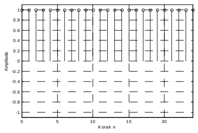
Svojstva sinusnog niza

sve diskretne sinusoide s frekvencijom

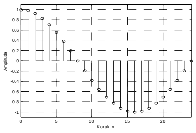
$$|\omega| \leq \pi \quad \text{ili} \quad |f| \leq \frac{1}{2}$$

su jednoznačno definirane

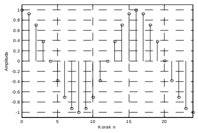
$\cos(\omega n),\ \omega = 0$



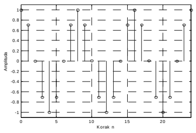
$\cos(\omega n),\ \omega = \dfrac{\pi}{16}$



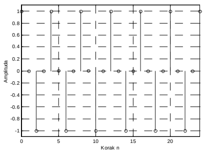
$\cos(\omega n),\ \omega = \dfrac{\pi}{8}$



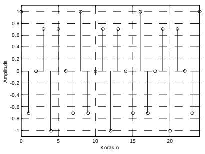
$\cos(\omega n),\ \omega = \dfrac{\pi}{4}$



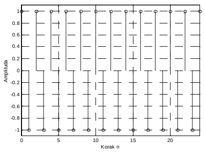
$\cos(\omega n),\ \omega = \dfrac{\pi}{2}$



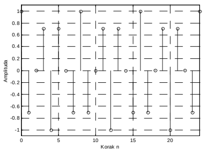
$\cos(\omega n),\ \omega = \dfrac{3\pi}{4}$



$\cos(\omega n),\ \omega = \pi$

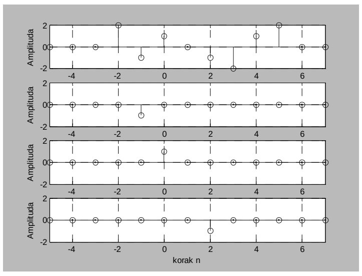


$\cos(\omega n),\ \omega = \dfrac{5\pi}{4}$



Prikaz niza uz pomoć $\delta[n]$

- svaki niz može biti prikazan uz pomoć sume jediničnih impulsa



$x[n]$

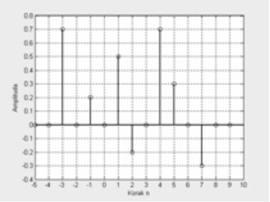
$x[-1]\delta[n+1]$

$x[0]\delta[n]$

$x[2]\delta[n-2]$

Prikaz niza uz pomoć $\delta[n]$

- svaki niz može biti prikazan uz pomoć sume jediničnih impulsa



$$x[n] = 0.7\delta[n+3] + 0.2\delta[n+1] + 0.5\delta[n-1] - 0.2\delta[n-2]$$
$$+0.7\delta[n-4] + 0.3\delta[n-5] - 0.3\delta[n-7]$$

Osnovni kontinuirani signali

- jedinični skok definira se kao

$$\forall t \in Realni, \quad \mu(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

- jedinična rampa

$$\forall t \in Realni, \quad r(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Osnovni kontinuirani signali

- jedinična parabola *m*-tog stupnja

$$\forall t \in Realni, \quad P_m(t) = \begin{cases} t^m, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \quad m = 2, 3, 4, ...$$

- realni sinusni signal

$$\forall t \in Realni, \forall A \in Realni$$
$$x(t) = Asin(2\pi Ft) = Asin(\Omega t)$$

Osnovni kontinuirani signali

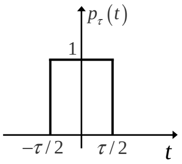
- kompleksna eksponencijala

$$\forall t \in Realni, \forall s, X \in Kompleksni$$
$$x(t) = Xe^{st}$$

- ovisno o kompleksnoj frekvenciji s=σ+jω važna tri slučaja
  - konstantnog (s = 0),
  - eksponencijalnog (ω = 0) i
  - harmonijskog (σ = 0) signala

Osnovni kontinuirani signali – pravokutni signal

- kontinuirani aperiodički pravokutni signal definiran je kao



$$p_\tau(t) = \begin{cases} 1, & -\tau/2 \leq t \leq \tau/2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

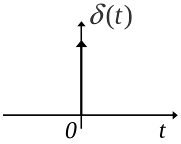
Osnovni kontinuirani signali - Diracova δ-funkcija

- Diracova δ - funkcija

$\forall t \in Realni,$

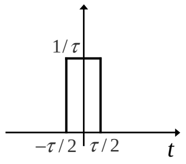
$$\delta(t)=0 \;\text{ za }\; t\neq 0 \;\text{ i }\; \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt=1$$

- $\delta(t)$ – singularna funkcija



Osnovni kontinuirani signali - Diracova δ-funkcija

- Diracova δ – funkcija može biti vizualizirana pomoću pravokutnog pulsa kojem širina teži k nuli
  - površina pravokutnog pulsa je uvijek jednaka 1
  - δ – funkcija se dobije kada τ → 0 tako da je

