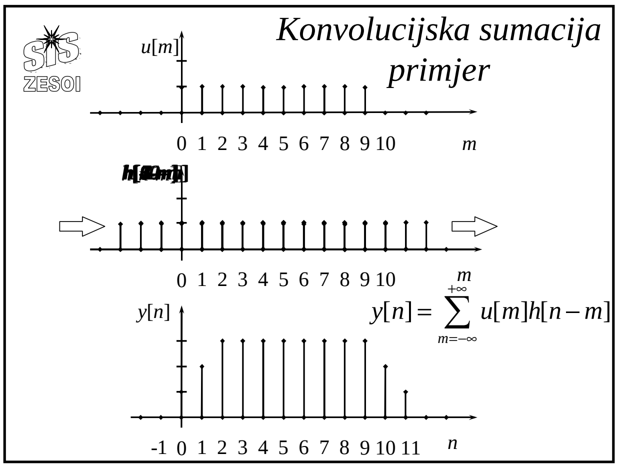
$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m]h[n-m]$$

- konvolucijska sumacija omogućuje određivanje odziva na proizvoljnu pobudu kada je poznat odziv na δ niz

12


Konvolucijska sumacija - primjer
u[m]
$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u[m]h[n-m]$
za n = 0
$y[0] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u[m]h[-m]$
0 1 2 3 4
m
h[m]
h[-m]
0 1 2 3
m
-3 -2 -1 0
m


Konvolucijska sumacija - primjer
$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u[m]h[n-m]$
u[m]
0 1 2 3 4
m
0 1 2 3 4 5 6 7 8
m
y[n]
10
5
-1 0 1 2 3 4 5 6 7 8
n


Konvolucijska sumacija primjer
u[m]
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
m
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
m
y[n]
$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u[m]h[n-m]$
-1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
n

Konvolucijska sumacija -svojstva

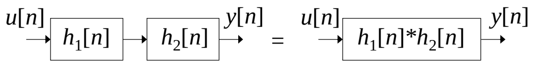
- već smo pokazali da vrijedi komutativnost tj.

$$y[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}u[m]h[n-m]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h[m]u[n-m]$$

$$y=u*h=h*u$$

- svojstvo asocijativnosti

$$y[n]=\left(u[n]*h_1[n]\right)*h_2[n]=u[n]*\left(h_1[n]*h_2[n]\right)$$



Konvolucijska sumacija-svojstva

- pokažimo to

$$y[n]=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}u[m]h_1[l-m]\right)h_2[n-l]=$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}u[m]\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty}h_1[l-m]h_2[n-l]\right)$$

- za $k = l - m$ slijedi

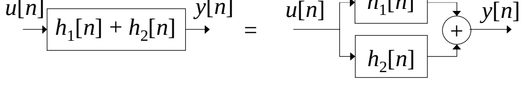
$$y[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}u[m]\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_1[k]h_2[n-m-k]\right)$$

$$y[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}u[m]h[n-m]\ \text{uz}\ h[n]=h_1[n]*h_2[n]$$

Konvolucijska sumacija -svojstva

- distributivnost tj.

$$y[n]=u[m]*\left(h_1[n]+h_2[n]\right)=u[m]*h_1[n]+u[m]*h_2[n]$$



$$y[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}u[m]\left(h_1[n-m]+h_2[n-m]\right)$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}u[m]h_1[n-m]+\sum_{m=-\infty}^{\infty}u[m]h_2[n-m]$$

Impulsni odziv linearnih vremenski diskretnih sustava

- razmotrimo ponovo izraz za odziv mirnog, $x[n] = 0$, MIMO sustava

$$y[n] = \begin{cases} Du[0], & n = 0 \\ \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m} Bu[m] \right\} + Du[n], & n > 0 \end{cases}$$

- definira se niz $h[0]$, $h[1]$, $h[2]$,….. matrica dimenzija K×M s

$$h[n] = \begin{cases} D, & n = 0 \\ CA^{n-1}B, & n > 0 \end{cases}$$

19

Impulsni odziv linearnih vremenski diskretnih sustava

- pa slijedi da je

$$y[n] = \sum_{m=0}^{n} h[n-m]u[m], \quad n \geq 0$$

- dakle opet smo dobili konvolucijsku sumaciju
- $h[0]$, $h[1]$, $h[2]$, ... su matrice dimenzije K×M i njihov (i, j)-ti element je zaista impulsni odziv SISO sustava čiji je ulaz u_j i čiji je izlaz y_i
- matricu $h[n]$ nazivamo *matrica impulsnih odziva*

20

Kontinuirani vremenski stalni linearni sustavi

Odziv sustava s više ulaza i izlaza

Linearni vremenski kontinuirani sustavi - [*A*,*B*,*C*,*D*] prikaz

- model s varijablama stanja kontinuiranog vremenski stalnog linearnog sustava je kako je pokazano

$$Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K$$

$$\forall t \in Realni, \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

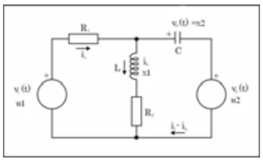
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- neka je

$$x(t_0) = pocetnoStanje$$

22

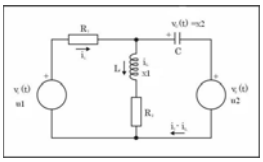
Linearni vremenski kontinuirani sustavi - [*A*,*B*,*C*,*D*] prikaz primjer



