S v e u č i l i š t e u Z a g r e b u
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za elektroničke sustave i obradbu informacija

Prof. dr.sc. Hrvoje Babić

SIGNALI I SUSTAVI

Zagreb, 1996.

SADRŽAJ

1. UVOD U SIGNALE I SUSTAVE

Često se služimo pojmom sustava. Pojam je veoma općenit i teško ga je precizno definirati. Za većinu potreba može se prihvatiti da je sustav cjelina sastavljena od međusobno vezanih objekata gdje svojstva objekata i njihova interakcija određuju vladanje i svojstva cjeline.

Različite sustave možemo identificirati u prirodnim i ljudskim tvorevinama. Odrediti, podesiti vladanje nekog sustava ili realizirati sustav željenih svojstava ključni je problem u velikom broju djelatnosti, posebice različitih grana tehnike. Vezano s time postoji potreba da se sustavi studiraju, a njihova svojstva kvantitativno obuhvate. Ovo posljednje uvijek vodi na matematičke postupke. Štoviše, kvantitativna analiza sustava u različitim znanstvenim disciplinama i granama tehnike, vodi redovito na iste matematičke postupke. Skup tih postupaka naziva se danas teorijom sustava. Ta teorija kao i matematika, primjenjiva je u nizu disciplina. Matematički postupci traže raščišćavanje i preciziranje pojmova, uvođenje apstraktnih koncepcija, te predstavljanje realnog sustava matematičkim formalizmom.

Pogodan matematički opis nekog realnog sustava naziva se matematičkim modelom tog sustava ili apstraktni sustav.

U jednom realnom sustavu možemo identificirati neke atribute, karakteristike ili (mjerljive) veličine koje su relevantne za vladanje tog sustava (npr. napon, struja, brzina). Te veličine se mogu izraziti kvantitativno brojem odgovarajućih jedinica.

Vladanje sustava ili procesi u sustavu impliciraju mijenjanje relevantnih veličina redovito u zavisnosti od vremena i prostora. Shvaćajući te veličine kao varijable sustava, te varijable su funkcije nekih nezavisnih varijabli, koje se mogu interpretirati kao prostorne koordinate i/ili vrijeme. Sustavi s više varijabli se nazivaju višedimenzionalnim. U ovom predmetu će se analizirati sustavi s jednom nezavisnom varijablom t i konačnim brojem zavisnih varijabli (npr. ubrzanje, pritisak, tok, naboj, gustoća, temperatura, itd.). Varijablu t interpretiramo kao vrijeme tako da će varijable sustava biti funkcije vremena.

Ako želimo znati, na primjer, što se događa u električkom titrajnom krugu, relevantne veličine su napon na kondenzatoru i struja kroz svitak. Njih možemo pratiti u vremenu.

Pri identifikaciji varijabli možemo ponajprije razlikovati one tzv. *ulazne* koje utječu na vladanje sustava i one tzv. *izlazne* kojima sustav utječe na vanjski svijet ili okoliš. U pobuđenom titrajnom krugu to može biti napon izvora ulazna, a napon kondenzatora izlazna varijabla. Djelovanje sustava "u okolišu" sadržano je u načinu kako ulazne veličine određuju izlazne, pa sustav možemo definirati kao relaciju između ulaznih i izlaznih varijabli. Najprije ćemo diskutirati označavanje i definiranje varijabli sustava kao funkcija nezavisne varijable vremena, a kasnije ćemo o definiciji objekata i konačno o spajanju objekata u sustav.

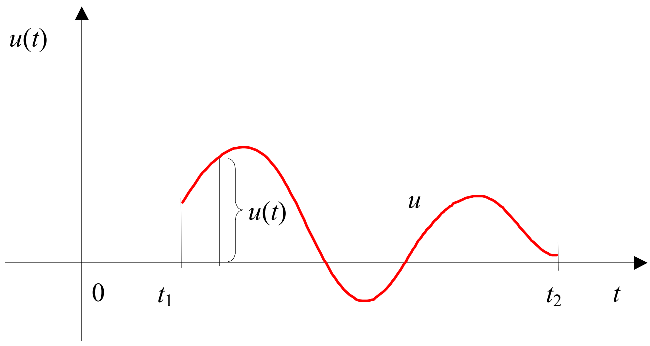
1.1 Vremenske funkcije - signali

Varijable sustava kao vremenske funkcije često se u inženjerskoj literaturi nazivaju signalima. Signalom se općenito smatra fenomen koji nosi neku informaciju. U sustavu relevantne varijable nose informaciju o procesima u sustavu. Varijable u fizikalnom sustavu su fizikalne veličine kao što su napon, struja, pritisak, ubrzanje, itd.

Vremensku funkciju ili signal označavamo malim slovima u, v, x, y. S $u(t)$ označavamo trenutnu vrijednost funkcije u u trenutku t. Smatra se, ako nije posebno označeno, da se t proteže preko svih realnih vrijednosti, odnosno preko cijele vremenske osi $t\in\mathbb{R}$ (t pripada skupu realnih brojeva). Ako su vrijednosti t ograničene na podskup $\mathbf{T}\subset\mathbb{R}$ vremenske osi, tada možemo pisati $t\in\mathbf{T}$, (t pripada skupu $\mathbf{T}$). Domena signala je dakle podskup ili skup realnih brojeva. Kodomena signala je skup $\mathbf{U}$, koji zovemo područje amplituda ili trenutnih vrijednosti signala $\mathcal{R}\{u(t)\} = \mathbf{U}$, $u(\mathrm{t})\in\mathbf{U}$. Signal u je definiran kao funkcija $u{:}\mathbf{T}\rightarrow\mathbf{U}$, dakle kao skup parova vrijednosti

$$u = \{(t, u(\mathrm{t})) | t \in \mathbf{T}\}. \tag{1.1}$$

Ako vremensku funkciju predočimo grafički kao krivulju iznad vremenske osi onda je signal u cijeli graf koji se proteže preko $\mathbf{T} = (t_1, t_2)$.



Sl. 1.1

Signal je skup parova $\{(t, u(t)\}$ za sve vrijednosti t koji pripadaju skupu $\mathbf{T}$ ili za sve t u $\mathbf{T}$.

Skup svih signala s osi $\mathbf{T}$ i područjem amplituda $\mathbf{U}$ može se označiti s $\mathcal{U}$.

$$\mathcal{U} = \{u\text{: } \mathbf{T}\rightarrow\mathbf{U}\}. \tag{1.2}$$

U tom slučaju u se može smatrati varijablom čije područje čini klasu ili skup vremenskih funkcija kojem u pripada, $u\in\mathcal{U}$.

Moramo razlikovati područje od $u(t)$ tj. $\mathcal{R}\,[u(t)]$ od područja u tj. $\mathcal{R}\,[u]$. Prvi je skup brojeva, dok je drugi skup vremenskih funkcija, pa se različito i označavaju.

$$\mathcal{R}\,[u(t)] = \mathbf{U} \quad \text{i} \quad \mathcal{R}\,[u] = \mathcal{U}.$$

Pretpostavimo da je $t\in(t_1, t_2)$ i da $|u(t)|<1 \ \ \forall t\in(\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2)$ znači ograničenje trenutnih vrijednosti.

S druge strane pretpostavka da u tom intervalu vrijedi $\int_{t_1}^{t_2} |u(t)| dt < 2$ postavlja ograničenje na funkciju *u*.

U prvom slučaju $\mathcal{R}\ [u(t)] = \mathbf{U} \subset \mathbb{R}$, dok je $\mathcal{R}\ [u] = \mathcal{U}$. skup svih funkcija koje zadovoljavaju prvo i drugo ograničenje.

Cijela funkcija označava se s u, $u(\cdot)$ ili $\{u(t)\}$, dok je $u(t)$ njena vrijednost u trenutku t.

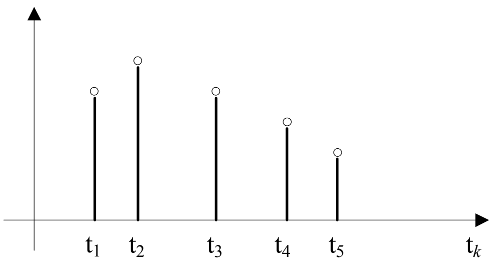
Da bi se označio segment ili odsječak funkcije u intervalu (t_0, t_1) često se upotrebljava oznaka $u_{(t_0,t_1)}$.

$$u_{(t_0,t_1)} = \{(t, u(t)) | t \in (t_0, t_1)\}. \tag{1.3}$$

Interval (t_0, t_1) se naziva intervalom promatranja. On može biti otvoren (t_0, t_1), zatvoren $[t_0, t_1]$ i poluotvoren $(t_0, t_1]$, $[t_0, t_1)$. Na primjer, zadajmo vremenski signal s osi $\mathbf{T} = [0,\infty)$ i područjem $\mathbf{U} \in \mathbb{R}$, gdje broj iz $\mathbf{T}$ interpretiramo kao broj sekundi, a broj iz $\mathbf{U}$ kao broj jedinica trenutnih vrijednosti signala (Volti, Newtona, metara u sekundi).

U gornjem primjeru os signala $\mathbf{T}$ može je iz neprebrojivog skupa $\mathbb{R}$, pa je os signala neprekinuta ili kontinuirana. Signali s takvom vremenskom osi se nazivaju vremenski neprekinuti ili *vremenski kontinuirani signali*.

Kada je os signala $\mathbf{T}$ iz prebrojivog skupa trenutaka $\{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_k\}$, kažemo da je os signala diskretna. Vremenski signal čija je os $\mathbf{T}$ prebrojiv skup vremenskih trenutaka $\mathbf{T} = \{t_0, t_1, \ldots\}$ naziva se *vremenski diskretan signal*.



Sl. 1.2

Vremenski trenuci t_k se mogu poredati u rastući niz $t_0<t_1<t_2<\ldots$. Uveli smo indeksaciju elemenata skupa $\mathbf{T}$, $t_k \in \mathbf{T}$, što znači da smo vremenske trenutke pridružili skupu cijelih brojeva $\mathbb{Z}$. Niz vremenskih trenutaka možemo dakle predstaviti funkcijom $t: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, gdje je t_k ili $t(k)$ vrijednost (niza) t na cijelom broju $k \in \mathbb{Z}$, koji se zove indeks ili korak niza.

$$t = \{(k, t_k) | k \in \mathbf{K}\}; \qquad k, \mathbf{K} \in \mathbb{Z}$$

Nizovi se označavaju s $\ldots, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \ldots$, ili s $\{t(k)\}$, $k \in \mathbb{Z}$, ili $\{t_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$, gdje su t_k trenutci za koje je signal definiran. Niz trenutaka $\{t_k | k \in \mathbf{K}\}$ je funkcija $t: \mathbb{Z} \to \mathbf{T}$ indeksa k što nam omogućuje da trenutke ne pratimo preko njihove stvarne veličine (broja sekundi) nego preko njihovog rednog broja ili koraka k, ako je funkcija, odnosno njena tablica poznata.

Budući da vrijeme neprestano raste niz $\{t_k\}$ se uzima kao strogo rastući, tj. onaj za koji vrijedi:

$$k > \vartheta \to t_k > t_\vartheta$$

Najjednostavniji i ujedno u primjenama najvažniji je aritmetički niz.

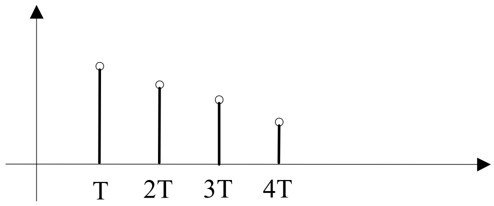
$$t = \{t_0, t_0 + T, t_0 + 2T, \ldots\} \text{ ili} \tag{1.3a}$$

$$t = \{0, T, 2T, \ldots\} = \mathbb{Z}_+(T),$$

gdje je T konstanta (kvant vremena) pa vrijedi:

$$t_k = Tk \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Diskretizacija vremena je ovdje jednolika.



Sl. 1.3

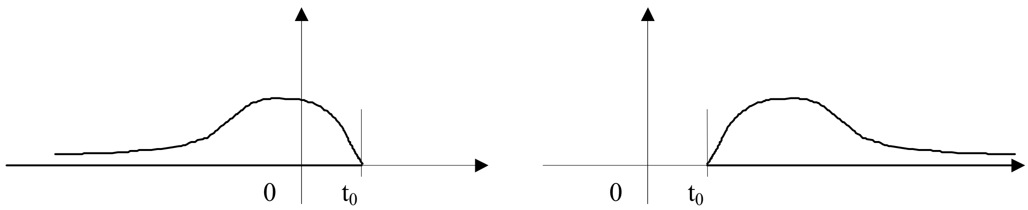
Ako je vremenska os signala kontinuiranog i diskretnog sadržana u konačnom intervalu, govorimo o konačnoj vremenskoj osi.

$$\mathbf{T} = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R} \text{ ili } \mathbf{K} = [k_0, k_1] \subset \mathbb{Z}.$$

Polubeskonačna vremenska os, omeđena slijeva:

$$\mathbf{T} = [t_0, \infty] \subset \mathbb{R} \text{ ili } \mathbf{K} = [k_0, \infty] \subset \mathbb{Z}$$

se naziva "desna" polubeskonačna vremenska os i obratno.



Sl. 1.4

Beskonačna vremenska os nije omeđena

$$\mathbf{T} = (-\infty, \infty) = \mathbb{R} \text{ ili } \mathbf{K} = (-\infty, \infty) = \mathbb{Z}.$$

Kad je područje amplituda signala $\mathbf{U} \subseteq \mathbb{R}$ neprebrojiv podskup skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$, tada je područje amplituda signala neprekinuto ili kontinuirano. Signali s takvim područjem nazivaju se nekvantiziranim ili analognim.

Kad je područje amplituda signala iz prebrojivog skupa $\mathbf{U} = \{u_1, u_2, \ldots, u_N\}$ kažemo da je područje signala diskretno. To je prebrojiv skup mogućih amplituda ili trenutnih vrijednosti signala.

$$\mathbf{U} = \{\ldots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \ldots\}.$$

Indeksacijom elemenata $u_n \in \mathbf{U}$ skupa $\mathbf{U}$ mi smo amplitude signala pridružili skupu cijelih brojeva $\mathbb{Z}$. Niz amplitudnih nivoa možemo dakle predstaviti funkcijom

$$u : \mathbb{Z} \to \mathbf{U}$$

gdje je u_n moguća vrijednost amplitude označena cijelim brojem $n \in \mathbb{Z}$, koji se zove indeks ili korak amplitude. Niz mogućih amplituda je funkcija indeksa

$$u = \{u_n | n \in \mathbf{N}\}, \qquad \mathbf{N} \subseteq \mathbb{Z} \tag{1.3b}$$

te omogućuje da amplitude više ne pratimo preko njihove stvarne veličine u_n nego preko rednog broja nivoa n, naravno, ako znamo vezu između amplitudnog nivoa i njegovog rednog broja n.

Zbog jednoznačne i jednostavne veze između amplitudnih nivoa i broja (indeksa) n upotrebljava se strogo rastući niz u za koji vrijedi

$$n > v \rightarrow u_n > u_v .$$

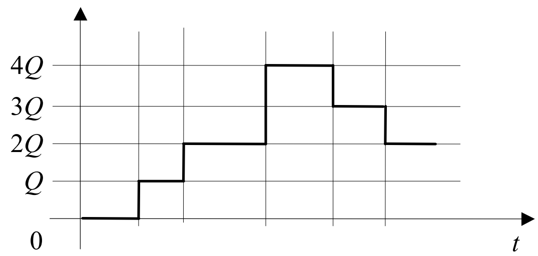
Najjednostavniji i ujedno u primjenama najvažniji niz je aritmetički niz

$$\mathrm{u} = \{\ldots, -2\mathrm{Q} + \mathrm{a}_0, -\mathrm{Q} + \mathrm{a}_0, \mathrm{a}_0, \mathrm{Q} + \mathrm{a}_0, \ldots\}, \text{ ili}$$

$$u = \{\ldots, -2\mathrm{Q}, -\mathrm{Q}, 0, \mathrm{Q}, \ldots\}, \tag{1.4}$$

gdje je Q konstanta (kvant amplitude) ili kvantizacijski interval, pa vrijedi

$$u_n = \mathrm{Q}n \quad \mathrm{n} \in \mathbb{Z} . \tag{1.5}$$



Sl. 1.5

Signal s diskretnim amplitudama ili trenutnim vrijednostima naziva se kvantiziranim. Broj n označava amplitudu, pa se kvantizirani signal može predstaviti funkcijom u:$\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{N}$, tj.

$$u = \{(t,\ n(t)) | \ t \in \mathbf{T}_c, n \in \mathbf{N}\},$$

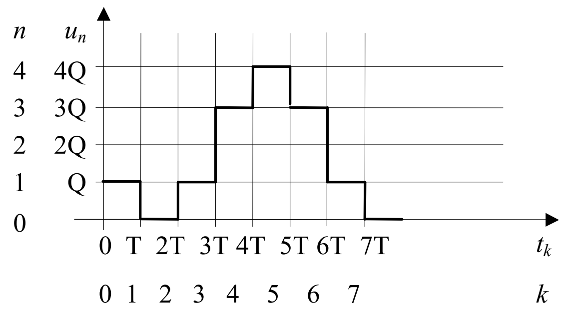
gdje je $\mathbf{T}_c \in \mathbb{R}$ kontinuirana vremenska os. Signal u nekim diskretnim trenucima t_k skače na neku od mogučih vrijednosti u_n, pa je bolje napisati

$$u = \{(\mathrm{t}_\mathrm{k}^+,\ n(\mathrm{t}_\mathrm{k}^+)) | \ t \in \mathbf{T}_c\}.$$

Važan slučaj je kad su trenuci t_k aritmetički niz

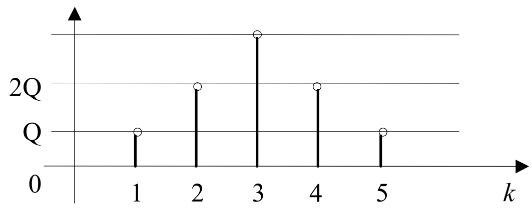
$$u = \{(k,\ n(k)) | \ k \in \mathbf{K}, n \in \mathbf{N}\}.$$

Signal je kao na slici Sl. 1.6.



Sl. 1.6

Njemu je sličan vremenski diskretan signal na sljedećoj slici . Ovdje imamo slučaj vremenski diskretnog signala koji je kvantiziran.



Sl. 1.7

Iz poznavanja Q-a iz (1.4) koji je dan npr. brojem volta i T-a iz (1.3a) koji je dan brojem sekundi, možemo znati kakav je vremenski diskretni i amplitudno kvantizirani signal predstavljen nizom

$$u = \{n(k)\},\ k \in \mathbf{K} \subseteq \mathbb{Z}\ , n \in \mathbf{N} \subseteq \mathbb{Z}$$

Npr.

$u = \{\ldots 7,\ 2, -1,\ 0,\ 3, -2, \ldots\}$, uz $\mathrm{Q} = 0{,}0375\mathrm{V}$ i $\mathrm{T} = 0{,}17\mu\mathrm{s}$, trenutna vrijednost kvantiziranog signala u trenutki kT iznosi $n(k)\cdot\mathrm{Q}$. Pokazani vremenski diskretni i amplitudno diskretizirani signal služi kao mode kojim možemo pratiti procese u digitalnim sklopovima. Daljnji primjer je financijsko poslovanje gdje se računanja s brojevima novčanih jedinica provode na kraju nekog vremenskog intervala (dnevno, kvartalno...).

1.2 Operacije na signalu

Promjene na signalu se događaju kad signal prolazi kroz medij ili sustav. Realizacijom pogodnog sustava mogu se transformacije i modifikacije signala načiniti takvim da budu pogodne za izdvajanje određenih informacija koje signal nosi, ili prilagoditi signal prijenosu kroz određeni medij da bi se informacija mogla prenijeti na daljinu.

Važne operacije na jednom signalu mogu se svrstati u modificiranje vremenske i modificiranje amplitudne osi signala. Da se osigura jednoznačnost, pri modificiranju osi u oba smjera, tj. od stare u novu os i obratno, modifikaciju treba provesti funkcijama koje imaju inverziju. To će biti monotono rastuće ili padajuće funkcije.

1.2.1 Transformacija vremenske osi signala

Funkcija $\tau:\mathbf{T}_s\rightarrow\mathbf{T}_n$ preslikava staru os $\mathbf{T}_s$ u novu $\mathbf{T}_n$. Trenutak t slijedi iz $t_n = \tau(t_s)$ i trenutna vrijednost novog signala je

$$u_n(t) = u_s(\tau^{-1}(t)), t \in \mathbf{T}_n \, . \tag{1.6}$$

Nova funkcija je kompozicija

$$u_n = u_s \circ \tau^{-1} \, .$$

Primjer linearne transformacije vremenske osi:

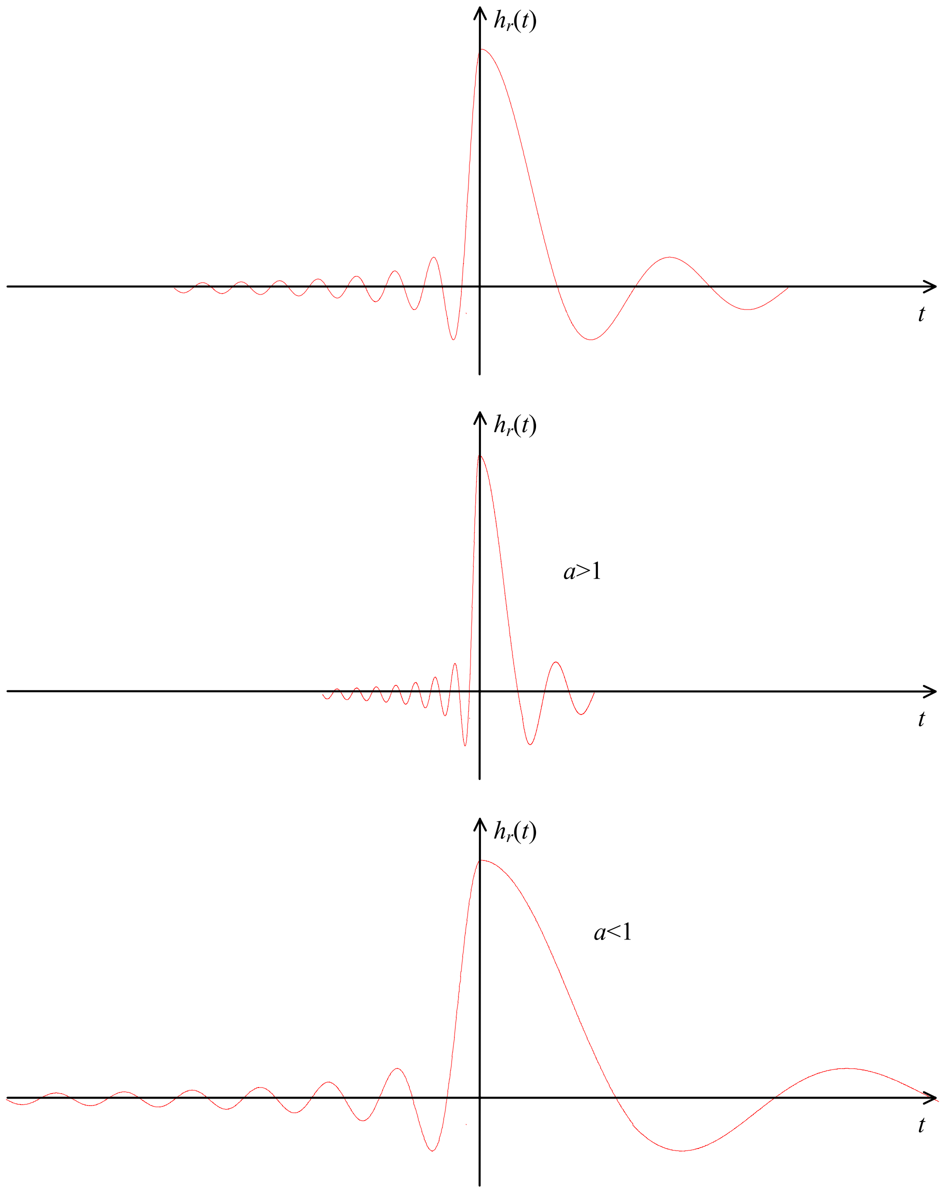
$$\tau(t) = t/a \, , \; t \in \mathbf{T}_s \, ,$$

$$\tau^{-1}(t) = at \, , \; t \in \mathbf{T}_n \, ,$$

$$u_n(t_n) = u_s(at_n), t \in \mathbf{T}_n \, .$$

Imamo primjer *linearne kompresije ili stezanja* $|a|>1$ i *ekspanzije ili rastezanja* $|a|<1$ signala u vremenu. Pri tom može doći i do vremenske inverzije ukoliko je $a < 0$. Općenito, ako je funkcija τ monotono padajuća doći će do vremenske inverzije.

U općem slučaju kad je τ nelinearna funkcija, imamo nelinearnu kompresiju ili ekspanziju vremenske osi ili skale.



Sl. 1.8

Jednostavan, ali važan slučaj je i vremenska translacija signala, gdje je

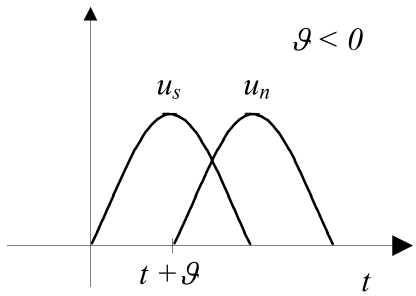
$$\tau(t) = t - \vartheta,\ t \in \mathbf{T}_s, \tag{1.7}$$

$$\text{ili } \tau^{-1}(t) = t + \vartheta,\ t \in \mathbf{T}_n.$$

Veličina ϑ je konstanta $\vartheta \in \mathbb{R}$.

Signal

$$u_n(t_n) = u_s(t + \vartheta), t \in \mathbf{T}_n, \tag{1.8}$$



Sl. 1.9

je vremenski pomaknut, pa rani ili kasni za konstantu zavisno da li je ϑ>0 ili ϑ<0.

U općem slučaju i to kašnjenje ili ranjenje može, također, biti funkcija vremena. To je slučaj vremenske modulacije signala.

1.2.2 Transformacija područja signala

Neka je **T** os signala. Područje izvornog (starog) signala je $\mathbf{U}_s$. u_s:$\mathbf{T}\rightarrow\mathbf{U}_s$ se može preslikati u novo područje $\mathbf{U}_n$ funkcijom φ:$\mathbf{U}_s\rightarrow\mathbf{U}_n$. Transformacija područja izvornog signala preko funkcije φ rezultira u novom signalu u_n koji je definiran s

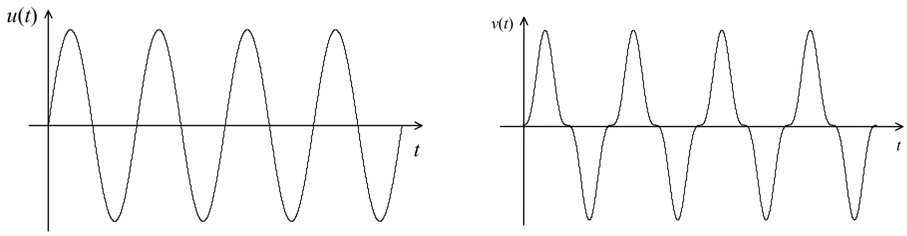
$$u_n(t) = \varphi(u_s(t)), \qquad t \in \mathbf{T}. \tag{1.9}$$

Vrijednost $u_n(t)$ je pridružena vrijednosti $u_s(t)$ u istom trenutku t. Transformacija područja je funkcija od funkcije odnosno kompozicija

$$u_n = \varphi \circ u_s. \tag{1.10}$$

Pritom funkcija φ treba imati inverziju, ako želimo imati mogućnost da iz novog signala ponovno jednoznačno odredimo stari signal, npr.

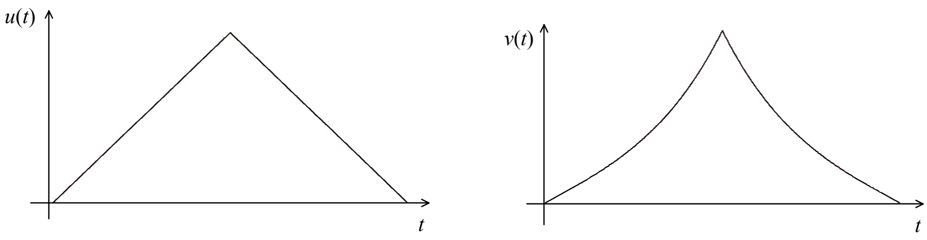
$$v(t) = \left[u(t)\right]^3, \qquad u(t) = \sqrt[3]{v(t)}$$



Sl. 1.10

ili

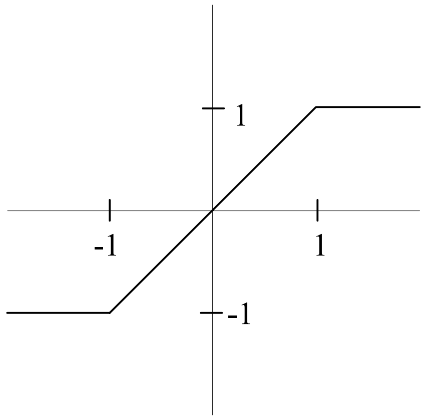
$$v(t) = \mathrm{sh}\left[u(t)\right], \quad u(t) = \mathrm{Arsh}\left[v(t)\right].$$



Sl. 1.11

"Ograničavajuća" funkcija φ je definirana s

$$\varphi(u)=\begin{cases}1 & u\geq 1\\ u & |u|<1\\ -1 & u\leq 1\end{cases}$$



Sl. 1.12

Ima inverziju samo dok je $|u|<1$. $\varphi\rightarrow u$. Sve vrijednosti za $u>1$ se preslikavaju u točku $\varphi=1$, a $u<1$ u točku $\varphi=-1$.

