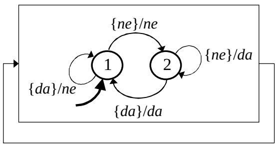
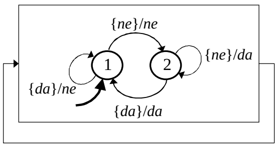
## *Povratna veza – automati bez ulaza* (*primjeri a,b i c - zaključak*)

- zaključujemo da automati u primjerima b i c ne mogu biti spojeni u povratnu vezu kako je to prikazano
- jedina mogućnost ovako konstruirane povratne veze je za automat u primjeru a






## *Povratna veza – izlaz određen stanjem*




- ovo je ujedno i primjer automata za koji vrijedi da je izlaz određen stanjem jer je jednak za oba moguća ulazna znaka
- dakle $y(n)=ne$ za $x(n)=1$ i $y(n)=da$ za $x(n)=2$



## *Povratna veza – izlaz određen stanjem*

- kažemo da automat A ima izlaz određen stanjem ako za svako dostupno stanje

$$x(n) \in Stanja_A$$

postoji jedinstveni izlazni znak $y(n)=b$ koji ovisi samo o $x(n)$ a ne ovisi o ulaznom znaku

- dakle

$$izlaz_A\left(x(n), u(n)\right) = b$$

- očigledno je da je automat s povratnom vezom dobro-formiran

## Povratna veza – *izlaz određen stanjem*

- za ovaj specijalni slučaj automat opisujemo

$$
\begin{aligned}
&Stanja = Stanja_A \\
&Ulazi = \{djeluj, odsutan\} \\
&Izlazi = Izlazi_A \\
&pocetnoStanje = pocetnoStanje_A \\
&FunkcijaPrijelaza\left(x(n), u(n)\right) = \\
&\quad \begin{cases} FunkcijaPrijelaza_A\left(x(n), b\right), \\ \quad \text{gdje je } b \text{ jedinstveni izlazni znak u stanju } x(n) \text{ ako } u(n) = djeluj \\ \left(x(n), y(n)\right) \quad \text{ako } u(n) = odsutan \end{cases}
\end{aligned}
$$

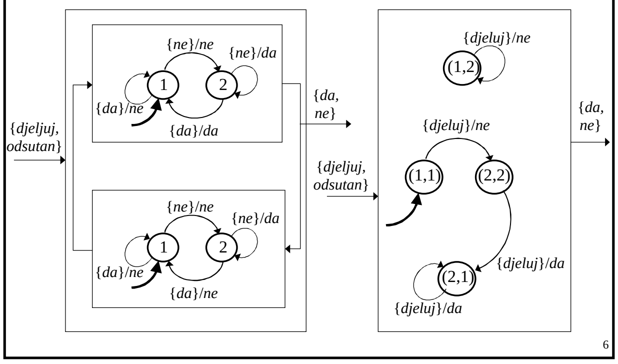
4

## Povratna veza – *izlaz određen stanjem*

- ako se automat s izlazom određenim stanjem kombinira s bilo kojim drugim automatom u spoj s povratnom vezom rezultirajući spoj će biti *dobro-formiran*
- primjer: kombinacija automata iz prethodnih primjera a i b
- automat A ima izlaz određen stanjem a automat B ne
- ukupna kombinacija je *dobro-formirana*

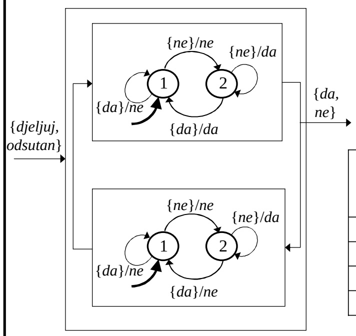
5

## Povratna veza – *izlaz određen stanjem*




6

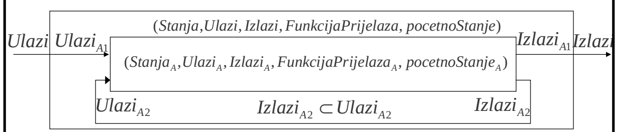
## Povratna veza – izlaz određen stanjem




| *trenutno stanje* | (*naredno stanje, izlaz*) za *ulaz* | |
|---|---|---|
| | *djeluj* | *odsutan* |
| (1,1) | ((2,2),*ne*) | ((1,1),*odsutan*) |
| (2,2) | ((2,1),*da*) | ((2,2),*odsutan*) |
| (1,2) | ((1,2),*ne*) | ((1,2),*odsutan*) |
| (2,1) | ((2,1),*da*) | ((2,1),*odsutan*) |

7

## Povratna veza – automati s ulazom




- razmatramo dakle automat s dva ulaza i dva izlaza u spoju s povratnom vezom pri čemu je drugi izlaz spojen na drugi ulaz
- želimo definirati složeni automat označen petorkom (*Stanja*, *Ulazi*, *Izlazi*, *FunkcijaPrijelaza*, *pocetnoStanje*) svjetloplavim blokom

8

## Povratna veza – automati s ulazom

- ulazi i izlazi automata A su oblika

$$Ulazi_A = Ulazi_{A1} \times Ulazi_{A2}$$
$$Izlazi_A = Izlazi_{A1} \times Izlazi_{A2}$$

- izlazna funkcija od A je

$$izlaz_A : Stanja_A \times Ulazi_A \to Izlazi_A$$

- odnosno

$$izlaz_A = (izlaz_{A1}, izlaz_{A2})$$

9

## Povratna veza – automati s ulazom

- gdje

$$izlaz_{A1} : Stanja_A \times Ulazi_A \to Izlazi_{A1}$$

daje izlazni znak na prvom izlazu a

$$izlaz_{A2} : Stanja_A \times Ulazi_A \to Izlazi_{A2}$$

na drugom

10

## Povratna veza – automati s ulazom

- neka su za automat A u *n*-tom koraku $x(n) \in Stanja_A$ i trenutni vanjski ulazni znak $u_1(n) \in Ulazi_{A1}$
- naš problem je odrediti "nepoznati" izlazni znak $(y_1(n), y_2(n)) \in Izlazi_A$ tako da vrijedi

$$izlaz_A(x(n),(u_1(n), y_2(n))) = (y_1(n), y_2(n))$$

- znak $y_2(n)$ se pojavljuje na obje strane jer je drugi ulaz $u_2(n)$ u automat jednak $y_2(n)$

11

## Povratna veza – automati s ulazom

- izlaznu jednadžbu možemo pisati

$$izlaz_{A1}(x(n),(u_1(n), y_2(n))) = y_1(n)$$

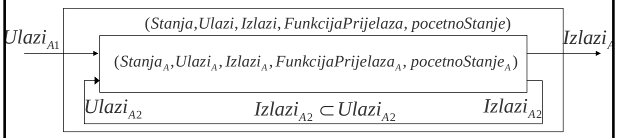
$$izlaz_{A2}(x(n),(u_1(n), y_2(n))) = y_2(n)$$

u ovim jednadžbama $x(n)$ i $u_1(n)$ su poznati a $y_1(n)$ i $y_2(n)$ su nepoznati