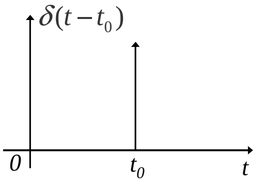


$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\left\{\frac{1}{\tau}p_{\tau}(t)\right\}$$

Osnovni kontinuirani signali

- pomak $\delta(t)$ definira se kao

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty, & t=t_0\\ 0, & t\neq t_0\end{cases} \;\text{ i }\; \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt=\int_{t_0^-}^{t_0^+}\delta(t-t_0)dt=1$$



- primjeri:

$$\int_{-1}^{6}\delta(t-7)dt=0$$

$$\int_{-1}^{7^+}\delta(t-7)dt=1$$

Osnovni kontinuirani signali

- regularne funkcije proširene sa singularnim funkcijama čine skup poopćenih funkcija koje igraju važnu ulogu u analizi linearnih dinamičkih sustava
- Diracovu ili delta funkciju u “regularnoj matematici” definiramo kao

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

gdje je $f(t)$ regularna funkcija kontinuirana u t_0

Osnovni kontinuirani signali

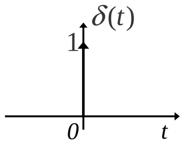
- primjer

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left[t^3+\cos(8t)\right]\delta(t)+\left(3t-2\right)\delta(t-7)\right\}dt=$$

$$=\left[0+1\right]+(21-2))=20$$

Osnovni kontinuirani signali

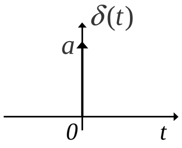
- u grafičkom prikazu δ – funkcije nije moguće eksplicitno označiti beskonačnu vrijednost u t =0 i ona je sugerirana vertikalnom strjelicom
- često se uz strjelicu označava težina delta funkcije (u ovom slučaju 1)



Osnovni kontinuirani signali

- općenito Diracova delta funkcija može biti pomnožena s proizvoljnom realnom konstantom *a* pri čemu se ne mijenja njezina vrijednost ni u $t = 0$, ni u $t \neq 0$.
- međutim, množenjem s *a* mijenja se vrijednost integrala

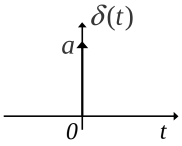
$$\int_{-\infty}^{\infty} a\delta(t)dt = a$$



Osnovni kontinuirani signali

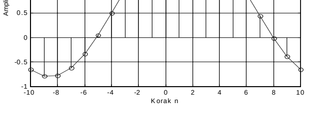
- dakle iako je impuls i dalje beskonačno uzak i beskonačno visok površina ispod impulsa je skalirana s *a*

$$\int_{-\infty}^{\infty} a\delta(t)dt = a$$



Otipkavanje signala

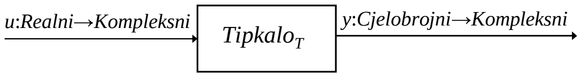
- diskretni signali mogu nastati otipkavanjem kontinuiranih signala



Otipkavanje signala

- u otipkavanju signala koristimo se *tipkalom*
- u općem slučaju tipkalo može otipkavati i kompleksni signal pa ga definiramo kao sustav

$$Tipkalo_T : [Realni \to Kompleksni] \to [Cjelobrojni \to Kompleksni]$$



u:*Realni*→*Kompleksni* → $Tipkalo_T$ → y:*Cjelobrojni*→*Kompleksni*

Otipkavanje signala

- ovdje je T interval otipkavanja (razmak između uzoraka) – jedinica sekundi po uzorku
- frekvencija otipkavanja F_s=1/T – jedinica je uzoraka po sekundi
- ili Ω_s=2πF_s=2π/T je kutna frekvencija otipkavanja – jedinice radijana po sekundi

Otipkavanje signala

- dakle ako je $y = Tipkalo_T(u)$
  tada je y definiran s

$$\forall n \in Cjelobrojni, \quad y(n) = u(nT)$$

Otipkavanje signala

- neka je u_a: *Realni*→ *Realni* sinusoidalni signal

$$\forall t \in Realni, \quad u_a(t) = \cos(2\pi F t + \varphi) = \cos(\Omega t + \varphi)$$

gdje je *F* frekvencija sinusnog signala u Hz a Ω kutna frekvencija

Otipkavanje signala

- kontinuirani signal $u_a(t)$ otipkavamo u diskretnim trenucima vremena

$$t = nT = \frac{n}{F_s} = \frac{2\pi n}{\Omega_s}$$

$$\forall n \in Cjelobrojni,$$

$$u\left[n\right] = u_a(nT) = \cos(2\pi F n T + \varphi) = \cos(\Omega n T + \varphi)$$

$$= \cos(\frac{2\pi F}{F_s} n + \varphi) = \cos(\frac{2\pi\Omega}{\Omega_s} n + \varphi)$$