- za mrežu na slici napisati jednadžbe stanja
- ulazni signali su naponi izvora $v_1(t)$ i $v_2(t)$, izlazni signali su struja $i_L(t)$ kroz zavojnicu i struja $i_1(t)$ kroz otpor R_1 a stanja neka su struja kroz zavojnicu $i_L(t)$ i napon na kapacitetu $v_c(t)$

23

Linearni vremenski kontinuirani sustavi - [*A*,*B*,*C*,*D*] prikaz primjer



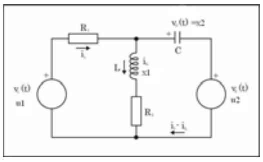
za desnu petlju vrijedi

$$R_2 i_L(t) + L\frac{di_L(t)}{dt} = v_2(t) + v_C(t)$$

slijedi $$\frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{R_2}{L} i_L(t) + \frac{1}{L} v_C(t) + \frac{1}{L} v_2(t)$$

24

Linearni vremenski kontinuirani sustavi - [*A*,*B*,*C*,*D*] prikaz primjer



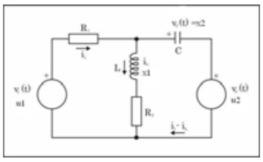
za definirana stanja i ulaze

$$x_1(t)=i_L(t),\quad x_2(t)=v_C(t),\quad u_1(t)=v_1(t),\quad u_2(t)=v_2(t),$$

slijedi $\quad \dot{x}_1(t)=-\frac{R_2}{L}x_1(t)+\frac{1}{L}x_2(t)+\frac{1}{L}u_2(t)$

25

Linearni vremenski kontinuirani sustavi - [*A*,*B*,*C*,*D*] prikaz primjer



za vanjsku petlju vrijedi

$$\left.\begin{aligned} &v_1(t)-R_1 i_1(t)-v_C(t)-v_2(t)=0 \\ &\text{no isto tako} \\ &C\frac{dv_C(t)}{dt}=i_1(t)-i_L(t) \end{aligned}\right\} \begin{array}{c}\text{kombiniramo}\\ \text{pa slijedi}\end{array}$$

26

Linearni vremenski kontinuirani sustavi - [*A*,*B*,*C*,*D*] prikaz primjer

$$v_1(t)-R_1\left[C\frac{dv_C(t)}{dt}+i_L(t)\right]-v_C(t)-v_2(t)=0$$

odnosno

$$\frac{dv_C(t)}{dt}=-\frac{1}{C}i_L(t)-\frac{1}{R_1C}v_C(t)+\frac{1}{R_1C}v_1(t)-\frac{1}{R_1C}v_2(t)$$

za izabrane varijable stanja, ulaze i izlaze

$$\dot{x}_2(t)=-\frac{1}{C}x_1(t)-\frac{1}{R_1C}x_2(t)+\frac{1}{R_1C}u_1(t)-\frac{1}{R_1C}u_2(t)$$

27

Linearni vremenski kontinuirani sustavi - [A,B,C,D] prikaz primjer

matrična jednadžba stanja je

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{R_1 C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ \frac{1}{R_1 C} & -\frac{1}{R_1 C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

a izlazna jednadžba slijedi iz

$$i_L(t) = y_1(t) = x_1(t)$$

$$i_1(t) = y_2(t) = -\frac{1}{R_1} x_2(t) + \frac{1}{R_1} u_1(t) - \frac{1}{R_1} u_2(t)$$

28

Linearni vremenski kontinuirani sustavi - [A,B,C,D] prikaz primjer

pa je izlazna jednadžba

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

29

Linearni vremenski kontinuirani sustavi - [A,B,C,D] prikaz

- model s varijablama stanja kontinuiranog vremenski stalnog linearnog sustava je kako je pokazano

$$Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K$$

$$\forall t \in Realni, \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- neka je

$$x(t_0) = pocetnoStanje$$

30

Odziv linearnih vremenski kontinuiranih sustava

- odziv sustava određujemo rješavanjem jednadžbi sustava
- rješavamo prvo diferencijalnu jednadžbu

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

- pomnožimo obje strane jednadžbe s matricom e^{-At} s lijeva

$$e^{-At}\dot{x}(t) = e^{-At}Ax(t) + e^{-At}Bu(t)$$

31

Odziv linearnih vremenski kontinuiranih sustava

- slijedi prebacivanjem

$$\underbrace{e^{-At}\dot{x}(t) - e^{-At}Ax(t)}_{\frac{d}{dt}\left(e^{-At}x(t)\right)} = e^{-At}Bu(t)$$

- pa pišemo

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-At}x(t)\right) = e^{-At}Bu(t)$$

32

Odziv linearnih vremenski kontinuiranih sustava

- množenjem obje strane s *dt* i integriranjem u intervalu t_0 do t slijedi (i uz odgovarajuću zamjenu varijabli)

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{d\tau}\left(e^{-A\tau}x(\tau)\right)d\tau = \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

- slijedi

$$e^{-At}x(t) - e^{-At_0}x(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

33

Odziv linearnih vremenski kontinuiranih sustava

- množenjem obje strane s matricom e^{At} s lijeva

$$x(t) - e^{At}e^{-At_0}x(t_0) = e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

- i konačno

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

34

Odziv linearnih vremenski kontinuiranih sustava

- ukupni odziv sustava je

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

- ili

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t}\left[Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau)\right]u(\tau)d\tau$$

35

Odziv linearnih vremenski kontinuiranih sustava

- za $t_0 = 0$

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_{0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_{0}^{t} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