- druga jednadžba ukazuje da će jedinstveno rješenje biti moguće samo za *dobro-formirane* automate

12

## Povratna veza – automati s ulazom




- kažemo da će automat s povratnom vezom biti dobro-formiran ako za svako dostupno stanje

$x(n) \in Stanja_A$ i za svaki vanjski znak $u_1(n) \in Ulazi_{A1}$

postoji jedinstveni izlazni simbol $y_2(n) \in Izlazi_{A2}$ koji zadovoljava jednadžbu

$$izlaz_{A2}(x(n),(u_1(n), y_2(n))) = y_2(n)$$



## Povratna veza – automati s ulazom

- za *dobro-formirani* automat vrijedi

$Stanja = Stanja_A$

$Ulazi = Ulazi_{A1}$

$Izlazi = Izlazi_{A1}$

$pocetnoStanje = pocetnoStanje_A$

$FunkcijaPrijelaza\left(x(n),u(n)\right) = \left(narednoStanje\left(x(n),u(n)\right), izlaz\left(x(n),u(n)\right)\right)$:

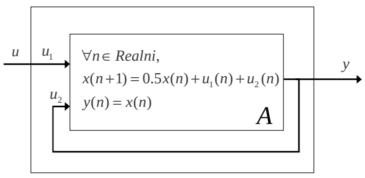
$narednoStanje\left(x(n),u(n)\right) = narednoStanje_A\left(x(n),(u(n), y_2(n))\right)$ i

$izlaz\left(x(n),u(n)\right) = izlaz_A\left(x(n),(u(n), y_2(n))\right)$ gdje je $y_2(n)$ jedinstveno rješenje jednadžbe $izlaz_{A2}(x(n),(u(n), y_2(n))) = y_2(n)$



## Povratna veza – automati s ulazom

- primjer




- A ima dva ulaza i jedan izlaz

$Ulazi_A = Realni \times Realni, \quad Izlazi_A = Realni$

i stanja $Stanja_A = Realni$

## *Povratna veza – automati s ulazom*

- prema tome A ima beskonačni ulazni i izlazni alfabet te beskonačno mnogo stanja
- u *n*-tom koraku označavamo par ulaznih vrijednosti s ($u_1(n)$, $u_2(n)$), trenutno stanje sa $x(n)$, naredno stanje sa $x(n+1)$ i izlaz s $y(n)$
- funkcija prijelaza je tada

$$\left(x(n+1), y(n)\right) = FunkcijaPrijelaza\left(x(n), (u_1(n), u_2(n))\right)$$
$$= \left(0.5x(n) + u_1(n) + u_2(n), x(n)\right)$$

16

## *Povratna veza – automati s ulazom*

- ekvivalentno pišemo

$$x(n+1) = narednoStanje_A\left(x(n), (u_1(n), u_2(n))\right)$$
$$= 0.5x(n) + u_1(n) + u_2(n)$$

$$y(n) = izlaz_A\left(x(n), (u_1(n), u_2(n))\right) = x(n)$$

- očigledno je da ovaj automat ima izlaz određen stanjem

17

## *Povratna veza – automati s ulazom*

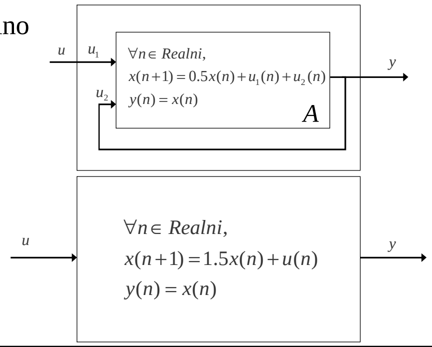
- povratna veza povezuje izlaz i drugi ulaz, $u_2(n) = y(n)$ pa je $izlaz_A\left(x(n), (u_1(n), u_2(n))\right) = u_2(n)$
- iz čega slijedi $x(n) = u_2(n)$
- kako je $u_1(n) = u(n)$
- potpuni je opis automata s povratnom vezom

$$Ulazi = Realni, \quad Izlazi = Realni, \quad Stanja = Realni$$
$$FunkcijaPrijelaza\left(x(n), u(n)\right) =$$
$$= \left(0.5x(n) + u(n) + x(n), x(n)\right) = \left(1.5x(n) + u(n), x(n)\right)$$

18

## *Povratna veza – automati s ulazom*

- finalno




19

## *Automati s beskonačnim brojem stanja*

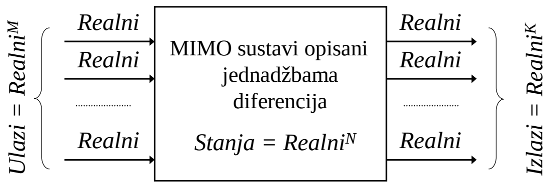
- u analizi konačnih automata pokazano je kako je moguće potpuno opisati ponašanje sustava uz poznavanje ulaznog niza znakova te konačnog broja stanja sustava (koje predstavlja prošlost sustava)
- važnu ulogu imaju sustavi s beskonačnim brojem stanja
- razmatramo sustave za koje:
  - *prostor stanja te ulazni i izlazni alfabeti su numerički skupovi*
  - *FunkcijaPrijelaza je linerarna*

20

## *Automati*

- posebno se razmatraju sustavi s

$$Stanja = Realni^N$$
$$Ulazi = Realni^M$$
$$Izlazi = Realni^K$$




21

## Automati

- dakle, sustav ima *M* različitih ulaza i *K* različitih izlaza
- ovakvi sustavi nazivaju se MIMO sustavi – Multiple-Input, Multiple-Output
- kada je $M = K = 1$ sustav se naziva SISO sustav – Single-Input, Single-Output
- stanje je *N*-torka s *N* realnih elemenata
- *N* se naziva dimenzijom sustava

22

## Automati

- primjer: stereo audio sustav je MIMO sustav s M=K=2 a novi audio sustavi kućnog kina su MIMO sustavi s M=K=5

23

## Automati

- važno:

  za $n \in Prirodni_0$

  $u(n) \in Realni^M \quad x(n) \in Realni^N \quad y(n) \in Realni^K$

  ali su ovo nizovi

  $u \in \left[ Prirodni_0 \to Realni^M \right]$

  $x \in \left[ Prirodni_0 \to Realni^N \right]$

  $y \in \left[ Prirodni_0 \to Realni^K \right]$

24

## Automati

- definiramo MIMO diskretni sustav kao beskonačni automat

$$D = (Stanja, Ulazi, Izlazi, FunkcijaPrijelaza, pocetnoStanje)$$

uz *Stanja* - prostor stanja

*Ulazi* - ulazni prostor

*Izlazi* – izlazni prostor

*pocetnoStanje* – početno stanje

$$FunkcijaPrijelaza : Stanja \times Ulazi \rightarrow Stanja \times Izlazi$$

25

## Automati

- ovdje je *FunkcijaPrijelaza*

$$FunkcijaPrijelaza : Realni^N \times Realni^M \rightarrow Realni^N \times Realni^K$$