U sva tri primjera imali smo nelinearnu transformaciju područja signala. Primjer linearne transformacije područja je: $v(t)=a\ u(t)$. To je slučaj množenja signala s konstantom. Za $|a|>1$ signal je (linearno) pojačan ili $|a|<1$ oslabljen. Za slučaj da je $a<0$ kažemo da je signal invertiran.

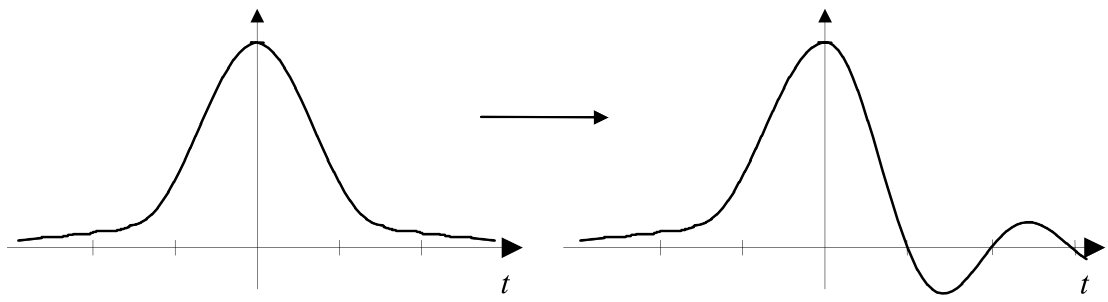
1.3 Preslikavanje signala

U složenije operacije na signalu spada preslikavanje signala. Preslikavanje može biti trenutno kada ide preko neke obične funkcije *f*, koja trenutnoj vrijednosti signala $u(t)$ jednoznačno pridružuje vrijednost rezultirajućeg signala $v(t)$ u trenutku *t*, kako smo to pokazali kod transformacije područja signala (broju se pridružuje broj).

$$v(t)=f(u(t)),\quad v=f(u(t)),\quad u\in\mathcal{U},v\in\mathcal{V}\tag{1.11}$$

Još složenije preslikavanje signala je kad neka funkcija ili operator signalu pridružuje signal, odnosno kad se funkcija u cjelini ili segmentu preslikava u funkciju.

$$v=\overline{F}(u),\qquad u\in\mathcal{U},\ v\in\mathcal{V}\tag{1.12}$$

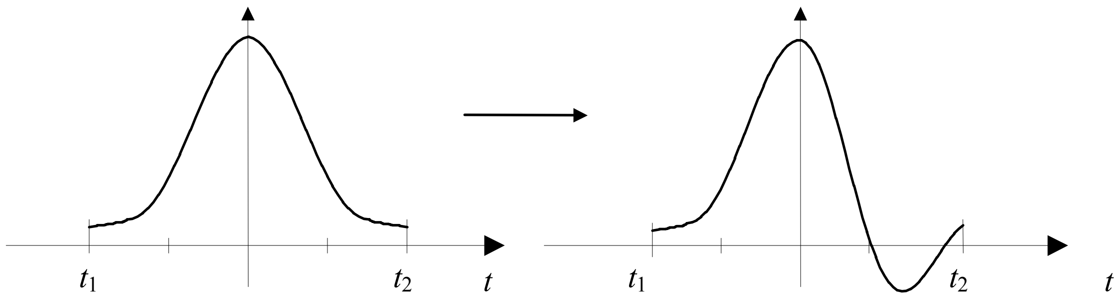


Sl. 1.13

Primjer ovakvog preslikavanja je integriranje.

Ako funkcija ili operator $\overline{F}$ signalu u definiranom na intervalu $[t_1, t_2]$ pridružuje signal v iz intervala $[t_1, t_2]$ može se pisati

$$v_{[t_1,t_2]} = \overline{F}\left(u_{[t_1,t_2]}\right)$$



Sl. 1.14

Pri tom trenutna vrijednost $v(t)$, gdje je $t \in [t_1, t_2]$ zavisi od signala u iz cijelog intervala, odnosno svih trenutnih vrijednosti $u(\tau)$ iz tog intervala $\tau \in [t_1, t_2]$.

Izraz za trenutnu vrijednost se može napisati

$$v(t) = F\left(u_{[t_1,t_2]}, t\right),$$

gdje je F funkcional koji funkciji $u_{[t_1,t_2]}$ pridružuje broj $v(t)$.

Posebice su zanimljive dvije mogućnosti:

(i) da $v(t)$ zavisi isključivo od segmenta (t_1, t) prije trenutka t

$$v(t) = F_m\left(u_{(t_1,t)}\right),$$

(ii) isključivo od segmenta (t, t_2) poslije trenutka t

$$v(t) = F_p\left(u_{(t,t_2)}\right).$$

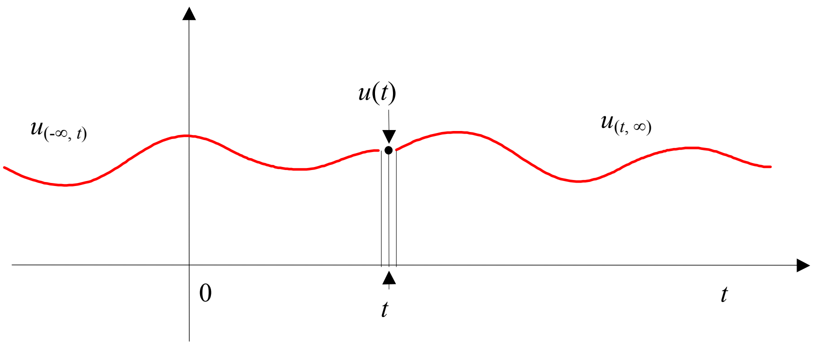
Najčešće su to segmenti signala na polubeskonačnim vremenskim osima

(i) $$v(t) = F_m\left(u_{(-\infty,t)}\right), \tag{1.13}$$

(ii) $$v(t) = F_p\left(u_{(t,\infty)}\right), \tag{1.14}$$

gdje se prvi funkcional F_m može smatrati memorijskim, jer sve trenutne vrijednosti signala $u(\tau)$ iz intervala $\tau \in (-\infty, t)$, odnosno cijela "prošlost", određuje trenutnu vrijednost $v(t)$.

Trenutak t uzimamo kao trenutak promatranja, odnosno "sadašnjost". Tu operaciju rade sustavi pa se zato nazivaju memorijski.



Sl. 1.15

Drugi funkcional F_p se može nazvati prediktivnim jer je trenutna vrijednost signala $v(t)$ određena svim trenutnim vrijednostima $u(\tau)$ iz intervala $\tau \in (t, \infty)$, dakle segmentom signala iz cijele "budućnosti".

Granica između "memorijskog" i "prediktivnog" preslikavanja je trenutno preslikavanje kod kojeg je trenutna vrijednost $v(t)$ određena isključivo s trenutnom vrijednosti $u(t)$.

$$v(t) = f(u(t)). \tag{1.15}$$

Trenutna vrijednost $u(t)$ se nekad pridružuje lijevoj ili desnoj vremenskoj poluosi, pa su intervali u (1.13) i (1.14) poluzatvoreni $(-\infty, t]$ ili $[t, \infty)$.

Opći slučaj kad je $v(t)$ određen pobudom iz intervala $(-\infty, \infty)$ možemo nazvati *memorijsko-prediktivnim* ili *nekauzalnim* preslikavanjem.

U slučaju linearnog operatora, odnosno preslikavanja za kojeg vrijedi

$$\mathrm{v} = \overline{F}(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha \overline{F}(u_1) + \beta \overline{F}(u_2), \tag{1.16}$$

trenutna vrijednost $v(t)$ je određena s linearnim funkcionalom

$$v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t,\tau)u(\tau)d\tau \qquad \text{ili} \qquad v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)u(\tau)d\tau, \tag{1.17}$$

kako će se pokazati u trećem poglavlju gdje je h takozvana težinska ili Green-ova funkcija.

1.4 Operacije među signalima

Djelovanje više signala koje daje jedan rezultirajući signal može se opisati s običnom funkcijom

$$v(t) = f\big(u_1(t),\, u_2(t),\, u_3(t), \ldots\big) \tag{1.18}$$

Signal v se može dobiti iz komponenata u_i. U općem slučaju to će biti nelinearna kombinacija, npr.

$$v(t) = [u_1(t)]^{u_2(t)}.$$

Može biti i linearna kombinacija, npr.

$$v(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t)\,. \tag{1.18a}$$

Često se funkcija f dade razložiti na jednostavne operacije. Ako se one ne mogu dalje pojednostavniti nazivamo ih elementarnim.

U slučaju linearne funkcije f kao u prethodnom primjeru, $v(t)$ se dobiva množenjem komponenti u_1 i u_2 s težinskim konstantama α i β, te zbrajaju. Ovdje imamo elementarne operacije množenje signala s konstantom, te zbrajanje "pojačanih" komponenti.

Ako su konstante $\alpha = 1$ i $\beta = 1$ govorimo o zbrajanju signala.

$$v = u_1 + u_2\,,$$

$$v(t) = (u_1 + u_2)(t) = u_1(t) + u_2(t)\,. \tag{1.19}$$

Druga važna elementarna operacija među signalima je množenje signala.

$$v = u_1 u_2\,,$$

$$v(t) = u_1(t) u_2(t)\,. \tag{1.20}$$

Primjer:

$$u_1(t) = \cos\ \omega t; = u_1(t) = Ae^{-\alpha t}\,,$$

$$v(t) = Ae^{-\alpha t} \cos\ \omega t\,.$$

Ovaj oblik se može interpretirati kao sinusni signal čija se amplituda mijenja eksponencijalno. Amplituda, kao parametar sinusnog signala, je ovdje vremenska funkcija.

Ako se neki parametar signala mijenja u skladu s nekom vremenskom funkcijom ili signalom kaže se da je izvorni signal moduliran. Takvi se signali upotrebljavaju u komunikacijama, automatici i mjerenju. Izvorni signal se obično naziva nosiocem, a onaj koji djeluje na parametar, signalom modulacije ili informacije.

U današnjoj tehnici, posebice komunikacijama nosilac je redovito sinusni signal ili pulsni niz, čiji se parametri mogu modulirati u vremenskoj ili amplitudnoj osi.

Ako funkciju f treba predstaviti konačnim brojem elementarnih operacija, jedan od načina je da se ona predstavi Taylorovim redom s više varijabli, ali s konačnim brojem članova reda (drugo poglavlje).

Preslikavanje više signala u_1, u_2, u_3 u jedan rezultirajući v može biti složenije kao u (1.12), tj. preslikavanje funkcije u funkciju ili segmenta signala u segment

$$v = \overline{F}(u_1, u_2, \ldots, u_n)\,, \tag{1.21}$$

gdje operator $\overline{F}$ može biti vrlo složen. Bitna je klasifikacija operatora na nelinearne ili linearne.

Ako je operator $\overline{F}$ linearan (1.18a) , bit će moguće odrediti rezultirajući signal v kao linearnu kombinaciju nezavisno transformiranih signala u_1 i u_2, što može značajno pojednostaviti dobivanje odziva sustava.

1.5 Realni i apstraktni objekti

Osnovna svrha teorije sustava je da omogući analitičkim i numeričkim metodama određivanje svojstava danih sustava ili sintezu realnih sustava traženih svojstava. Iako je osnovni objekt ili sustav ovdje realan objekt ili sustav (najčešće fizikalni) kojem su pridruženi atributi—mjerljive veličine relevantni za njegovo vladanje u određenoj primjeni, analizu i sintezu sustava vršimo matematičkim postupcima radeći s matematičkim modelom sustava. Relevantni atributi se ovdje pojavljuju kao varijable, parametri i relacije među njima. U teoriji dakle radimo s apstraktnim objektima kojeg čini skup nekih veličina-varijabli i skup relacija među njima.

Uzmimo da je objekt karakteriziran skupom algebarskih relacija među varijablama u_1, u_2, u_3:

$$\mathcal{R}_1(u_1,u_2,u_3)=0\,,$$

$$\mathcal{R}_2(u_1,u_2,u_3)=0\,,$$

$$\mathcal{R}_3(u_1,u_2,u_3)=0\,.$$

Kad se varijable mijenjaju s vremenom, skup relacija može npr. biti sustav običnih diferencijalnih jednadžbi (jedna nezavisna varijabla t).

$$a_{11}\frac{du_1}{dt}+a_{12}\frac{du_2}{dt}+a_{13}u_3=0\,,$$

$$a_{21}\frac{du_1}{dt}+a_{22}u_2+a_{23}u_3=0\,,$$

$$a_{31}\frac{du_1}{dt}+a_{32}\frac{du_2}{dt}+a_{33}\frac{du_3}{dt}=v\,.$$

Nazivamo ih diferencijalni sustavi ili sustavi sa zbijenim parametrima.

Prisustvo prostornih koordinata kao nezavisnih varijabli dati će parcijalne diferencijalne jednadžbe. Takve sustave nazivamo sustavima s raspodijeljenim parametrima.

Ako su relacije koje karakteriziraju neki objekt bez posebne specifikacije koja varijabla predstavlja uzrok procesu, a koja posljedicu, odnosno "pobudu" sustava i njegov "odziv" govorimo o neorijentiranom objektu.

Ako se varijable mogu podijeliti na "ulazne" i "izlazne", tada govorimo o orijentiranom objektu (katkad je ta podjela proizvoljna i nema implikacija na fizikalnu kauzalnost između ulaza i izlaza).

Primjer za neorijentirani objekt je električki otpor, gdje su varijable napon i struja. Možemo uzeti napon kao uzrok, a struju kao posljedicu, ili pak struju kao uzrok, a napon kao posljedicu.

Primjer orijentiranog objekta je elektroničko pojačalo kod kojeg možemo identificirati ulaznu i izlaznu varijablu. Ulaznu varijablu ovdje ne možemo uzeti kao izlaznu.

U realnom objektu mjerljive veličine su izabrane kao varijable, a njihovi odnosi određeni indukcijom (eksperimentalno) ili dedukcijom (iz prirodnih zakona) se slažu s ulazno-izlaznom relacijom. Apstraktni objekt koji ima iste varijable i karakteriziran je istom izlazno-ulaznom relacijom kao neki realni objekt se naziva modelom realnog objekta. S druge strane, realni objekt se naziva jednom realizacijom apstraktnog objekta. Apstraktni objekt, naime, može imati nijednu, jednu ili više realizacija.

Da bi definirali apstraktni objekt uzmimo da je (u, y) uređeni par vremenskih funkcija definiranih u intervalu $[t_0, t]$.

Apstraktni objekt **S** definiramo kao skup uređenih parova varijabli (u, y), odnosno relaciju koja vezuje slobodnu varijablu u i zavisnu y:

$$\mathbf{S} = \{(u, y) \,|\, u \in \mathcal{U}, y \in \mathcal{Y}\}. \tag{1.22}$$

Kako procesi u sustavu redovito teku u vremenu (i/ili prostoru), varijable sustava su funkcije nezavisne varijable $t \in \mathbf{T}$, gdje je **T** uređeni skup ili podskup realnih brojeva ($\mathbf{T} \subseteq \mathbb{R}$). Varijable nisu bilo kakve funkcije vremena nego su elementi skupa prihvatljivih funkcija.

$$\mathcal{U} = \{u \,|\, u : \mathbf{T} \to \mathbf{U}\} \text{ i } \mathcal{Y} = \{y \,|\, y : \mathbf{T} \to \mathbf{Y}\}, \tag{1.23}$$

koje svakom $t \in \mathbf{T}$ pridružuju trenutnu vrijednost ulaza $u(t) \in \mathbf{U}$ i izlaza $y(t) \in \mathbf{Y}$. Skupovi trenutnih vrijednosti **U** i **Y** su redovito skupovi realnih brojeva ili vektorski prostori ($\mathbf{U} \subseteq \mathbb{R}^m$, $\mathbf{Y} \subseteq \mathbb{R}^r$).

Sustav je dakle karakteriziran relacijom **S**, koja pridružuje funkciji ulaza (ili pobudi u), funkciju izlaza (ili odziv y). Apstraktni objekt **S** je, dakle, određen sveukupnošću ulazno-izlaznih parova (u, y) koji pripadaju **S**-u. Ako je objekt **S** iz (1.22) model realnog sustava, kažemo da je **S** ulazno-izlazni model sustava.

Relacija **S** ne pretpostavlja općenito jednoznačnu vezu između pobude i odziva sustava. Kad je ta veza jednoznačna, sustav se može prikazati s

$$y = \overline{F}(u),$$

gdje je $\overline{F}$ funkcija, operator, ili transformacija funkcije pobude. U tom slučaju sustav vrši operaciju na signalu, odnosno preslikavanje ulaza u u funkciju izlaza y.

Pri tom, način na koji je izlaz $y(t)$ određen pobudom je vrlo značajan za klasifikaciju sustava. Bitnu ulogu igra iz kojeg vremenskog intervala pobuda određuje broj $y(t)$, tj. trenutnu vrijednost izlaza, kao što je spomenuto kod preslikavanja signala u (1.13) i (1.14).

Možemo razlikovati:

(i) Bezmemorijske ili trenutne sustave za koje vrijedi $y(t) = f(t, u(t))$.

Trenutna vrijednost izlaza $y(t)$ je određena jedino trenutnom vrijednošću ulaza $u(t)$. Ako izlaz zavisi neposredno od trenutka vremena t, a ne samo posredno preko $u(t)$, koja je funkcija vremena, u zagradi imamo t.

(ii) Memorijske ili kauzalne sustave za koje vrijedi $y(t) = F(t, u_{(-\infty, t]})$.

Trenutna vrijednost izlaza iz sustava u trenutku t zavisi od pobude prije trenutka t, i pobude u trenutku t, a ne od pobude iza trenutka t. Prvo dolazi uzrok, pa onda posljedica. "Prošlost" i "sadašnjost" pobude određuje "sadašnjost" izlaza. To je svojstvo realnih sustava.

Primjer linearnog sustava:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

(iii) Prediktivne ili antikauzalne ili anticipativne, za koje vrijedi $y(t) = F(t,\ u_{[t,\ \infty)})$,gdje je izlaz u t, određen sadašnjom i budućom pobudom, ali ne prošlom, što predstavlja predviđanje ili predikciju.

Primjer:

$$y(t) = \int_{t}^{+\infty} h(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

(iv) Memorijsko-prediktivne ili nekauzalne sustave za koji vrijedi $y(t) = F(t,\ u_{(-\infty,\infty)})$

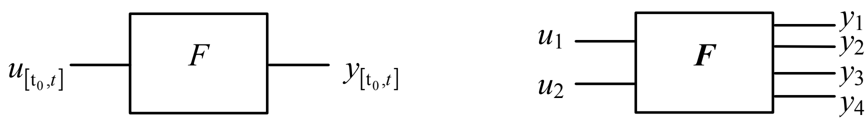
Primjer:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

Vremenski nekauzalni sustavi se često dobivaju kao rezultat iz idealiziranih zahtjeva sinteze ili optimizacije. Nekauzalni sustavi su ostvarivi tamo gdje vrijednosti varijabli zavise od prostornih koordinata ili su pohranjeni na prostorno raspoređene lokacije. Operacije se tada vrše između y i u radeći izvan realnog vremena, što često rade digitalna računala.

1.6 Blokovski dijagrami i spajanje podsustava u sustav

Orijentirani apstraktni objekt ili sustav predstavlja se grafički u obliku pravokutnika s označenim ulaznim i izlaznim varijablama.

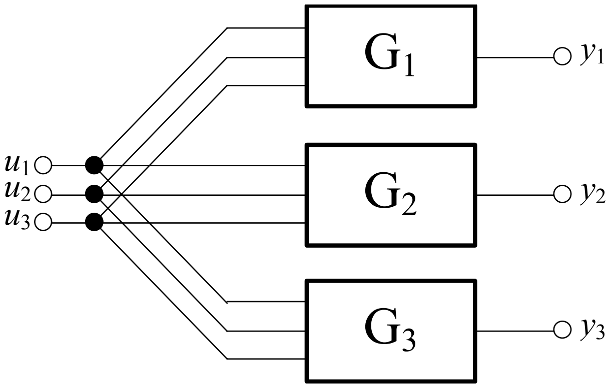


Sl. 1.16

Svaka skalarna varijabla je pridružena priključnici (terminalu).

Sustav s više ulaza i izlaza može se jednostavno razložiti na više sustava s više ulaza, ali samo s po jednim izlazom Sl. 1.17. Prema tome, ništa se ne gubi od općenitosti ako neki podsustav reduciramo na objekt s jednim izlazom i više ulaza.

Spajanje stavlja ograničenja na pojedine varijable da budu jednake na priključnicama koje su vezane što se može izreći jednadžbama spajanja.



Sl. 1.17

Dva i više objekata ili podsustava mogu se spojiti tako da zajedno čine jedan složeni sustav, dakle opet sustav u skladu s naprijed danom definicijom. Sustavi od kojih je sastavljen složeni sustav zovu se podsustavi.

Uzmimo da dva sustava $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ koji imaju ulaze $\{u_{1i} \mid i = 1, 2, \ldots, m_1\}$ i $\{u_{2j} \mid j = 1, 2, \ldots, m_2\}$ te izlaze $\{y_{1k} \mid k = 1, 2, \ldots, r_1\}$ i $\{y_{2l} \mid l = 1, 2, \ldots, r_2\}$. Dva sustava $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ su spojena ako je barem jedna varijabla $u_{1i}(t)$ ulaza sustava $\mathcal{S}_1$ izjednačena s jednom varijablom $y_{2k}(t)$ izlaza sustava $\mathcal{S}_2$ za svaki t tj.

$$u_{1i}(t) = y_{2l}(t),\ i \in [1, m_1]\ \ i\ \ l \in [1, r_2], \tag{1.24a}$$

ili

$$u_{2j}(t) = y_{1k}(t),\ j \in [1, m_2]\ \ i\ \ k \in [1, r_1]. \tag{1.24b}$$

U općem slučaju spajanja podsustava i $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ u složeni sustav $\mathcal{S}$ trebaju biti određeni ulazi $\{u_n \mid n = 1, 2, \ldots, m\}$ i izlazi $\{y_p \mid p = 1, 2, \ldots, r\}$ $\mathcal{S}$-u ulazima odnosno izlazima podsustava, te kako su pojedini ulazi i izlazi podsustava spojeni. To izriču jednadžbe spajanja. Neka su dva sustava $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ dana s $\mathbf{y}_1 = \mathbf{F}_1(\mathbf{u}_1)$, $\mathbf{y}_2 = \mathbf{F}_2(\mathbf{u}_2)$.

Uzmimo na primjer da je $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $m = 2$ i $r = 3$, tj.

$$\begin{aligned}
y_{11} &= F_{11}(u_{11}, u_{12}) \\
y_{12} &= F_{12}(u_{11}, u_{12}) \\
y_{21} &= F_{21}(u_{21}, u_{22}, u_{23}) \\
y_{22} &= F_{22}(u_{21}, u_{22}, u_{23}) \\
y_{23} &= F_{23}(u_{21}, u_{22}, u_{23})
\end{aligned}$$

Jednadžbe spajanja mogu biti na primjer

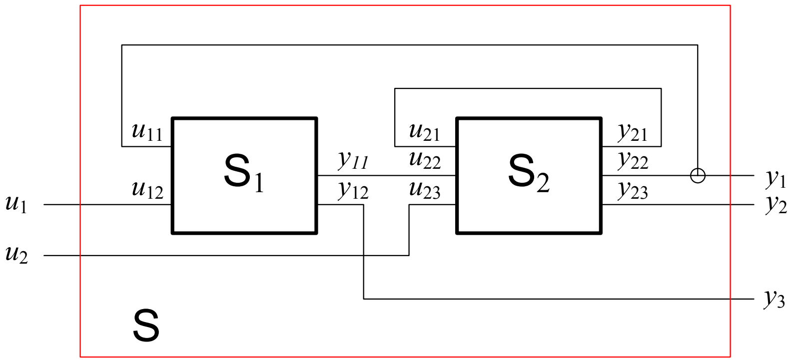
Ulazi u $\mathcal{S}_1$	Ulazi u $\mathcal{S}_2$	
$u_{11}(t) = y_{22}(t)$	$u_{21}(t) = y_{21}(t)$	
$u_{12}(t) = u_1(t)$	$u_{22}(t) = y_{11}(t)$	za $\forall\ t \in \mathbf{T}$
	$u_{23}(t) = u_2(t)$	

Varijable složenog sustava $\mathcal{S}$ dane su na primjer jednadžbama:

Ulazi u $\mathcal{S}$	Izlazi $\mathcal{S}$	
$u_1(t) = u_{12}(t)$	$y_1(t) = y_{22}(t)$	
$u_2(t) = u_{23}(t)$	$y_2(t) = y_{23}(t)$	za $\forall\ t \in \mathbf{T}$

$$y_3(t) = y_{12}(t)$$

Spojenost sustava $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ može se grafički prikazati sustavima kao blokovima. Izjednačene varijable su prikazane crtom koja pokazuje povezanost pojedinih ulaza u $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ s izlazima $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$, odnosno ulazima sustava $\mathcal{S}$ i pojedinih izlaza $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ s izlazima sustava $\mathcal{S}$, čineći tako blok dijagram. Na slici je prikazan dijagram sustava $\mathcal{S}$ prema gornjem primjeru jednadžbi spajanja.



Sl. 1.18

Blokovski dijagram s odgovarajućim spajanjima je vrlo pregledan način pokazivanja interakcije varijabli podsustava.

Pri spajanju sustava odnosno izjednačavanju pojedinih varijabli postoje restrikcije. Obzirom da su u konceptu sustava ulazne varijable slobodne, a izlazne zavisne od njih, ulazne varijable bilo koje vrijednosti $u(t)\in\mathbf{U}$ ili funkcije $u\in\mathcal{U}$ mogu se izjednačiti s bilo kojom ulaznom varijablom složenog sustava.

Ulazna varijabla npr. podsustava $\mathcal{S}_2$ neangažirana u prednjem postupku može se izjednačiti s bilo kojom izlaznom varijablom npr. sustava $\mathcal{S}_1$.

Budući da su pojedini izlazi podsustava diktirani samo njihovim ulazima, izlazne varijable se ne mogu izjednačavati međusobno. Sve izlazne varijable podsustava mogu biti izlazne varijable složenog sustava, ali mora biti barem jedna izlaz sustava $\mathcal{S}$.

Ograničenja u izjednačavanju varijabli podsustava mogu se izreći skupom pravila spajanja koja vrijede za blokovske dijagrame. Skup tih pravila je:

1. Izlazi iz blokova se ne spajaju međusobno.
2. Svaki ulaz bloka spaja se na izlaz nekog bloka ili je ulaz u spojeni složeni sustav. Svi ulazi podsustava su angažirani.
3. Izlaz bloka može biti izlaz složenog sustava. Najmanje jedan izlaz podsustava je izlaz spojenog sustava.

Navedeni primjer spajanja $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ u složeni sustav $\mathcal{S}$ slijedi pravila spajanja.

Složenim sustavom $\mathcal{S}_n$ dan s

$$y_1 = F_1(u_1,\ u2,\ \ldots,u_5)$$

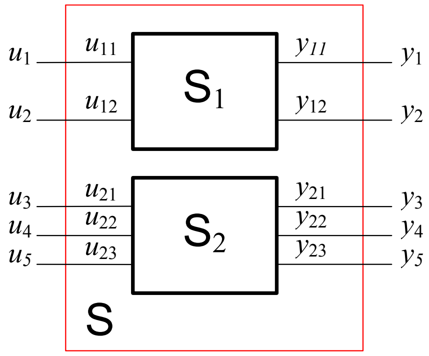
$$y_2 = F_2(u_1,\ u2,\ \ldots,u_5)$$

$$y_5 = F_5(u_1,\ u2,\ \ldots,u_5)$$

može se uvjetno smatrati sustav sastavljen od $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ gdje su varijable $\mathcal{S}_n$ dane s:

Ulazi u $\mathcal{S}$	Izlazi iz $\mathcal{S}$
$u_1 = u_{11}$	$y_1 = y_{11}$
$u_2 = u_{12}$	$y_2 = y_{12}$
$u_3 = u_{21}$	$y_3 = y_{21}$
$u_4 = u_{22}$	$y_4 = y_{22}$
$u_5 = u_{23}$	$y_5 = y_{23}$

Na temelju ovih jednadžbi blokovski dijagram je



Sl. 1.19

U ovom slučaju ulazi u_1, u_2 ne djeluju na izlaze y_3, y_4, y_5, te da ulazi u_3, u_4, u_5 ne utječu na izlaze y_1 i y_2.

Prikazani sustav $\mathcal{S}_n$ složen je od dva sustava $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ koji nisu međusobno spojeni u smislu ranije definicije spojenih sustava. Kažemo da je sustav $\mathcal{S}_n$ složen od dva nezavisna podsustava.

Slaganje ili sinteza sustava u kompleksniji sustav vrše se redovito s namjerom da se iz jednostavnijih podsustava dobije složeni sustav zadanih ili željenih svojstava, koje nameće primjena.