36

Odziv linearnih vremenski kontinuiranih sustava

- za nepobuđeni sustav, $u(t) = 0$, odziv stanja je

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

- i ovdje, kao i kod diskretnih sustava, definiramo fundamentalnu ili prijelaznu matricu $\Phi(t)$

$$x(t) = e^{At}x(0) = \Phi(t)x(0)$$

$$\Downarrow$$

$$\Phi(t) = e^{At}$$

37

Opis linearnih sustava i njihov odziv gdje smo do sada?

$$Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K$$

$$\forall t \in Realni, \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

38

Kontinuirani vremenski stalni linearni sustavi

Impulsni odziv sustava

Impulsni odziv linearnih vremenski kontinuiranih sustava

- za mirni, $x(t_0) = 0$, kontinuirani SISO sustav zadan s

$$Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni, Izlazi = Realni$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- odziv je

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} \left[Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau) \right] u(\tau)d\tau$$

40

Impulsni odziv linearnih vremenski kontinuiranih sustava

- za ulazni signal ili pobudu

$$u(t) = \delta(t)$$

- odziv je impulsni odziv i označava se $h(t)$

$$y(t) = \int_{0}^{t} \left[Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau) \right] \delta(\tau)d\tau$$

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Ce^{At}B + D\delta(t) & t \geq 0 \end{cases}$$

41

Impulsni odziv linearnih vremenski kontinuiranih sustava

- ukupni odziv sustava možemo pisati

$$y(t) = \int_{0}^{t} h(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

- ovo je tzv. konvolucijski integral
- u slučaju MIMO kontinuiranih sustava $h(t)$ je matrica dimenzije K×M a njezin (i, j)-ti element je impulsni odziv SISO sustava čiji je ulaz x_j i čiji je izlaz y_i
- matricu $h(t)$ nazivamo *matrica impulsnih odziva*

42

Diskretni vremenski stalni linearni sustavi

Model s ulazno izlaznim varijablama

Diskretni sustavi – model s ulazno izlaznim varijablama

- opis linearnog sustava jednadžbom diferencija

$$a_0 y[n]+a_1 y[n-1]+a_2 y[n-2]+....+a_N y[n-N]=$$
$$=b_0 u[n]+b_1 u[n-1]+b_2 u[n-2]+....+b_M u[n-M]$$

- odnosno, sažeto pisano

$$\sum_{j=0}^{N} a_j y[n-j]=\sum_{j=0}^{M} b_j u[n-j]$$

44

Diskretni sustavi – model s ulazno izlaznim varijablama

- *u* - jedan ulaz, *y* - jedan izlaz
- Vremenski stalan sustav
  $\rightarrow$ koeficijenti $\{a_i\}$ i $\{b_i\}$ konstante
- Sustav promjenjiv po koraku
  $\rightarrow$ koeficijenti $\{a_i\}$ i $\{b_i\}$ funkcije koraka *n*
- Izravni način određivanja odziva je izračunavanje $y[n]$ rješavanjem jednadžbe oblika
  $y[n]=F\{y[n-1], y[n-2], ..., y[n-N], u[n], u[n-1],..., ...,u[n-M]\}$

45

Diskretni sustavi – model s ulazno izlaznim varijablama

- Dakle $$y[n] = -\sum_{j=1}^{N} a_j y[n-j] + \sum_{j=0}^{M} b_j u[n-j]$$

  gdje je pretpostavljeno (ili je izvršena normalizacija) da je $a_0=1$
- da bi se odredio odziv sustava $y[n]$, za $n \geq n_0$, treba poznavati $u[n]$ i početne uvjete $y[n_0-1]$, $y[n_0-2]$, …, $y[n_0-N]$
- ovaj prikaz pokazuje da je moguće izravno izračunati odziv sustava postupkom korak po korak

46

Linearni vremenski diskretni sustavi - primjer

- primjer generiranja jeke (eho efekta) signala koja se može postići realizacijom jednadžbe diferencija

$$y[n] = u[n] + \alpha y[n-N]$$

- neka je

$$N = 4, \quad \alpha = 0.6, \quad u[n] = \begin{cases} 0 & \text{za } n<0 \\ 1 & \text{za } n = 0,1 \\ 0 & \text{za } n>1 \end{cases}$$

47

Linearni vremenski diskretni sustavi primjer

- jednadžba je dakle

$$y[n] = u[n] + 0.6y[n-4]$$

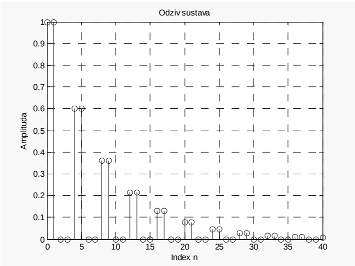
- računamo korak po korak

$$\begin{array}{ll}
n=0 & y[0] = u[n] + 0.6y[-4] = 1 + 0,6*0 = 1 \\
n=1 & y[1] = u[1] + 0.6y[-3] = 1 + 0,6*0 = 1 \\
n=2 & y[2] = u[2] + 0.6y[-2] = 0 + 0,6*0 = 0 \\
n=3 & y[3] = u[3] + 0.6y[-1] = 0 + 0,6*0 = 0 \\
n=4 & y[4] = u[4] + 0.6y[0] = 0 + 0,6*1 = 0.6 \\
n=5 & y[5] = u[5] + 0.6y[1] = 0 + 0,6*1 = 0.6 \\
n=6 & y[6] = u[6] + 0.6y[2] = 0 + 0,6*0 = 0
\end{array}$$