- *FunkcijaPrijelaza* se razlaže na dvije funkcije *narednoStanje* i *izlaz*

$$narednoStanje : Realni^N \times Realni^M \rightarrow Realni^N$$

$$izlaz : Realni^N \times Realni^M \rightarrow Realni^K$$

$$\forall x \in Realni^N, \forall u \in Realni^M,$$

$$FunkcijaPrijelaza(x,u) = (narednoStanje(x,u), izlaz(x,u))$$

26

## Automati

- za dani ulazni niz *u*(0), *u*(1), …. *M*-torki iz skupa *Realni*$^M$, sustav rekurzivno generira odziv stanja, dakle niz, *x*(0), *x*(1), …. *N*-torki iz skupa *Realni*$^N$ i odziv izlaza *y*(0), *y*(1), …. *K*-torki iz skupa *Realni*$^K$ kako slijedi

$$x(0) = pocetnoStanje$$

jednadžba prijelaza u naredno stanje je

$$\forall n \in Cjelobrojni, n \geq 0, \quad x(n+1) = narednoStanje(x(n), u(n))$$

izlazna jednadžba je

$$\forall n \in Cjelobrojni, n \geq 0, \quad y(n) = izlaz(x(n), u(n))$$

27

## *Automati*

- u dosadašnjim razmatranjima automata *n* je predstavljao korak u kojem promatramo automat
- ako se korak *n* promotri kao neki trenutak vremena *nT*, gdje je *T* razmak između koraka tada *n* nazivamo vremenskim indeksom (ili opet korakom)
- govorimo o vremenski diskretnim sustavima
- *u*(*n*), *y*(*n*) imaju realne, fizikalne vrijednosti za svaki korak *n* i ovdje se ne koristi znak *odsutan*

28

## *Oznake*

- vremenski indeks (ili korak) *n* je iz skupa cjelobrojnih brojeva pa je *u*(*n*) vremenski diskretan signal
- većina autora i vizualno naglašava diskretnost signala označavajući ga kao *u*[*n*]
- precizna definicija domene potpuno definira signal (i sustav) no ovaj vizualni dodatak daje bolju preglednost u izrazima u kojima domena može biti i diskretna i realna

29

## *Automati*

- ako *FunkcijaPrijelaza* ovisi o vremenskom indeksu *n* tada govorimo o *vremenski promjenljivom sustavu,* inače se radi o vremenski stalnom sustavu
- isto tako *FunkcijaPrijelaza* određuje *linearnost* odnosno *nelinearnost* sustava

30

## Linearnost

- funkcija *f:Realni^N→Realni^M* je *linearna* ako

$\forall a \in Realni, \forall u \in Realni^N, \forall v \in Realni^N$ vrijedi

$f(au) = af(u)$ homogenost

$f(u+v) = f(u) + f(v)$ aditivnost

- ova dva svojstva zajedno su ekvivalentni svojstvu *superpozicije*

$\forall a, b \in Realni, \forall u, v \in Realni^N$ vrijedi

$f(au+bv) = af(u) + bf(v)$



## Linearnost

- svaka matrica definira linearnu funkciju na slijedeći način

  neka je *A* matrica dimenzije *M*×*N* tada je funkcija

  $f : Realni^N \to Realni^M$ definirana s

  $\forall x \in Realni^N, \quad f(x) = Ax$

- pokažimo da svaka linearna funkcija može biti prikazana s ovakvom matričnom multiplikacijom kao što to vrijedi za skalarni slučaj $\forall x \in Realni, \quad f(x) = ax$



## Linearnost

- definiraju se vektori

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots\ldots, e_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{bmatrix}$$

- uz pomoć njih možemo prikazati bilo koji vektor $x \in Realni^N$ kao sumu

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots\ldots + x_N e_N$$

  gdje je $x_i$ (skalar) *i*-ti element vektora *x*

## Linearnost

- koristeći svojstvo superpozicije

$$y = f(x) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \dots\dots + x_N f(e_N)$$

- pišemo stupčani vektor $f(e_j) \in Realni^M$ kao

$$f(e_j) = \begin{bmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \dots \\ a_{M,j} \end{bmatrix}$$

34

## Linearnost

- pa gornja jednadžba

$$y = f(x) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \dots\dots + x_N f(e_N)$$

prelazi u

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_M \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \dots \\ a_{M,1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \dots \\ a_{M,2} \end{bmatrix} + \dots\dots + x_N \begin{bmatrix} a_{1,N} \\ a_{2,N} \\ \dots \\ a_{M,N} \end{bmatrix}$$

35

## Linearnost

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{M,1} & a_{M,2} & \dots & a_{M,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{bmatrix}$$

odnosno $y = Ax$

gdje je $A$ matrica dimenzije $M \times N$

$$A = \left[ a_{i,j}, 1 \le i \le M, 1 \le j \le N \right]$$

36

## Linearni vremenski diskretni sustavi

- razmotrimo diskretni sustav opisan s

$$Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K$$

i jednadžbama

$$\forall n \in Cjelobrojni_+$$

$$x[n+1] = narednoStanje(x[n], u[n])$$

$$y[n] = izlaz(x[n], u[n])$$

- za sustav kažemo da je linearan ako je početno stanje *N*-torka nula i ako su funkcije *narednoStanje* i *izlaz* linearne

37

## Linearni vremenski diskretni sustavi

- ako su funkcije *narednoStanje* i *izlaz* linearne i vremenski stalne (ne mijenjaju se s vremenom) govorimo o vremenski stalnom linearnom diskretnom sustavu – LTI (linear time – invariant system)

38

## Linearni vremenski diskretni sustavi

- razmotrimo ponovo jednadžbu stanja

$$x[n+1] = narednoStanje(x[n], u[n])$$

- ako uređeni par (*x*[*n*],*u*[*n*]) zamislimo kao (*N*+*M*)-torku u kojoj prvih *N* elemenata predstavlja *x*[*n*] i preostalih *M* elemenata predstavljaju *u*[*n*] tada bilo koju linearnu funkciju narednoStanje možemo prikazati kao

$$narednoStanje(x[n], u[n]) = P(x[n], u[n])$$

gdje je *P* matrica dimenzije *N*×(*N*+*M*)