S druge strane obrnuti postupak razlaganja ili analize složenog sustava na jednostavnije podsustave vrši se s namjerom da se dobije dobar uvid u vladanje sustava i utjecaj pojedinih podsustava, te da se omogući njegova realizacija jednostavnijim podsustavima. Za razlaganje međutim moraju postojati uvjeti ekvivalencije tj. funkcija između izlaza i ulaza složenog sustava mora biti takova da dopušta njeno razlaganje na kombinaciju funkcija, koje vode na jednostavnije funkcije između izlaza i ulaza podsustava. Taj postupak dobivanja nekoliko jednostavnijih podsustava nije uvijek jednoznačan. Razlaganje sustava zato može rezultirati u različitom, po broju i tipu podsustava, i razumljivo, načinu kako su podsustavi spojeni.

Veliki broj varijabli i složenost funkcija sustava traži detaljnije razlaganja složenog sustava na veći broj međusobno vezanih jednostavnijih podsustava. Ta predstavljanja mogu se temeljiti na postupku svođenja funkcijskih veza između više varijabli na više podsustava, koji osiguravaju funkcijske veze između manjeg broja varijabli ili čak između samo dvije varijable, jedne ulazne i jedne izlazne.

Drugu mogućnost razlaganja otvara postupak da se jedan blok sa složenom funkcijom razloži na ekvivalentni skup povezanih blokova s jednostavnijim funkcijama ili po mogućnosti s elementarnim operacijama, kao što su zbrajanje i množenje, te integracija ili jednostavno kašnjenje signala, dakle operacije koje se ne mogu načiniti jednostavnijim. Ovi posljednji objekti obično se nazivaju elementima.

Opisani postupak je analiza ili dekompozicija-razlaganje kompleksnog sustava na jednostavnije podsustave ili elemente. Elementi imaju redovito jednostavnu realizaciju, pa se mogu iskoristiti kao građevni blokovi za slaganje fizikalno-ostvarivih sustava.

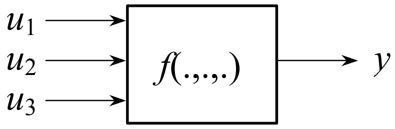
Sinteza ili kompozicija je slaganje podsustava ili elemenata u strukturu da bi se dobio sustav zadanih svojstava.

U oba slučaja radi se o skupu podsustava ili elemenata koji su međusobno spojeni u sustav nekakve strukture. Kakvi elementi su uzeti i kako se spajaju u strukturu, odredit će klasu sustava.

2. KONTINUIRANI SUSTAVI BEZ MEMORIJE

Modeli sustava bez memorije su apstraktni sustavi čiji izlazni signal u bilo kojem trenutku t zavisi jedino od vrijednosti ulaznog signala u trenutku t. U ovom dijelu koncentrirat ćemo se na sustave koji su opisani s kontinuiranim realnim funkcijama ili relacijama. Mi ćemo jednu vrstu modela kontinuiranih sustava bez memorije definirati klasom blok dijagrama. Elementi sustava su funkcijski blokovi. Svaki blok je opisan s po odsječcima neprekinutom funkcijom $f(.)$ ili $f(.,.,.)$ koja je konačna za konačne argumente. Svaki funkcijski blok ima jedan izlaz y koji ima realnu vrijednost i jedan ili više ulaza x_i koji imaju realnu vrijednost.

$$y(t) = f(u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)) \qquad y(t), u_i(t) \in \mathbb{R}$$



Sl. 2.1

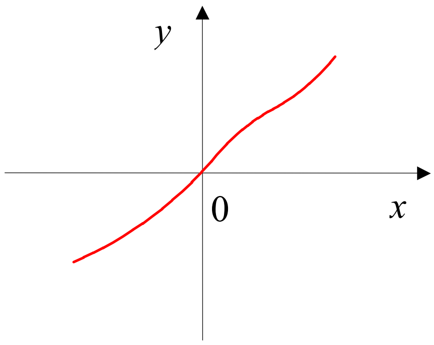
2.1 *Funkcijski blok s jednim ulazom i jednim izlazom*

Ako za objekt s jednim ulazom i jednim izlazom vrijedi za svaki t

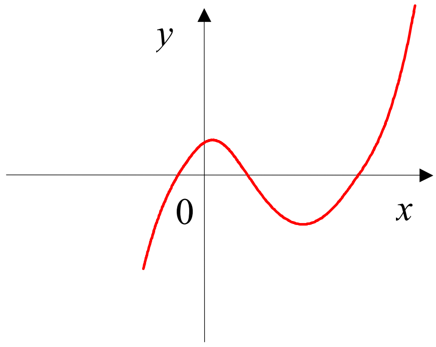
$$y(t) = f(u(t)), \tag{2.1}$$

gdje je f funkcija koja pridružuje vrijednost izlazne varijable $y(t)$ u trenutku t vrijednosti ulazne varijable u trenutku t, kažemo da je f bezmemorijski element, tzv. funkcijski blok.

Funkcijska veza između ulaza i izlaza bloka s jednim ulazom i jednim izlazom može se dati krivuljom u ravnini $x,y,\ldots$ koja se naziva karakteristikom bloka ili elementa. To otvara mogućnosti upotrebe grafičkih postupaka u određivanju karakteristika složenih sustava.



Sl. 2.2a



Sl. 2.2b

Funkcijska veza se može dati i nizom diskretnih vrijednosti ili u obliku tablice.

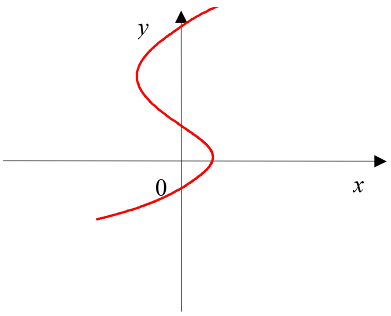
Funkcijska veza pretpostavlja jednoznačnu vezu između nezavisne x i zavisne y tj. svakoj realnoj vrijednosti x-a pridružena je jedna vrijednost y-a. Kako pokazuju karakteristike na Sl. 2.2 a i b za svaku vrijednost x-a na osi x odgovara samo jedna i samo jedna moguća vrijednost za y. Funkcijski blok je takav da s x-om možemo jednoznačno odrediti y. On je dakle *upravljan* od strane ulaza, a njegov izlaz daje zavisnu varijablu y.

Iako se može govoriti općenito o implicitnoj funkciji $\Phi(x,y) = 0$ i inverznoj funkciji $x = f^{-1}(y)$, te karakteristici kao geometrijskoj interpretaciji $\Phi(x,y) = 0$, ipak kod funkcijskog bloka ulaz i ulazna varijabla se smatra slobodnom, a izlazna zavisnom.

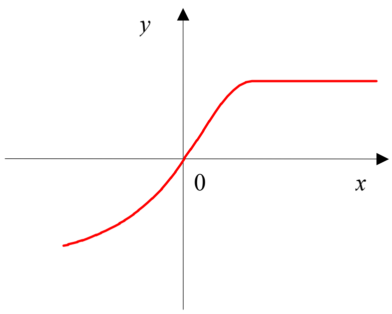
Dvije karakteristike na Sl. 2.2. a i b se razlikuju. Prva je monotono rastuća jer se njenoj strmini ($\frac{dy}{dx} > 0$) ne mijenja polaritet dok druga to nije ($\frac{dy}{dx} \gtrless 0$).

Monotone funkcije imaju inverziju. Njihova inverzija također je funkcija.

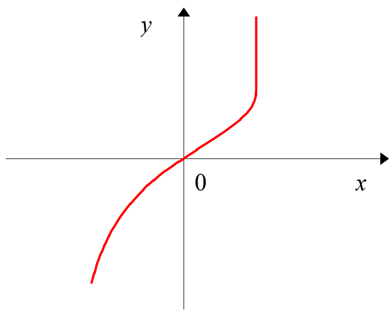
Inverzija funkcije na Sl. 2.2b ima za jedan izabrani y u nekom intervalu varijable y i tri različita x-a. Nije dakle funkcija nego relacija. (Nekad se ta veza nazivala višeznačnom funkcijom). Sl. 2.3.



Sl. 2.3



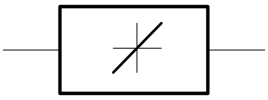
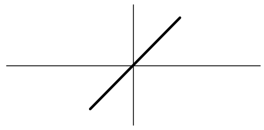
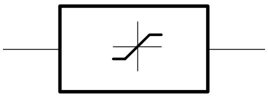
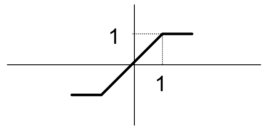
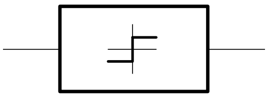
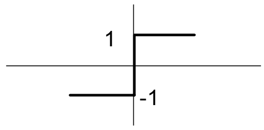
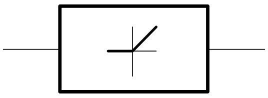
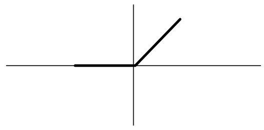
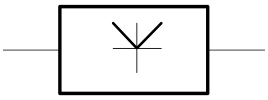
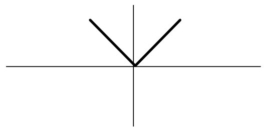
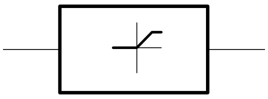
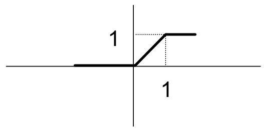
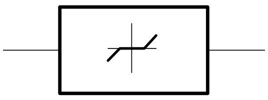
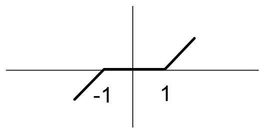
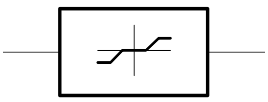
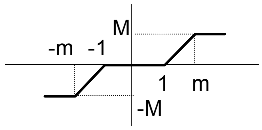
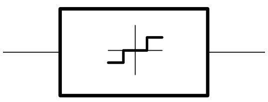
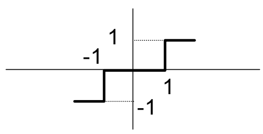
Sl. 2.4a

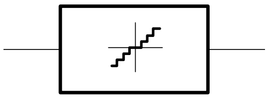
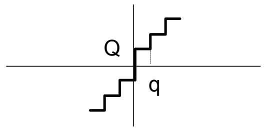
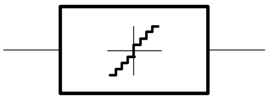
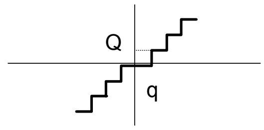
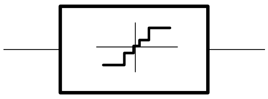
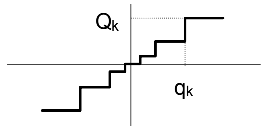


Sl. 2.4b

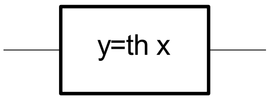
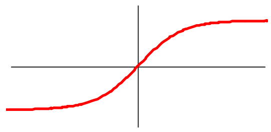
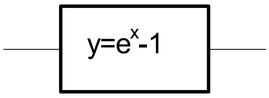
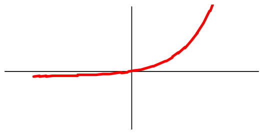
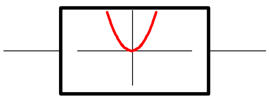
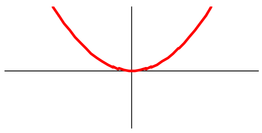
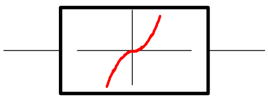
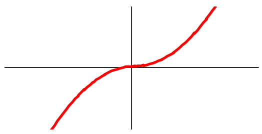
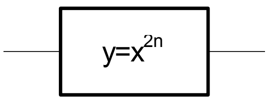
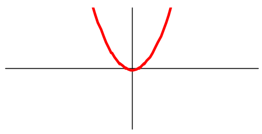
Ako $y = f(x)$ ima odsječak paralelan s osi x ($\frac{dy}{dx} = 0$), inverzija nije jednoznačna jer na paralelnom dijelu jednoj vrijednosti za y pripada beskonačno vrijednosti x-a. Sl. 2.4. a i b. Pregled tipičnih karakteristika elemenata odnosno funkcijskih blokova u elektronici i automatici je u sljedećoj tablici.

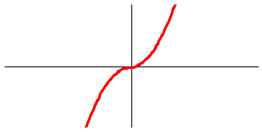
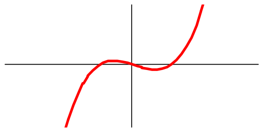
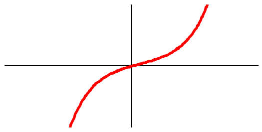
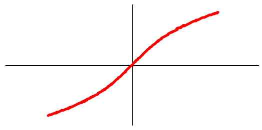
SKOKOVITE I LOMLJENE KARAKTERISTIKE

NAZIV	SIMBOL	FUNKCIJA	GRAF
Pojačalo		$y = x$	
Limiter		$y = -1 \quad x < -1$ $y = x \quad -1 < x < 1$ $y = 1 \quad x > 1$	
Komparator jedne razine		$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$	
Prag		$y = x \quad x > 0$ $y = 0 \quad x < 0$	
Apsolutna vrijednost		$y = \lvert x \rvert$	
Prag sa zasićenjem		$y = 0 \quad x < -1$ $y = x \quad 0 < x < 1$ $y = 1 \quad x > 1$	
Mrtva zona		$y = x + 1 \quad x < -1$ $y = 0 \quad -1 < x < 1$ $y = x - 1 \quad x > 1$	
Mrtva zona sa zasićenjem		$y = -M + 1 \quad x < -m$ $y = -x + 1 \quad -m < x < -1$ $y = 0 \quad -1 < x < 1$ $y = x - 1 \quad 1 < x < m$ $y = M - 1 \quad x > m$	
Komparator dvije razine		$y = -1 \quad x < -1$ $y = 0 \quad -1 < x < 1$ $y = 1 \quad x > 1$	

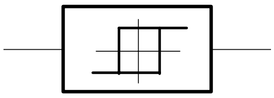
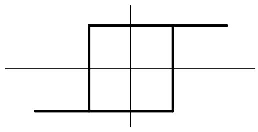
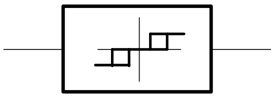
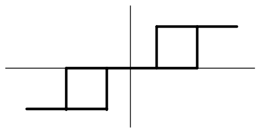
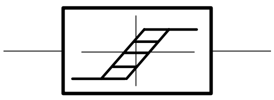
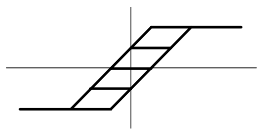
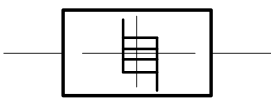
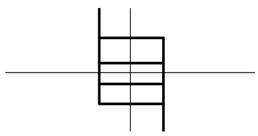
NAZIV	SIMBOL	FUNKCIJA	GRAF
Kvantizator (A/D konv.)		$y=-mQ \quad -mq<x<(1-m)q$ $y=mQ \quad (m-1)q<x<mq$	
Stepeničasta linearna funkcija		$y=-mQ \quad (-1-m)<x<-mq$ $y=mQ \quad mq<x<(m+1)q$	
Stepeničasta nelinearna funkcija		$y=Q_k \quad q_{k-1}<x<q_k$	

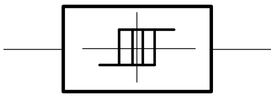
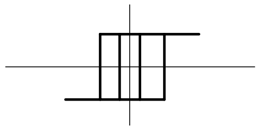
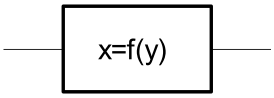
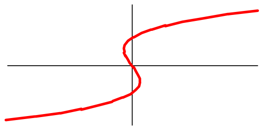
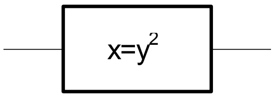
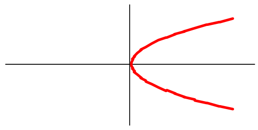
GLATKE KARAKTERISTIKE (NEPREKINUTE DERIVACIJE)

NAZIV	SIMBOL	FUNKCIJA	GRAF
Simetrična nelinearna funkcija		$y=\mathrm{th}\, x$	
Asimetrična nelinearna funkcija		$y=e^x-1$	
Parabola		$y=x^2$	
Neparna parabola		$y=x^2 \quad x<0$ $y=-x^2 \quad x>0$	
Parna parabola višeg reda		$y=x^{2n}$	

NAZIV	SIMBOL	FUNKCIJA	GRAF
Neparana parabola višeg reda	$y=x^{2n+1}$	$y = x^{2n+1}$	
Parabola 3.reda + pravac neg. nagiba	$y=x^3-x$	$y = x^3 - x$	
Bipolarni kompresor	y=sh x	$y = \mathrm{sh}\, x$	
Bipolarni dekompresor	y=Arsh x	$y = \mathrm{Arsh}\, x$	

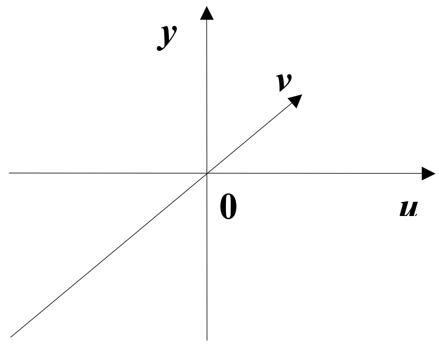
TIPIČNI RELACIJSKI BLOKOVI (VIŠEZNAČNE FUNKCIJE)

NAZIV	SIMBOL	FUNKCIJA	GRAF
Komparator s histerezom			
Komparator s dvije razine s histerezom			
			
			

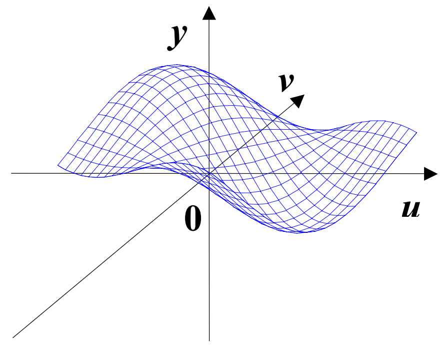
NAZIV	SIMBOL	FUNKCIJA	GRAF
			
Inverzna funkcija		$x = f(y)$	
Horizontalna parabola		$x = y^2$	

2.2 Funkcijski blok s više ulaza

Funkcijski blok s dvije ulazne varijable u, v se može predstaviti geometrijskom plohom u prostoru u, v, y. Sl. 2.5. a i b.



Sl. 2.5a



Sl. 2.5b

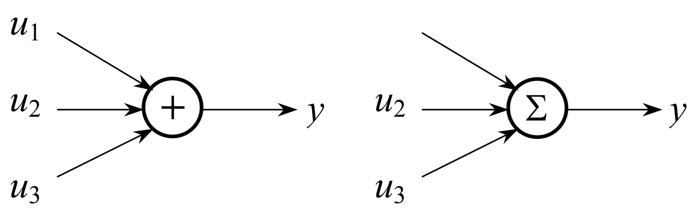
Češće se međutim upotrebljava predstavljanje karakteristika skupom krivulja u ravnini $y = f(u,v)$ gdje se kontinuirano daje veza od u za nekoliko iznosa v-a kao parametra ili obrnuto. (Karakteristike elektroničkih elemenata).

Za analitičke postupke modeliranja karakteristika elemenata upotrebljavamo elementarne funkcije (najčešće polinome i transcendentne funkcije). Također se upotrebljavaju grafički prikazi i tablice numeričkih podataka. Za realne karakteristike elemenata često se upotrebljavaju i grublje aproksimacije kao na primjer linearne ili parabolične funkcije po odsječcima karakteristike.

Nekad se funkcijski blok može prikazati jednostavnijim elementima sumerima (zbrajalima) i multiplikatorima (množilima), koji vrše operaciju sumiranja odnosno multipliciranja signala.

Za signal na izlazu iz sumera u trenutku t vrijedi:

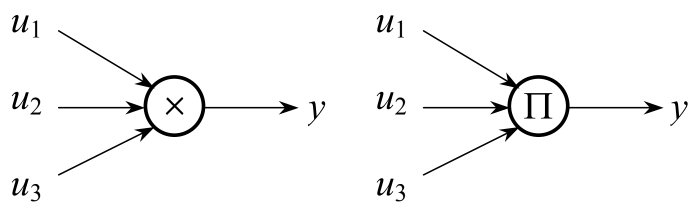
$$y(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)\,. \tag{2.2}$$



Sl. 2.6

Za signal na izlazu iz multiplikatora u trenutku t vrijedi:

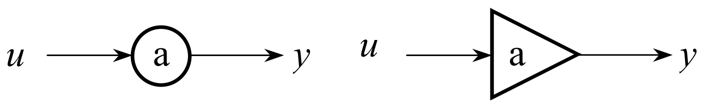
$$y(t) = u_1(t) \times u_2(t) \times u_3(t)\,. \tag{2.3}$$



Sl. 2.7

Multiplikaciju s konstantom vrši element zvan pojačalo. Izlaz iz pojačala u trenutku t dan je s

$$y(t) = \mathrm{a}u(t)\,. \tag{2.4}$$



Sl. 2.8

Spajanjem gornjim elemenata može se funkcijski blok gdje je funkcija polinom

$$y(t) = \mathrm{a}_0 + \mathrm{a}_1 u + \mathrm{a}_2 u^2 + \ldots + \mathrm{a}_n u^n\,, \tag{2.5}$$

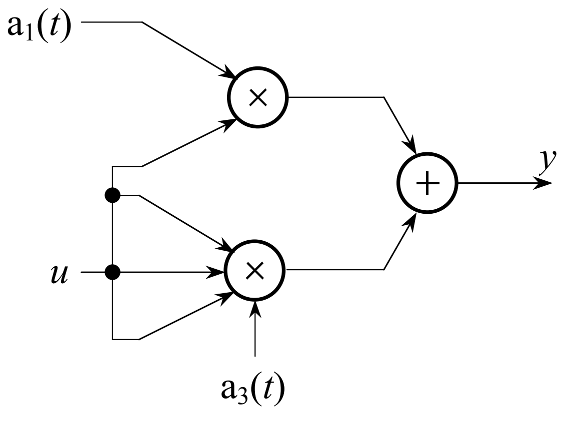
predstaviti konačnim brojem sumera i multiplikatora.

Razumljivo je da u slučaju transcendentne funkcije taj broj elemenata teži u beskonačnost. Transcendentna funkcija se međutim može aproksimirati s konačnim brojem operacija, odnosno elemenata.

Funkcijski blok može biti i vremenski promjenljivi element. Koristeći se nešto složenijim elementima i pomoćnim signalima može se realizirati vremenski promjenljivi element, gdje je taj složeni element vremenski stalan, a pomoćni signal vrši željenu varijaciju funkcija ili parametara.

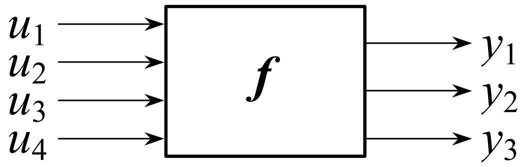
Primjer:

$$y(t) = a_1(t)u + a_3(t)u\,,$$



Sl. 2.9

Koncept funkcijskog bloka sa jednim ulazom i jednim izlazom može se proširiti na blok s više ulaza i izlaza i obratno.



Sl. 2.10

2.3 Spajanje funkcijskih blokova u sustav

Skup pravila spajanja elemenata ili funkcijskih blokova je kako slijedi:

1. Izlazi dva bloka se ne spajaju.
2. Svaki ulaz bloka se spaja na izlaz nekog bloka ili je ulaz u spojeni sustav.
3. Samo jedan izlaz bloka je izlaz spojenog sustava. Svi ostali izlazi moraju biti spojeni na ulaze nekih blokova.

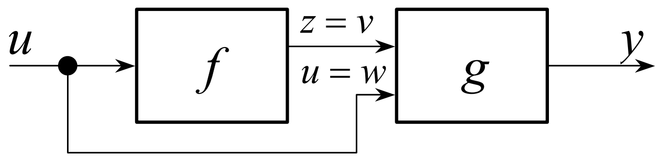
Rezultirajući sustav će biti opet sustav s više ulaza i jednim izlazom.

Matematička interpretacija spajanja: kad god su priključnice blokova prospojene, varijable na priključnicama su vezane (prisiljene) da imaju iste vrijednosti. Vodeći računa o skupu elemenata i skupu pravila spajanja (koja se mogu izreći skupom jednadžbi spajanja) mi možemo ustanoviti da li neki sustav spada u razmatranu klasu.

Svaki blok daje vrijednost izlaza u zavisnosti od njegovih ulaza. Uzmimo dva bloka:

$$z = f(x) \text{ i } y = g(v,w).$$

Neka su prospojeni prema slici:



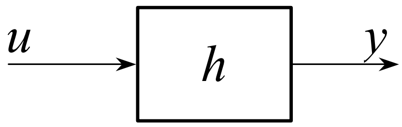
Sl. 2.11

odakle slijede određene jednakosti: $v = z$ i $w = x$ (jednadžbe spajanja). Prva jednadžba kaže da je izlaz iz bloka spojen s prvim ulazom bloka g što znači da izlaz iz f djeluje kao ulaz u g. Jednadžbe mogu biti složene tako da se dobije izlaz y kao funkcija od ulaza x u spojeni sustav. Eliminacijom varijabli z, v i w dobivamo

$$y = g\,(f(x), x). \tag{2.6}$$

Za zadani x može se odrediti y budući da znamo funkciju f i g te preko jednadžbi spajanja oba argumenta funkcije g. Ako je na primjer $g\,(v,w) = v\,w$, a $f(x) = x^2$

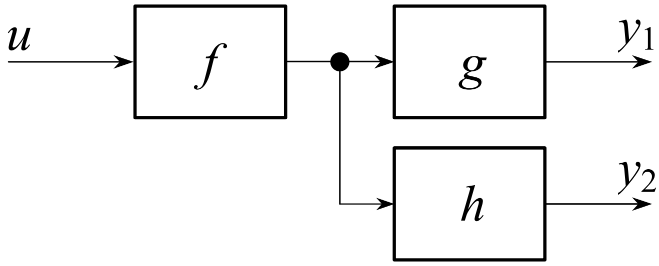
izlazi $y = v\,w = z\,x = x^2\,x = x^3$



Sl. 2.12

Mi smo dobili novu funkciju $y = h(x)$ koja svakoj vrijednosti x pridružuje y. To znači da spojeni sustav možemo prikazati jednim funkcijskim blokom koji može opet biti smatran elementom jednog većeg sustava.

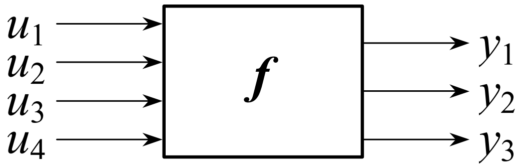
Možemo definirati i drugu klasu sustava s više ulaza i izlaza, slaganjem elemenata ranije razmatrane klase s jednim zajedničkim ulazom i izlazom kao npr..



Sl. 2.13

$$y_1 = g(v)$$
$$y_2 = h(v)$$
$$v = f(x)$$
$$y_1 = f_1(x)$$
$$y_2 = f_2(x)$$

Sustav s više ulaza i izlaza može se predstaviti skupom jednadžbi i blokom



Sl. 2.14

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ y_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3, x_4). \end{aligned} \tag{2.7}$$

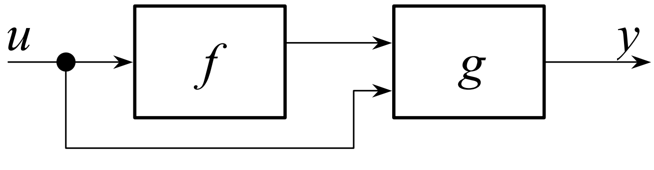
Uvođenjem vektora ulaza $[x_1, x_2,\ldots, x_m]^t$ i vektora izlaza $[y_1, y_2,\ldots, y_r]^t$. Bezmemorijski sustav se može prikazati s

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \tag{2.8}$$

gdje je **f** vektorska funkcija.

2.4 Eksplicitni i implicitni sustavi

Sustavi bez memorije mogu se podijeliti u dvije grupe: na eksplicitne i implicitne sustave. Za klasu sustava koju razmatramo podjela se može izvršiti prema tome da li signal na svom putu kroz sustav čini petlju. Eksplicitni sustav nema petlji dok implicitni ima jednu ili više. Tu podjelu moguće je izvršiti i na temelju tzv. liste spajanja. Mi možemo spajanje sustava na Sl. 2.15 prikazati listom



Sl. 2.15

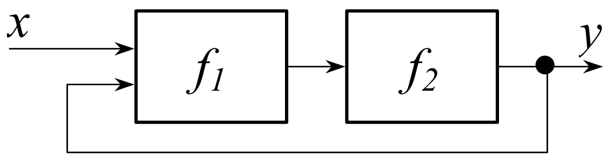
$$\begin{aligned} &g\colon\; f, x \\ &f\colon\; x. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Svaki funkcijski blok ima jedan redak u listi gdje su navedeni ulazi i funkcijski blokovi, čiji izlazi predstavljaju ulaze u razmatrani funkcijski blok. Izlazne varijable označene su oznakom funkcijskog bloka. U našem primjeru prvi redak kaže da je prvi ulaz funkcijskog bloka g spojen na izlaz funkcijskog bloka *f*, a drugi ulaz na ulaz sustava *x*. Kažemo da je lista sortirana ako se redci mogu složiti tako da u svakom retku ime funkcije ili varijable desno od dvotočke možemo naći lijevo od dvotočke negdje *iznad* tog retka ili je ulaz sustava. Kako se vidi, gornja lista nije sortirana, jer se u prvom retku pojavljuje *f*, a da ga nije bilo ranije. Lista će postati sortirana ako zamijenimo retke:

$$\begin{aligned} &f\colon\; x \\ &g\colon\; f, x. \end{aligned} \tag{2.10}$$

jer u ovom slučaju svako ime desno od dvotočke se pojavljuje iznad tog retka lijevo od dvotočke. Drugim riječima, sortirana spojna lista slaže funkcijske blokove na taj način da svaki ulaz u funkcijski blok je izlaz iz nekog bloka specificiranog ranije ili je ulaz u sustav.