$$= \cos(\Omega T n + \varphi) = \cos(\omega n + \varphi)$$

Otipkavanje signala

- dakle otipkani signal je

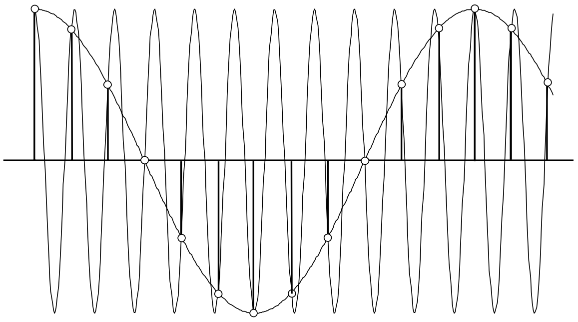
$$\forall n \in Cjelobrojni,$$

$$u\left[n\right] = \cos(\omega n + \varphi)$$

pri čemu je $\omega = \Omega T$

normalizirana kutna frekvencija (jedinica je radijana po uzorku) diskretnog signala $u[n]$

Aliasing kosinusnog signala



Aliasing kod otipkavanja

- otipkavaju se kosinusni signali $x_1(t)$ i $x_2(t)$ frekvencija 4 kHz i 44 kHz
- frekvencija otipkavanja F_s = 48 kHz

$$x_1(t) = \cos(2\pi F_1 t) = \cos(2\pi \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot t)$$

$$x_2(t) = \cos(2\pi F_2 t) = \cos(2\pi \cdot 44 \cdot 10^3 \cdot t)$$

$$t = nT = \frac{n}{F_s} = \frac{n}{48 \cdot 10^3}$$

$$x_1[n] = \cos\left[2\pi F_1 nT\right] = \cos\left[2\pi \cdot \tfrac{4 \cdot 10^3}{48 \cdot 10^3} \cdot n\right] = \cos\left[\frac{\pi}{6} n\right]$$

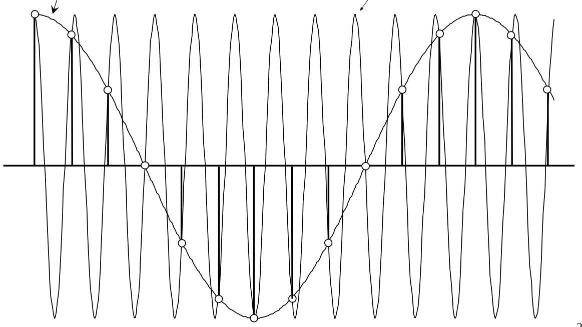
$$x_2[n] = \cos\left[2\pi \cdot \tfrac{44 \cdot 10^3}{48 \cdot 10^3} \cdot n\right] = \cos\left[\frac{11\pi}{6} n\right] = \cos\left[-\frac{\pi}{6} n\right]$$

$F_1 = 4$ kHz, $F_s = 48$ kHz

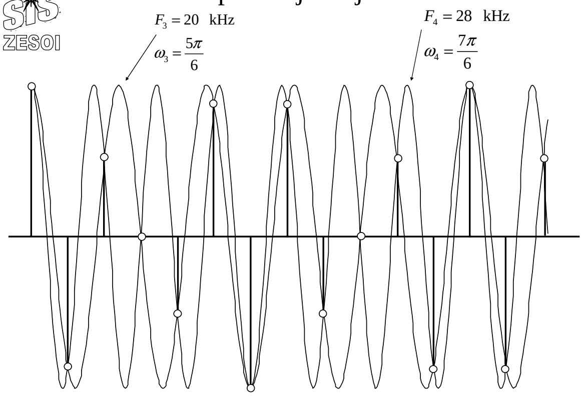
$$\omega_1 = \frac{2\pi F_1}{F_s} = \frac{2\pi \cdot 4 \cdot 10^3}{48 \cdot 10^3} = \frac{\pi}{6}$$

$F_2 = 44$ kHz

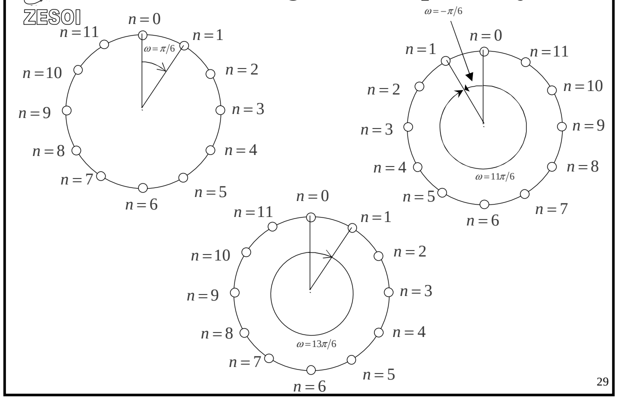
$$\omega_2 = \frac{11\pi}{6}$$



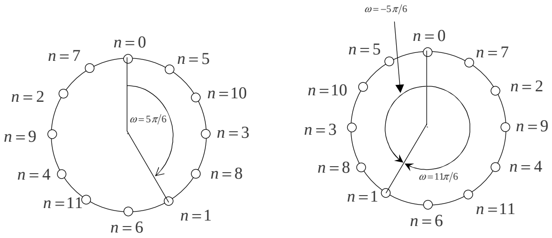
- slično se pokazuje da je



Još o aliasingu kod otipkavanja



Još o aliasingu kod otipkavanja



analogni signali diskretni signali

$\Omega = 2\pi F$ $\omega = 2\pi \mathrm{f}$

$\frac{\text{radijan}}{\text{sekunda}}$ Hz $\frac{\text{radijan}}{\text{uzorak}}$ $\frac{\text{period}}{\text{uzorak}}$