48

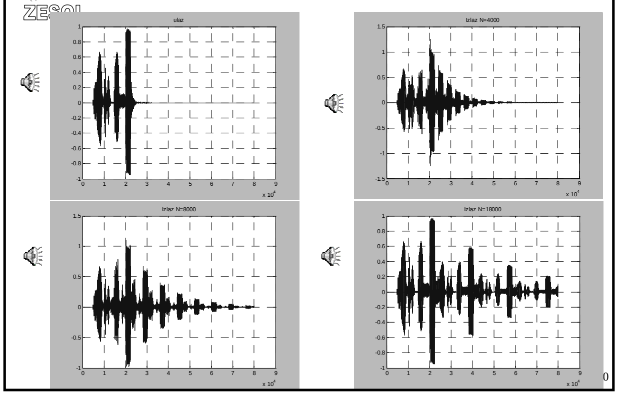
Linearni vremenski diskretni sustavi primjer

- odziv možemo prikazati slikom



49

jeka govornog signala $y(n) = u(n) + 0.6y(n-N)$



0

Diskretni sustavi – model s ulazno izlaznim varijablama

- rješenje linearne jednadžbe dobiva se kao zbroj rješenja homogene jednadžbe $y_h[n]$

$$\sum_{j=0}^{N} a_j y[n-j] = 0$$

i partikularnog rješenja $y_p[n]$ koje ovisi o funkciji pobude $f[n]$

$$f[n] = \sum_{j=0}^{M} b_j u[n-j]$$

51

Rješenje homogene jednadžbe – odziv nepobuđenog sustava

- najopćenitije rješenje homogene jednadžbe je *linearna kombinacija* od N posebnih linearno nezavisnih rješenja

  $y_1[n], y_2[n], \dots , y_N[n]$

  s proizvoljnim konstantama

  $y_h[n] = C_1 y_1[n] + C_2 y_2[n] + \dots + C_n y_n[n]$
- linearnu jednadžbu diferencija zadovoljava niz e^{qn} ili bolje $y[n] = C\, q^n$ gdje je $q \in$ Kompleksni

52

Rješenje homogene jednadžbe – odziv nepobuđenog sustava

- Iz $\sum_{j=0}^{N} a_j y[n-j] = \sum_{j=0}^{N} a_j C q^{n-j} = 0$

  slijedi

  $Cq^{n-N}(q^N + a_1 q^{N-1} + a_2 q^{N-2} + \dots + a_{N-1} q + a_N) = 0$

  karakteristična jednadžba je

  $$q^N + a_1 q^{N-1} + a_2 q^{N-2} + \dots + a_{N-1} q + a_N = 0$$

  koja ima N korijena $q_1, q_2, q_3, \dots, q_N$

53

Rješenje homogene jednadžbe – odziv nepobuđenog sustava

- za različite korijene dobivamo rješenje oblika

  $$y_h[n] = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n + \dots + C_N q_N^n$$
- a višestruke korijene (npr. q_1 višestrukosti m)

  $$y_h[n] = C_1 q_1^n + C_2 n q_1^n + \dots + C_m n^{m-1} q_1^n + \\ + C_{m+1} q_{m+1}^n + \dots + C_N q_N^n$$
- Korijen $q = 0$ se ne uzima obzir jer on samo smanjuje red jednadžbe za jedan, odnosno za m u slučaju njegove višestrukosti

54

Rješenje homogene jednadžbe – odziv nepobuđenog sustava

- kompleksni korijeni u jednadžbi s realnim koeficijentima dolaze u konjugiranim parovima tj. $q_1 = r\,e^{j\omega}$ i $q_2 = r\,e^{-j\omega}$

$$y_h[n] = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n = C_1 r^n e^{jn\theta} + C_2 r^n e^{-jn\theta}$$

vrijedi također za realni $y_h[n]$

$$C_1 = Ce^{j\phi} \rightarrow C_2 = Ce^{-j\phi}$$

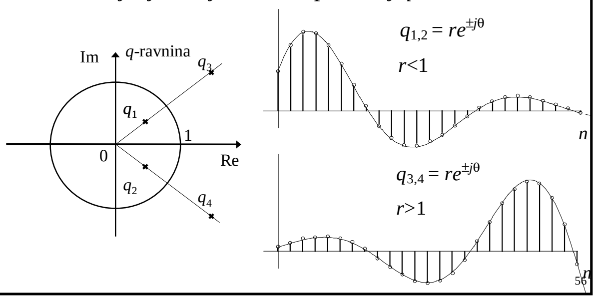
pa se rješenje može zapisati u obliku

$$y_h[n] = Cr^n e^{j\phi} e^{jn\theta} + Cr^n e^{j\phi} e^{-jn\theta} = 2Cr^n \cos\left[n\theta + \phi\right]$$

55

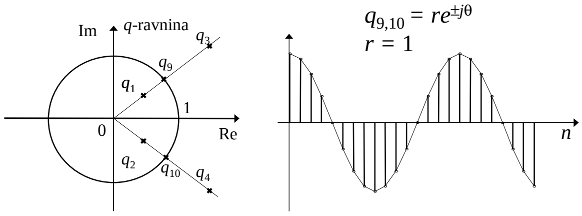
Rješenje homogene jednadžbe – odziv nepobuđenog sustava