Napravimo sad listu za blok dijagram prikazan na slijedećoj slici



Sl. 2.16

$$\begin{aligned} &f_2\colon\; f_1 \qquad\qquad \textit{ili} \qquad f_1\colon\; f_2, x \\ &f_1\colon\; f_2, x \qquad\qquad\quad f_2\colon\; f_1 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Vidimo da bilo koji redoslijed redaka ne može ispuniti zahtjev da je ulaz u neki funkcijski blok specificiran u retku iznad razmatranog retka. Ovakva lista se ne može sortirati. To je posljedica činjenice da u blok dijagramu imamo petlju. U prvi blok se ne ulazi s poznatom varijablom već s *y* koju u stvari želimo izračunati ili pridružiti nekoj vrijednosti *x-a*.

U stvari da bi izračunali varijablu *y* moramo izračunati izlaz iz bloka f_2, odnosno bloka f_1, a za to bi morali poznavati varijablu *y*.

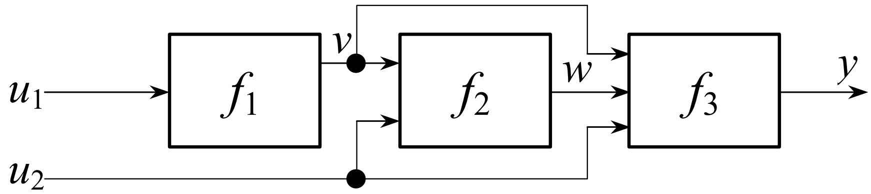
Zaključimo: Za razmatranu klasu sustava definiramo eksplicitni sustav kao onaj, koji se uvijek može opisati sortiranom spojnom listom. Implicitni sustav je onaj koji se ne može opisati sortiranom spojnom listom. Implicitni sustav u blok dijagramu ima najmanje jednu petlju. To je sustav kako se kaže, s povratnom vezom. Gornja definicija može se proširiti na sustave s više izlaza. U malim sustavima lako se vidi iz blok dijagrama da li neki sustav ima povratne veze ili ne. Spojna lista daje nam način za ustanovljavanje radi li se o eksplicitnom sustavu kad je sustav velik, gdje vizualna inspekcija može dovesti do pogrešnog zaključka.

2.5 Formulacije i rješenja jednadžbi sustava

2.5.1 Eksplicitni sustav

Formulacija jednadžbi jednog eksplicitnog sustava je direktna. Provodi se na temelju spojne liste ili blok dijagrama. Jednostavno se napišu ulazno-izlazne jednadžbe za svaki funkcijski blok u redoslijedu danom s sortiranom spojnom listom.

Uzmimo primjer sustav na Sl. 2.17:



Sl. 2.17

$$
\begin{array}{ll}
f_1 : x_1 & v = f_1(x_1) \\
f_2 : f_1, x_2 & w = f_2(v, x_2) \\
f_3 : f_1, f_2, x_2 & y = f_3(v, w, x_2) \\
 & y = f_3\{f_1(x_1), f_2[f_1(x_1), x_2], x_2\}.
\end{array} \tag{2.12}
$$

Na temelju poznavanja x_1 i x_2 mi možemo odrediti y tj. mi možemo odrediti

$$y = h(x_1, x_2).$$

Ako na primjer:

$$
\begin{array}{ll}
f_1(x_1) = x_1^2 & v = x_1^2 \\
f_2(v, x_2) = v + x_2 & w = v + x_2 \\
f_3(v, w, x_2) = vwx_2 & y = vwx_2
\end{array}
$$

$$y = x_1^2(x_1^2 + x_2)x_2 = x_1^4 x_2 + x_1^2 x_2^2.$$

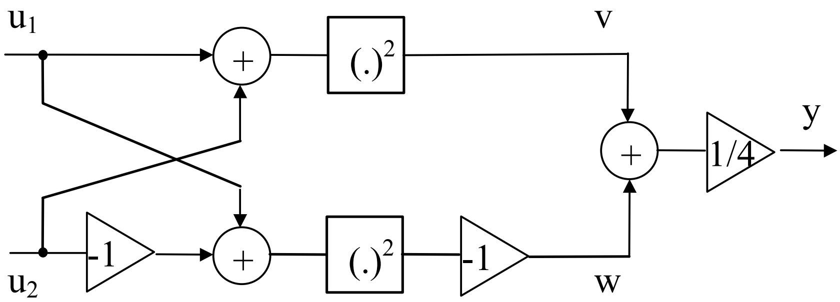
Za na primjer: $x_1 = -2$ i $x_2 = 1$ izlazi $v = 4$, $w = 5$, $y = 20$.

U eksplicitnom sustavu računanje prema spojnoj listi uvijek je lagano, jer je lista sortirana i u svakom koraku (retku) mi računamo s veličinama koje su poznate ili izračunate u prethodnim koracima. To je način na kojem se temelje programi za računalo za računanje izlaza ovakvih sustava. U pogodnom jeziku se gornji problem rješava s:

1. zovi potprogram za x_1^2 i pohrani u v
2. zovi potprogram za $v + x_2$ i pohrani u w
3. zovi potprogram za vwx_2 i pohrani u y.

Programi za računalo mogu se napisati za vrlo velike i složene sustave s tisućama spajanja, dok su sustavi eksplicitni. Razumljivo je, nije uvijek nužno, niti poželjno, ići kroz spojnu listu u cilju formulacije jednadžbi. One se mogu napisati često samo uvidom u blok dijagram upotrebljavajući minimalan broj varijabli.

Primjer: Multiplikator napravljen s blokovima za kvadriranje



Sl. 2.18

Jednadžbe se mogu napisati uvidom u blok dijagram ovog eksplicitnog sustava

$$v = (u_1 + u_2)^2,$$
$$w = -(u_1 - u_2)^2,$$
$$y = \frac{1}{4}(w + v),$$

odakle slijedi

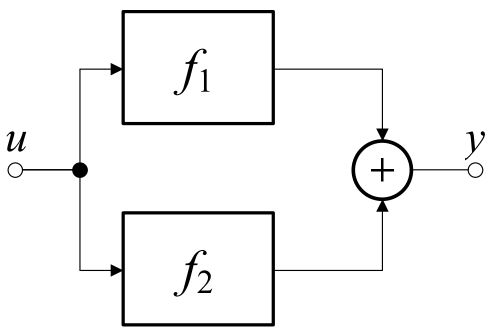
$$y = \frac{1}{4}\left[(u_1 + u_2)^2 - (u_1 - u_2)^2\right] = u_1 u_2 .$$

Ovaj sustav predstavlja realizaciju multiplikatora u analognom računalu.

Najjednostavnija spajanja blokova s jednim ulazom i jednim izlazom koja daju eksplicitan sustav su spajanje u paralelni slog i kaskadu.

2.5.2 Spajanje u paralelni slog

Blok dijagram na Sl. 2.19.



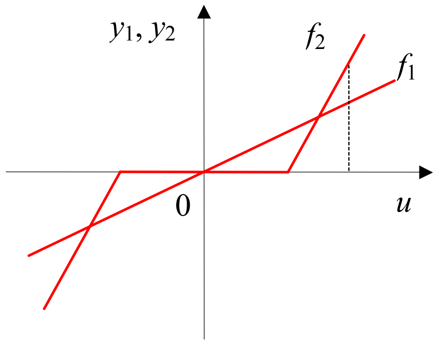
Sl. 2.19

$$y = y_1 + y_2$$
$$y_1 = f_1(u)$$
$$y_2 = f_2(u)$$
$$y = f(u) = f_1(u) + f_2(u)$$
$$f = f_1 + f_2 \tag{2.13}$$

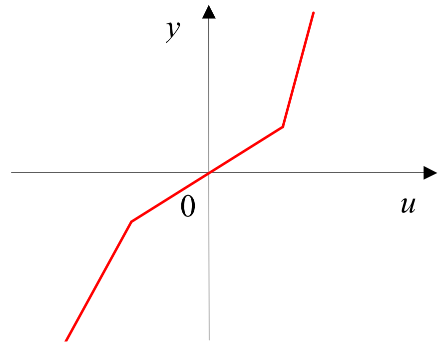
naziva se paralelni spoj ili slog sustava. Za veći broj sustava paralelno složenih

$$y = f(u) = \sum_1^n f_i(u) . \tag{2.14}$$

Karakteristika paralelnog sloga dobiva se zbrajanjem karakteristika blokova. Ordinate y_i rezultirajuće karakteristike dobivaju se zbrajanjem ordinata karakteristika f_1 i f_2 za pogodan broj apscisa u_i, $i = 1, 2$.



Sl. 2.20a

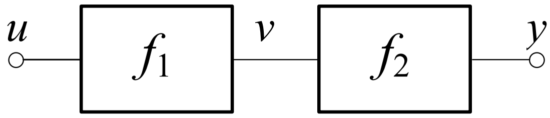


Sl. 2.20b

Odbijanjem ordinata može se dogoditi karakteristika razlika ako se traži $f = f_1 - f_2$.

2.5.3 Spajanje u kaskadu

Blok dijagram na Sl. 2.21.



Sl. 2.21

$$\begin{aligned} y &= f_2(v) \\ v &= f_1(u) \\ y &= f_2(f_1(u)) \end{aligned} \tag{2.15}$$

naziva se kaskadom sustava. Funkcija kaskade je funkcija od funkcije odnosno kompozicija funkcija f_1 i f_2.

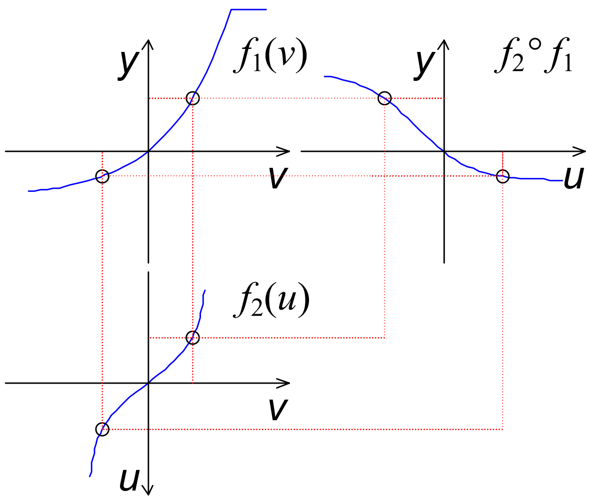
$$f = f_2 \circ f_2 . \tag{2.16}$$

Za kaskadu s većim brojem blokova vrijedi

$$\begin{aligned} y &= f_n(f_{n-1}(f_{n-2}(\ldots(f_1(u))\ldots))), \\ f &= f_n \circ f_{n-1} \circ f_{n-2} \circ \ldots \circ f_1 . \end{aligned} \tag{2.17}$$

Promjena redoslijeda blokova u kaskadi daje drugačiju funkciju kaskade.

Karakteristika kaskade dobiva se grafičkim postupkom kao na slici:

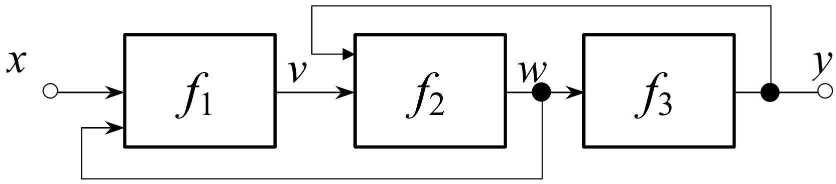


Sl. 2.22

Prevrnuta za 90 karakteristika f_1 omogućuje da se iz pogodnog broja ulaznih veličina u_i odredi v_i.

2.5.4 Implicitni sustavi

Formulacija jednadžbi jednog implicitnog sustava, dakle takvog koji ima petlje povratne veze, može biti provedena privremenim prekidom petlji povratne veze da bi se dobio eksplicitni sustav. U dobivene jednadžbe eksplicitnog sustava se dodaju jednadžbe koje izražavaju zatvaranje petlji. Uzmimo primjer na Sl. 2.23.

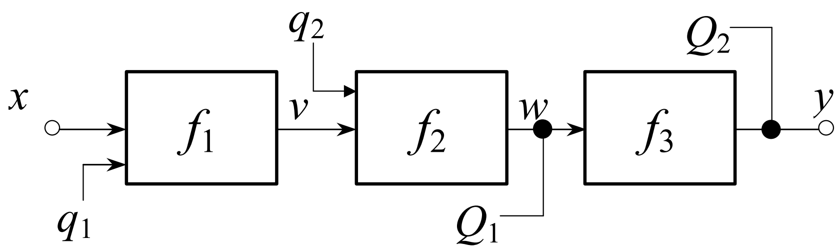


Sl. 2.23

Spojna lista je: f_1: x, f_2

$$f_2\colon f_3, f_1, \quad f_3\colon f_2. \tag{2.18}$$

Da bismo dobili eksplicitni sustav prekinimo petlje i označimo varijable priključnica. Shvatimo te priključnice kao nove ulaze, odnosno izlaze.



Sl. 2.24

Spojna lista eksplicitnog sustava ili sustava s otvorenim petljama je:

$$\begin{aligned} &f_1 : x, q_1 && v = f_1(x, q_1),\\ &f_2 : q_2, f_1 && w = f_2(q_2, v),\\ &f_3 : f_2 && y = f_3(w), \end{aligned} \tag{2.19}$$

gdje su q_1 i q_2 smatrane kao ulazi sustava. Zatvaranje petlji izrečeno je s dva slijedeća popratna uvjeta:

$$q_1 = w \quad \text{i} \quad q_2 = y.$$

Nepotrebne varijable v i w mogu se eliminirati, tako da se izraze varijable povratnih veza q_1 i q_2.

$$\begin{aligned} &q_1 = w = f_2(q_2, f_1(x, q_1)) && q_1 = f_2(f_3(q_1), f_1(x, q_1)),\\ &q_2 = f_3(q_1) && q_1 = \Phi(x, q_1) \to q_1 = \Psi(x),\\ &y = q_2 && y = q_2 = f_3(q_1) = f_3(\Psi(x)) = \lambda(x). \end{aligned} \tag{2.20}$$

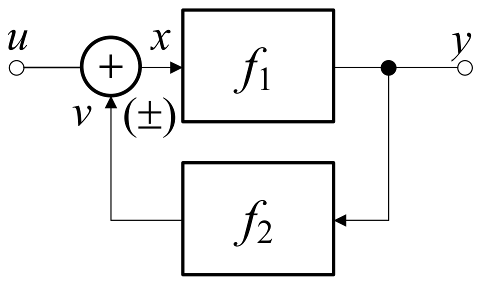
Jednadžbe su implicitne i daju vrijednosti varijabli q_1 i q_2 u zavisnosti od njih samih i ulaza sustava. Mi ne možemo izračunati q_1 dok ne znamo q_1. Taj problem se nekad može riješiti analitički, ali se redovito dade riješiti numerički iterativnim postupcima. Kod analitičkog postupka nekad je lakše izraziti ulaz kao funkciju izlaza, dakle odrediti inverznu funkciju.

Iterativni postupak se počne s pretpostavljenom vrijednosti q_{10} u jednadžbi i provodi korak po korak.

$$q_{11} = f_2\left[f_3(q_{10}), f_1(x, q_{10})\right],$$
$$q_{1(k+1)} = f_2\left[f_3(q_{1k}), f_1(x, q_{1k})\right].$$

Za neki iznos varijable x izračuna se aproksimacija q_{11} koja će se upotrijebiti za računanje slijedeće točnije vrijednosti q_{12} itd. Ponavljanje postupka nastavlja se dok jednadžba nije zadovoljena do željene točnosti.

Najjednostavnije spajanje blokova s jednim ulazom i jednim izlazom u implicitni sustav je spajanje u prsten kao na slici



Sl. 2.25

$$y = f_1(x)$$
$$v = f_2(y) \tag{2.21}$$
$$x = u \pm v$$

To je sustav s povratnom vezom koja može biti pozitivna ($x = u + v$) ili negativna ($x = u - v$).

Ulaz se može izraziti s

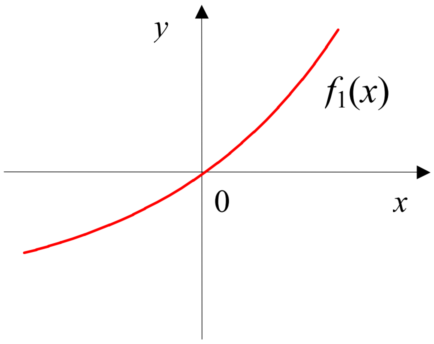
$$u = x \mp v = f_1^{-1}(y) \mp f_2(y)\,, \tag{2.22}$$

što predstavlja inverznu funkciju sustava s povratnom vezom. Dobiva se postupak zbrajanja odnosno oduzimanja apscisa x_i i v_i dobivenih za nekoliko izlaznih veličina y_i odnosno

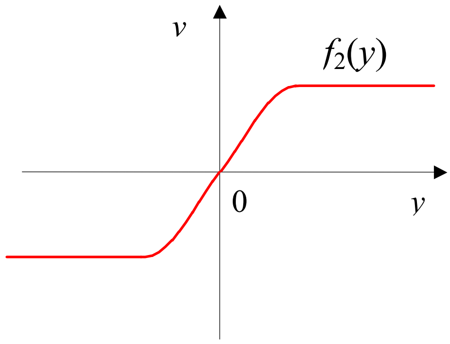
$$y = f(u); \qquad f = (f_1^{-1} \mp f_2)^{-1} \tag{2.23}$$

Ovdje se pretpostavlja da sve funkcije s kojima radimo imaju inverziju. Grafički postupci s karakteristikama su lakši i kada to nije slučaj.

Uzmimo primjer sustava s karakteristikama kao na Sl. 2.26.



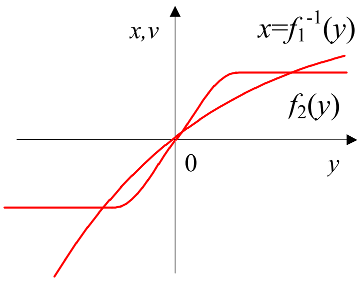
Sl. 2.26a



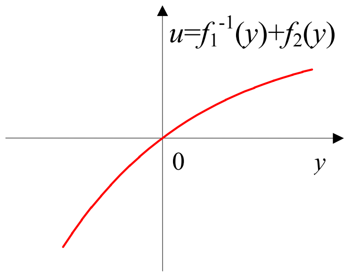
Sl. 2.26b

Sustav s negativnom povratnom vezom imat će karakteristiku koja se dobije iz

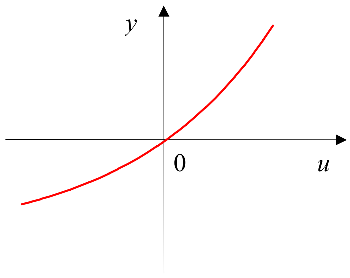
$$u = f_1^{-1}(y) + f_2(y)\,.$$



Sl. 2.27a

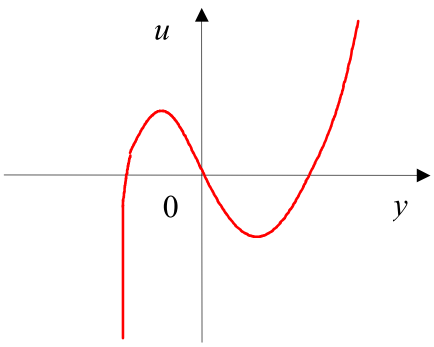


Sl. 2.27b

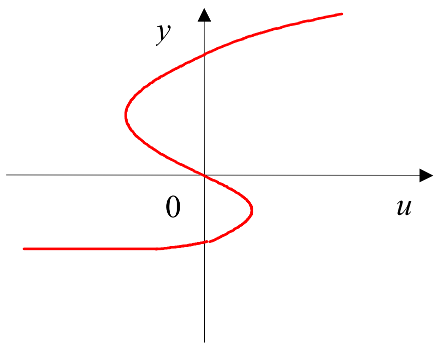


Sl. 2.27c

Sustav s pozitivnom povratnom vezom $u = f_1^{-1}(y) - f_2(y)$



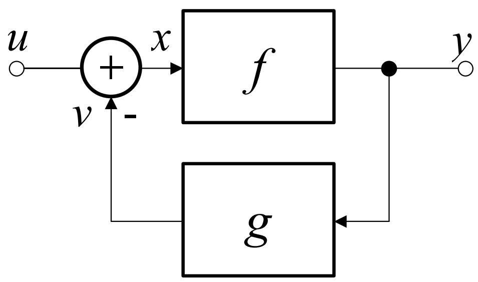
Sl. 2.28a



Sl. 2.28b

Dok se u prvom slučaju iz funkcijskih blokova dobio opet funkcijski, u drugom slučaju rezultirajući sustav je relacijski.

Primjer: Sustav s povratnom vezom za dobivanje inverzne funkcije.



$$y = f(x) = ax$$
$$v = g(y)$$
$$x = u - v$$

Sl. 2.29

Blok f je pojačalo vrlo velikog pojačanja tako da je njegov izlaz $y = ax$ proporcionalan ulazu x, dok je konstanta pojačanja a vrlo veliki realni broj. Blok g je karakteriziran funkcijom $v = g(y)$ koja ima inverziju g^{-1}. Formulacija jednadžbe vodi na $y = ax = a(u - g(y))$ gdje se može u izraziti eksplicitno pomoću y.

$$u = g(y) + \frac{y}{a}.$$

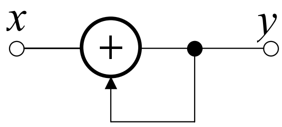
Kako pojačalo ima veliko pojačanje a>>1, dobit ćemo vrlo dobru aproksimaciju s

$$u = g(y),$$

odnosno inverznu funkciju

$$y = g^{-1}(u).$$

Kako se pokazalo u primjeni jednostavnih sustava s povratnom vezom implicitni sustavi ne moraju biti funkcijski sustavi, iako su blokovi funkcijski, nego mogu biti i relacijski, tako da za jednu vrijednost ulaza može biti više vrijednosti izlaza ili pak realno rješenje možda i ne postoji. Ovo posljednje možemo demonstrirati običnim sumerom s povratnom vezom



$$y = x + y$$

Sl. 2.30

Za x različiti od nule nema rješenja za y, tj. nema mogućeg realnog izlaza osim za $x = 0$, a tada može biti bilo koji y. (Karakteristika je u y-osi). Drugi slučaj imamo ako pretpostavimo da blok f je slijedilo ($a = 1$), a blok g vrši kvadriranje $g(y) = y^2$ u ranijem primjeru, što vodi na jednadžbu

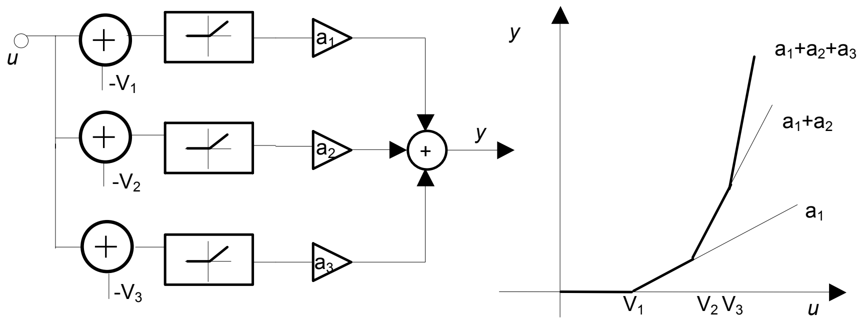
$$y = y^2 + x.$$

Ova jednadžba zadovoljena je za dvije vrijednosti y, uz $x = 0$ tj. $y = 0$ i $y = 1$. Karakteristika je parabola koja presijeca ordinatu u točkama (0,0) i (0,1) i ima tjeme u (1/4,1/2). Dva gornja primjera ilustriraju dva osnovna pitanja poznata kao egzistencija i jednoznačnost rješenja jednadžbi. Vidimo da implicitni sustavi su generalno karakterizirani matematičkim relacijama i ne nužno funkcijama iako su sastavljeni od funkcijskih blokova. Za prvi primjer imamo da je sustav karakteriziran nul relacijom, dakle relacijom koja nema ulazno-izlaznih parova, dok u drugom primjeru imamo parove (0,0) i (0,1) što ukazuje da se ne radi o funkcijskoj vezi između ulaza i izlaza.

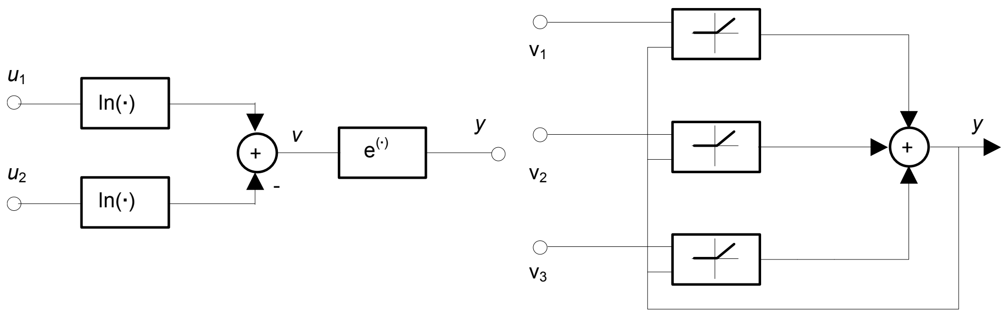
Iako kod takovih bezmemorijskih sustava možemo dobiti jasne odgovore o vladanju, njihovo vladanje kad su memorijski, može biti veoma složeno.

Kod jednostavnih implicitnih sustava nije nužno ići kroz cijelu proceduru prekidanja povratnih veza i pisanja spojnih lista, već je moguće jednadžbe napisati na temelju uvida u blok dijagram što neće biti slučaj kod velikih sustava i pisanja programa za računalo.

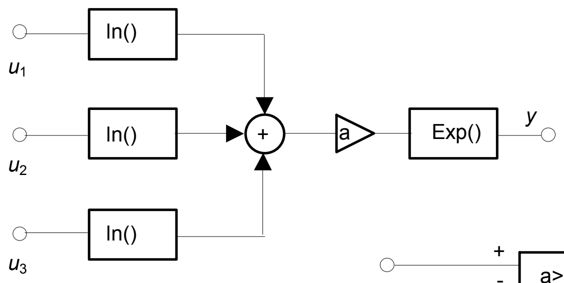
2.6 Realizacije nekih karakteristika



Sl. 2.31

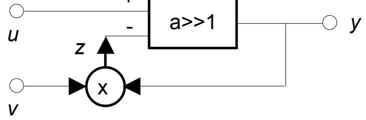


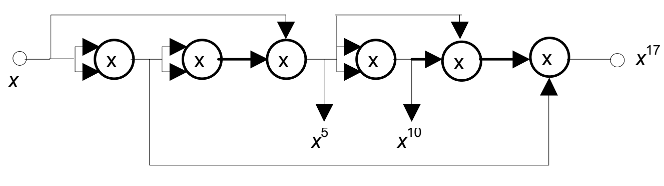
Sl. 2.32



$$y = (u_1\, u_2\, u_3)^{a}$$

$$y = u/v \text{ za } v > 0$$





Sl. 2.33

2.7 Ekvivalencija i aproksimacija sustava

Definicija: Dva sustava su ekvivalentna ako su za sve moguće ulazne vrijednosti njihovi ulazno-izlazni odnosi identični.

Pojam ekvivalencije je značajan, jer je u analizi često potrebno pojednostavniti strukturu sustava bez promjene ulazno-izlaznih odnosa sustava.

Definicija: Dva sustava su aproksimativno ekvivalentna ako za sve moguće identične ulaze imaju aproksimativno jednake izlaze. Ova definicija je nekompletna dok nije specificiran način za ispitivanje da li su dva izlaza približno jednaka. Ima mnogo načina za definiciju aproksimativno jednakih signala, svaki od njih s prednostima i nedostatcima za određenu primjenu.

Na primjer: Dva izlaza y_1 i y_2 dva sustava mogu se smatrati približno jednakim ako je najveći iznos apsolutnog iznosa odstupanja

$$\varepsilon_m = \max\left|y_1(x) - y_2(x)\right| < \varepsilon_{md} \qquad \mathrm{a} \le x \le \mathrm{b}\,,$$

manji od dozvoljenog ε_{md}.

Druga mogućnost karakterizacije efektivne greške je integral kvadrata odstupanja

$$\varepsilon_{ef} = \int_a^b \left[y_1(x) - y_2(x)\right]^2 dx < \varepsilon_{efd} \qquad a \le x \le b\,, \tag{2.24}$$

manji od dozvoljenog ε_{efd}.

Manja odstupanja u okolišu jedne točke predstavljaju se polinomom n-tog stupnja razvojem u Taylorov red.

$$\delta_0(x) = \left[y_1(x) - y_2(x)\right]_{x=x_0} = \delta(x_0) + \delta'(x_0)\frac{\Delta x}{1!} + \delta''(x_0)\frac{(\Delta x)^2}{2!} + \ldots + \delta^{(n)}(x_0)\frac{(\Delta x)^n}{n!} + R\,, \tag{2.25}$$

$$\Delta x = x - x_0\,.$$

Greška se procjenjuje s $(n + 1)$ članom.