$-\infty < \Omega < \infty$ $\xrightarrow{\omega = \Omega T}$ $-\pi \le \omega \le \pi$

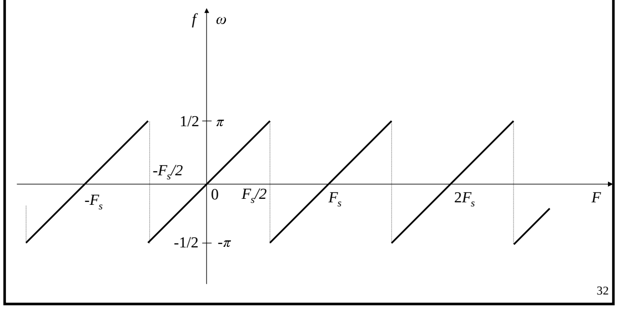
$-\infty < F < \infty$ $f = F / F_s$ $-\frac{1}{2} \le f \le \frac{1}{2}$

$-\pi / T \le \Omega \le \pi / T$ $\xleftarrow{\Omega = \omega / T}$

$-F_s / 2 \le F \le F_s / 2$ $F = f \cdot F_s$

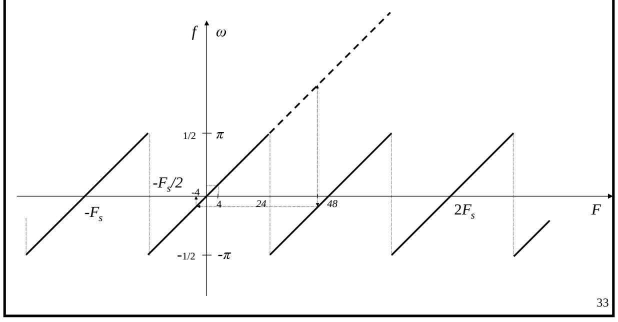
Otipkavanje signala

- veza između *F* i *f*



Otipkavanje signala

- veza između *F* i *f*



Aliasing kod otipkavanja

- iz $\omega_0 = \Omega_0 T = \Omega_0 \frac{1}{F_s} = \frac{2\pi\Omega_0}{\Omega_s}$ i $\omega_0 \le \pi$

  slijedi

  $$\frac{2\pi\Omega_0}{\Omega_s} \le \pi \Rightarrow \Omega_s \ge 2\Omega_0$$

- dakle, kako bi se postiglo otipkavanje bez “aliasing-a” frekvencija otipkavanja Ω_s treba biti barem dvostruko veća od frekvencije Ω_0 sinusnog signala koji se otipkava

Teorem otipkavanja

- poopćimo prethodni zaključak razmatrajući vremenski kontinuirani signal $x_a(t)$ prikazan kao sumu sinusoida
- $x_a(t)$ može biti jednoznačno prikazan otipkanim signalom $x[n]$ samo ako je frekvencija otipkavanja Ω_s najmanje dva puta veća od najviše frekvencije sadržane u signalu $x_a(t)$ – Nyquist-Shanon-ov teorem otipkavanja

Energija signala

- energija koja se u vremenskom intervalu $[t_1,t_2]$ disipira kao toplina na otporu R kroz koji teče struja $i(t)$ dana je s

  $$E_{[t_1,t_2]} = R\int_{t_1}^{t_2} i^2(t)dt$$

- analogno definiramo energiju kontinuiranog signala definiranom u vremenskom intervalu $[t_1,t_2]$ dakle, duljine $L = t_2 - t_1$

  $$E_L = \int_{t_1}^{t_2} \left| f(t) \right|^2 dt$$

Energija signala

- totalna energija kontinuiranoga signala dana je s

$$E_{\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) \right|^2 dt$$

- srednju snagu kontinuiranog signala definiramo kao

$$P_{\infty} = \lim_{L \to \infty} \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \left| f(t) \right|^2 dt$$

Energija signala

- totalna energija E_x niza $x[n]$ definira se kao:

$$\boxed{E_x = \sum_{\text{n=-}\infty}^{\infty} \left| x[n] \right|^2}$$

- niz beskonačna trajanja s konačnim vrijednostima uzoraka može imati konačnu ili beskonačnu totalnu energiju
- niz konačnog trajanja ima konačnu energiju

Energija i snaga signala

- srednja snaga P_x aperiodskog niza definira se kao:

$$P_{\text{x}} = \lim_{M \to \infty} \tfrac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} \left| x[n] \right|^2$$