39

## *Linearni vremenski diskretni sustavi* - [*A*,*B*,*C*,*D*] prikaz

- kako se prvih *N* stupaca od *P* (označimo ih s *A*) množi sa *x*[*n*] a preostalih *M* stupaca (označimo ih s *B*) s *u*[*n*] vrijedi

  $$naredno Stanje\left(x[n],u[n]\right)=Ax[n]+Bu[n]$$

  gdje je *A* matrica dimenzije *N*×*N* a *B* dimenzije *N*×*M*
- slično vrijedi za izlaznu funkciju

$$izlaz\left(x[n],u[n]\right)=Cx[n]+Du[n]$$

gdje je $C$ dimenzije $K \times N$ a $D$ dimenzije $K \times M$

40

## *Linearni vremenski diskretni sustavi* - [*A*,*B*,*C*,*D*] prikaz

- model s varijablama stanja diskretnog vremenski stalnog linearnog sustava je dakle

$$Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K$$

$$x[n+1]=Ax[n]+Bu[n]$$

$$y[n]=Cx[n]+Du[n]$$

- ovaj način prikaza sustava naziva se i $[A,B,C,D]$ prikaz

41

## *Linearni vremenski diskretni sustavi* [*A*,*B*,*C*,*D*] prikaz - primjer

- neka je zadan diskretni sustav s [*A*,*B*,*C*,*D*] prikazom

$$Stanja = Realni^3, Ulazi = Realni, Izlazi = Realni$$

$$x[n+1]=Ax[n]+Bu[n]$$

$$y[n]=Cx[n]+Du[n]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} x_1[n+1] \\ x_2[n+1] \\ x_3[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ x_3[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u[n] \\ y[n] = \begin{bmatrix} -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ x_3[n] \end{bmatrix} + [b_0]u[n] \end{cases}$$

- dakle *N*=3, *M*=1, *K*=1 tj. sustav je trećeg reda i ima jedan ulaz i jedan izlaz
- raspišimo jednadžbu narednog stanja i izlaznu jednadžbu

42

## *Linearni vremenski diskretni sustavi*
## $[A,B,C,D]$ prikaz - primjer

$$x_1[n+1] = x_2[n]$$
$$x_2[n+1] = x_3[n]$$
$$x_3[n+1] = -a_3 x_1[n] - a_2 x_2[n] - a_1 x_3[n] + b_0 u[n]$$
$$y[n] = -a_3 x_1[n] - a_2 x_2[n] - a_1 x_3[n] + b_0 u[n]$$

- prikažimo zadani sustav uz pomoć modela ulaz izlaz što postižemo eliminacijom $x_1$, $x_2$ i $x_3$
- iz treće i četvrte jednadžbe slijedi
  $x_3[n+1] = y[n]$

43

## *Linearni vremenski diskretni sustavi*
## $[A,B,C,D]$ prikaz - primjer

- iz $x_3[n+1] = y[n]$ slijedi
  $$x_3[n] = y[n-1] \Rightarrow x_2[n+1] = y[n-1] \Rightarrow$$
  $$x_2[n] = y[n-2] \Rightarrow x_1[n+1] = y[n-2] \Rightarrow$$
  $$x_1[n] = y[n-3]$$
- uvrstimo li $x_1$, $x_2$ i $x_3$ u četvrtu jednadžbu slijedi

$$y[n] = -a_3 y[n-3] - a_2 y[n-2] - a_1 y[n-1] + b_0 u[n]$$

- odnosno

$$y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + a_3 y[n-3] = b_0 u[n]$$

44

## *Linearni vremenski diskretni sustavi*
## $[A,B,C,D]$ prikaz - primjer

- za dani primjer pokazano je da sustav može biti zadan modelom s varijablama stanja dakle jednadžbom stanja i izlaznom jednadžbom

$$\begin{bmatrix} x_1[n+1] \\ x_2[n+1] \\ x_3[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ x_3[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u[n]$$

$$y[n] = \begin{bmatrix} -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ x_3[n] \end{bmatrix} + [b_0] u[n]$$

- ili modelom ulaz-izlaz dakle jednadžbom diferencija

$$y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + a_3 y[n-3] = b_0 u[n]$$

45

## *Linearni vremenski kontinuirani sustavi* [$A$,$B$,$C$,$D$] prikaz - primjer

- pokazano je da vremenski kontinuirani sustav možemo prikazati s diferencijalnom jednadžbom (model ulaz – izlaz)

$$\dddot{y}(t)+d_2\ddot{y}(t)+d_1\dot{y}(t)+d_0y(t)=c_0u(t)$$

- da bi riješili ovu jednadžbu trebamo poznavati

$$y(0),\ \dot{y}(0)\ \text{i}\ \ddot{y}(0)$$

- ako početne uvjete interpretiramo kao početna stanja moguć je slijedeći izbor stanja zadanog kontinuiranog sustava

46

## *Linearni vremenski kontinuirani sustavi* [$A$,$B$,$C$,$D$] prikaz - primjer

$$x_1(t)=y(t),\quad x_2(t)=\dot{y}(t),\quad x_3(t)=\ddot{y}(t)$$

- deriviranjem $x_1$, $x_2$, $x_3$

$$\dot{x}_1(t)=\dot{y}(t)\Rightarrow\dot{x}_1(t)=x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t)=\ddot{y}(t)\Rightarrow\dot{x}_2(t)=x_3(t)$$
$$\dot{x}_3(t)=\dddot{y}(t)\Rightarrow\dot{x}_3(t)=-d_0x_1(t)-d_1x_2(t)-d_2x_3(t)+c_0u(t)$$
$$y(t)=x_1(t)+0\cdot x_2(t)+0\cdot x_3(t)+0\cdot u(t)$$

47

## *Linearni vremenski kontinuirani sustavi* [$A$,$B$,$C$,$D$] prikaz - primjer

- pišemo pomoću matrica

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -d_0 & -d_1 & -d_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ c_0\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}u(t)$$

48

## *Linearni vremenski kontinuirani sustavi* [*A*,*B*,*C*,*D*] prikaz - primjer

- dakle jednadžba stanja i izlazna jednadžba

$$Stanja = Realni^N, Ulazi = Realni^M, Izlazi = Realni^K$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$



## *Usporedba diskretnih i kontinuiranih sustava* [*A*,*B*,*C*,*D*] prikaz - primjer

- usporedimo

$$y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + a_3 y[n-3] = b_0 u[n]$$

$$\dddot{y}(t) + d_2 \ddot{y}(t) + d_1 \dot{y}(t) + d_0 y(t) = c_0 u(t)$$

$$\begin{bmatrix} x_1[n+1] \\ x_2[n+1] \\ x_3[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ x_3[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u[n]$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -d_0 & -d_1 & -d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y[n] = \begin{bmatrix} -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ x_3[n] \end{bmatrix} + [b_0] u[n]$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + [0] u(t)$$

$$x[n+1] = Ax[n] + Bu[n]$$
$$y[n] = Cx[n] + Du[n]$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$



## *Linearni vremenski diskretni sustavi - primjer*

- primjer generiranja jeke (eho efekta) signala koja se može postići realizacijom jednadžbe diferencija

$$y[n] = u[n] + \alpha y[n-N]$$

- neka je

$$N = 4, \quad \alpha = 0.6, \quad u[n] = \begin{cases} 0 & \text{za } n<0 \\ 1 & \text{za } n = 0,1 \\ 0 & \text{za } n > 1 \end{cases}$$