Navedeni načini karakterizacije greške se upotrebljavaju u teoriji aproksimacije i mogu se poopćiti za vektorske funkcije tj. za bezmemorijske sustave s više ulaza i izlaza.

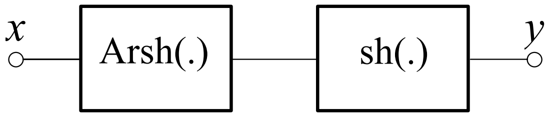
2.8 Linearnost sustava

Linearni sustav bez memorije je vrlo važan podskup kontinuiranih sustava bez memorije koji zadovoljava uvjet linearnosti.

Definicija: Sustav s jednim ulazom x i jednim izlazom y je linearan ako zadovoljava uvjet

$$f(\mathrm{a}\cdot x_1 + \mathrm{b}\cdot x_2) = \mathrm{a}\cdot f(x_1) + \mathrm{b}\cdot f(x_2)\,, \tag{2.26}$$

za sve realne vrijednosti a, b, x_1 i x_2. Taj uvjet je dovoljan i nužan. Drugim riječima, funkcijski blok vrši linearnu operaciju bez memorije, ako je gornji uvjet zadovoljen. Složeni sustav koji zadovoljava uvjet linearnosti ne mora nužno biti sastavljen od elemenata ili podsustava koji su linearni. Na primjer sustav



Sl. 2.34

je linearan, ali budući da njegovi elementi nisu, kaže se da nije strukturno linearan. Svaki sustav koji je strukturno linearan (svi elementi linearni), linearan je i operacijski.

Sustav s dva ulaza x_1 i x_2 i izlazom $f(x_1,x_2)$ je linearan ako je $f(\mathrm{a}x_{11} + \mathrm{b}x_{12}, \mathrm{a}x_{21} + \mathrm{b}x_{22}) = \mathrm{a}f(x_{11},x_{21}) + \mathrm{b}f(x_{12},x_{22})$ za sve realne vrijednosti a, b, x_{11}, x_{12}, x_{21} i x_{22}. Lako se vidi iz definicije da je linearan sustav s više ulaza također linearan obzirom na svaki pojedini ulaz kad su ostali ulazi jednaki nuli. Obratno, međutim ne vrijedi općenito, jer može postojati linearan sustav za ulaz x_j dok su ostali ulazi $x_i = 0$, osim za $i = j$, ali to ne mora biti za bilo koji x_j.

Linearni sustav f bez memorije s ulazima x_1 do x_n i izlazom y može uvijek biti karakteriziran s ulazno-izlaznom relacijom

$$y = \sum_{1}^{n} \mathrm{a}_i x_i = [\mathrm{a}_1 \quad \cdots \quad \mathrm{a}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \tag{2.27}$$

gdje su a_i realne konstante. Izlaz linearnog sustava s n ulaza x_1 do x_n jednak je sumi izlaza iz n identičnih sustava od kojih k-ti ima ulaz x_k, a sve ostale ulaze jednake nuli. Na primjer:

$$y = f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1,0,0) f(0,x_2,0) + f(0,0,x_3)\,.$$

Ako je sustav s n ulaza i m izlaza treba nam $m \cdot n$ vrijednosti konstanti za karakterizaciju takvog sustava.

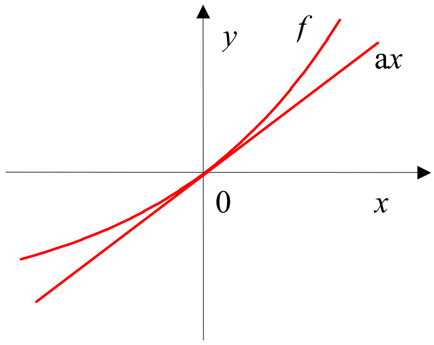
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{1n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \ \mathbf{y} = \mathbf{Ax}\,.$$

2.9 Aproksimacija nelinearnog sustava linearnim

U analizi sustava vrlo je važan slučaj aproksimacije nelinearnog sustava linearnim. Nelinearna funkcija bloka $f(x)$ razvija se u Taylorov red u okolišu jedne točke x_0 (radne točke) dok se greška može ocijeniti drugom derivacijom kao što je spomenuto prije.

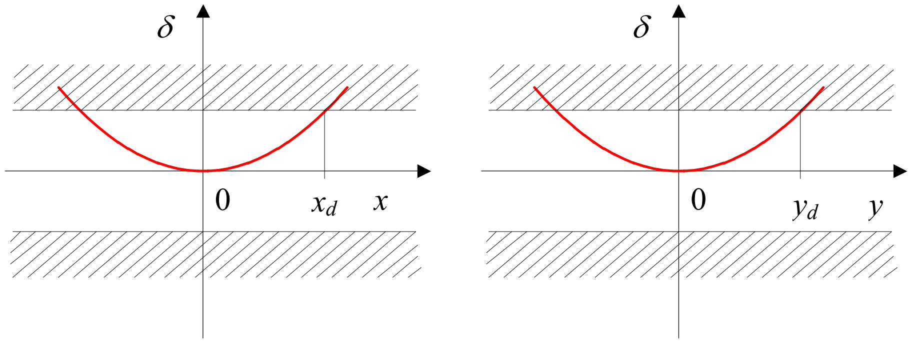
$$f(x_0 + x) = f(x_0) + f'(x_0)x + \delta(x)\,,$$

$$y = f(x_0 + x) - f(x_0) = ax + \delta(x)\,. \tag{2.28}$$



Sl. 2.35

Od reda se zadržava samo linearni član $f'(x_0)x = ax$ dok ostatak $\delta(x)$ predstavlja odstupanje od linearnosti. Odstupanje se često predstavlja grafički kao funkcija odstupanja ulaza x ili odstupanja izlaza y.



Sl. 2.36

Iz dozvoljenog odstupanja će se odrediti dozvoljeni prirast ulaza x_d odnosno dozvoljeni prirast izlaza y_d pri kojem sustav možemo smatrati linearnim. Te veličine su redovito malene prema protezanju odnosno zakrivljenosti karakteristike. Linearna analiza uz zadovoljene gornje uvijete naziva se analizom za "mali signal". Analiza za "veliki signal", provodi se kad procesi u sustavu iskorištavaju veliki dio karakteristike nelinearnog bloka ili elementa. To je nelinearna analiza.

Ostale karakterizacije odstupanja od linearnosti su relativna pogreška linearnosti

$$\delta_r = \frac{\delta}{ax} = \frac{y - ax}{ax}, \tag{2.29}$$

apsolutna diferencijalna pogreška linearnosti

$$\varepsilon = \left(\frac{dy}{dx}\right) - a \tag{2.30}$$

i relativna diferencijalna pogreška linearnosti

$$\varepsilon_r = \frac{\dfrac{dy}{dx} - a}{a}. \tag{2.31}$$

Kako se diferencijalna pogreška može napisati u obliku

$$\frac{dy}{dx} - a = a\varepsilon_r(y), \qquad y \doteq ax. \tag{2.32}$$

Integracija po x odnosno y daje

$$y - ax = a\int_0^x \varepsilon_r d\xi = a\int_0^y \varepsilon_r \frac{d\eta}{a} \tag{2.33}$$

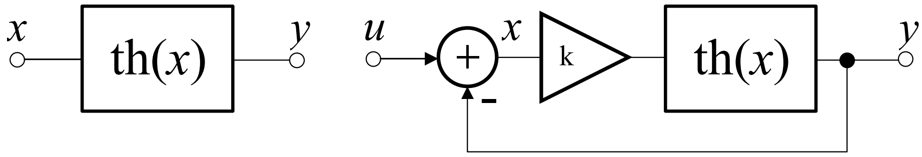
pa vrijedi veza između pogreški

$$\delta(y) = \int_0^y \varepsilon_r d\eta. \tag{2.34}$$

Apsolutna greška se može dobiti integracijom diferencijalne pogreške po izlazu ili relativne diferencijalne pogreške po ulazu.

2.9.1 Utjecaj povratne veze na linearnost

Uzmimo kao primjer nelinearnog funkcijskog bloka koji ima inverziju i formirajmo sustav s povratnom vezom s dodanim pojačalom, koje će povećati pojačanje u petlji povratne veze.

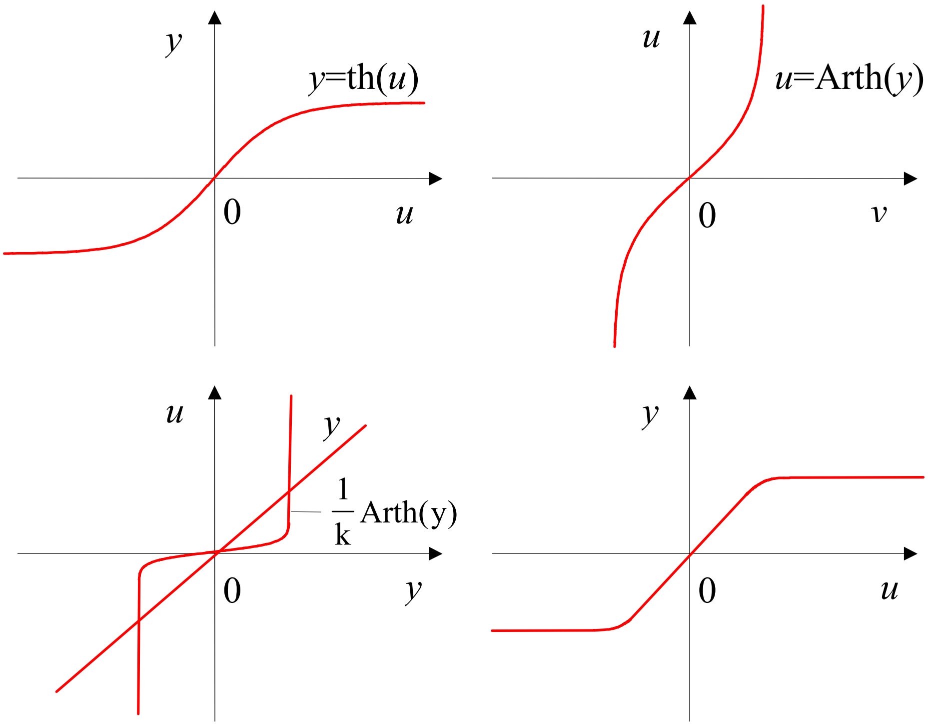


Sl. 2.37

$$x = u - y, \qquad y = \mathrm{th}(kx), \qquad kx = \mathrm{Arth}\, y \qquad k > 0,$$

$$u = x + y = y + \frac{1}{k}\mathrm{Arth}\ y. \tag{2.35}$$

Karakteristike sustava bez i s povratnom vezom prikazane su na Sl. 2.38.



Sl. 2.38

Vidi se da povratna veza popravlja linearnost unutar raspoloživih granica izlaza.

To se može vidjeti i iz izraza $u = y + \frac{1}{k}\mathrm{Arth}\ y$. Za veće pojačanje u petlji k, doprinos nelinearne komponente je manji, prema tome manje je i odstupanje od linearne funkcije $u = y$.

Pozitivna povratna veza $x = \mathrm{Arth}\ y$ će dati

$$u = x - y = \frac{1}{k}\mathrm{Arth}\ y - y\,.$$

Ovim se dobiva model takozvanog Schmidt-ovog bistabilnog sklopa u elektronici.

2.9.2 Linearizacija funkcijskog bloka s više ulaza i izlaza

Za nelinearni funkcijski blok može se upotrijebiti Taylorov razvoj za sve izlaze kao funkcije više varijabli

$$y_i = f_i(u_1, u_2, \ldots, u_m),\ \ i = 1,2,\ldots,n.. \tag{2.36}$$

Razvoj daje

$$y_i = f_i(u_{10}, u_{20}, \ldots, u_{m0}) + \frac{\partial f_i}{\partial u_1}\Delta u_1 + \frac{\partial f_i}{\partial u_2}\Delta u_2 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial u_m}\Delta u_m + \text{članovi višeg reda.} \tag{2.37}$$

Ovo se može za sve izlaze napisati pomoću Jacobijeve matrice

$$\Delta \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \vdots \\ \Delta y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial u_1} & & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial u_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \vdots \\ \Delta u_m \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} \,. \tag{2.38}$$

Zanemarivanjem viših članova sustav je u okolišu točke $y_0 = f(\mathbf{u}_0)$ za mala odstupanja linearan

$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} \,. \tag{2.39}$$

3. MODELI MEMORIJSKIH SUSTAVA

3.1 Sustav u konačnom intervalu

Kauzalni sustav s beskonačnom memorijom je definiran s

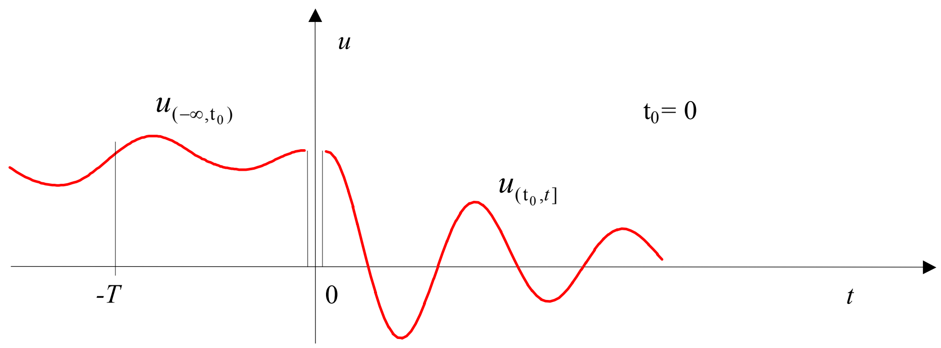
$$y(t) = F(u_{(-\infty,t]}),$$

pri tom $u_{(-\infty,\, t]}$ ne uključuje trivijalni slučaj da je $u_{(-\infty,\, t]} = u(t)$. Sustav dakle nije bezmemorijski.

Realne sustave pratimo ili promatramo redovito u konačnom intervalu kojeg ćemo zvati interval promatranja od t_0 do t. On je ograničen s početnim trenutkom t_0 i krajnjim trenutkom t, koji može biti promjenjiv kad želimo općenito odrediti ili predvidjeti vladanje sustava u vremenu. Zanima nas dakle segment odziva $y_{(t_0,t]}$ kao posljedica pobude ili segmenta pobude $u_{(t_0,t]}$.

Pobuda koja teče od $-\infty$ se može podijeliti na dva segmenta $u_{(-\infty,t_0]}$ i $u_{(t_0,t]}$ (Sl. 3.1).

$$y(t) = F(u_{(-\infty,t_0]}, u_{(t_0,t]}),\ \ t > t_0\,. \tag{3.1}$$



Sl. 3.1

Uzmimo kao jednostavan primjer, odziv vremenski stalnog linearnog sustava ($h(t,\tau) = h(t-\tau)$). On je dan linearnim preslikavanjem pobude:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau, \quad \tau, t \in (-\infty,\infty)\,.$$

Vladanje takvog sustava u konačnom intervalu $t \in (t_0,\ t]$ se može istražiti podjelom vremena integracije $(-\infty,\infty)$ na tri intervala: $(-\infty,\ t_0]$, $(t_0,\ t]$, $(t,\ \infty)$, koji se dodiruju.

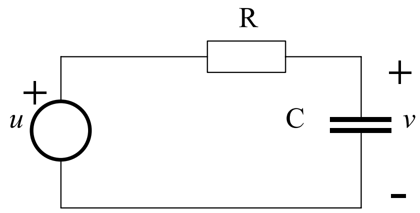
$$y(t) = \int_{-\infty}^{t_0} u(\tau)h(t-\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} u(\tau)h(t-\tau)d\tau + \int_{t}^{+\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau\,.$$

Posljednji integral je nula ako pretpostavimo kauzalan sustav $h(t-\tau) = 0$ za $\tau > t$, dok prvi integral predstavlja odziv sustava s pobudom prije t_0. U intervalu promatranja $(t_0,t]$, taj integral daje neku odzivnu funkciju g, koja je posljedica pobude do trenutka t_0, ali nije posljedica pobude iza t_0. Znači da trenutne vrijednosti $g(t)$ za $t > t_0$ ne zavise od trenutnih vrijednosti pobude $u(\tau)$ za sve τ>t₀, već samo od prošlih vrijednosti pobude $u(\tau)$ iz intervala $\tau \in (-\infty, \mathrm{t}_0]$. Drugi integral daje odziv y koji je posljedica pobude iz intervala $(\mathrm{t}_0, t]$.

Za g možemo reći da predstavlja procese u sustavu koji su posljedica pohranjene energije, materije ili informacije unutar sustava, pobudom do trenutka t_0, pa se $y(t)$ može napisati kao:

$$y(t) = g(t) + \int_{\mathrm{t}_0}^{t} u(\tau) h(t-\tau) d\tau, \quad t > t_0 . \tag{3.2}$$

Pri tom g, mada je prisutna za sve $t > \mathrm{t}_0$, nije posljedica pobude u iz intervala $(\mathrm{t}_0, t]$. Budući da nas zanima segment odziva $y_{(\mathrm{t}_0, t]}$, kao posljedica segmenta pobude $u_{(\mathrm{t}_0, t]}$, pogledajmo kako uzeti u obzir funkciju g za $t > \mathrm{t}_0$. Diskutirajmo ilustrativan primjer.



Sl. 3.2

Uzmimo sustav kod kojeg je ulazno-izlazna relacija obična diferencijalna jednadžba. Možemo uzeti električki krug na Sl. 3.2 i pratiti nabijanje kondenzatora naponskim izvorom za $RC = 1$.

$$RC \frac{dv}{dt} + v = u$$

Funkcija h je tada dana s $h(t) = e^{-t}$, za $t > \mathrm{t}_0$, a odziv na pobudu u će biti:

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\mathrm{t}_0} u(\tau) e^{-(t-\tau)} d\tau + \int_{\mathrm{t}_0}^{t} u(\tau) e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-t} \int_{-\infty}^{\mathrm{t}_0} u(\tau) e^{\tau} d\tau + \int_{\mathrm{t}_0}^{t} u(\tau) e^{-(t-\tau)} d\tau$$

Određeni integral pobude iz $(-\infty, \mathrm{t}_0]$ daje neki broj C, pa slijedi

$$v(t) = Ce^{-t} + \int_{\mathrm{t}_0}^{t} u(\tau) e^{-(t-\tau)} d\tau$$

Pretpostavimo da znamo vrijednost $v(\mathrm{t}_0)$:

$$v(\mathrm{t}_0) = Ce^{-\mathrm{t}_0} + 0 \Rightarrow C = v(\mathrm{t}_0) e^{\mathrm{t}_0} .$$

Uz poznati $v(\mathrm{t}_0)$, dobit ćemo $v(t)$ jednoznačno određen pobudom $u_{(t_0, t]}$

$$v(t) = v(\mathrm{t}_0) e^{-(t-\mathrm{t}_0)} + \int_{\mathrm{t}_0}^{t} u(\tau) e^{-(t-\tau)} d\tau, \quad t > \mathrm{t}_0 \tag{3.3}$$

Vidimo da za $t > \mathrm{t}_0$ možemo odrediti ili predvidjeti vladanje sustava prateći pobudu iz intervala $(\mathrm{t}_0, t]$, dok prošlu pobudu možemo ignorirati ukoliko znamo stanje napona na kondenzatoru u trenutku t_0. Ako je tomu tako onda je sasvim nevažno kakvom pobudom se stiglo do tog početnog napona $v(\mathrm{t}_0)$, bitan je samo njegov iznos za daljnje $t > \mathrm{t}_0$ vladanje sustava. $v(\mathrm{t}_0)$ je vrlo značajna veličina i veza između $v(t)$ i pobude u promatranom intervalu nije jednoznačna, dok nije poznata veličina $v(\mathrm{t}_0)$. Ona se naziva početno stanje ovog sustava.

Kod sustava opisanih običnim diferencijalnim jednadžbama rezultat pobude iz intervala $(-\infty, \mathrm{t}_0]$ može se uzeti u obzir jednim α ili više brojeva $\{\alpha_i\}$. Ti brojevi sadržavaju informaciju o prošlosti sustava tako da za $t>\mathrm{t}_0$ vrijedi

$$y(t) = F(u_{(-\infty,\mathrm{t}_0]}, u_{(\mathrm{t}_0,t]}) = F(\alpha, u_{(\mathrm{t}_0,t]}) \tag{3.4}$$

To je svojstvo kauzalnih sustava sa zbijenim parametrima (diferencijalni sustavi). Izlaz iz sustava u trenutku t zavisi od pobude u intervalu $(\mathrm{t}_0, t]$ i stanja sustava u trenutku t_0, koje stanje je dano brojem $x(\mathrm{t}_0)\in\mathbf{X}\subseteq\mathbb{R}$. Stanje je dakle akumulirani efekt prošle pobude dan brojem ili skupom brojeva.

Za kauzalne sustave opisane običnim diferencijalnim jednadžbama će biti moguće osigurati jednoznačnu vezu između segmenta odziva $y_{(t_0,t]}$ i segmenta pobude $u_{(t_0,t]}$ uvođenjem jednog parametra x_0, kojim se uzima u obzir prošla pobuda iz intervala $(-\infty, \mathrm{t}_0]$.

$$y_{(\mathrm{t}_0,t]}(t) = \overline{F}\left[x_0, u_{(\mathrm{t}_0,t]}\right] \tag{3.5}$$

Kao što slijedi iz pređašnjeg razmatranja u općem slučaju svakom segmentu pobude $u_{(\mathrm{t}_0,t]}$ odgovara više izlaznih segmenata $y_{(\mathrm{t}_0,t)}$. Svaki pojedini segment pobude za y u skupu čini ulazno-izlazni par, koji pripada $\mathcal{S}$-u. Jedan način da se jedinstveni y pridruži svakoj pobudi u sastoji se u zadavanju svakom paru (u, y) jednog parametra x_0 takovog da je y jednoznačno određen s u i x_0.

To će biti moguće za sustave sa zbijenim parametrima kako smo pokazali u našem primjeru linearnog sustava (3.3), gdje se može funkcija g odrediti poznavanjem broja $v(\mathrm{t}_0)$ koji zovemo stanje sustava $\mathcal{S}$, $x(\mathrm{t}_0) = v(\mathrm{t}_0)$ u trenutku t_0. Stanje $v(\mathrm{t}_0)$ u (3.3) se pojavljuje kao parametar.

Postupak parametrizacije možemo ilustrirati na slijedeći način. Pretpostavimo da je sustav $\mathcal{S}$ predstavljen katalogom, gdje na svakoj stranici imamo pobudu i odgovarajući odziv, gdje par funkcija (u, y) čini ulazno-izlazni par koji pripada $\mathcal{S}$-u. Budući da ima više y za jedan u, parametrizacija se može shvatiti kao označavanje onih stranica kataloga u kojima imamo istu pobudu u pa izlazi da je y jednoznačno određen pobudom i parametrom-brojkom stranice u skupu stranica s istim u-om u katalogu.

Eksplicitan izraz za stanje sustava u bilo kojem trenutku t može također biti jednoznačno određen početnim stanjem $x(\mathrm{t}_0)$ i pobudom $u_{(\mathrm{t}_0,t]}$, što u principu može biti izvedeno iz relacije ulaza, izlaza i stanja (3.5).

Ako bismo trajno pratili napon, odnosno stanje na kapacitetu u našem primjeru (3.3), mogli bismo u bilo kojem trenutku $\mathrm{t}_1>\mathrm{t}_0$ zaboraviti procese u krugu za sve $t<\mathrm{t}_1$. Procese za $t>\mathrm{t}_1$ možemo pratiti koristeći pobudu za $t>\mathrm{t}_1$ i stanje u t_1. Zato se često u sustavu i prati stanje $x(t)$, pa tek iz njega i pobude određuje izlaz iz sustava $y(t)$.

Sustav je opisan općenito s dvije funkcije φ i η.

$$x(t) = \varphi\left[t, t_0, x(t_0), u_{(t_0,t]}\right], \qquad t > t_0, \tag{3.5a}$$
$$y(t) = \eta\left[t, x(t), u(t)\right], \qquad t > t_0 .$$

Kod kauzalnog sustava postoji funkcija φ koja iz početnog trenutka t_0 i stanja $x(t_0)$, te odsječka pobude $u_{(t_0,t]}$ i trenutka $t \in \mathbf{T}$, određuje stanje sustava u trenutku t tj. $x(t)$. (Ovdje se odsječku $u_{(t_0,t]}$ funkcije pridružuje broj $x(t)$.)

Postoji i funkcija η, koja iz stanja $x(t)$ i pobude $u(t)$ u trenutku $t \in \mathbf{T}$, određuje izlaz sustava u trenutku $t \in \mathbf{T}$. (Ovdje se brojevima $u(t)$ i $x(t)$ pridružuje broj $y(t)$.)

Ovako opisan sustav gdje dominantnu ulogu igra stanje sustava kao jedna ili skup unutarnjih varijabli sustava zove se model s varijablama stanja ili model stanja.

Skup varijabli $\{x_i \mid i = 1,2, \ldots, n\}$ čini stanje sustava, ako njihovo poznavanje za $t_0 \in \mathbf{T}$, uz poznavanje odsječka pobude $u_{(t_0,t]}$, osigurava jednoznačno određivanje stanja $x(t)$ i izlaza $y(t)$ za sve trenutke $t > t_0$.

Sustav može imati više ulaznih $\{u_g\}$, $g = 1, 2, \ldots, m$ i izlaznih $\{y_p\}$, $p = 1, 2, \ldots, r$ varijabli, što uz više varijabli stanja definira vektorske prostore, pa se varijable mogu predstaviti vektorima ulaza, stanja i izlaza: $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^r$.

Sustav u kome nema akumuliranih efekata od prijašnjih pobuda opisan je samo s funkcijom η

$$y(t) = \eta\left[t, u(t)\right]$$

i čini klasu trenutnih, bezmemorijskih ili statičkih sustava.

Uzevši u obzir domenu $\mathbf{T}$ i područje varijabli u, x, y sustava, $\mathbf{U}$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, sustav se može okarakterizirati osmorkom

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{T}, \mathbf{U}, \mathcal{U}, \mathbf{Y}, \mathcal{Y}, \mathbf{X}, \varphi, \eta\},$$

gdje $\mathbf{T}$, $\mathbf{U}$, $\mathcal{U}$, $\mathbf{Y}$, $\mathcal{Y}$, $\mathbf{X}$, su ranije dani skupovi, a φ i η funkcije.

Zavisno od skupova i funkcija φ i η u matematičkom modelu, sustav se može svrstati u pojedine klase, koje su modeli određenih realnih sustava. Teorija ne vrši klasifikaciju sustava po područjima primjene. Za vladanje sustava sasvim je irelevantno da li se radi o kemijskom, biološkom, mehaničkom sustavu, avionu, množenju bakterija, obradi signala govora ili televizijske slike ili ekonomiji jedne zemlje. Bitna je matematička forma modela sustava koji se razmatra. Ona će odrediti klasu sustava, a time i metode njegove analize i sinteze.

Ovdje smo šuteći pretpostavili da objekt ili sustav ne pokazuje slučajno vladanje (stohastičko), nego je ono potpuno određeno (determinističko).

Ako pogledamo osmorku, možemo klasificirati sustav na slijedeći način

Vremenski kontinuiran sustav

Sustav spada u klasu sustava s kontinuiranim ili neprekinutim vremenom $T \subseteq \mathbb{R}$, ako je vremenska skala kontinuirana (neprebrojiv skup vremenskih trenutaka). Ako je funkcija φ pri tom još neprekinuta funkcija svojih argumenata, kažemo da je sustav gladak. Klasični dinamički sustavi, koji su počeli s Newtonovom mehanikom su ovog tipa i mogu se predstaviti diferencijalnim jednadžbama. Skupovi trenutnih vrijednosti su također neprebrojivi.

Ako je φ neprekinuta funkcija, graničnim prijelazom $t_0 \to t$ može se pokazati da se takav sustav može opisati diferencijalnom jednadžbom

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= g(x(t), u(t), t), \end{aligned} \tag{3.5b}$$

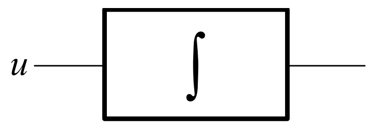
gdje su f i g obične funkcije. U tom slučaju kažemo da je objekt ili sustav diferencijalan i da mu je jednadžba stanja u diferencijalnom obliku. Sustavi sa zbijenim parametrima opisani običnim diferencijalnim jednadžbama su dominantni dio današnje teorije sustava. Nazivaju se diferencijalnim sustavima.

Općenit oblik jednadžbe stanja je dan u (3.5a). Za takav oblik se kaže da je u eksplicitnom obliku. Eksplicitni oblik se može dobiti iz (3.5b) diferencijalnog oblika, rješenjem diferencijalne jednadžbe za x. Međutim, oblik (3.5a) neće uvijek biti moguće staviti u diferencijalni.

Model diferencijalnog sustava se može predstaviti blokovskim dijagramom s dva funkcijska bloka:

$$v(t) = f\big(x(t),\, u(t)\big) \;\; i \;\; y(t) = g\big(x(t),\, u(t)\big),$$

ali još nam treba blok koji povezuje $\dot{x}$ i x. To može biti diferencijator ili integrator, tj. element koji obavlja operaciju diferenciranja, odnosno integriranja. Kako se u postupcima realizacije ovih operacija i općenito sustava integrator pokazao pogodnijim, u blokovskim dijagramima diferencijskih sustava redovito nalazimo integratore. Blok integratora prikazan je na Sl. 3.3.