- srednja snaga niza beskonačne duljine može biti konačna ili beskonačna

Energija i snaga signala

- energija niza konačne duljine $-M \le n \le M$ je pak:

$$E_{x,M} = \sum_{n=-M}^{M} \left| x[n] \right|^2$$

- pa je:

$$P_{\mathrm{x}} = \lim_{M \to \infty} \tfrac{1}{2M+1} E_{x,M}$$

- srednja snaga periodičnog niza perioda N je:

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{\mathrm{n}=0}^{N-1} \left| \tilde{x}[n] \right|^2$$

Energija i snaga signala

- razmotrimo kauzalni niz:

$$x[n] = \begin{cases} (\tfrac{1}{2})^n, & n \ge 0 \\ 3^n, & n < 0 \end{cases}$$

- $\boldsymbol{x}[n]$ je konačne energije jer: $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x[n] \right|^2$

$$E_x = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} 3^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{3}\right)^{2n}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{4}} + \frac{1}{1-\frac{1}{9}} - 1 = \tfrac{35}{24}$$

Energija i snaga osnovnih nizova

- jedinični skok $\mu[n]$:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x[n] \right|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^2[n] = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty$$

$$P = \lim_{M \to \infty} \tfrac{1}{2M+1} \sum_{n=0}^{M} \mu^2[n] =$$

$$= \lim_{M \to \infty} \frac{M+1}{2M+1} = \lim_{M \to \infty} \frac{1+1/M}{2+1/M} = \frac{1}{2}$$

Energija i snaga osnovnih nizova

- Kompleksna eksponencijala

$$E=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]\right|^{2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|Ae^{j\omega_0 n}\right|^{2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A^2=\infty$$

$$P=\lim_{M\to\infty}\tfrac{1}{2M+1}\sum_{n=-M}^{M}\left|Ae^{j\omega_0 n}\right|^{2}=\lim_{M\to\infty}\tfrac{1}{2M+1}\sum_{n=-M}^{M}A^2$$

$$=\lim_{M\to\infty}\frac{(2M+1)A^2}{2M+1}=A^2$$

Energija i snaga osnovnih nizova

signal	E	P
$\delta[n]$	1	0
$\mu[n]$	∞	½
$r[n]$	∞	∞
$Ae^{j\omega n}$	∞	A^2

Linearni vremenski diskretni sustavi
- [*A*,*B*,*C*,*D*] prikaz

- model s varijablama stanja diskretnog vremenski stalnog linearnog sustava je kako je pokazano

$$Stanja = Realni^{N}, Ulazi = Realni^{M}, Izlazi = Realni^{K}$$

$$\forall n \in Cjelobrojni$$

$$x[n+1]=Ax[n]+Bu[n]$$

$$y[n]=Cx[n]+Du[n]$$

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava

- odziv sustava možemo riješiti korak po korak
- neka je $x[0]$ = *pocetnoStanje*

$$n = 0, \quad x[1] = Ax[0] + Bu[0]$$

$$\begin{aligned} n = 1, \quad x[2] &= Ax[1] + Bu[1] \\ &= A\{Ax[0] + Bu[0]\} + Bu[1] \\ &= A^2x[0] + ABu[0] + Bu[1] \end{aligned}$$

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava

$$\begin{aligned} n = 2, \quad x[3] &= Ax[2] + Bu[2] \\ &= A\{A^2x[0] + ABu[0] + Bu[1]\} + Bu[2] \\ &= A^3x[0] + A^2Bu[0] + ABu[1] + Bu[2] \end{aligned}$$

- možemo napisati odziv stanja za n – ti korak

$$\forall n > 0$$

$$x[n] = A^n x[0] + \sum_{m=0}^{n-1} A^{n-1-m} Bu[m]$$

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava

- pa je odziv sustava

$$y[n] = \begin{cases} Cx[0] + Du[0], & n = 0 \\ CA^n x[0] + \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m} Bu[m] \right\} + Du[n], & n > 0 \end{cases}$$

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava

- dokažimo indukcijom da je izraz za odziv stanja korektno određen i da on daje korektnu vrijednost i za *n*+1 korak

$$x[n] = A^n x[0] + \sum_{m=0}^{n-1} A^{n-1-m} Bu[m]$$

iz $x[n+1] = Ax[n] + Bu[n]$ slijedi

$$= A\left\{A^n x[0] + \sum_{m=0}^{n-1} A^{n-1-m} Bu[m]\right\} + Bu[n]$$

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava

$$x[n+1] = A^{n+1} x[0] + \sum_{m=0}^{n-1} A^{n-m} Bu[m] + Bu[n]$$

$$= A^{n+1} x[0] + \sum_{m=0}^{n} A^{n-m} Bu[m]$$

- što je izraz na desnoj strani odziva stanja izračunat za *n*+1 pa je indukcijom pokazano da je korektno određen izraz za odziv stanja i da vrijedi za svaki *n* > 0

$$x[n] = A^n x[0] + \sum_{m=0}^{n-1} A^{n-1-m} Bu[m]$$

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava

- dakle, za MIMO diskretni sustav zadan s

$$Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K$$

$$\forall n \in Cjelobrojni, \quad x[n+1] = Ax[n] + Bu[n]$$

$$y[n] = Cx[n] + Du[n]$$

odziv stanja i odziv sustava su

$$x[n] = A^n x[0] + \sum_{m=0}^{n-1} A^{n-1-m} Bu[m], \quad n > 0$$

$$y[n] = \begin{cases} Cx[0] + Du[0], & n = 0 \\ CA^n x[0] + \left\{\sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m} Bu[m]\right\} + Du[n], & n > 0 \end{cases}$$