## Linearni vremenski diskretni sustavi primjer

- jednadžba je dakle

$$y[n] = u[n] + 0.6y[n-4]$$

- računamo korak po korak

$n=0 \quad y[0] = u[n] + 0.6y[-4] = 1 + 0,6*0 = 1$

$n=1 \quad y[1] = u[1] + 0.6y[-3] = 1 + 0,6*0 = 1$

$n=2 \quad y[2] = u[2] + 0.6y[-2] = 0 + 0,6*0 = 0$

$n=3 \quad y[3] = u[3] + 0.6y[-1] = 0 + 0,6*0 = 0$

$n=4 \quad y[4] = u[4] + 0.6y[0] = 0 + 0,6*1 = 0.6$

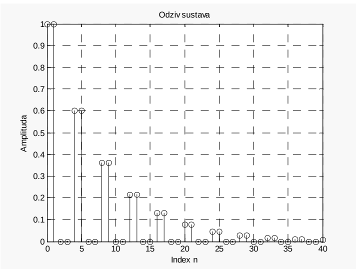
$n=5 \quad y[5] = u[5] + 0.6y[1] = 0 + 0,6*1 = 0.6$

$n=6 \quad y[6] = u[6] + 0.6y[2] = 0 + 0,6*0 = 0$

52

## Linearni vremenski diskretni sustavi primjer

- odziv možemo prikazati slikom




53

## Linearni vremenski diskretni sustavi primjer

- konstruirajmo model s varijablama stanja
- polazna jednadžba je

$$y[n] = u[n] + 0.6y[n-4]$$

- napišimo je u ovom obliku

$$y[n] = 0.6y[n-4] + 0y[n-3] + 0y[n-2] + 0y[n-1] + u[n]$$

- pogodno je izabrati

$$x_1[n] = y[n-4],\ x_2[n] = y[n-3]$$

$$x_3[n] = y[n-2],\ x_4[n] = y[n-1]$$

54

## *Linearni vremenski diskretni sustavi primjer*

- slijedi

$$y[n]=0.6x_1[n]+u[n]$$

$$x_1[n]=y[n-4]\Rightarrow x_1[n+1]=y[n-3]=x_2[n]$$

$$x_2[n]=y[n-3]\Rightarrow x_2[n+1]=y[n-2]=x_3[n]$$

$$x_3[n]=y[n-2]\Rightarrow x_3[n+1]=y[n-1]=x_4[n]$$

$$x_4[n]=y[n-1]\Rightarrow x_4[n+1]=y[n]=0.6x_1[n]+u[n]$$

- iz ovoga slijede jednadžbe stanja i izlazna jednadžba

55

## *Linearni vremenski diskretni sustavi primjer*

- dakle iz

$$\left.\begin{array}{l} x_1[n]=y[n-4]\Rightarrow x_1[n+1]=y[n-3]=x_2[n] \\ x_2[n]=y[n-3]\Rightarrow x_2[n+1]=y[n-2]=x_3[n] \\ x_3[n]=y[n-2]\Rightarrow x_3[n+1]=y[n-1]=x_4[n] \\ x_4[n]=y[n-1]\Rightarrow x_4[n+1]=y[n]=0.6x_1[n]+u[n] \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x_1[n+1]=x_2[n] \\ x_2[n+1]=x_3[n] \\ x_3[n+1]=x_4[n] \\ x_4[n+1]=0.6x_1[n]+u[n] \\ y[n]=0.6x_1[n]+u[n] \end{cases}$$

56

## *Linearni vremenski diskretni sustavi primjer*

- dakle opet su moguća dva prikaza

model s varijablama stanja

$$\begin{bmatrix} x_1[n+1] \\ x_2[n+1] \\ x_3[n+1] \\ x_4[n+1] \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ x_3[n] \\ x_4[n] \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u[n]$$

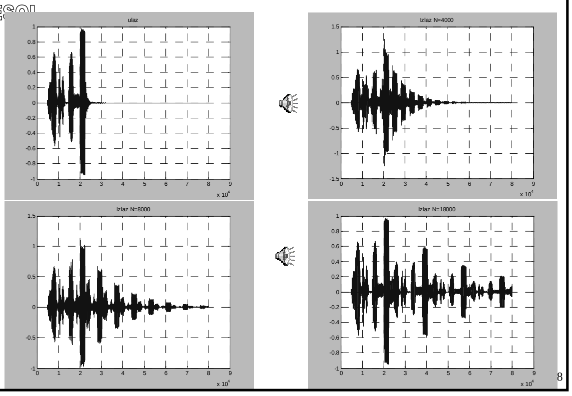
$$y[n]=\begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ x_3[n] \\ x_4[n] \end{bmatrix}+[1]u[n]$$

model ulaz - izlaz

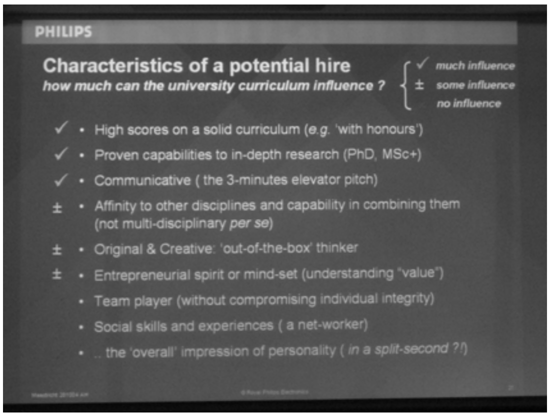
$$y[n]-0.6y[n-4]=u[n]$$

57

jeka govornog signala $y(n) = u(n) + 0.6y(n-N)$




8




59

## *Vremenski diskretni signali*

- vremenski diskretni signali definirani su samo u diskretnim trenucima vremena
- neka je signal *nekiDiskretanSignal* vremenski diskretni signal i možemo ga prikazati

*nekiDiskretanSignal:DiskretnoVrijeme→Realni*

gdje je *DiskretnoVrijeme*=[0,1/11025, .... , 99225/11025] skup diskretnih trenutaka vremena u kojem je definiran signal

60

## *Diskretni signali i otipkavanje* (*uzorkovanje*)

- vremenski kontinuirani signal *Glazba* otipkan frekvencijom otipkavanja 10 kHz (interval otipkavanja T=0.0001 sekundi) definiran je samo u diskretnim trenucima vremena

$$OtipkanaGlazba : \{0, 0.0001, 0.0002, ...., 9.9999, 10\} \to Tlak$$

s pridruživanjem

$$OtipkanaGlazba(t) = Glazba(t)$$
$$\forall t \in \{0, 0.0001, 0.0002, ...., 9.9999, 10\}$$

61

## *Diskretni signali*

- bez obzira na način generiranja vremenski diskretnog signala on je definiran u diskretnim trenucima vremena $t = nT$, dakle $n$-ti uzorak signala pojavljuje se u trenutku $nT$ sekundi u odnosu na vrijeme 0

62

## *Diskretni signali*

- primjer

$$u : Cjelobrojni \to Realni$$
$$\text{gdje } \forall n \in Cjelobrojni, \quad u[n] = \cos(2\pi FnT)$$

ili npr. za $F$ = 2000 Hz i T=1/10000 sekundi

$$u : Cjelobrojni \to Realni$$
$$\text{gdje } \forall n \in Cjelobrojni, \quad u[n] = \cos(0.4\pi n)$$