$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau \tag{3.6}$$

Sl. 3.3

Izlaz iz integratora u trenutku t je određen integralom pobude u intervalu $(t_0, t]$ i veličine $y(t_0)$, koju je imao izlaz u trenutku t_0. Dakle, za određivanje $y(t)$ potrebno je poznavanje izlaza u nekom početnom trenutku t_0 i poznavanje funkcije pobude $u_{(t_0,t]}$ u intervalu $(t_0, t]$. Činjenica da izlaz integratora $y(t)$ u trenutku t zavisi od funkcije pobude u intervalu svrstava integrator u memorijske elemente. Integracija je operacija koja funkciji pobude pridružuje broj. $y(t)$ je dakle funkcional od $u_{(t_0,t]}$. Trenutak t_0 može imati iznos $t_0 = -\infty$. Ako nema pobude $u_{(t_0,t]} = 0$ neki izlaz $y(t_0)$ ostaje na integratoru i kad $t \to \infty$, odakle slijedi da je integrator element s beskonačno dugom memorijom.

Budući da redovito poznajemo signale pobude od nekog trenutka t_0, mi ne znamo kakva je pobuda djelovala prije t_0 i što je izazvalo izlaz $y(t_0)$. Međutim, ako znamo $y(t_0)$, poznavanje pobude prije t_0 nije potrebno, jer je $y(t)$ jednoznačno određen s $y(t_0)$ i $u_{(t_0,t]}$. Sva prošlost integratora sadržana je u podatku $y(t_0)$ i taj podatak je dovoljan da se prati njegova daljnja sudbina. Takav podatak se naziva stanje integratora.

Stanje nekog memorijskog elementa je podatak koji je potreban da se odredi njegov izlaz u nekom trenutku t_1, uz djelovanje poznate pobude počevši od t_0 do t_1. U apstraktnom modelu je to vrijednost neke varijable $x(t_0)$ u trenutku t_0 i naziva se početno stanje. Kako je, međutim, izbor početnog trenutka proizvoljan, mi možemo u bilo kojem trenutku t_1 zaboraviti procese u elementu za $t<t_1$ i pobudu za $t<t_1$, ustanoviti stanje elementa $x(t_1)$ i uz poznatu $u_{(t_0,t]}$ odrediti izlaz $y(t)$. Prema tome vrijednost varijable $x(t)$ u bilo kojem trenutku t, je stanje elementa. Kako je kod integratora njegov izlaz $y(t_0)$ stanje ujedno i varijabla, čije je poznavanje u trenutku t_0 dovoljno da se odredi izlaz $y(t)$ u trenutku t, njegov izlaz $y(t)$ je njegovo stanje $x(t) = y(t)$.

Uz uvedeni element integrator možemo nacrtati blok dijagram sustava. Zbog općenitosti ćemo pretpostaviti da sustav ima više varijabli ulaza, stanja i izlaza što označavamo vektorima **u**, **x** i **y**. Uvest ćemo također varijablu za pripremu stanja $v(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$.

3.2 Modeli vremenski kontinuiranih sustava

3.2.1 Model s varijablama stanja

U nekom sustavu možemo ustanoviti da je potrebno najmanje n-varijabli stanja da u potpunosti opišemo njegovo vladanje. Za takav sustav kažemo da je n-tog reda. Nadalje, sustav može biti pobuđen s vremenski promjenljivim veličinama, koje u modelu predstavlja m varijabli $u_1, u_2, ..., u_m$. Smatrat ćemo da su one komponente ulaznog vektora

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2, ..., u_m]^t$$

Isto tako r izlaznih varijabli $y_1, ..., y_r$ formiraju izlazni vektor

$$\mathbf{y} = [y_1, y_2, ..., y_r]^t$$

Ulazni i izlazni vektor **u** i **y** su funkcije vremena. Trenutne vrijednosti označavaju se s $\mathbf{u}(t)$ i $\mathbf{y}(t)$, što znači vrijednost funkcije **u**, odnosno **y** u trenutku t. Ulazni i izlazni vektori nalaze se u višedimenzionalnom vektorskom prostoru. Skup svih mogućih vrijednosti koje vektor **u** može imati u trenutku t zove se ulazni prostor, dok je izlazni prostor skup svih mogućih vrijednosti koje može imati vektor y u trenutku t. ($\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^r$)

Označimo skup varijabli stanja s $x_1, x_2, ..., x_n$ kao vektor stanja **x**

$$\mathrm{x} = [x_1, x_2, ..., x_n]^t$$

Prostor stanja tada definiramo kao skup svih mogućih vrijednosti koje vektor **x** može imati u trenutku t. ($\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$)

Stanje sustava je po definiciji najmanji skup brojeva (varijabli stanja), koji predstavljaju dovoljnu informaciju o prošlosti sustava da bi se odredilo buduće vladanje sustava. Stanje u času t je određeno s

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(t, \mathrm{t}_0, \mathbf{x}(\mathrm{t}_0), \mathbf{u}(\mathrm{t}_0, t)) \tag{3.7}$$

gdje je φ jednoznačna vektorska funkcija svojih argumenata.

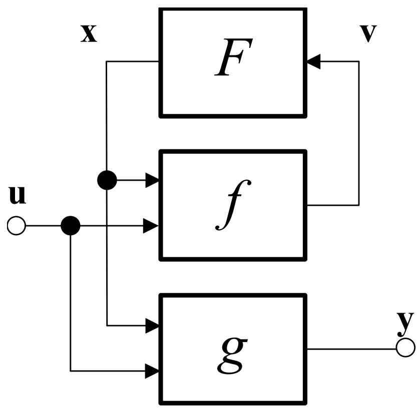
Izlazni vektor **y** zavisi od stanja **x**(t) i ulaza **u**(t)

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \tag{3.8}$$

odnosno od početnog stanja **x**(t_0) i odsječka pobude **u**(t_0,t] iz intervala (t_0,t]

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(t, \mathrm{t}_0, \mathbf{x}(\mathrm{t}_0), \mathbf{u}(\mathrm{t}_0, t]) \tag{3.9}$$

Unutarnja struktura modela vremenski kontinuiranog sustava s varijablama stanja sastoji se od dva podsustava: bezmemorijskog i memorijskog.



Sl. 3.4

Bezmemorijski sustav ima dva skupa ulaza: ulazni vektor **u**(t) i vektor stanja **x**(t), i dva skupa izlaza: izlazni vektor **y**(t) i vektor **v**(t) koji priprema stanje. Za bezmemorijski podsustav vrijedi da za bilo koji t možemo iz trenutnih vrijednosti **u**(t) i **x**(t) izračunati trenutne vrijednosti **v**(t) i **y**(t) što je izrečeno izrazima

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t),$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t).$$

Memorijski podsustav F vezuje dva skupa varijabli: vektor stanja **x**(t) s vektorom za pripremu stanja **v**(t). Pri tom **v**(t) je ulaz, a **x**(t) izlaz ovog podsustava. Vektor stanja kao izlaz ovog memorijskog podsustava zavisi od prošlih vrijednosti njegovog ulaza, tj. vrijednosti **v**(τ), gdje $\mathrm{t}_0<\tau\leq t$. Ima više operacija, koje mogu definirati memorijski podsustav. Ovdje će se uzeti integracija koja vodi na opis sustava skupom običnih diferencijalnih jednadžbi, dakle:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \int_{\mathrm{t}_0}^{t} \mathbf{v}(\tau) d\tau \tag{3.10}$$

Sustavi opisani diferencijalnim jednadžbama nazivaju se diferencijalnim sustavima.

Alternativni oblik, dobije se deriviranjem stanja:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(t); \qquad \mathbf{x}(\mathrm{t}_0) = \mathbf{x}_0 \tag{3.11}$$

Stanje $\mathbf{x}(t_0)$ je početno stanje sustava. Vektor pripreme stanja je ovdje brzina promjene stanja. Jednadžbe stanja dinamičkog sustava sa zbijenim parametrima su:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{3.12}$$

$$\mathbf{y}(t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \tag{3.13}$$

Sustav opisan diferencijalnim jednadžbama naziva se kontinuiranim. Iz gornjih jednadžbi proizlazi da za dano početno stanje $\mathbf{x}_0$ i pobudu $\mathbf{u}(\tau)$ preko intervala $t_0 < \tau < t$ možemo:

1. odrediti stanje $\mathbf{x}(t)$ sustava rješenjem vektorske diferencijalne jednadžbe stanja
2. odrediti izlaz $\mathbf{y}(t)$ supstitucijom stanja $\mathbf{x}(t)$ i pobude $\mathbf{u}(t)$ u algebarsku jednadžbu

$$\mathbf{y}(t) = g\big(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t\big)$$

Da bi se dobila funkcija φ potrebno je riješiti vektorsku diferencijalnu jednadžbu. Rješenje opće diferencijalne jednadžbe uz početni uvjet $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, poznatu $\mathbf{u}$ za sve t iz intervala $[t_1,t_2]$ i t_0 iz istog intervala $[t_1,t_2]$ je realna vektorska funkcija φ ako zadovoljava $\varphi(t_0) = \mathbf{x}_0$, za svaki t iz $[t_1,t_2]$.

Rješenje je funkcija početnog trenutka t_0, početnog stanja $\mathbf{x}_0$ i pobude iz intervala $(t_0,t]$.

$$\varphi = \varphi\big(t, t_0, x_{0,} u(t_0, t]\big) \tag{3.14}$$

Pri traženju rješenja analitički ili kontinuiranom ili diskretnom simulacijom moraju se istražiti dva bitna svojstva, rješenja:

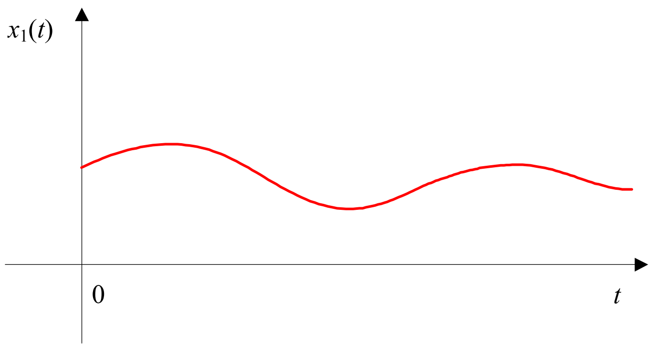
1. Koji uvjeti osiguravaju egzistenciju, odnosno postojanje rješenja. (Da li na primjer $\varphi(t)$ ide u beskonačnost u konačnom vremenu).
2. Ako rješenje postoji, da li je jedinstveno, tj. da li za dane početne uvjete postoji više rješenja ili samo jedno.

Oba pitanja su važna s matematičkog i inženjerskog stanovišta. U nekom realnom sustavu ne očekujemo nejedinstveno rješenje ili slučaj kad nema rješenja. Može se međutim dogoditi da jednadžbe sustava ne pokazuju egzistenciju i jedinstvenost rješenja. Razlog tome može biti činjenica da je upotrijebljeni matematički model aproksimativan i da zanemaruje neki dio procesa. Nužan uvjet dobrog modeliranja sustava je da jednadžbe imaju jedinstveno rješenje ako ga realni sustav ima.

Uvjeti egzistencije i jedinstvenosti rješenja diferencijalnih jednadžbi mogu se naći u literaturi [3].

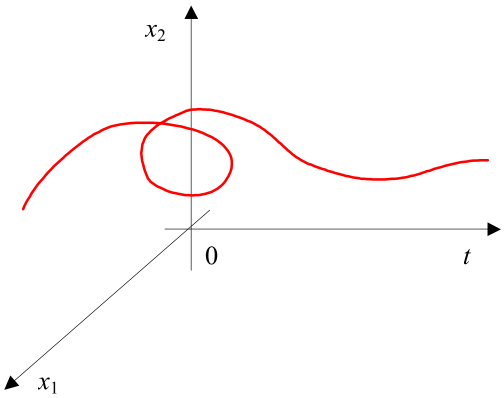
3.2.2 Geometrijska interpretacija rješenja

Rješenje vektora $\mathbf{x}(t)$ u biti određuje koordinate x_1, x_2,...,x_n kao funkcije vremena $x_1(t) = \varphi_1(t)$, $x_2(t) = \varphi_2(t)$,...,$x_n(t) = \varphi_n(t)$. Za sustav prvog reda rješenje se može predstaviti krivuljom u x,t ravnini, kao što pokazuje Sl. 3.5.

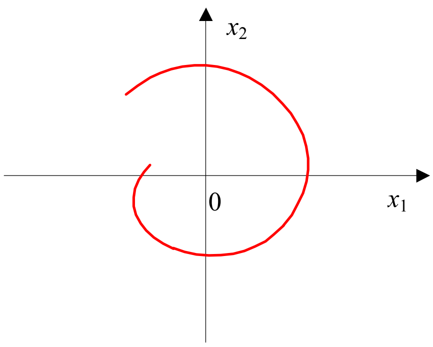


Sl. 3.5

Za sustav drugog reda trebat će trodimenzionalni prostor (x_1,x_2,t), Sl. 3.6.



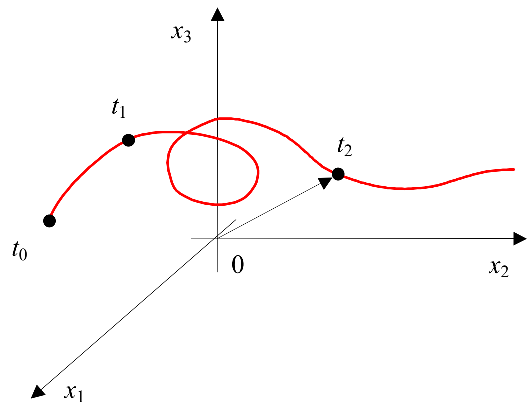
Sl. 3.6



Sl. 3.7

Ako interpretiramo funkcije $x_1 = \varphi(t)$ i $x_2 = \varphi(t)$ kao parametarske jednadžbe jedne krivulje u ravnini x_1, x_2, kažemo da je ta krivulja trajektorija u ravnini stanja, Sl. 3.7. Parametar je vrijeme. Vremenski trenuci predstavljaju točke na trajektoriji, koju opisuje vrh vektora stanja.

Sustav trećeg reda imat će trajektoriju u trodimenzionalnom prostoru, Sl. 3.8.



Sl. 3.8

Ovu geometrijsku interpretaciju možemo protegnuti i na višedimenzionalni prostor, iako ga je nemoguće predstaviti.

3.2.3 Klasifikacija sustava

Prvi način koji se nameće za klasifikaciju sustava je funkcija $\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t)$. Dakle, na koji način se određuje $\mathbf{v}$, odnosno brzinu promjene stanja $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$. Prisutnost varijable t ukazuje da je $\mathbf{v}$ eksplicitna funkcija vremena, a ne samo posredno preko $\mathbf{x}(t)$ i $\mathbf{u}(t)$, pa tako označavamo sustav koji je vremenski promjenjiv. Vremenski promjenjivi sustav dan je s

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}) \tag{3.15}$$

Nadalje, ako sustav nije pobuđen $\mathbf{u}(t) = 0$ za sve t, jednadžba je dana s

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}) \qquad \text{ili} \qquad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

3.2.4 Otvoreni ili eksplicitni sustav

U jednadžbi stanja $\dot{x} = f(x,u)$ zavisnost brzine rastenja stanja $\dot{x}$ od varijabli stanja može imati oblik koji se dade sortirati:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(u_1,u_2,\cdots,u_m)\\
\dot{x}_2 &= f_2(x_1,u_1,u_2,\cdots,u_m)\\
\dot{x}_3 &= f_3(x_1,x_2,u_1,u_2,\cdots,u_m)\\
&\vdots\\
\dot{x}_n &= f_n(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},u_1,u_2,\ldots,u_m)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Tada sustav možemo zvati otvorenim, eksplicitnim, odnosno sustavom bez povratnih veza. Rješenje skupa jednadžbi može se dobiti sukcesivnom integracijom jednadžbe iza jednadžbe počevši od one samo s pobudnim signalom, pa one u kojoj je samo jedna varijabla stanja (dobivena prethodnom integracijom), itd. te konačno doći do x_n(t).

Po obliku funkcije $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t)$ možemo sustav klasificirati na linearni i nelinearni sustav.

Ako je funkcija $\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t)$ linearna, tj. ako se može napisati kao linearna kombinacija varijabli stanja i varijabli pobude, tada je sustav linearan (u protivnom je nelinearan).

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \tag{3.17}$$

Zavisnost $\mathbf{A}(t)$ i $\mathbf{B}(t)$ od vremena pokazuje da je ovaj linearni sustav vremenski promjenjiv. Vremenski nepromjenjiv linearan sustav je onaj kod kojeg su matrice **A** i **B** konstantne, tj.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{3.18}$$

Elementi $\{a_{ij}\}$ i $\{b_{ij}\}$ matrica **A** i **B** su konstante.

Poseban slučaj je:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{z}(t) \tag{3.19}$$

gdje je samo matrica **B** vremenski promjenljiva, pa se takav sustav može smatrati vremenski stalnim, sa nekom složenijom pobudom $\mathbf{z}(t)$.

Također, sustav čija je jednadžba oblika

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + f(\mathbf{u}(t)) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{z}(t) \tag{3.20}$$

može se smatrati linearnim i vremenski stalnim ($\mathbf{A} = \mathbf{konst}.$) ili promjenjivim ($\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$) sustavom s nekom složenijom pobudom $\mathbf{z}(t)$, jer je tada skup jednadžbi stanja linearan. Razumljivo da je relacija između pobude $\mathbf{u}(t)$ i izlaza $\mathbf{y}(t)$ nelinearna. Veliko je, međutim, pojednostavljenje što su jednadžbe stanja linearne pa se memorijski dio sustava može riješiti analitički.

Ako se međutim upotrijebi povratna veza, gdje $\mathbf{u}(t)$ postaje neka funkcija varijabli stanja, prvi sustav će postati vremenski promjenljiv, a drugi nelinearan.

Nepobuđen linearni sustav $\mathbf{u}(t) = 0$ za sve t, ima homogenu diferencijalnu jednadžbu

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)\,, \tag{3.21}$$

ako je vremenski promjenjiv, odnosno

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)\,, \tag{3.22}$$

ako je vremenski stalan.

3.2.5 Opći model sustava s ulazno izlaznim varijablama

Vidjeli smo da model s varijablama stanja kod kontinuiranog sustava vodi na skup simultanih diferencijalnih jednadžbi prvoga reda unutarnjih varijabli stanja koje samo indirektno (preko $g(x,u)$) utječu na izlazne varijable.

U teoriji sustava susreće se još jedan model nazvan model s ulazno izlaznim varijablama, koji se upotrebljava u analizi i sintezi sustava. Taj model je skup diferencijalnih jednadžbi višeg reda u kojima postoje samo ulazne u_i i izlazne varijable y_i te njihove derivacije. Sustav s jednim ulazom i jednim izlazom dade se opisati s jednom diferencijalnom jednadžbom višeg reda. Budući da je taj model važan, ovdje ćemo ga izvesti iz modela s varijablama stanja.

Uzmimo kao primjer sustav s jednim ulazom i jednim izlazom koji je opisan s dvije simultane diferencijalne jednadžbe prvog reda i izlaznom jednadžbom

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, u) \qquad & x_1(\mathrm{t}_0) &= x_{10} \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, u) \qquad & x_2(\mathrm{t}_0) &= x_{20} \\ y &= g(x_1, x_2, u) \end{aligned} \tag{3.23}$$

Kako model s ulazno izlaznim varijablama ne sadrži unutarnje varijable, tj. varijable stanja, nego samo u i y i eventualno njihove derivacije, prijelaz iz gornjeg modela na takav, pretpostavlja eliminaciju varijabli stanja x_1 i x_2.

To je moguće postići deriviranjem izlazne jednadžbe gdje će derivacija biti

$$\dot{y} = h(\dot{x}_1, \dot{x}_2, x_1, x_2, u, \dot{u}) .$$

Uvrštenjem jednadžbi za $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$ i u možemo dobiti

$$\dot{y} = h'(x_1, x_2, u, \dot{u}) .$$

Još jedno deriviranje će dati

$$\ddot{y} = k(\dot{x}_1, \dot{x}_2, x_1, x_2, u, \dot{u}, \ddot{u}) .$$

Ponovnom eliminacijom $\dot{x}_1$ i $\dot{x}_2$ s jednadžbama stanja dobivamo

$$\ddot{y} = k'(x_1, x_2, u, \dot{u}, \ddot{u}) .$$

Iz izlazne jednadžbe za y i dobivenih njenih derivacija $\ddot{y}$ i $\dot{y}$, gdje su angažirane jednadžbe stanja, možemo sada potpuno eliminirati varijable stanja x_1 i x_2.

U općem slučaju nelinearnog sustava možemo napisati implicitnu diferencijalnu jednadžbu

$$\varphi(\ddot{y}, \dot{y}, y, \ddot{u}, \dot{u}, u) = 0$$

koja sadržava samo varijable izlaza i njene derivacije, te varijable ulaza i njene derivacije. U pokazanom sustavu drugog reda dobivamo diferencijalnu jednadžbu kojoj je najviša derivacija drugog reda. U općem slučaju sustava n-tog reda, implicitni oblik diferencijalne jednadžbe će biti

$$\varphi\left(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, \dot{y}, y, u^{(m)}, u^{(m-1)}, \ldots, \dot{u}, u\right) = 0 . \tag{3.24}$$

Za sustav opisan ovom jednadžbom, kaže se da je to opći diferencijalni sustav s jednim ulazom i jednim izlazom. Može biti vremenski stalan ili promjenjiv, nelinearan ili linearan.

Model linearnog sustava s ulazno izlaznim varijablama imamo ako je funkcija φ linearna, tj. ako se prethodna jednadžba može napisati u obliku linearne kombinacije izlaznog i ulaznog signala i njihovih derivacija

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + y = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \ldots + u . \tag{3.25}$$

Bit će to vremenski promjenjiv sustav u slučaju da su koeficijenti $\{a_i\}$ funkcije vremena, a stalan ako su konstante.

Pretvorba modela s jednim izlazom i ulazom u model s varijablama stanja nameće pitanje koje veličine treba izabrati kao varijable stanja. Općenito govoreći mogli bi izabrati više skupova varijabli, međutim ako nemamo uvid u strukturu sustava i njegove elemente nego samo njegovu diferencijalnu jednadžbu višeg reda, nameće se mogućnost da izlaz i njegove derivacije uzmemo kao varijable stanja.

$$\begin{aligned} y &= x_1 \\ \dot{y} &= x_2 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)} &= x_n \end{aligned} .$$

Budući da veličine $y(0), \dot{y}(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)$ predstavljaju početne uvjete u diferencijalnoj jednadžbi njihovo poznavanje uz poznavanje $u(t)$ za $t>0$ dovoljno je da se odredi $y(t)$ za $t>0$. Prema tome, taj skup varijabli je, sigurno, stanje sustava u trenutku $t = 0$. Kako taj skup varijabli $\left(y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)}\right)$ može biti početno stanje sustava i u bilo koji čas t, opravdano ga je smatrati stanjem sustava.

Sam izbor varijabli $y = x_1, \dot{y} = x_2, \ldots, y^{(n-1)} = x_n$ daje $n-1$ jednadžbu dok polazna jednadžba napisana u obliku

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, \dot{y}, y, u^{(m)}, u^{(m-1)}, \ldots, \dot{u}, u) \tag{3.26}$$

daje n-tu jednadžbu

$$\begin{array}{lll} y = x_1 & \dot{y} = x_2 & \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{y} = x_2 & \ddot{y} = x_3 & \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{y}^{(\mathrm{n-2})} = \mathrm{x}_{\mathrm{n-1}} & \mathrm{y}^{(\mathrm{n-1})} = \mathrm{x}_{\mathrm{n}} & \dot{x}_{n-1} = x_n \\ & & \dot{x}_n = f\left(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, u^{(\mathrm{m})}, u^{(\mathrm{m-1})}, \ldots, u\right) \end{array} . \tag{3.27}$$

Ovaj skup diferencijalnih jednadžbi prvog reda je model s varijablama stanja.

Za sustav s jednim ulazom i jednim izlazom najlakše se dobije model s ulazno izlaznim varijablama. Često i postupci mjerenja daju parametre tog modela. U analizi sustava s tim modelom je teži tretman početnih uvjeta, jer iz početnog stanja na elementima, treba odrediti $y(0), \dot{y}(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)$. Što više kad se rješenje prikaže uz pomoć tih veličina ili polaznih početnih uvjeta (npr. početnih struja i napona u električkoj mreži) rješenje nije pregledno jer se dobiju složeni izrazi za koeficijente ispred eksponencijala.

Kod modela s varijablama stanja u rješenju stoje početna stanja pa je rad s početnim uvjetima jednostavan. Za sustave s višestrukim ulazom i izlazom se mogu jednostavno i sistematično formulirati s varijablama stanja. Ovaj model pokazuje prednost kod vremenski promjenljivih i nelinearnih sustava pogotovo kad trebaju biti programirani za analizu ili simulaciju na računalima. Zbog toga je važno prelaziti iz jednog modela u drugi. To je važno za uvid u strukturu sustava pa ćemo razlaganje na jednostavnije sustave povezati s modelom s varijablama stanja.

Razlaganje se temelji na ekvivalenciji diferencijalnih jednadžbi koje često možemo prepoznati. Tu nam mogu pomoći osnovne operacije i transformacije blok dijagrama. Jednadžbe linearnih sustava se korištenjem Laplace-ove transformacije mogu napisati kao algebarske, pa se razlaganja i transformacije sustava mogu provesti na temelju algebarskih jednakosti ili ekvivalencija.

3.3 Modeli vremenski diskretnih sustava

Sustav spada u klasu sustava s diskretnim vremenom ako je skup $\mathbf{T}\subset\mathbb{R}$ prebrojiv. Signali u, x, y su funkcije niza trenutaka i također su nizovi brojeva. Npr. pobudni niz može biti dan kao funkcija indeksa, odnosno koraka

$$\bar{u} = \{(k, u(k)) \mid k \in \mathbb{Z}\} \text{ ili kraće } \{u(k)\},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Pri tom $\mathbf{U} = \mathbf{Y} = \mathbf{X} = \mathbb{R}$, daje klasu sustava koja vodi na jednadžbe diferencija. Njihova svojstva su veoma slična svojstvima vremenski kontinuiranih sustava, pa se u novije vrijeme studiraju zajedno. Jednadžba diferencija se može dobiti ako se stanje sustava u koraku $k + 1$ izrazi pomoću stanja u koraku k

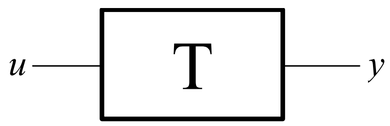
$$x(k+1) = f\big(x(k), u(k), k\big)$$
$$y(k) = g\big(x(k), u(k), k\big).$$

Ova klasa sustava proizlazi iz diferencijalnih jednadžbi kad se one rješavaju numerički, a pojavljuje se u tehničkim sustavima uvijek kad je dio sustava digitalno računalo. Za prikaz sustava blokovskim dijagramom trebat će nam element koji obavlja jedinično kašnjenje, tj. operaciju $T[x(k + 1)] = x(k)$.

<u>Element za kašnjenje</u>

Promotrimo za početak element za kašnjenje u kontinuiranom vremenu. Prostiranje signala kroz neki medij konačnom brzinom (zvuk, EM val) uvjetuje vremenski pomak između signala na različitim točkama prostora. Redovito će osim pomaka postojati slabljenje i deformacija valnog oblika, no mi možemo uzeti da signal putuje kroz nedisperzivan medij i medij koji ne oslabljuje signal, pa da se valni oblik ne mijenja već samo vremenski kasni za neko vrijeme τ prema signalu na ulazu.

Razmotrimo operaciju kašnjenja u kontinuiranom vremenu.



$$y = T(u)$$
$$y(t) = u(t - \tau) \tag{3.28}$$

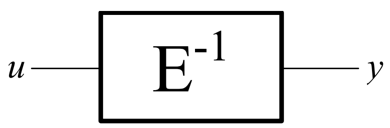
Sl. 3.9

Operacija T vremenskog kašnjenja je sigurno operacija s pamćenjem, jer izlaz $y(t)$ u trenutku t iz elementa za kašnjenje je jednak vrijednosti signala koja je bila na ulazu u trenutku $t - \tau$.

Prema tome, element za kašnjenje zapamtio je vrijednost signala u $t - \tau$ kroz vrijeme τ i dao ga na izlazu u trenutku t. Za takav element kažemo da ima konačnu memoriju trajanja τ. Promotrimo vladanje takvog elementa. Ako počevši od jednog trenutka t_0 mi želimo pratiti ulaz $u(t_0,t]$ i izlaz $y(t_0,t]$ za $t>t_0$, mi moramo znati osim $u(t_0,t]$ i dio pobude $u(t_0 - \tau, t_0]$ dakle i prošlost pobude u trajanju τ, tj. vrijednosti koje se nalaze na elementu za kašnjenje u trenutku

t_0. Zamislimo naponski signal koji putuje po električkom vodu konačne dužine. U trenutku t_0 trenutne vrijednosti signala u iz intervala (t_0-τ, t_0) nalaze prostorno raspoređene duž voda. Počevši od trenutka t_0 na izlazu iz elementa za kašnjenje prvo će se pojaviti vrijednosti $u(t_0-\tau)$ pa zatim ostale, dok nakon vremena τ ne dođe nama poznata vrijednost pobude $u(t_0)$. Ako znamo samo vrijednosti pobude od trenutka t_0, mi moramo znati i "stanje voda" da bismo mogli odrediti izlaz y počevši od trenutka t_0 na dalje. To "stanje voda" međutim nije jedan podatak, kao kod integratora, nego jedna funkcija (raspodjele napona na vodu), dakle beskonačno mnogo podataka.