Predstavljanje korijena u kompleksnoj q-ravnini



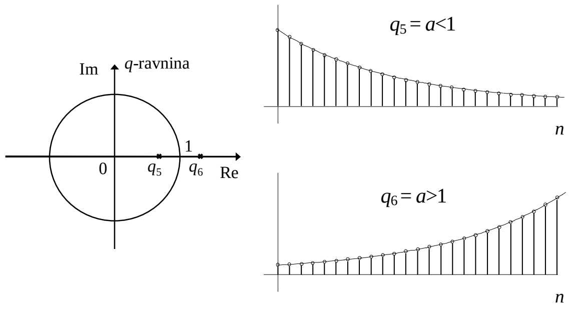
56

Rješenje homogene jednadžbe – odziv nepobuđenog sustava



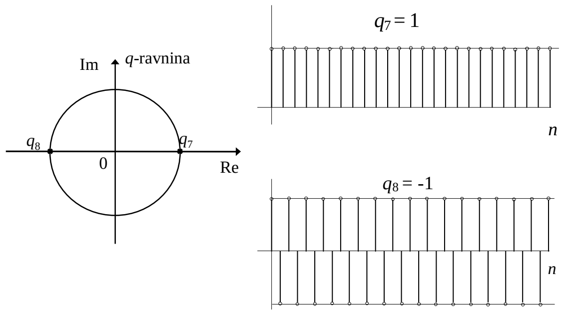
57

Rješenje homogene jednadžbe – odziv nepobuđenog sustava



58

Rješenje homogene jednadžbe – odziv nepobuđenog sustava



59

Rješenje homogene jednadžbe – primjer

$$y[n] - 0.8\ \ 2y[n-1] + 0.64y[n-2] = 0$$

- pretpostavimo rješenje oblika $y[n] = Cq^n$

$$Cq^n - 0.8\ \ 2Cq^{n-1} + 0.64Cq^{n-2} = 0$$

$$Cq^{n-2}(q^2 - 0.8\ \ 2q + 0.64) = 0$$

- pa je karakteristična jednadžba

$$q^2 - 0.8\ \ 2q + 0.64 = 0$$

60

Rješenje homogene jednadžbe – primjer

- korijeni karakteristične jednadžbe su

$$q_{1,2} = 0.4 \quad 2\left(1 \pm j\right) = 0.8e^{j\frac{\pi}{4}}$$

- pa je homogeno rješenje

$$y_h\left[n\right] = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n = C_1 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + C_2 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n}$$

61

Rješenje homogene jednadžbe – primjer

- konstante C_1 i C_2 određuju se iz početnih uvjeta *y*[-2]=1 i *y*[-1]=1

$$\left.\begin{aligned} y_h\left[-1\right] &= C_1 0.8^{-1} e^{-j\frac{\pi}{4}} + C_2 0.8^{-1} e^{j\frac{\pi}{4}} = 1 \\ y_h\left[-2\right] &= C_1 0.8^{-2} e^{-j\frac{\pi}{4}\cdot 2} + C_2 0.8^{-2} e^{j\frac{\pi}{4}\cdot 2} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$C_1 = 0.2457 \;+\; 0.3200\, j = 0.4034 e^{j0.9160}$$

$$C_2 = 0.2457 \;-\; 0.3200\, j = 0.4034 e^{-j0.9160}$$

62

Rješenje homogene jednadžbe – primjer

- homogeno rješenje je

$$y_h\left[n\right] = 0.4034 e^{j0.9160} 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n}$$

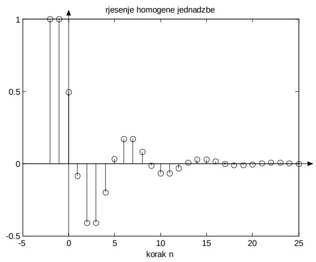
$$+ 0.4034 e^{-j0.9160} 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n}$$

$$y_h\left[n\right] = 0.4034 \cdot 0.8^n \left(e^{j(\frac{\pi}{4}n + 0.9160)} + e^{-j(\frac{\pi}{4}n + 0.9160)} \right)$$

$$y_h\left[n\right] = 0.8068 \cdot 0.8^n \cos(\frac{\pi}{4} n + 0.9160)$$

63

Rješenje homogene jednadžbe – primjer



64

Rješenje nehomogene jednadžbe diferencija

- Određivanje partikularnog rješenja
  - Lagrangeova metoda varijacije parametara
    - rješenje se dobiva u eksplicitnom obliku
    - primjena rezultira složenim sumacijama
  - Metoda neodređenog koeficijenta
    - ograničena na pobude oblika polinoma i eksponencijalnih nizova
    - veliki broj pobuda može se aproksimirati gore navedenim nizovima
    - češće se upotrebljava u analizi sustava

65

Rješenje nehomogene jednadžbe diferencija

- pobuda polinomom oblika
  $f[n] = A_0 + A_1 n + \ldots + A_M n^M$
- dati će partikularno rješenje u obliku polinoma *M*-tog stupnja
  $y_p[n] = K_0 + K_1 n + \ldots + K_M n^M$
- rješenje se uvijek pretpostavlja u obliku kompletnog polinoma tj. sa svim potencijama, bez obzira da li polinom pobude ima sve članove