63

## Vremenski diskretni signali

- vremenski diskretni signali mogu biti prikazani i kao niz brojeva - uzorcima

$$\{u[n]\} = \{....,1.41, 1.78, \underline{2.05}, 2.19, 2.18,.....\}$$

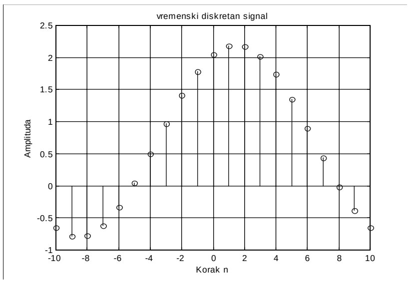
- ovdje su prikazani uzorci

$$u[-2] = 1.41, \quad u[-1] = 1.78,$$
$$u[0] = 2.05,$$
$$u[1] = 2.19, \quad u[2] = 2.18,$$

- podcrtani uzorak označava uzorak za $n = 0$

64

## Grafički prikaz vremenski diskretnog signala




65

## Vremenski diskretni signali

- $x[n]$ označava $n$-ti uzorak niza $\{x[n]\}$ bez obzira na način generiranja diskretnog signala
- $\{x[n]\}$ je realni niz ako je $n$-ti uzorak $x[n]$ realan za svaki $n$
- inače je $\{x[n]\}$ kompleksni niz

66

## *Kompleksni diskretni signal*

- kompleksni niz $\{x[n]\}$ se može napisati kao:

  $\{x[n]\}=\{x_{re}[n]\} + j\{x_{im}[n]\}$

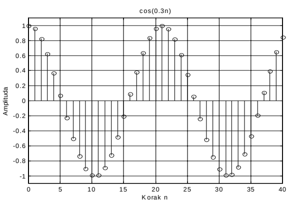
  gdje su $x_{re}[n]$ i $x_{im}[n]$ realni i imaginarni dio od $x[n]$
- konjugirano kompleksni niz je

  $\{x^*[n]\}=\{x_{re}[n]\} - j\{x_{im}[n]\}$
- često se vitičaste zagrade ispuštaju u označavanju niza

67

## *Primjeri diskretnih signala*

- $\{u[n]\}=\{\cos(0.3n)\}$ je realni niz




68

## *Primjeri diskretnih signala*

- $\{z[n]\}=\{e^{j0.3n}\}$ je kompleksan niz
- može se napisati:

  $\{z[n]\}=\{\cos(0.3n)+j\sin(0.3n)\}=$

  $=\{\cos(0.3n)\}+j\{\sin(0.3n)\}$,

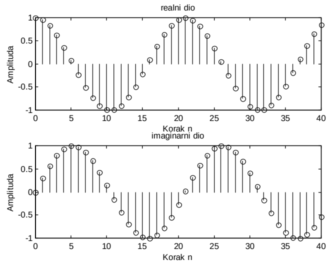
  gdje je $\{z_{re}[n]\}=\{\cos(0.3n)\}$

  $\{z_{im}[n]\}=\{\sin(0.3n)\}$

69

## Primjeri diskretnih signala

- $\{z[n]\}=\{e^{j0.3n}\}=\{\cos(0.3n)\}+j\{\sin(0.3n)\}$




70

## Diskretni signali

- vremenski diskretan signal je konačne duljine (finite length) ako je definiran za konačni vremenski interval

$$N_1 < n < N_2$$

gdje je $-\infty < N_1$ i $N_2 < +\infty$ i $N_1 \leq N_2$

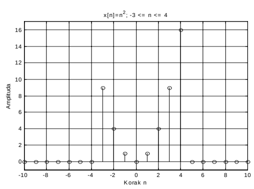
- Duljina ili trajanje niza konačne duljine je:

$$N = N_2 - N_1 + 1$$

71

## Diskretni signali

- niz $\{u[n]\}=\{\cos(0.3n)\}$ je beskonačnog trajanja
- $u[n]=n^2\,;\ -3 \leq n \leq 4$ je niz konačne duljine 4-(-3)+1=8

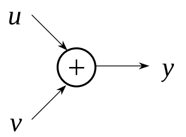



72

## Osnovne operacije na nizovima i elementi diskretnog sustava

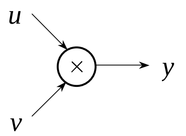
- zbrajanje nizova

  zbroj dva niza $y = u + v$ ili
  $\{y[n]\} = \{u[n]\} + \{v[n]\}$
  je niz s općim članom
  $y[n] = u[n] + v[n]$ za svaki $n \in \mathbf{Z}$.




- produkt nizova

  produkt dva niza $y = uv$ ili
  $\{y[n]\} = \{u[n]\} * \{v[n]\}$
  je niz s općim članom
  $y[n] = u[n]v[n]$ za svaki $n \in \mathbf{Z}$.

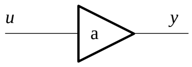



73

## Osnovne operacije na nizovima i elementi diskretnog sustava

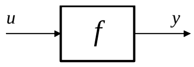
- množenje s konstantom

  $y = a\,u$ ili
  $\{y[n]\} = a\{u[n]\} = \{a\,u[n]\}$
  $y[n] = a\,u[n]$ za svaki $n \in \mathbf{Z}$.




- funkcijski blok

  $y = f\,[u]$ ili
  $\{y[n]\} = f\,[\{u[n]\}]$
  $y[n] = f\,[u[n]]$ za svaki $n \in \mathbf{Z}$.




  reverzija vremena

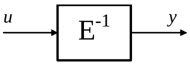
  $y[n]=u[-n]$

74

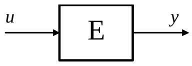
## Osnovne memorijske i predikcijske operacije

- pomak niza – jedinični pomak daje iz ulaznog niza, niz pomaknut za jedan korak.

  unatrag (kašnjenje i pamćenje)




  unaprijed (predikcija)




$y = E^{-1}u$ ili $\{y[n]\} = E^{-1}\{u[n]\}$,

$y[n] = (E^{-1}u)[n]$,

$y[n] = u[n - 1]$ $n > 0$.

$y = E\,u$ ili $\{y[n]\} = E\,\{u[n]\}$,

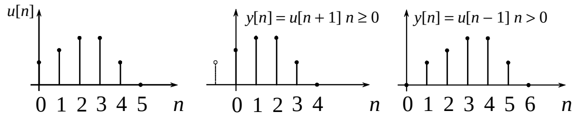
$y[n] = (Eu)[n]$,

$y[n] = u[n + 1]$ $n \geq 0$.

75

## *Pomak niza*

- operacija pomaka niza unaprijed traži nekauzalan sustav pa je neostvariva u realnim sustavima.
- zato se služimo redovito jedinicama za kašnjenje, odnosno operacijom $E^{-1}$.