Ima međutim slučajeva kad "stanje voda" možemo prikazati samo jednim podatkom. Pretpostavimo da se valni oblik sastoji iz sekcija trajanja kraćeg od τ i ponavljanja $T_p = \tau$, tako da imamo samo jednu sekciju na elementu (vodu). Ako se sekcija može opisati samo jednim parametrom, npr. amplitudom, mi možemo odrediti amplitude sekcija na izlazu počevši od trenutka t_0 pomoću jednog podatka tj. amplitude sekcije koja je u elementu (na vodu) u trenutku t_0. To je slučaj kod vremenski diskretnih sustava. Element za kašnjenje pomiče ulaznu sekvencu za jedan korak.



Sl. 3.10

$y = \mathrm{E}^{-1}\, u$, ili $\{y(k)\} = \mathrm{E}^{-1}\, \{u(k)\}$

$y(k) = u(k-1) \quad k>0$

Ako je poznat ulazni niz u intervalu $[0, k]$, treba poznavati $y(0)$ da bi se dobio izlaz u intervalu $[0, k)$, tj.

$$y(k) = \begin{cases} y(0) \ , & k = 0 \\ u(k-1) \ , & k > 0 \end{cases}$$

U primjenama susrećemo sustave koji su u jednom dijelu vremenski kontinuirani, a u drugom diskretni. Obično se nazivaju hibridnim i analiziraju se kao vremenski diskretni sustavi.

Daljnju vrlo važnu klasu diskretnih sustava čine sustavi s prebrojivim skupovima **U**, **X** i **Y**, čije vrijednosti su indeksirane cijelim brojevima ili ti skupovi mogu biti skupovi cijelih brojeva $\mathbf{U} = \mathbf{X} = \mathbf{Y} = \mathbb{Z}$.Takvi sustavi se nazivaju automatima. Dani su modelima sustava s varijablama stanja, gdje su funkcije φ i η ili f i g dane tablicama. Njihova svojstva neće biti studirana u okviru ovoga predmeta.

3.4 Simulacija sustava

Istraživanja svojstava jednog realnog sustava mogu se provesti analitički, studiranjem apstraktnog sustava koji je odgovarajući matematički model tog realnog sustava i time koristiti kroz stoljeća razvijeni matematički aparat. Istinitost svojstava realnog sustava temeljenih na analizi apstraktnog sustava, zavisi od valjanosti pretpostavki pri određivanju njegovog matematičkog modela (algebarskih relacija ili diferencijalnih jednadžbi). Kada model nije odgovarajući neće ni analiza dati istinit odgovor. Ako ne postoji mogućnost da se odredi odgovarajući matematički model, neće se moći iskoristiti analitičke mogućnosti teorije sustava. Spomenuta nemogućnost određivanja modela u nekim disciplinama ograničuje primjenu inače multidisciplinarne teorije sustava. Analitički i numerički postupci predstavljaju brz i efikasan put da se odrede svojstva sustava i predvidi njegovo vladanje kada je moguće odrediti model sustava.

To nije međutim jedini put za studiranje sustava. Različiti realni sustavi mogu se predstaviti istim apstraktnim sustavom npr. jedan mehanički sustav i jedan električki sustav mogu imati isti model.

S druge strane jedan apstraktni sustav se može interpretirati kao model jednog električkog sustava ili jednog mehaničkog sustava. Pretpostavimo da jedan apstraktni sustav interpretiramo kao električku mrežu. Varijable u apstraktnom sustavu će se interpretirati kao naponi čvorova i struje grana jedne mreže. Cijeli sustav će se predstaviti kao električka mreža s elementima induktivitetom, kapacitetom i otporima. Za takvu mrežu kažemo da je to jedna *interpretacija* razmatranog apstraktnog sustava. Ako bi napravili električku mrežu od svitaka i kondenzatora, takva realna mreža se zove jedna *realizacija* apstraktnog sustava. Često matematička forma sugerira jednu realizaciju sustava pa se takva forma, i odgovarajući blok dijagram nazivaju realizacijom.

Za realnu električku mrežu i realni mehanički sustav koji su interpretacija istog apstraktnog sustava, kaže se da su međusobno analogni. Mreža je analogna mehaničkom sustavu i obratno. Kod nje će se naponi i struje u granama vladati jednako kao pomaci, brzine, akceleracije masa u mehaničkom sustavu. Zbog toga studiranje, mjerenje ili podešavanje realnog mehaničkog sustava može se uspješno provesti na analognoj električkoj mreži. Često je to jednostavnije, jeftinije i brže provesti nego na samom mehaničkom sustavu. Tada se mreža naziva analognim modelom mehaničkog sustava. Analogni modeli se često grade kad su istraživanja na originalnom sustavu skupa, opasna po život ili neizvediva iz bilo kojih razloga.

Točno ili približno ponavljanje procesa u sustavu na analognom modelu naziva se simulacijom ili simuliranjem.

Određivanje i realizacija modela odgovarajućeg realnom sustavu naziva se modeliranjem.

Razvoj elektroničkih sustava donio je vrlo praktična analogna računala i digitalna računala koja omogućuju realizaciju veoma složenih apstraktnih sustava i time omogućuju određivanje i simuliranje procesa u različitim sustavima.

Određivanje vladanje nekog sustava može se prema tom provesti analitički ili numerički polazeći od njegovog apstraktnog modela ili simuliranjem na fizikalnom modelu odnosno simuliranjem na analognom ili digitalnom računalu, koji su također realni sustavi.

U svim postupcima bitnu ulogu ima određivanje apstraktnog sustava kao matematičkog modela realnog sustava. To određivanje se provodi u osnovi na dva načina: dedukcijom ili indukcijom.

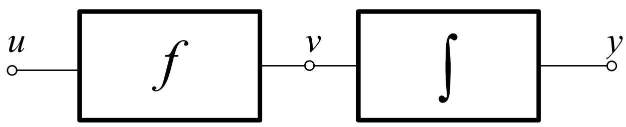
Dedukcijom se određuje model polazeći od poznatih prirodnih zakona (Newton, Maxwell, Kirchoff i dr.), i dolazi do jednadžbi, koje karakteriziraju partikularni sustav jednoznačno.

Indukcijom se određuje model polazeći od mjerenja ulaznih i izlaznih veličina pa se zaključuje kakve relacije vrijede između izlaznih i ulaznih varijabli. Ovaj postupak zavisno od točnosti mjerenja, i zanemarivanja izvjesnih svojstava sustava, može dati različiti matematičke modele. Zbog uštede u mjerenju i veće točnosti modela nastoji se što više aspekata sustava obuhvatiti dedukcijom.

4. SUSTAVI PRVOG REDA

4.1 Blok dijagram

Razmatrat ćemo klasu apstraktnih sustava predstavljenih blokovima gdje je skupu elemenata funkcijskih blokova dodan i jedan integrator. Nabrojena pravila za spajanje elemenata su ista kao kod funkcijskih blokova, dakle vrijede i za integratore. Uzet će se da integrator ima jedan ulaz i jedan izlaz. Možemo, dakle, formirati klasu sustava prvog reda, čiji su elementi jedan integrator i jedan ili više funkcijskih blokova. Takav sustav mora imati najmanje jedan izlaz, a može imati jedan ili više ulaza. Sustav bez ulaza naziva se autonomnim. U njemu mogu također teći procesi kao posljedica onoga što je pohranjeno u memorijskom elementu. Ima veliki broj načina kako jedan integrator i nekoliko funkcijskih blokova mogu biti spojeni u okviru pravila *P*, tako da se dobije sustav prvog reda. Takvi sustavi međutim mogu biti klasificirani u dvije kategorije, zavisno od toga da li se integrator nalazi ili ne nalazi u petlji povratne veze. Uzmimo primjer kad integrator nije u petlji (Sl. 4.1).



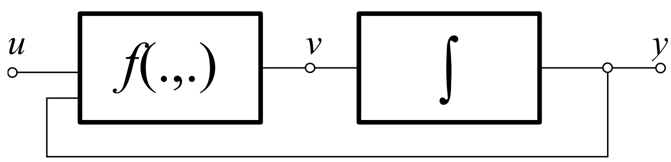
Sl. 4.1

Obzirom da je $v(t) = f(u(t))$, a $y(t) = \int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau + y(t_0)$ sustav se može analizirati jednostavno postupkom integracije poznate funkcije $v(t) = f(u(t))$. Izlaz je eksplicitno izražen s poznatim ulaznim signalom

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} f(u(\tau))d\tau + y(t_0) \tag{4.1}$$

pa se sustav naziva eksplicitni.

Drugu kategoriju imamo kad je integrator u petlji povratne veze.



Sl. 4.2

Odrediti $y(t)$ nije sada tako jednostavno jer je $v(t) = f(u(t), y(t))$.

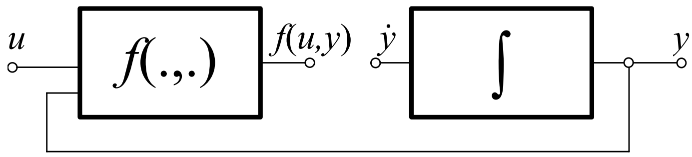
$$y(t) = \int_{t_0}^{t} f[u(\tau), y(\tau)]d\tau + y(t_0)\,. \tag{4.2}$$

Da bi se našla vrijednost izlaza u trenutku t, $y(t)$ na lijevoj strani jednadžbe, mora se znati cijelu funkciju y u intervalu $(t_0,\ t)$, jer treba izvršiti integraciju na desnoj strani jednadžbe. Signal y sadržan je u jednadžbi implicitno pa se ovakav sustav naziva implicitnim. Ovaj oblik jednadžbe može se riješiti iterativnim numeričkim postupkom.

Sustav može međutim biti opisan i jednadžbom

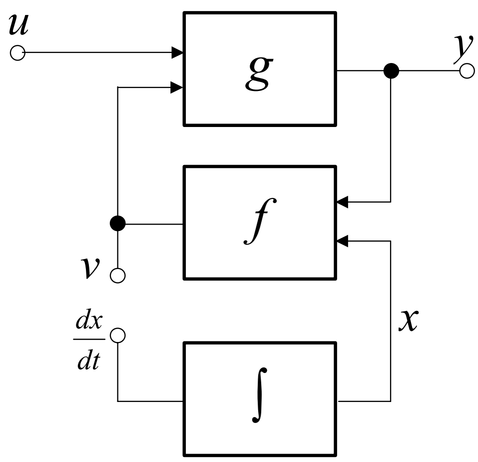
$$\frac{dy}{dt} = f(u(t), y(t)), \tag{4.3}$$

uz početno stanje $y(t_0) = y_0$ koja proizlazi iz prethodne diferenciranjem integrala po gornjoj granici. Jednadžba izražava jednakost signala za svaki t s lijeva i s desna spoja između bloka f i integratora, tj. izražava brzinu promjene izlaza $\dot{y}(t)$ integratora vrijednostima $u(t)$ i $y(t)$ (Sl. 4.3). Jednadžba predstavlja diferencijalnu jednadžbu prvog reda.



Sl. 4.3

Ako sustav prvog reda ima petlje preko bezmemorijskih elemenata, tada će funkcija f u diferencijalnoj jednadžbi često biti dana u implicitnom obliku. Uzmimo na primjer sustav na Sl. 4.4. gdje je prisutan još jedan funkcijski blok g koji daje izlaz y, dok je izlaz iz integratora uzet kao stanje sustava x.



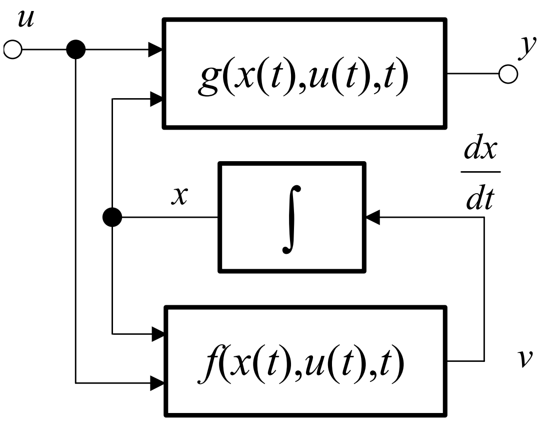
Sl. 4.4

Sustav je opisan jednadžbama

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t), t), \quad y = g(x(t), u(t), t). \tag{4.4}$$

Za dane veličine y i u, veličina y za svaki t može biti dobivena rješenjem gornje implicitne jednadžbe (iterativnim postupkom). Tako dobiven y može dati sa stanjem x veličinu dx/dt u isti trenutak.

Sistematski način formulacije jednadžbe koja opisuje sustav prvog reda pretpostavlja izbor varijable stanja x i izražavanje varijable za pripremu stanja v i izlaza y



Sl. 4.5

$$v = f\left(x(t), u(t), t\right) \quad y = g(x(t), u(t), t)\,, \tag{4.5}$$

što čini bezmemorijski dio sustava.

Ako želimo to prikazati funkcijskim blokovima, koji imaju samo jedan izlaz, morat ćemo bezmemorijski dio razdijeliti na dva funkcijska bloka f i g. Ukoliko bezmemorijski podsustav nema petlji, f i g se mogu lako odrediti, u protivnom će se razmatrati slučajeve kad f i g egzistiraju iako u općem slučaju one se neće moći prikazati eksplicitno nego će se morati riješiti jednu ili više implicitnih jednadžbi redovito postupkom iteracije. Uz definiranu jednadžbu integratora i gornje jednadžbe, brzinu promjene stanja sustava dobiva se općom jednadžbom koja karakterizira sustav prvog reda.

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t), t)\,, \qquad y = g(x(t), u(t), t)\,, \qquad x(\mathrm{t}_0) = x_0\,. \tag{4.6}$$

Prva jednadžba je diferencijalna jednadžba prvog reda i čini jednadžbu stanja. Rješenje x i pobuda u uvrštenjem u drugu daje y pa se naziva izlazna jednadžba.

Formulacija jednadžbi koje karakterizira sustav prvog reda se sastoji od:

1. Pisanja diferencijalne jednadžbe tako da je veličina v (ulazni signal integratora) izražena ili dana vrijednošću stanja $x(t)$ izlaza integratora i ulaza u sustav $u(t)$. Početnu vrijednost $x_0 = x(\mathrm{t}_0)$ treba ustanoviti.
2. Pisanja izlazne jednadžbe koja daje za bilo koji t veličinu izlaza $y(t)$ za dane vrijednosti $x(t)$ i $u(t)$. Ovaj model se naziva model stanja kontinuiranog sustava prvog reda.

4.2 Klasifikacija sustava prvog reda s obzirom na funkcije bezmemorijskog dijela

Bezmemorijski dio sustava prvog reda koji ima utjecaj na njegovo stanje je $f(x,u,t)$.

Svaka od varijabli u f od kojih x predstavlja varijablu stanja sustava, u varijablu pobude, t vrijeme, koje može vršiti utjecaj na vladanje sustava nezavisno od x i u. Za ovakav sustav se kaže da je s povratnom vezom (x), pobuđen (u) i vremenski promjenjiv (t). Funkcije f koje ne zavise od pojedinih varijabli možemo smatrati specijalnim slučajevima od spomenutog općeg slučaja.

Ti specijalni slučajevi su zanimljivi jer se blok dijagrami, analitičke metode i numeričke metode razlikuju. Ako imamo $f(x,u)$, sustav je vremenski nepromjenljiv (stalan, stacionaran), funkcijski blokovi imaju vremenski stalne funkcije. Vremenski promjenljivi sustav kao što smo spomenuli već kod bezmemorijskih sustava može se svesti na vremenski nepromjenljivi s dodatnim ulazima $w(t)$. Ovdje signal $w(t)$ osigurava vremensku promjenu sustava f. Sustav je dakle stalan, ali ima dva ulaza. Pogodnim izborom funkcije $f(\cdot,\cdot)$ i vremenske funkcije $w(t)$ može se dobiti vremenski stalan sustav $\dot{x} = f(x,u,w)$. U tom smislu $\dot{x} = f(x,\mathbf{u})$ je dovoljno općenita jednadžba.

Ako je $f(x)$ sustav nije pobuđen. Procesi u sustavu mogu međutim nastati kao posljedica početnog stanja memorijskog elementa (integratora). U klasičnoj literaturi naziva se autonomnim, a pobuđeni sustavi su neautonomni. Ako je $f = f(x,t)$ vremenska promjenjivost je ekvivalentna nekoj pobudi $w(t)$, pa se nepobuđeni, a vremenski promjenljivi sustav ne smatra autonomnim.

Za $f = f(u,t)$ sustav je eksplicitni, tj. nije sa zatvorenom petljom.

Sustav je linearan ako je $f(x,u,t)$ linearna funkcija u varijabli x i u tj.

$$f(x,u,t) = a(t)x + b(t)y\,. \tag{4.7}$$

Za linearan f dobivamo opći oblik linearne diferencijalne jednadžbe koja se može formalno riješiti uz neka ograničenja za opći oblik funkcije $a(t)$ i $b(t)$. Izlazni funkcijski blok može biti vremenski stalan $g(x,u)$ bez prijenosa ulaznog signala $g(x)$. Opći oblik linearnog bloka je

$$g(x,u,t) = c(t)x + d(t)u\,. \tag{4.8}$$

4.3 Stanje ravnoteže i njegova stabilnost

Stanje ravnoteže je stanje sustava u kojem sustav može ostati neodređeno dugo, ako nema pobude. Stanje ravnoteže autonomnog sustava I reda je:

$$\frac{dx}{dt} = 0 = f(\mathrm{x}_e)\,. \tag{4.9}$$

Ako je pobuda konstantna $u = \mathrm{u}_0 =$ konst. sustav se smatra autonomnim. Njegovo ravnotežno stanje x_e je dano s

$$f(x_e \mathrm{u}_0) = 0 \tag{4.10}$$

pa zavisi od konstantne pobude.

Za linearni vremenski nepromjenljivi sustav $dx/dt = \mathrm{a}x$ stanje ravnoteže je $x_e = 0$ za $\mathrm{a}\neq 0$, dok za $\mathrm{a} = 0$ ima ih beskonačno. Nelinearni sustav može imati nijedno, jedno ili više stanja ravnoteže. Stanje ravnoteže može biti stabilno, nestabilno i polustabilno. Za sada to možemo samo opisati na sljedeći način. Stanje ravnoteže x_e je

- stabilno, ako se sustav iz nekog stanja x_0 vraća u stanje ravnoteže x_e

- nestabilno, ako se sustav udaljuje iz stanja ravnoteže x_e na najmanji mogući poremećaj
- polustabilno, ako se iz nekih stanja x_0 vraća, a iz nekih ne u ravnotežno stanje x_e.

Vladanje sustava u okolici ravnotežnog stanja x_e može se odrediti jednostavno aproksimacijom funkcije f za mala odstupanja stanja x, razvojem u Taylorov red i zanemarivanjem viših članova razvoja. Analiza se najčešće svodi na ekvivalentni linearni sustav.

Za autonomni nelinearni sustav I reda može se funkcija $f(x,u_0)$ razviti u Taylorov red u okolišu ravnotežnog stanja x_e

$$f(x,u_0)=f(\mathrm{x}_e,\mathrm{u}_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\mathrm{x}_e}\Delta x+\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=\mathrm{x}_e}(\Delta x)^2+\text{više derivacije.} \tag{4.11}$$

Budući da je sustav u ravnoteži $f(x_e,\mathrm{u}_0) = 0$ izlazi jednadžba stanja za okoliš $x = x_e$

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{x}_e+\Delta x)=\frac{d}{dt}(\Delta x)=\alpha\Delta x+\beta(\Delta x)^2+\dots,$$

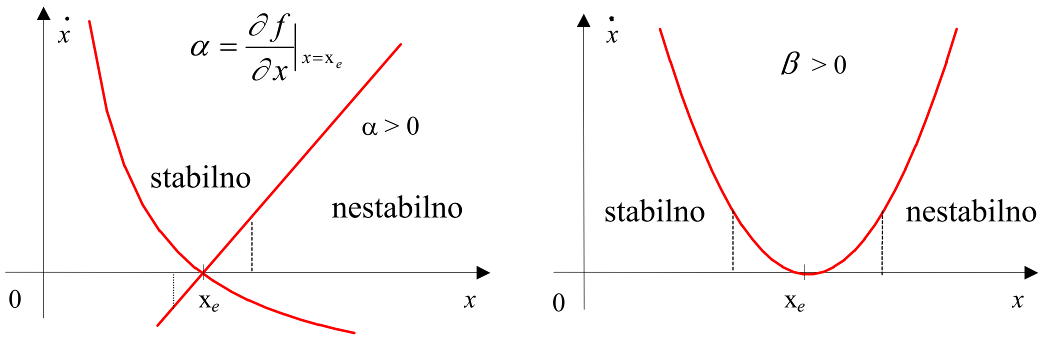
$$\text{gdje su, } \alpha=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\mathrm{x}_e} \quad \beta=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=\mathrm{x}_e}. \tag{4.12}$$

Ako je $\alpha \neq 0$ i $\beta = 0$ rješenjem linearne diferencijalne jednadžbe može se odrediti u koju kategoriju stabilnosti spada ravnotežno stanje sustava.

$$\frac{d\Delta x}{dt}=\alpha\Delta x, \rightarrow \Delta x=(\Delta x)_0 e^{\alpha t}.$$

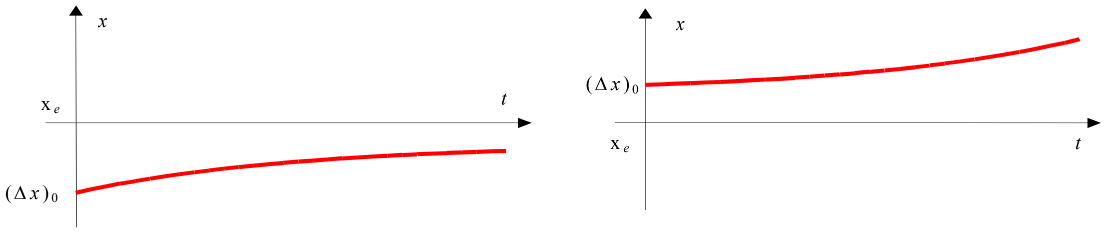
Za $\alpha = 0$ trebat će uzeti drugi član razvoja, odnosno prvi član koji je različit od nule.

$$\frac{d\Delta x}{dt}=\beta(\Delta x)^2, \rightarrow \Delta x=\frac{(\Delta x)_0}{1-(\Delta x)_0\beta t}.$$



Sl. 4.6

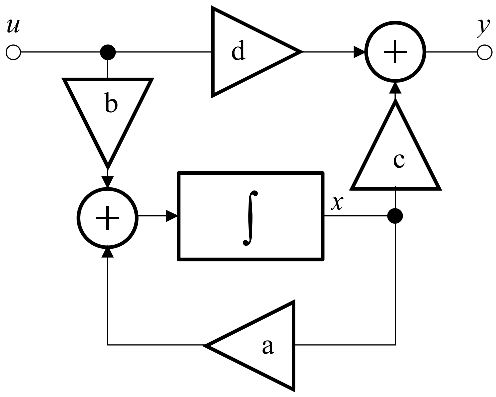
Ako je $\beta(\Delta x)_0 > 0$ vidi se da (Δx) može postati vrlo velik, dok za $\beta(\Delta x)_0 < 0$ otklon (Δx) od x_e teži k nuli pa zaključujemo da je sustav stabilan. Treba međutim uočiti da to znači da će sustav biti stabilan za $(\Delta \mathrm{x})_0 < 0$ i nestabilan za $(\Delta \mathrm{x})_0 > 0$ uz $\beta > 0$ i obratno uz $\beta < 0$. (polustabilan sustav)



Sl. 4.7

4.4 *Vladanje i svojstva sustava prvog reda*

4.4.1 Linearni sustav



Sl. 4.8

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x(t) + b(t)u(t); \quad x(0) = \mathrm{x}_0$$

$$y(t) = c(t)x(t) + d(t)u(t)$$

x-stanje, u-pobuda

x_0-početno stanje (4.13)

Rješenje je x funkcija vremena koja zadovoljava gornju nehomogenu diferencijalnu jednadžbu i početni uvjet.

Nepobuđeni sustav ima homogenu jednadžbu

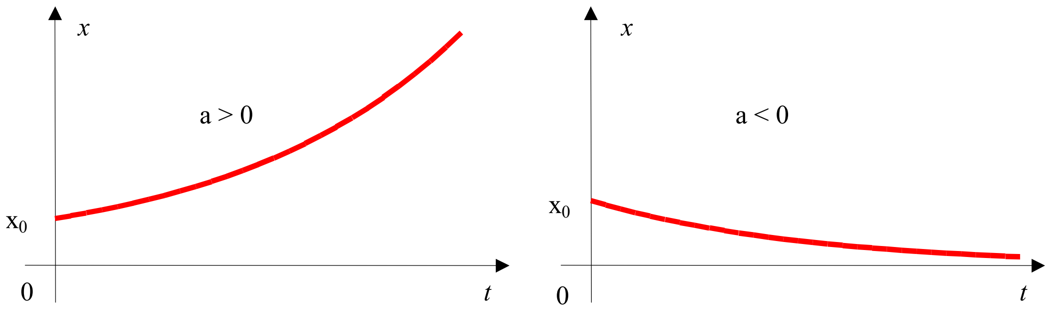
$$\frac{dx}{dt} = a(t)x(t) \qquad x(0) = \mathrm{x}_0 . \tag{4.14}$$

Rješenje možemo dobiti integracijom jednadžbe

$$\frac{dx}{x} = a(t)dt \;\rightarrow\; \int_{\mathrm{x}_0}^{x} \frac{d\xi}{\xi} = \int_0^t a(\tau)d\tau,$$

$$\ln x - \ln \mathrm{x}_0 = \int_0^t a(\tau)d\tau \;\rightarrow\; x = x_0 e^{\int_0^t a(\tau)d\tau} . \tag{4.15}$$

$$\text{za a} = \text{konst.} \;\; x = x_0 \mathrm{e}^{at} \tag{4.16}$$



Sl. 4.9

Odziv pobuđenog sustava može se dobiti metodom varijacije parametara, gdje se rješenje nehomogene jednadžbe pretpostavi u obliku rješenja homogene diferencijalne jednadžbe s tim da se proizvoljan koeficijent u rješenju pretpostavi u obliku vremenske funkcije, tj.

$$x(t) = z(t)e^{\int_0^t a(\tau)d\tau} \; . \tag{4.17}$$

Uvrštenjem u (4.13) izlazi $\dfrac{dz}{dt}e^{\int_0^t a(\tau)d\tau} = bu$, odnosno $\dfrac{dz}{dt} = bue^{-\int_0^t a(\tau)d\tau}$,

$$\int_{z_0}^{z} d\xi = \int_0^t b(\vartheta)u(\vartheta)e^{-\int_0^{\vartheta} a(\tau)d\tau} d\vartheta \, ,$$

$$z - z_0 = \int_0^t b(\vartheta)u(\vartheta)e^{-\int_0^{\vartheta} a(\tau)d\tau} d\vartheta \, ,$$

$$x(t) = \left(z_0 + \int_0^t b(\vartheta)u(\vartheta)e^{-\int_0^{\vartheta} a(\tau)d\tau} d\vartheta \right) e^{\int_0^t a(\tau)d\tau} \, ,$$

za $x(0) = x_0$, izlazi

$$x_0 = z_0 \, ,$$

$$x(t) = x_0 e^{\int_0^t a(\tau)d\tau} + \int_0^t b(\vartheta)u(\vartheta)e^{\int_{\vartheta}^t a(\tau)d\tau} d\vartheta \, . \tag{4.18}$$

Prvi član je odziv nepobuđenog sustava, ($u(t) = 0$) a drugi član je odziv mirnog sustava ($x_0 = 0$). Odziv stanja linearnog sustava je suma (superpozicija) odziva stanja nepobuđenog i mirnog sustava $x(t) = x_n(t) + x_m(t)$. Pri tom je nepobuđeno stanje $x_n(t)$ linearna funkcija početnog stanja x_0. Mirno stanje $x_m(t)$ je linearna funkcija ulaza, tj. zavisnost mirnog odziva od oblika ulaznog signala zadovoljava uvjet aditivnosti i homogenosti, kako se može pokazati.

Za vremenski invarijantan sustav (a, b = konst.) izraz će dobiti oblik

$$x(t) = \mathrm{x}_0 e^{at} + \mathrm{b}\int_0^t u(\vartheta)e^{\mathrm{a}(t-\vartheta)} d\vartheta \, . \tag{4.19}$$

Za pobudu konstantom $u(t)$ = U dobivamo:

$$x(t) = \mathrm{x}_0 e^{\mathrm{a}t} + \mathrm{b}Ue^{\mathrm{a}t}\int_0^t e^{-\mathrm{a}\vartheta} d\vartheta\,, \tag{4.20}$$

$$x(t) = \mathrm{x}_0 e^{\mathrm{a}t} - \frac{\mathrm{bU}}{\mathrm{a}}\left(1 - e^{\mathrm{a}t}\right),$$

$$\text{uz a} < 0 \ \ t \to \infty \ \ x(\infty) = -\mathrm{bU}/\mathrm{a}\,. \tag{4.21}$$

Stanje ravnoteže u tom slučaju izlazi

$$\mathrm{a}x + \mathrm{bU} = 0, \quad x_e = -\mathrm{bU}/\mathrm{a} \tag{4.22}$$

pa se gornji izraz može napisati u obliku

$$x(t) = (x_0 - x_e)\mathrm{e}^{\mathrm{a}t} + x_e\,. \tag{4.23}$$

Prvi član je prijelazno stanje, a drugi x_e stacionarno stanje.