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava

- dakle, za MIMO diskretni sustav zadan s

$$Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K$$

$$\forall n \in Cjelobrojni, \quad x[n+1] = Ax[n] + Bu[n]$$

$$y[n] = Cx[n] + Du[n]$$

odziv stanja, odziv sustava i ulazni signal su vektori dimenzije *N* odnosno *K* i *M* i suglasno tome su matrice A,B,C,D odgovarajućih dimenzija

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava

- za sustav su jednim ulazom i jednim izlazom (SISO) vrijedi

$$Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni, Izlazi = Realni$$

$$\forall n \in Cjelobrojni, \quad x[n+1] = Ax[n] + Bu[n]$$

$$y[n] = Cx[n] + Du[n]$$

- *B* i *C* postaju tada vektori a *D* skalar

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava

- interesantno je definirati i razmotriti četiri slučaja
  - odziv stanja mirnog sustava dakle $x(0) = 0$

$$x[n] = \sum_{m=0}^{n-1} A^{n-1-m} Bu[m], \quad n > 0$$

  - odziv stanja nepobuđenog sustava dakle $u(n) = 0$

$$x[n] = A^n x[0], \quad n > 0$$

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava

- odziv mirnog sustava dakle $x(0) = 0$

$$y[n]=\begin{cases} Du[0], & n=0 \\ \left\{\sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m}Bu[m]\right\}+Du[n], & n>0 \end{cases}$$

- odziv nepobuđenog sustava dakle $u(n) = 0$

$$y[n]=\begin{cases} Cx[0], & n=0 \\ CA^{n}x[0], & n>0 \end{cases}$$

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava

- odziv stanja nepobuđenog sustava dakle kada je $u(n) = 0$ je

  $$x[n]=A^{n}x[0], \quad n>0$$

- u slučaju nepobuđenog sustava matrica A^n prevodi sustav iz početnog stanja u stanje u koraku n
- matricu A^n nazivamo prijelazna (state transition matrix) ili fundamentalna matrica i označavamo je s $\Phi[n]$

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava - primjer

- primjer bankovne štednje:
  - označimo stanje nekog bankovnog računa, na početku dana n, sa $x[n]$
  - *pocetnoStanje* neka je stanje računa na dan 0 i označimo ga sa $x[0]$
  - sa $u[n]$ označimo ukupni dnevni depozit (za $u[n] > 0$) ili ukupni iznos podizanja (za $u[n] < 0$) u HRK
  - sa $y[n]$ označimo izlaz iz sustava koji predstavlja stanje računa na kraju dana n
  - neka je dnevna kamata K

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava - primjer

- prepoznajemo da je *Stanja=Ulazi=Izlazi=Realni*
- stanje računa na početku dana *n*+1 (naredno stanje) će biti

$$\forall n \in Cjelobrojni,\ \ x[n+1] = (1+K)x[n] + u[n]$$

- stanje računa na dan *n* (izlaz) je

$$\forall n \in Cjelobrojni,\ \ y[n] = x[n] + u\left[n\right]$$

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava - primjer

- neka smo na dan kada počinjemo pratiti stanje na računu od prijašnje štednje imali 200 Kuna i to je početno stanje *x*[0]=200
- neka tog istog dana uložimo 3800 Kuna *u*[0]=3800
- plan štednje (trošenja) je podizanje svakog dana po 120 Kuna
- zanima nas stanje računa nakon *n* dana ako su kamate 3% godišnje – dakle dnevno *K* = *.03/365=0,0000822*

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava - primjer

- stanje na računu bi mogli računati korak po korak

$$x[n+1] = (1+K)x[n] + u[n]$$

$$x[n+1] = 1,0000822x[n] + u[n]$$

$$n = 0,\ \ x\left[1\right] = 1,0000822x[0] + u[0]$$

$$= 1,0000822 \cdot 200 + 3800 = 4000,01644$$

$$n = 1,\ \ x\left[2\right] = 1,0000822x[1] + u[1]$$

$$= 1,0000822 \cdot 4000,01644 - 120 = 3880,34524135$$

$$n = 2,\ \ x\left[3\right] = 1,0000822x[2] + u[2]$$

$$= 1,0000822 \cdot 3880,34524135 - 120 = 3760,6642057$$

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava - primjer

- nađimo rješenje na drugi način
- jednadžbe možemo pisati kao

$$x[n+1] = ax[n] + bu[n]$$

$$y\left[n\right] = cx[n] + du[n]$$

gdje su, za naš primjer, a = 1+K, b = c = d = 1

- gornje jednadžbe podsjećaju na [A,B,C,D] prikaz MIMO sustava i dobivanju općeg rješenja možemo pristupiti na isti način