## *Pomak niza*

- u literaturi je uobičajeno označavati blok za jedinično kašnjenje sa $z^{-1}$ umjesto s $E^{-1}$
- kašnjenje za $N$ koraka je operacija

$$y[n]=u[n-N]$$



## *Primjer osnovnih operacija*

- zadana su dva niza duljine 5 zadana za $0 \leq n \leq 4$

$\{a[n]\}=\{5\ 6\ -2\ 0\ -1\}$

$\{b[n]\}=\{4\ -2\ -2\ 4\ 1\}$

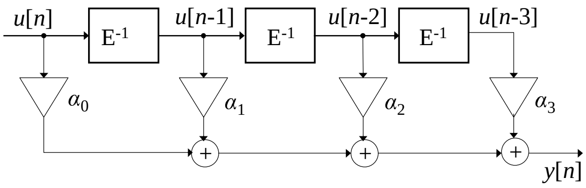
- generiranje novih nizova primjenom osnovnih operacija

$\{c[n]\}=\{a[n]*b[n]\}=\{20\ -12\ 4\ 0\ -1\}$

$\{d[n]\}=\{a[n]+b[n]\}=\{9\ 4\ -4\ 4\ 0\}$

$\{e[n]\}=0.5*\{a[n]\}=\{2.5\ 3\ -1\ 0\ -0.5\}$

## *Primjer prikaza sustava uz pomoć osnovnih operacija*




$$y[n] = \alpha_0 u[n] + \alpha_1 u[n-1] + \alpha_2 u[n-2] + \alpha_3 u[n-3]$$

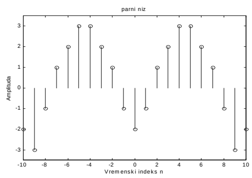
79

## Klasifikacija nizova prema simetričnosti

- konjugirano simetrični niz

$$u[n]=u^*[-n]$$

za realni $u[n]$ radi se o parnom nizu



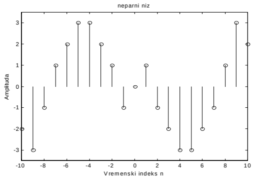

80

## Klasifikacija nizova prema simetričnosti

- konjugirano antisimetrični niz

$$u[n]= -u^*[-n]$$

za realni $u[n]$ radi se o neparnom nizu




81

## Klasifikacija nizova prema simetričnosti

- svaki kompleksan niz može biti prikazan kao zbroj njegovog konjugiranog simetričnog i konjugiranog antisimetričnog dijela

$$u[n]=u_{cs}[n]+u_{ca}[n]$$

gdje su

$$u_{cs}[n]=0.5(u[n]+u^{*}[-n])$$
$$u_{ca}[n]=0.5(u[n]-u^{*}[-n])$$

82

## Klasifikacija nizova prema simetričnosti

- svaki pak realan niz može biti prikazan kao zbroj njegovog parnog i neparnog dijela

$$u[n]=u_{p}[n]+u_{n}[n]$$

gdje su

$$u_{p}[n]=0.5(u[n]+u[-n])$$
$$u_{n}[n]=0.5(u[n]-u[-n])$$

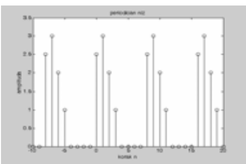
83

## Periodični nizovi

- za periodičan niz vrijedi

$$\tilde{u}[n]=\tilde{u}[n+kN]$$

$N$ je period ponavljanja, $k \in Z$ najmanji $N$ koji zadovoljava $\tilde{u}[n]=\tilde{u}[n+kN]$ je osnovni period

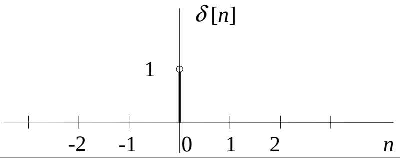


84

## Osnovni nizovi

- jedinični niz (niz s jediničnim članom ili uzorkom, Kroneckerov delta, δ – niz).
- δ = ..., 0, 0, <u>1</u>, 0, 0, ...

$$\forall n \in Cjelobrojni, \quad \delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{za} \quad n = 0 \\ 0 & \text{za} \quad n \neq 0 \end{cases}$$

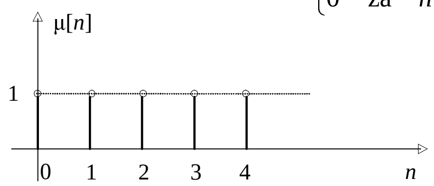



85

## Osnovni nizovi

- jedinična stepenica, jedinični skok
- $\mu$ = ..., 0, 0, <u>1</u>, 1, 1, ...

$$\forall n \in Cjelobrojni, \quad \mu[n] = \begin{cases} 1 & \text{za} \quad n \geq 0 \\ 0 & \text{za} \quad n < 0 \end{cases}$$

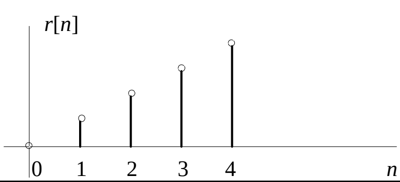



86

## Osnovni nizovi

- jedinična rampa
- $r$ = ..., 0, <u>0</u>, 1, 2, 3, 4, ...

$$\forall n \in Cjelobrojni, \quad r[n] = \begin{cases} n & \text{za} \quad n \geq 0 \\ 0 & \text{za} \quad n < 0 \end{cases}$$



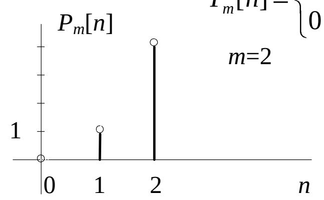

87

## Osnovni nizovi

- jedinična parabola *m*–tog stupnja
  $P_m = ..., 0, \underline{0}, 1^m, 2^m, 3^m, ...$

$$P_m[n] = \begin{cases} n^m & \text{za} \quad n \geq 0, n \in \mathbf{Z} \\ 0 & \text{za} \quad n < 0 \end{cases}$$

$m$=2




88

## Osnovni nizovi

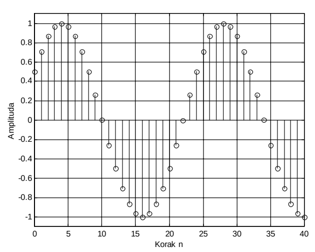
- realni sinusni (kosinusni) niz:
  $\forall n \in Cjelobrojni, \quad x[n] = X\cos(\omega_0 n + \varphi)$
  gdje je $X$ amplituda, $\omega_0$ [radijana/uzorku] kutna frekvencija a φ [radijana] faza od $x[n]$
- koristi se i varijabla $f_0$ [perioda/uzorku] definirana kao:

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

89

## Osnovni nizovi

- grafički prikaz: $\cos\left(\frac{\pi}{12} n - \frac{\pi}{3}\right)$




$$\omega_0 = \frac{\pi}{12}$$

$$f_0 = \frac{1}{24}$$

90

# Osnovni nizovi

- kompleksna eksponencijala

  $\forall n \in Cjelobrojni, \quad x[n] = A\alpha^n$

  gdje su A i α realni i kompleksni brojevi

- ako označimo: $\alpha = e^{(\sigma_0 + j\omega_0)}, \; A = |A| e^{j\varphi}$

  tada možemo pisati

$$x[n] = |A| e^{j\varphi} e^{(\sigma_0 + j\omega_0)\, n} = x_{re}[n] + j x_{im}[n]$$

gdje je

$$x_{re}[n] = |A| e^{\sigma_0 n} \cos(\omega_0 n + \varphi)$$

$$x_{im}[n] = |A| e^{\sigma_0 n} \sin(\omega_0 n + \varphi)$$



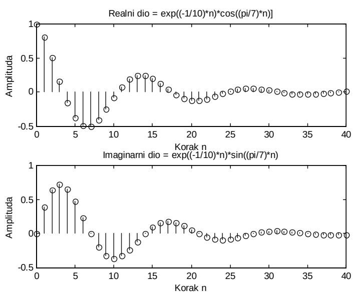
# Kompleksni eksponencijalni niz

- suglasno prethodnim izrazima za $x_{re}[n]$ i $x_{im}[n]$ kompleksne eksponencijale su sinusiodalni nizovi čija se amplituda prigušuje ($\sigma_0$<0), raspiruje ($\sigma_0$>0) ili je konstantna ($\sigma_0$=0).
- primjer kompleksne eksponencijale

$$x[n] = e^{\left(-\frac{1}{10} + j\frac{\pi}{7}\right)n}$$



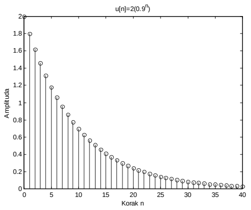
# Primjer kompleksnog eksponencijalnog niza

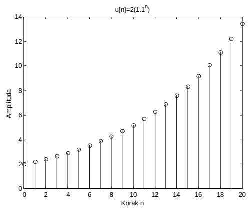


## Realni eksponencijalni niz

- primjer realnog eksponencijalnog niza:

$$\forall n \in Cjelobrojni_{+}, \quad u[n] = U\alpha^{n}$$




94

## Periodičnost kosinusnog niza

- niz $u[n] = \cos(\omega_0 n + \varphi)$ je periodičan ako vrijedi $u[n] = \cos(\omega_0 n + \varphi) = \cos(\omega_0 (n+N) + \varphi)$ pa slijedi:

$$\cos(\omega_0 (n+N) + \varphi) =$$
$$= \cos(\omega_0 n + \varphi)\cos(\omega_0 N) - \sin(\omega_0 n + \varphi)\sin(\omega_0 N)$$

a ovo će biti jednako $\cos(\omega_0 n + \varphi)$ za $\sin(\omega_0 N) = 0$ i $\cos(\omega_0 N) = 1$ a to je za:

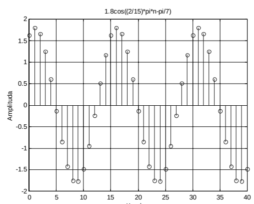
$$\omega_0 N = 2\pi k \quad \text{ili} \quad \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{N}{k} \quad ili \quad f_0 = \frac{k}{N}$$

95

## Periodičnost sinusnog niza:primjer

- za niz $u[n] = 1.8\cos(\frac{2\pi}{15} n - \frac{\pi}{7})$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{15} \Rightarrow N = \frac{2\pi k}{\frac{2}{15}\pi} = 15 \;\text{ za }\; k = 1$$

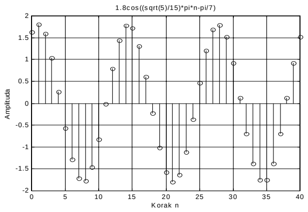



96

## *Periodičnost sinusnog niza:primjer*

- ako $2\pi/\omega_0 = N/k$ za cjelobrojne $k$ i $N$ tada će period biti višekratnik od $2\pi/\omega_0$
- inače je niz aperiodičan, primjer:

$$u[n] = 1.8\cos\left(\frac{5\pi}{15}n - \frac{\pi}{7}\right)$$




97

## *Svojstva sinusnog niza*

za $\omega = \pi + \Delta$ izlazi

$$x(n) = \cos(\pi + \Delta)n = \cos(-2\pi + \pi + \Delta)n$$
$$= \cos(-\pi + \Delta)n = \cos(\pi - \Delta)n$$

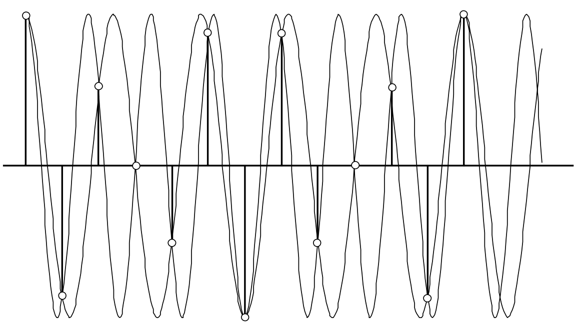
za ovaj niz se ne može razlikovati da li je kutna frekvencija niza

$\omega_1 = \pi + \Delta$ ili $\omega_2 = \pi - \Delta$

98

$x(n) = \cos(\omega n),\quad n \in \mathrm{Z}$

$\omega = \omega_1 = 7\pi/6 \qquad \omega = \omega_2 = 5\pi/6$



99

## *Svojstva sinusnog niza*

- za $\omega = 2\pi - \Delta$ izlazi

  $x(n) = \cos(2\pi - \Delta)n = \cos(-\Delta)n = \cos(\Delta n)$

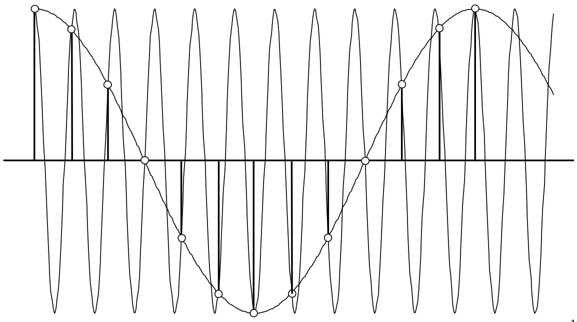
- za zadani niz se ne može razlikovati je li kutna frekvencija

  $\omega_1 = 2\pi - \Delta$ ili $\omega_2 = \Delta$

100

$x(n) = \cos(\omega n), \quad n \in \mathbb{Z}$

$\omega = \omega_1 = \pi / 6 \qquad \omega = \omega_2 = 11\pi / 6$



101

## *Svojstva sinusnog niza*

iz prethodnog slijedi da su sve sinusoide frekvencije $\omega_k = \omega_0 + 2k\pi \qquad -\pi < \omega_0 < \pi$ identične (i ne možemo ih razlikovati) jer vrijedi

$$\cos((\omega_0 + 2k\pi)n + \varphi) = \cos((\omega_0 n + \varphi) + 2k\pi n) =$$
$$= \cos(\omega_0 n + \varphi)$$

zato su sve $\cos((\omega_0 + 2k\pi)n + \varphi)$ ”alias” kosinusoide $\cos(\omega_0 n + \varphi)$

102

## *Svojstva sinusnog niza*

sve diskretne sinusoide s frekvencijom

$$|\omega| \leq \pi \quad \text{ili} \quad |f| \leq \frac{1}{2}$$

su jednoznačno definirane