66

Rješenje nehomogene jednadžbe diferencija

- slično je i za slijedeće ulazne nizove:

ulazni niz $u[n]$	partikularno rješenje $y_p[n]$
A (konstanta)	K
AM^n	KM^n
An^M	$K_0+K_1n+ \dots +K_Mn^M$
A^nn^M	$A^n(K_0+K_1n+ \dots +K_Mn^{M)}$
$A\cos(\omega_0 n)$	$K_1 \cos\omega_0 n+ K_2 \sin\omega_0 n$
$A\sin(\omega_0 n)$	$K_1 \cos\omega_0 n+ K_2 \sin\omega_0 n$

67

Impulsni odziv diskretnog sustava

- Određivanje odziva mirnog sustava na jedinični impuls

$$a_0 y[n]+a_1 y[n-1]+a_2 y[n-2]+....+a_N y[n-N]=$$
$$=b_0 u[n]+b_1 u[n-1]+b_2 u[n-2]+....+b_M u[n-M]$$

$u[n] = \delta[n]$; $u[n] = 0$ za $n>0$ pa je $y_p[n]=0$

Odziv sustava na pobudu $u[n] = \delta[n]$ nazivamo impulsni odziv

Impulsni odziv je dakle jednak komplementarnom rješenju

68

Impulsni odziv diskretnog sustava

Rješenje je tada linearna kombinacija

$$h[n]=y_h[n]=C_1 q_1^n + C_2 q_2^n + ...+ C_N q_N^n \quad \text{za } n \geq 0$$

N je nepoznanica $\{C_i\} \Rightarrow$ potrebno je izračunati N početnih vrijednosti $h[0], h[1], \dots, h[N]$

Uvjeti proizlaze iz jednadžbe diferencija i svojstva δ niza

$\delta[n-i] = 1$, za $n = i$
$\delta[n-i] = 0$, za $n \neq i$

69

Impulsni odziv diskretnog sustava

Iz jednadžbe diferencija za $u[n] = \delta[n]$ i $n \in [0,N]$ možemo dobiti N+1 jednadžbu

$$
\begin{array}{lllllll}
n=0 & \Rightarrow a_0 h[0] & + a_1 h[-1] & + a_2 h[-2] & + \ldots + a_N h[-N] & = b_0 \\
n=1 & \Rightarrow a_0 h[1] & + a_1 h[0] & + a_2 h[-1] & + \ldots + a_N h[1-N] & = b_1 \\
n=2 & \Rightarrow a_0 h[2] & + a_1 h[1] & + a_2 h[0] & + \ldots + a_N h[2-N] & = b_2 \\
\hline
n=N-1 & \Rightarrow a_0 h[N-1] & + a_1 h[N-2] & + a_2 h[N-3] & + \ldots + a_N h[-1] & = b_{N-1} \\
n=N & \Rightarrow a_0 h[N] & + a_1 h[N-1] & + a_2 h[N-2] & + \ldots + a_N h[0] & = b_N
\end{array}
$$

Impulsni odziv diskretnog sustava

budući je sustav miran, $h[n]=0$, za $n<0$

$$
\begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_N & a_{N-1} & a_{N-2} & \cdots & a_0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ h[2] \\ \vdots \\ h[N] \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}
$$

$$\mathbf{A}\,\mathbf{h} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{h} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

rješenje za $\{h[n]\}$, $n \in [0,N]$ može se dobiti inverzijom matrice **A**

Primjer određivanje impulsnog odziva diskretnog sustava

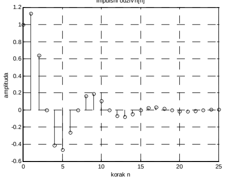
odrediti impulsni odziv sustava

$$y[n] - 0.8\sqrt{2}\,y[n-1] + 0.64\,y[n-2] = u[n]$$

za $u[n] = \delta[n]$ & $y[n-1]=y[n-2]=0 \Rightarrow y[n] = h[n]$

računanjem korak po korak

h[0] = *1.0000*
h[1] = *1.1314*
h[2] = *0.6400*
h[3] = *0.0000*
h[4] = *-0.4096*
h[5] = *-0.4634*
h[6] = *-0.2621*
h[7] = *0.0000*
h[8] = *0.1678*
h[9] = *0.1898*
h[10] = *0.1074*
h[11] = *0.0000*
h[12] = *-0.0687*



Primjer određivanje impulsnog odziva diskretnog sustava

impulsni odziv jednak je rješenju homogene jed.

$$y[n]-0.8\;\,2y[n-1]+0.64y[n-2]=u[n]$$

za $u[n] = \delta[n]$ & $y[n-1]=y[n-2]=0 \rightarrow y[n] = h[n]$

karakteristična jednadžba je: $q^2-0.8\;\,2q+0.64=0$

korijeni su : $q_{1,2}=0.8e^{\pm j\frac{\pi}{4}}=0.4\;\,2\left(1\pm j\right)$,

impulsni odziv je:

$$h[n]=C_1 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n}+C_2 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} \quad \text{za} \quad n\geq 0$$

73

Primjer određivanje impulsnog odziva diskretnog sustava

s druge strane izračunavamo $h[0]$ i $h[1]$ kako bi odredili konstante C_1 i C_2

$$y[n]=0.8\;\,2y[n-1]-0.64y[n-2]+u[n]$$

$$n=0 \Rightarrow h[0]=0.8\;\,2h[-1]-0.64h[-2]+\delta[0]=1$$

$$n=1 \Rightarrow h[1]=0.8\;\,2h[0]-0.64h[-1]+\delta[1]=1.1314$$

74

Primjer određivanje impulsnog odziva diskretnog sustava

pa vrijedi:

$$\left.\begin{aligned} h[0]&=1=C_1+C_2 \\ h[1]&=1.1314=C_1\cdot 0.8e^{j\frac{\pi}{4}}+C_2\cdot 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}} \end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$C_1 = 0.5 - 0.5j = \quad 0.7071e^{-j0.7854}$