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava - primjer

- odziv sustava možemo riješiti korak po korak
- neka je $x[0]$ = *pocetnoStanje*

$$x\left[1\right] = ax\left[0\right] + bu\left[0\right]$$

$$\begin{aligned} x\left[2\right] &= ax\left[1\right] + bu\left[1\right] \\ &= a\left\{ax\left[0\right] + bu\left[0\right]\right\} + bu\left[1\right] \\ &= a^2x\left[0\right] + abu\left[0\right] + bu\left[1\right] \end{aligned}$$

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava

$$\begin{aligned} x\left[3\right] &= ax\left[2\right] + bu\left[2\right] \\ &= a\left\{a^2x\left[0\right] + abu\left[0\right] + bu\left[1\right]\right\} + bu\left[2\right] \\ &= a^3x\left[0\right] + a^2bu\left[0\right] + abu\left[1\right] + bu\left[2\right] \end{aligned}$$

- možemo napisati odziv stanja za n – ti korak

$$\forall n > 0$$

$$x\left[n\right] = a^n x\left[0\right] + \sum_{m=0}^{n-1} a^{n-1-m} bu\left[m\right]$$

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava - primjer

- želimo naći odziv stanja (i ukupni odziv) u n=30

$$x[n] = a^n x[0] + \sum_{m=0}^{n-1} a^{n-1-m} b u[m]$$

gdje su, za naš primjer, a = 1+K, b = c = 1 i d = 1

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava - primjer

$$x[n] = a^n x[0] + \sum_{m=0}^{n-1} a^{n-1-m} b u[m] =$$

$$= a^{30} x[0] + \begin{bmatrix} a^{29} \\ a^{28} \\ \ldots\ldots \\ a^{1} \\ a^{0} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u[0] \\ u[1] \\ \ldots\ldots \\ u[28] \\ u[29] \end{bmatrix}$$

$$= 1.0000822^{30} \cdot 200 + \begin{bmatrix} 1.0000822^{29} \\ 1.0000822^{28} \\ \ldots\ldots \\ 1.0000822^{1} \\ 1.0000822^{0} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3800 \\ -120 \\ \ldots\ldots \\ -120 \\ -120 \end{bmatrix} = 525.554912$$

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava - primjer

- odziv u koraku n možemo naći i ovako

$$x[n] = a^n x[0] + \sum_{m=0}^{n-1} a^{n-1-m} b u[m]$$

- $u(n)$ u našem primjeru možemo prikazati i kao

$$0 \le n \le 30 \quad u[n] = 3800\delta[n] - 120\mu(n-1)$$

$$u[n] = 3800\delta[n] + 120\delta[n] - 120\delta[n] - 120\mu(n-1)$$

$$u[n] = 3920\delta[n] - 120\mu(n)$$

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava - primjer

- pa je odziv stanja

odziv stanja na impuls

$$x[n] = a^n x[0] + \sum_{m=0}^{n-1} a^{n-1-m} bu[m]$$

$$= a^n x[0] + \sum_{m=0}^{n-1} a^{n-1-m} \{3920\delta[m] - 120\mu(m)\}$$

$$= a^n x[0] + 3920 \sum_{m=0}^{n-1} a^{n-1-m} \delta[m] - 120 \sum_{m=0}^{n-1} a^{n-1-m} \mu[m]$$

$$= a^n x[0] + 3920 a^{n-1} - 120 a^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} a^{-m}$$

$$= a^n x[0] + 3920 a^{n-1} - 120 \frac{1-a^n}{1-a}$$

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava - primjer

- pa je odziv stanja u koraku *n*=30

$$x[n] = a^n x[0] + 3920 a^{n-1} - 120 \frac{1-a^n}{1-a}$$

$$x[30] = 1.0000822^{30} \cdot 200 + 3920 \cdot 1.0000822^{29} - 120 \frac{1-1.0000822^{30}}{1-1.0000822}$$

$$x[30] = 525.554912$$

Jednadžba diferencija linearnog vremenski diskretnoga sustava - primjer

- za zadani primjer diskretnog sustava prvog reda zadanog s modelom s varijablama stanja izvršimo transformaciju u model ulaz izlaz
- iz $x[n+1] = ax[n] + bu[n]$

  $y[n] = cx[n] + du[n]$
- slijedi $y[n] = c\{ax[n-1] + bu[n-1]\} + du[n]$ i

  $y[n-1] = cx[n-1] + du[n-1]$

$$y[n] - ay[n-1] = du[n] + (cb - ad)u[n-1]$$

Primjer iz ekonomije

Australian National University
Department of Economics
Faculty of Economics and Commerce

Mathematical Techniques for Advanced Economic Analysis.