$C_2 = 0.5 + 0.5j = \quad 0.7071e^{j0.7854}$

75

Primjer određivanje impulsnog odziva diskretnog sustava

Impulsni odziv je prema tome

$$h[n] = 0.7071e^{-j0.7854}(0.8)^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + 0.7071e^{j0.7854}(0.8)^n e^{-j\frac{\pi}{4}n}, \quad n \geq 0$$

odnosno

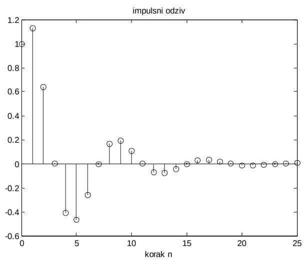
$$h[n] = 0.7071(0.8)^n \{e^{-j0.7854} e^{j\frac{\pi}{4}} + e^{j0.7854} e^{-j\frac{\pi}{4}}\}$$

$$= 2 \cdot 0.7071(0.8)^n \cos(\frac{\pi}{4} n - 0.7854) \text{ za } n \geq 0$$

$$h[n] = 1{,}4142(0.8)^n \cos(\frac{\pi}{4} n - 0.7854) \text{ za } n \geq 0$$

76

Primjer određivanje impulsnog odziva diskretnog sustava



77

Primjer određivanje impulsnog odziva diskretnog sustava

odrediti impulsni odziv sustava

$$y[n] - 0.8 \quad 2y[n-1] + 0.64y[n-2] = u[n] + 2u[n-1]$$

za $u[n] = \delta[n]$ & $y[n-1]=y[n-2]=0 \rightarrow y[n] = h[n]$

karakteristična jednadžba je: $q^2 - 0.8 \quad 2q + 0.64 = 0$

korijeni su : $q_{1,2} = 0.8e^{\pm j\frac{\pi}{4}} = 0.4 \quad 2\left(1 \pm j\right)$,

impulsni odziv je:

$$h[n] = C_1 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + C_2 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} \quad \text{za} \quad n \geq 0$$

78

Primjer određivanje impulsnog odziva diskretnog sustava

s druge strane izračunavamo $h[0]$ i $h[1]$ kako bi odredili konstante C_1 i C_2

$$y[n] = 0.8\ \ 2y[n-1] - 0.64y[n-2] + u[n] + 2u[n-1]$$

$$n = 0 \Rightarrow h[0] = 0.8\ \ 2h[-1] - 0.64h[-2] + \delta[0] + 2\delta[-1] = 1$$

$$n = 1 \Rightarrow h[1] = 0.8\ \ 2h[0] - 0.64h[-1] + \delta[1] + 2\delta[0] = 3.1314$$

79

Primjer određivanje impulsnog odziva diskretnog sustava

pa vrijedi:

$$\left.\begin{aligned} h[0] &= 1 = C_1 + C_2 \\ h[1] &= 3.1314 = C_1 \cdot 0.8e^{j\frac{\pi}{4}} + C_2 \cdot 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$C_1 = 0.5000 - 2.2678j = 2.3223e^{-j1.3538}$$

$$C_2 = 0.5000 + 2.2678j = 2.3223e^{j1.3538}$$

80

Primjer određivanje impulsnog odziva diskretnog sustava

Impulsni odziv je prema tome

$$h[n] = 2.3223e^{j1.3538}(0.8)^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + 2.3223e^{-j1.3538}(0.8)^n e^{-j\frac{\pi}{4}n}, \quad n \geq 0$$

odnosno

$$h[n] = 2.3223(0.8)^n \{e^{j1.3538}e^{j\frac{\pi}{4}} + e^{-j1.3538}e^{-j\frac{\pi}{4}}\}$$

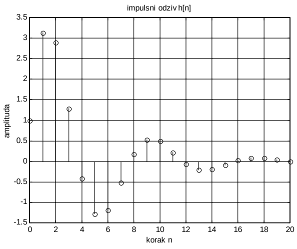
$$= 2 \cdot 2.3223(0.8)^n \cos(\frac{\pi}{4}n - 1.3538) \ \text{ za } n \geq 0$$

$$h[n] = 4.6446(0.8)^n \cos(\frac{\pi}{4}n - 1.3538) \ \text{ za } n \geq 0$$

81

Primjer određivanje impulsnog odziva diskretnog sustava

h[0] = 1.0000
h[1] = 3.1314
h[2] = 2.9027
h[3] = 1.2800
h[4] = -0.4096
h[5] = -1.2826
h[6] = -1.1890
h[7] = -0.5243
h[8] = 0.1678
h[9] = 0.5254
h[10] = 0.4870
h[11] = 0.2147
h[12] = -0.0687
h[13] = -0.2152
h[14] = -0.1995
h[15] = -0.0880
h[16] = 0.0281