Primjer iz ekonomije

February 2002

(For handing in by 4pm, Thursday 19 February and discussion in the tutorial to follow that day. To plan your work, recall that the final examination will be on the morning of Friday 22 February)

7. Difference and differential equations and dynamic optimisation

1. A closed economy has GDP, $Yt = Ct + It + Gt$, where the consumption function is $Ct = 0.6\ Yt$, government spending, Gt, is exogenous and constant, and investment, It, depends on both a long-term trend growth rate, g, and the most recent change in GDP, $It = (1 + g)t + 0.2\ (Yt\text{-}1 - Yt\text{-}2)$. Consider, first, the case in which the long term growth rate of investment is $g = 0$.

(a) Formulate this problem as a difference equation in Yt and classify the equation.

(b) Calculate the steady state GDP level.

(c) Solve the homogeneous form to determine whether the economy would be locally stable around the steady state and whether its path would be oscillatory or convergent.

(d) Derive a particular solution for the case where $g=0.05$ and assemble the general solution in this case; then describe its behaviour through time.

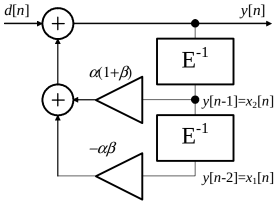
Primjer diskretnog sustava drugog reda

- *primjer:* model nacionalnog bruto dohotka (Paul A. Samuelson)
  $y[n]$ – bruto dohodak na kraju n–te godine,
  $p[n]$ – potrošnja – kupovina dobara,
  $i[n]$ – investicije – kupovina proizvodnih sredstava,
  $d[n]$ – troškovi državne uprave,
  $y[n] = p[n] + i[n] + d[n]$.
- ustanovljen je slijedeći odnos između navedenih veličina:
  $p[n] = \alpha \cdot y[n-1]$
  $i[\mathrm{n}] = \beta \cdot \alpha \cdot (y[n-1] - y[n-2])$

Primjer diskretnog sustava drugog reda

- uvršteno u sumu daje:

  $y[n] = \alpha(1+\beta)\, y[n-1] - \alpha\beta\, y[n-2] + d[n]$



Primjer diskretnog sustava drugog reda

- prijelaz iz modela ulaz izlaz

  $y[n] - \alpha(1+\beta)\, y[n-1] + \alpha\beta\, y[n-2] = d[n]$

  u model s varijablama stanja

$$x_1[n] = y[n-2] \Rightarrow x_1[n+1] = y[n-1] = x_2[n]$$

$$x_2[n] = y[n-1] \Rightarrow$$

$$x_2[n+1] = y[n] = -\alpha\beta x_1[n] + \alpha(1+\beta)x_2[n] + d[n]$$

Primjer diskretnog sustava drugog reda

$$\begin{bmatrix} x_1[n+1] \\ x_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha\beta & \alpha(1+\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d[n]$$

$$y[n] = \begin{bmatrix} -\alpha\beta & \alpha(1+\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix} + [1]\, d[n]$$

- radi se o sustavu su jednim ulazom i jednim izlazom (SISO) i vrijedi

  $Stanja = Realni^2, Ulazi = Realni, Izlazi = Realni$

  $\forall n \in Cjelobrojni, \quad x[n+1] = Ax[n] + Bu[n]$

  $y[n] = Cx[n] + Du[n]$

Impulsni odziv linearnih vremenski diskretnih sustava

- razmotrimo ponovo izraz za odziv mirnog, *x*[*n*] = 0, SISO sustava

$$Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni, Izlazi = Realni$$

$$\forall n \in Cjelobrojni, \quad x[n+1] = Ax[n] + Bu[n]$$

$$y[n] = Cx[n] + Du[n]$$

$$y[n] = \begin{cases} Du[0], & n = 0 \\ \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m} Bu[m] \right\} + Du[n], & n > 0 \end{cases}$$

Impulsni odziv linearnih vremenski diskretnih sustava

- pobudimo ovaj sustav s jediničnim impulsom *u*[*n*] = δ[*n*] odziv je tada

$$y[n] = h[n] = \begin{cases} D\delta[0], & n = 0 \\ \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m} B\delta[m] \right\} + D\delta[n], & n > 0 \end{cases}$$

- odziv sustava u tom slučaju nazivamo impulsni odziv i označavamo ga s *h*[*n*]

$$h[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ D, & n = 0 \\ CA^{n-1}B, & n \geq 1 \end{cases}$$

Konvolucijska sumacija

- za ovako određeni impulsni odziv *h*[*n*] moguće je izraz za odziv mirnog sustava transformirati u oblik

$$y[n] = \sum_{m=0}^{n-1} CA^{n-1-m} Bu[m] + Du[n]$$

$$y[n] = \sum_{m=0}^{n-1} h[n-m]u[m] + Du[n]$$

$$y[n] = \sum_{m=0}^{n} h[n-m]u[m]$$