Primjer određivanje impulsnog odziva diskretnog sustava

razmotrimo sustav opisan jednadžbom diferencija:

$$y[n]-0.8\sqrt{2}y[n-1]+0.64y[n-2]=u[n-4]+2u[n-5]$$

za $u[n] = \delta[n]$ & $y[n-1]=y[n-2]=0 \rightarrow y[n] = h[n]$

prvi uzorak impulsnog odziva $\neq 0$ je za $n \geq 4$
pa je impulsni odziv jednak komplementarnom rješenju za $n \geq 4$

$$h[n]=\begin{cases} 0 \quad \text{za} \quad n<4 \\ C_1 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + C_2 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} \quad \text{za} \quad n \geq 4 \end{cases}$$

Primjer određivanje impulsnog odziva diskretnog sustava

potrebno je izračunati $h[4]$ i $h[5]$ kako bi odredili konstante C_1 i C_2

$$y[n]=0.8\sqrt{2}y[n-1]-0.64y[n-2]+u[n-4]+2u[n-5]$$

$$n=4 \Rightarrow h[4]=0.8\sqrt{2}h[3]-0.64h[2]+\delta[0]+2\delta[-1]=1$$

$$n=5 \Rightarrow h[5]=0.8\sqrt{2}h[4]-0.64h[3]+\delta[1]+2\delta[0]=3.1314$$

Primjer određivanje impulsnog odziva diskretnog sustava

pa vrijedi

$$\left.\begin{aligned} h[4] = 1 = C_1 \cdot \left[0.8e^{j\frac{\pi}{4}}\right]^4 + C_2 \cdot \left[0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}\right]^4 \\ h[5] = 3.1314 = C_1 \cdot \left[0.8e^{j\frac{\pi}{4}}\right]^5 + C_2 \cdot \left[0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}\right]^5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

C_1 = -1.2207 + 5.5365i = $5.6695e^{j1.7878}$

C_2 = -1.2207 - 5.5365i = $5.6695e^{-j1.7878}$

Primjer određivanje impulsnog odziva diskretnog sustava

prema tome u ovom primjeru je impulsni odziv:

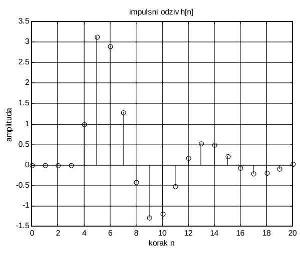
$$h[n] = 5.5365(0.8)^n \{e^{j1.7878} e^{j\frac{\pi}{4}n} + e^{-j1.7878} e^{-j\frac{\pi}{4}n}\}$$

$$= 2 \cdot 5.5365(0.8)^n \cos(\frac{\pi}{4}n + 1.7878) \ \text{ za } n \geq 4$$

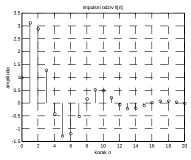
$$h[n] = \begin{cases} 0 & \text{za} \quad n < 4 \\ 11.073(0.8)^n \cos(\frac{\pi}{4}n + 1.7878) & \text{za } n \geq 4 \end{cases}$$

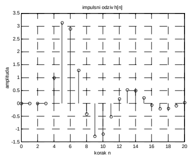
Primjer određivanje impulsnog odziva diskretnog sustava

h[0] = *0*
h[1] = *0*
h[2] = *0*
h[3] = *0*
h[4] = *1.0000*
h[5] = *3.1314*
h[6] = *2.9027*
h[7] = *1.2800*
h[8] = *-0.4096*
h[9] = *-1.2826*
h[10] = *-1.1890*
h[11] = *-0.5243*
h[12] = *0.1678*
h[13] = *0.5254*
h[14] = *0.4870*
h[15] = *0.2147*
h[16] = *-0.0687*



Primjer: usporedba impulsnih odziva





$y[n]-0.8\sqrt{2}y[n-1]+0.64y[n-2]=x[n]+2x[n-1]$	$y[n]-0.8\sqrt{2}y[n-1]+0.64y[n-2]=x[n-4]+2x[n-5]$
h[0] = 1.0000	h[0] = *0*
h[1] = 3.1314	h[1] = *0*
h[2] = 2.9027	h[2] = *0*
h[3] = 1.2800	h[3] = *0*
h[4] = -0.4096	h[4] = *1.0000*
h[5] = -1.2826	h[5] = *3.1314*
h[6] = -1.1890	h[6] = *2.9027*
h[7] = -0.5243	h[7] = *1.2800*
h[8] = 0.1678	h[8] = *-0.4096*
h[9] = 0.5254	h[9] = *-1.2826*
h[10] = 0.4870	h[10] = *-1.1890*

88

Opis linearnih sustava i njihov odziv gdje smo do sada?

$Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K$

$\forall n \in Cjelobrojni, \quad x[n+1] = Ax[n] + Bu[n]$

$y[n] = Cs[n] + Du[n]$

$$x[n] = A^n x[0] + \sum_{m=0}^{n-1} A^{n-1-m} Bu[m], \quad n > 0$$

$$y[n] = \begin{cases} Cx[0] + Du[0], & n = 0 \\ CA^n x[0] + \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m} Bu[m] \right\} + Du[n], & n > 0 \end{cases}$$

$$y[n] = \sum_{m=0}^{n} h[n-m]u[m], \quad n \geq 0$$

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + ... + a_N y[n-N] =$$
$$= b_0 u[n] + b_1 u[n-1] + b_2 u[n-2] + ... + b_M u[n-M]$$

$Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K$

$\forall t \in Realni, \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

$y(t) = Cx(t) + Du(t)$

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

$$y(t) = Ce^{At} x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t)$$

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau) u(\tau) d\tau,$$

89

Kontinuirani vremenski stalni linearni sustavi

Model sustava s ulazno izlaznim varijablama