Vremenski invarijantan sustav (a, b = konst.)

Odziv mirnog sustava $x_m(t)$ je dan s:

$$x_m(t) = \int_0^t \mathrm{b}u(\lambda)\mathrm{e}^{a(t-\lambda)} d\lambda, \quad u(t) = 0 \ \text{ za } \ t < 0\,. \tag{4.24}$$

Odredimo odziv mirnog sustava na pobudu istog oblika, ali zakašnjenu za ϑ, tj. $u(t - \vartheta)$

Odziv je:

$$y_m(r) = \int_\Theta^r u(\lambda - \vartheta)\mathrm{e}^{a(r-\lambda)} d\lambda\,.$$

Donja granica je ϑ budući da je $u(\lambda - \vartheta) = 0$ za $\lambda < \Theta$. Ako ispitamo vrijednost odziva u trenutku $r = t + \Theta$ ustanovit ćemo da je ona jednaka $x_m(t)$. Da to dokažemo supstituirajmo $r = t + \Theta$, a zatim varijablu $\varepsilon = \lambda - \vartheta$ u integral

$$y_m(t+\vartheta) = \int_\vartheta^{t+\vartheta} \mathrm{b}u(\lambda - \vartheta)\mathrm{e}^{\mathrm{a}(t+\vartheta-\lambda)} dt\,.$$

Granice su:

$$\lambda_d = \vartheta; \qquad \varepsilon_d = \lambda_d - \vartheta = 0,$$

$$\lambda_g = t + \vartheta; \qquad \varepsilon_g = \lambda_g - \vartheta = t,$$

odnosno

$$y_m(t) = x_m(t - \vartheta) \text{ za } t \geq \vartheta. \tag{4.25}$$

Odakle slijedi da je odziv na kasniju pobudu jednak po obliku, samo kasni za ϑ.To je svojstvo vremenski invarijantnog sustava.

Odziv mirnog sustava kao konvolucija

Izraz za $x_m(t)$ može se prikazati u obliku

$$x_m(t) = \int_0^t h(t,\vartheta)u(\vartheta)d\vartheta\,, \tag{4.26}$$

gdje je

$$h(t,\vartheta) = b(\vartheta)e^{\int_{\vartheta}^{t} a(\tau)d\tau}. \tag{4.27}$$

Što predstavlja funkcija $h(t,\vartheta)$ može se ustanoviti na sljedeći način. Pretpostavimo da je pobuda impuls odnosno Diracova distribucija (generalizirana funkcija), koja se pojavljuje u trenutku t', tj.

$$u(t) = \delta(t - t').$$

Izraz za $x_m(t)$ će postati

$$x_m(t) = \int_0^t \delta(\vartheta - t')b(\vartheta)e^{\int_{\vartheta}^{t} a(\tau)d\tau} d\vartheta = b(t')e^{\int_{t'}^{t} a(\tau)d\tau} = h(t,t'),$$

što pokazuje da je $h(t,t')$ odziv sustava na impuls u trenutku $t = t'$.

Ako su a i b konstante vrijedi:

$$h(t, \vartheta) = \mathrm{b}e^{\mathrm{a}(t-\vartheta)} = h(t - \vartheta), \tag{4.28}$$

jer je impulsni odziv na $\delta(t)$

$$h(t) = \mathrm{b}e^{\mathrm{a}t}. \tag{4.29}$$

Da to ne vrijedi za ranije izvedeni opći slučaj, tj. vremenski promjenjivi sustav pokazat ćemo na sljedećem primjeru

$$a(t) = \frac{1}{1+t} \text{ i } b = \text{konst.}$$

$$h(t,\vartheta) = b(\vartheta)e^{\int_{\vartheta}^{t} a(\tau)d\tau} = \mathrm{b}e^{\int_{\vartheta}^{t}\frac{d\tau}{1+\tau}} = \mathrm{b}e^{\ln\frac{(1+t)}{(1+\vartheta)}} = b\left(\frac{1+t}{1+\vartheta}\right) = h(t,\vartheta)/$$

Kako je odziv na $\delta(t)$

$$h(t,0) = b(1 + t),$$

a odziv na $\delta(t - \vartheta)$ je

$$h(t,\vartheta) = b\left(\frac{1+t}{1+\vartheta}\right) \neq b(1+t-\vartheta) = h(t-\vartheta,0).$$

Odredimo odziv gornjeg sustava na jediničnu stepenicu $u(t) = \mu_{-1}(t)$

$$x_m(t) = \int_0^t u(\vartheta)h(t,\vartheta)d\vartheta = \int_0^t b\frac{1+t}{1+\vartheta}d\vartheta,$$

$$x_m(t) = b(1+t)\ln(1+t) = h_{-1}(t,0).$$

Odziv na zakašnjenu stepenicu $\delta_{-1}(t - \vartheta)$ izlazi

$$x_m(t) = b(1+t)\ln\frac{1+t}{1+\vartheta} = h_{-1}(t,\vartheta).$$

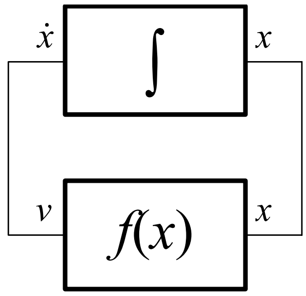
Ovdje također vidimo da je $h_{-1}(t,\vartheta) \neq h_{-1}(t - \vartheta,0)$. $h_{-1}(t,\vartheta)$ se ne može prikazati kao $h(t - \vartheta)$.

4.5 Nelinearni sustav

Kod nelinearnih sustava funkciju $f(x,u)$ bezmemorijskog bloka možemo predstaviti plohom iznad x, u ravnine, odnosno $f(x)$ krivuljom koju možemo zvati karakteristikom bloka.

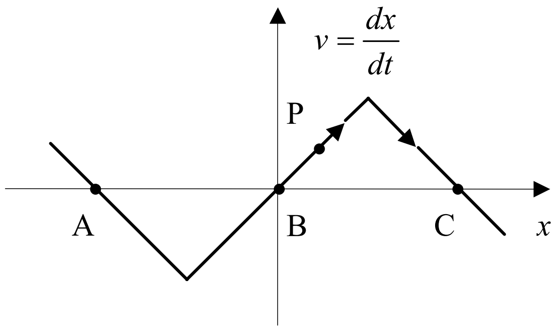
Često se karakteristike predstavljaju po odsječcima, pravcima ili jednostavnim krivuljama (parabolama). Sustav I reda funkcijskim blokom predstavljenim linearnim funkcijama (pravcima) po odsječcima može se analizirati opet po odsječcima kao linearni sustav. Aproksimativni modeli su najčešće tog oblika.

Uzmimo za početak takav primjer gdje je $v = f(x)$ dana s



Sl. 4.10

Grafički je predstavljena na sljedećoj slici.



Sl. 4.11

Odmah možemo uočiti da karakteristika sječe os stanja x u tri točke koje su točke ravnoteže. Iz $v = f(x_e) = 0$ izlazi

za $x>1$; $\quad -x + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x_{eC} = 2$

za $|x|<1$; $\quad x = 0 \quad \rightarrow \quad x_{eB} = 0$

za $x< -1$; $\quad -x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x_{eA} = -2$

Za sustave nižeg reda možemo pratiti procese u sustavu slijeđenjem stanja i odgovarajuće točke na karakteristici. Ordinata $v = dx/dt$ u ovom slučaju nam daje brzinu promjene stanja. Bilo koje stanje odnosno točku možemo izabrati kao početnu, a zatim preko rastenja $dx/dt > 0$ odnosno padanja $dx/dt < 0$ stanja odrediti smjer kretanja točke po karakteristici.

Uzmimo točku P kao polaznu. U toj točci je $v = \dot{x} > 0$ što ukazuje da će stanje s vremenom rasti, pa će točka $P(x,v)$ putovati desno po karakteristici sve brže, a zatim sve sporije u točku C ravnoteže, gdje će ostati. Točka je opisala dinamičku stazu po karakteristici.

Ako se izvede stanje sustava u $x_0 > X_{eC}$ brzina $dx/dt < 0$ uvjetovat će povratak u točku C.

Isti proces ćemo imati u okolišu toče A. Otklon iz točke X_{eB} međutim izazvat će kretanje prema točci A ako je $x_0 < X_{eB}$ ili točci C ako je $x_0 > X_{eB}$. Odatle zaključujemo da su točke A i C stabilna ravnotežna stanja dok je stanje u B nestabilno.

Rješenje jednadžbe stanja.

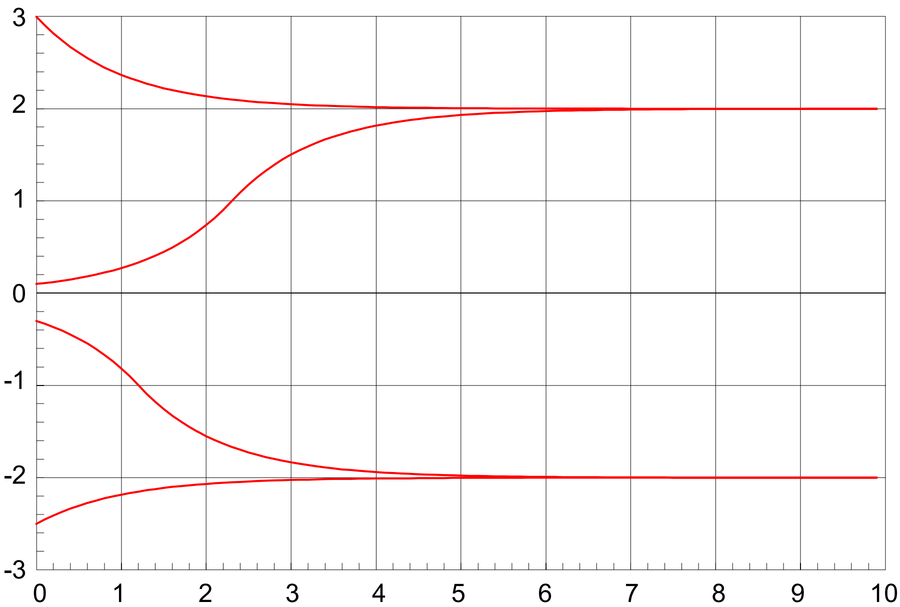
Jednadžbu $\dot{x} = f(x)$, $x_0 = 0.5$ riješimo po odsječcima a) $0 < x < 1$ i b) $x > 1$

a) $\quad \dot{x} = x \quad \rightarrow \quad x = x_0 e^t \quad$ za $x \le 1, \quad 1 = x_0 e^{t_1}$

b) $\quad \dot{x} = -x + 2 \quad \rightarrow \quad x = 2 - e^{-(t-t_1)} \quad$ za $x(t_1) = 1 \qquad$ (4.30)

$$x = 1 = 0.5e^{t_1} \quad \rightarrow \quad t_1 = \ln 2 = 0.7\,.$$

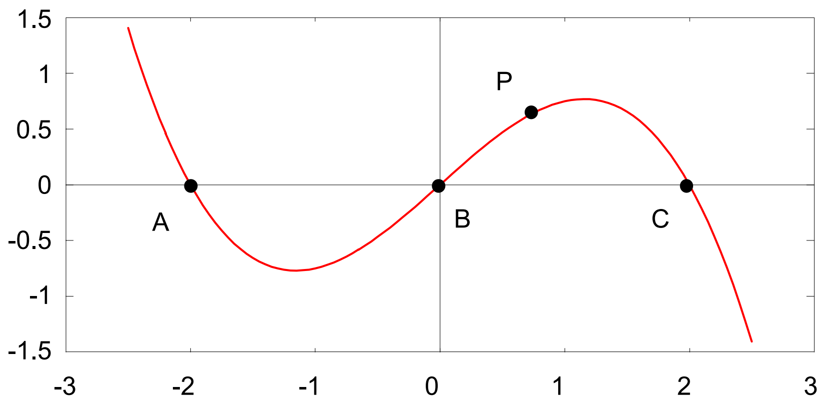
Odzivne krivulje stanja su prikazane na Sl. 4.12. za nekoliko vrijednosti početnog stanja $x_0 = 3, 0.1, -0.3, -2.5$.



Sl. 4.12

Uzmimo sada paraboličnu karakteristiku

$$f(x) = x - \frac{x^3}{4}\,. \tag{4.31}$$



Sl. 4.13

Tri točke ravnoteže

$$x\left[1-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right]=0,$$

$$X_{eB}=0 \text{ nestabilna,}$$
$$X_{eA}=-2 \text{ stabilna,}$$
$$X_{eC}=2 \text{ stabilna.,}$$

$$\frac{dx}{dt}=x\left[1-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right] \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{x\left[1-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right]}=dt\,.$$

Integracija lijeve i desne strane daje

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\frac{dx}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)\left[1-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right]}=\int_0^t d\tau$$

$$\ln\frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}-\ln\frac{\frac{x_0}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x_0}{2}\right)^2}}=t\,,\ \text{za}\ |x|,|x_0|<2,$$

odakle se može dobiti eksplicitan izraz

$$x(t)=\frac{2x_0}{\sqrt{x_0^2-(x_0^2-4)e^{-2t}}}\,. \tag{4.32}$$

Slični integrali i isti eksplicitni izraz (4.32) dobije se za $|x|,|x_0| < 2$. (Za x, $x_0 < 0$ uzimaju se negativni predznaci korijena).

Odredimo potrebno vrijeme da stanje iz $x_0 = 0.5$ dođe u $x(t_1) = 1$ i usporedimo s vremenom prеđašnjeg primjera.

$$x(\mathrm{t}_1) = 1 \rightarrow \mathrm{t}_1 = \frac{1}{2}\ln 5 \cong 0.8.$$

Stanje doseže točku 1 za 0.8 umjesto 0.7 sekundi zato jer $\dot{x}$ kod prve karakteristike prolazi većim iznosima, pa je proces brži.

Za početni uvjet $x_0 = 0.5$

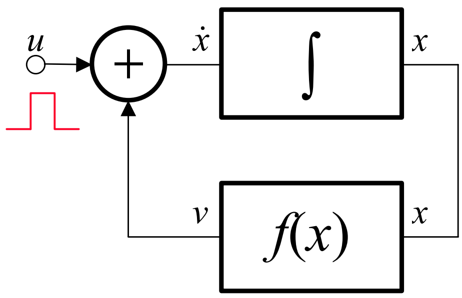
$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - 4\right)e^{-2t}}} = \frac{2}{\sqrt{1+15e^{-2t}}},$$

$$x_0 = 1,$$

$$x(t) = \frac{2}{\sqrt{1+3e^{-2t}}}.$$

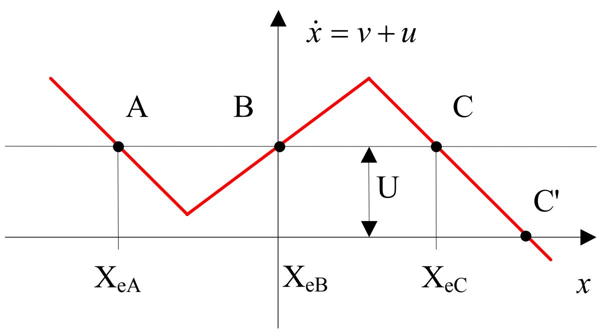
Zavisnost od početnog uvjeta nije linearna!

Za $x_0 < 0$ stanje bi se smirilo u ravnotežnoj točki x_{e1}. Ovaj sustav ima dva ravnotežna stanja koja su stabilna. To je jednostavni model elektroničkog sklopa, tzv. bistabila, koji ima široku upotrebu u digitalnoj elektronici i digitalnim računalima. Dva stabilna stanja odgovaraju binarnim stanjima 0 i 1. Da bi se obavljale logičke operacije, bistabil treba prebacivati iz jednog stanja u drugo i obratno. To se može izvršiti dovođenjem tzv. okidnog signala. Jedan model bistabila koji se može okidati je prikazan na Sl. 4.14:



$$\frac{dx}{dt} = f(x) + u$$

Sl. 4.14



Sl. 4.15

Stanje u kojem se bistabilni sustav nalazi, npr. X_{eA} ne može se promijeniti trenutno kad dođe abraptni skok na ulazu već ostane X_{eA}. Pozitivne ordinate $\dot{x} = v + u > 0$ tjeraju stanje novoj ravnoteži u točki C'. Vanjski pravokutni impuls treba biti dovoljno velike amplitude kako bi stanje prešlo $X_{eB} = 0$, dakle $U + f(x) > 0$. Trajanje tog okidnog impulsa mora također biti dovoljno da stanje x stigne preći X_{eB}.

Sljedećim razmatranjem možemo odrediti uvjete koje mora zadovoljiti okidni impuls pravokutnog oblika. Za sustav u stanju X_{eA} i okidni puls amplitude U vrijedi

$$\dot{x} = -x - 2 + U \qquad x = Ce^{-t} + U - 2\,,$$

$$x(0) = x_{e1} = Ce^{-t} - 2 + U \qquad C = 2 - U + x_{e1} = -U\,,$$

$$x(t) = -Ue^{-t} + U - 2 = U\left(1 - e^{-t}\right) - 2\,.$$

Za prvi odsječak $x(t_1) = -1$, izlazi

$$U(1 - e^{-t_1}) - 2 = -1 \qquad U - Ue^{-t_1} = 1\,,$$

$$Ue^{-t_1} = U - 1 \qquad \frac{U-1}{U} = e^{-t_1} \qquad t_1 = \ln\frac{U}{U-1}\,.$$

Za drugi odsječak $|x| \le 1$, izlazi

$$\dot{x} = x + U \quad \rightarrow \quad x(t) = Ce^{t-t_1} - U\,,$$

$$x(t_1) = -1 = C - U \quad \rightarrow \quad C = U - 1\,,$$

$$x(t) = (U-1)e^{(t-t_1)} - U\,. \qquad x(t_2) = 0\,,$$

$$(U-1)e^{(t_2-t_1)} = U \quad \rightarrow \quad e^{(t-t_1)} = \frac{U}{U-1}\,,$$

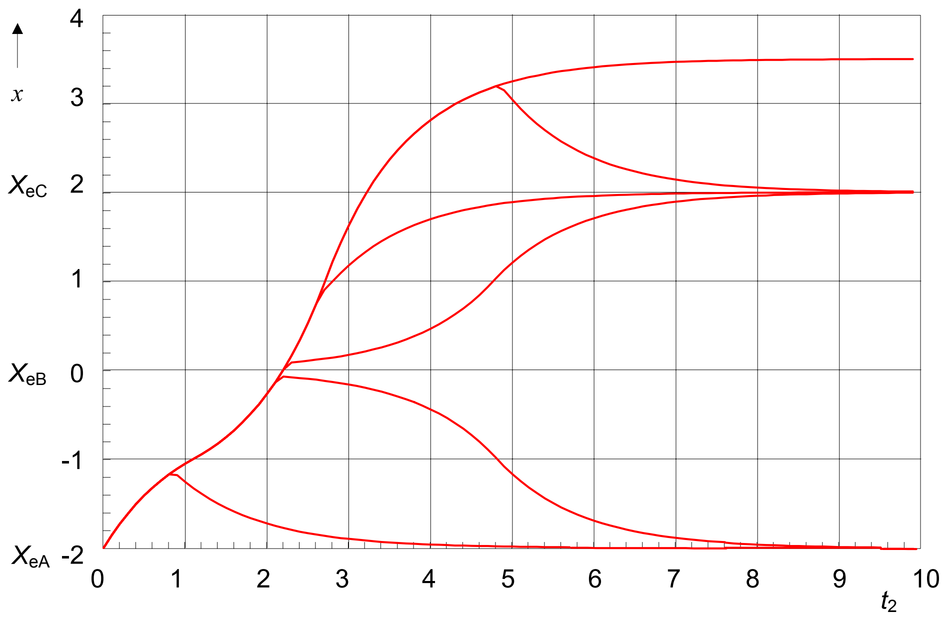
$$t_2 - E_1 = \ln\frac{U}{U-1}\,.$$

Ukupno vrijeme potrebno za prijelaz

$$t_2 = \ln\frac{U}{(U-1)} + \ln\frac{U}{(U-1)} = 2\ln\frac{U}{(U-1)}\,.$$

Potrebno trajanje okidnog pulsa da prebacivanje uspije je određeno s $t_2 = 2\ln\frac{U}{(U-1)}$, dok je potrebna amplituda $U > 1$.

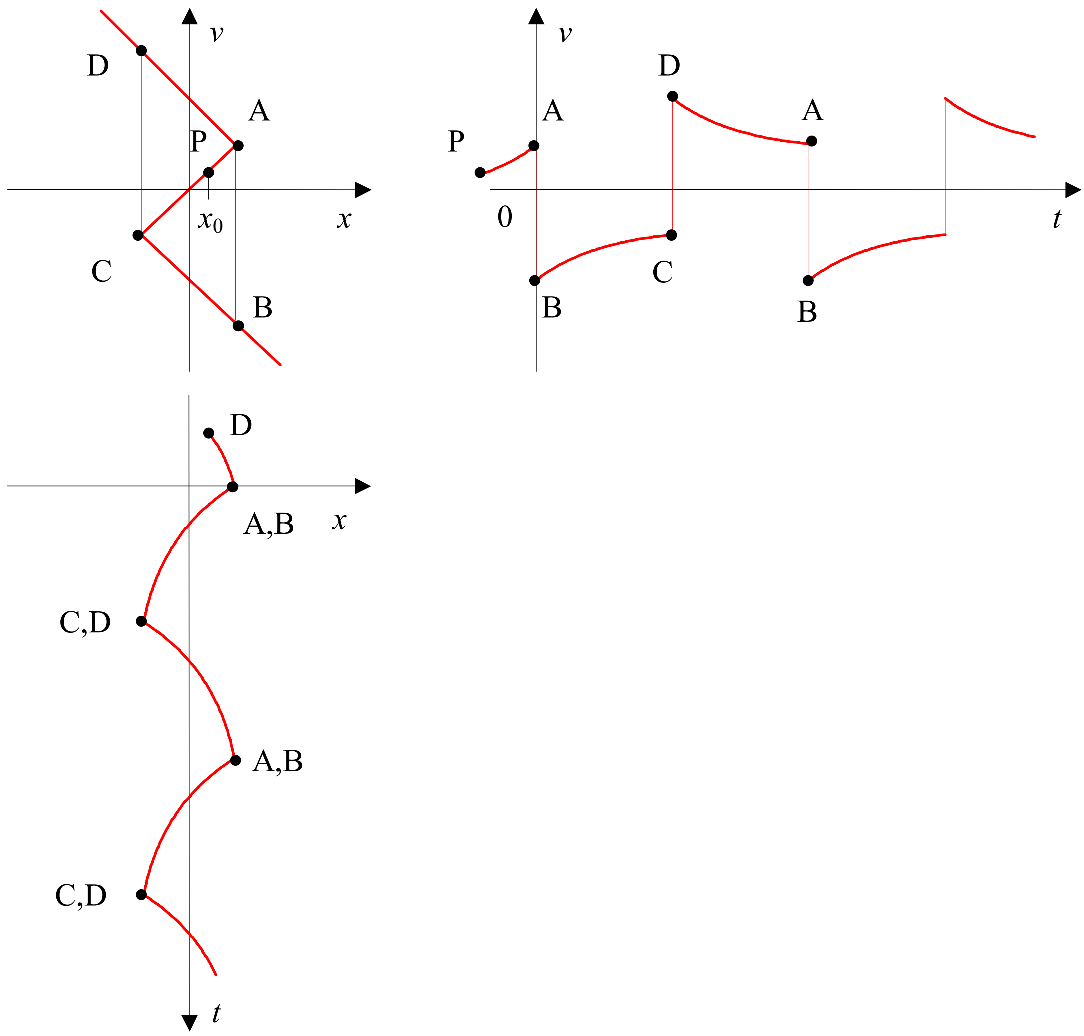
Odzivi bistabilnog sustava za okidni puls $U = 1.5$ i različita trajanja $t_2 = 0.8$, 2.16, 2.24 i 4.8 sekundi. Kritično trajanje za prebačaj bistabila $2\ln 3 \approx 2.2$ što odgovara prolasku kroz nestabilno stanje X_{eB}.



Sl. 4.16

4.5.1 Pojava skoka i relaksacijskih oscilacija u sustavu prvog reda

Pretpostavimo da u sustavu I reda na Sl. 4.10 imamo relacijski blok gdje $v = f(x)$ nije funkcija nego je veza v i x-a višeznačna. Primjer takve veze je karakteristika na Sl. 4.17.



Sl. 4.17

Neka je početno stanje x_0 izabrano i točke $P(x_0,v_0)$ gdje je $dx/dt > 0$ stanje će rasti i točka će putovati po karakteristici desno, dok ne dođe do točke A. Koljeno karakteristike u točki A sprečava nastavak kretanja prema većim iznosima stanja ako vrijedi jednadžba $\dot{x} = f(x)$.

Kretanje uz $v = dx/dt > 0$ je nemoguće jer nema parova vrijednosti.. Ako se pretpostavi kretanje s $v = dx/dt < 0$ ono ne zadovoljava jednadžbu. Na karakteristici međutim postoji točka B u kojoj je jednadžba zadovoljena i kretanje po donjem dijelu karakteristike je moguće, ali u lijevo prema manjim stanjima. Ordinate v na tom dijelu prolaze negativnim iznosima. Stanje je neprekinuta funkcija jer su signali na ulazu u integrator omeđeni, pa će se prijelaz iz točke A u točku B dogoditi trenutno uz $x_A(t_{1-}) = x_B(t_{1+})$. Kretanje će se nastaviti do točke C, gdje koljeno karakteristike C onemogućava daljnje kretanje po karakteristici u tom smjeru. Opet će doći do skoka u točku D, gdje je jednadžba karakteristike zadovoljena. Dinamička staza po karakteristici će biti zatvorena s dva skoka u brzini promjene stanja $\dot{x}$. Točke A i C gdje nastupa skok obično nazivamo neprolaznim točkama karakteristike.

Vladanje sustava možemo odrediti rješenjem diferencijalne jednadžbe, ali samo po sekcijama karakteristike odnosno staze gdje se kretanje odvija.

Uzeli smo linearno lomljenu karakteristiku zbog jednostavnosti analize. Inverzna funkcija je dana

$\dot{x} = v$ $\qquad |v| < 1 \qquad$ $P \rightarrow A,$

$\dot{x} = -v + 2$ $\qquad v > 1 \qquad$ $D \rightarrow A,$

$\dot{x} = -v - 2$ $\qquad v < 1 \qquad$ $B \rightarrow C,$

Riješimo jednadžbu na odsječku $B \rightarrow C$

$$\frac{dx}{dt} = -x - 2 \qquad x = Ce^{-t} - 2 \qquad x_B = C - 2 = 1,$$

$$x = 3e^{-t} - 2, \qquad v = \frac{dx}{dt} = -3e^{-t} \qquad 0 < t < \mathrm{t}_1.$$

Riješimo jednadžbu na odsječku $D \rightarrow A$

$$\frac{dx}{dt} = -x + 2 \qquad x = Ce^{-(t-\mathrm{t}_1)} + 2 \qquad x_D = C + 2 = -1,$$

$$x = -3e^{-(t-\mathrm{t}_1)} + 2, \qquad \frac{dx}{dt} = 3e^{-(t-\mathrm{t}_1)} \qquad \mathrm{t}_1 < t < \mathrm{t}_2.$$

Dobili smo tzv. relaksacijske oscilacije. Njihov period možemo odrediti iz odzivnih funkcija $x(t)$ po odsječcima.

$$x_C(t_1) = 3e^{-\mathrm{t}_1} - 2 = -1 \qquad e^{-\mathrm{t}_1} = 3 \qquad x_D = C + 2 = -1,$$

$$x_A(t_2) = -3e^{-(\mathrm{t}_2-\mathrm{t}_1)} + 2 = 1, \qquad e^{(\mathrm{t}_2-\mathrm{t}_1)} = 3 \qquad \mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_1 = \ln 3.$$

Period $t_2 = t_1 + (\mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_1) = 2\ln 3$

Razmatrani model sustava je model elektroničkih relaksacijskih oscilatora, Froudeovog njihala, škripanja kočnica ili vrata, itd.

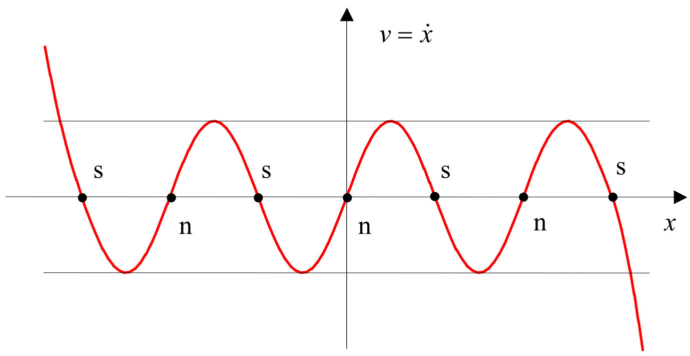
4.5.2 Klasifikacija vladanja autonomnog sustava prvog reda

1. Nelinearni funkcijski blok

a) Jedna ravnotežna točka. Karakteristika sječe s $dx/dt = 0$ točka je stabilna. Sva stanja teže u tu točku ravnoteže.

b) Tri ravnotežne točke. Dvije su stabilne, a jedna nestabilna. Skoro svi bistabilni sustavi mogu se modelirati ovako. Vanjskom pobudom (okidanjem) sustav se može prebaciti iz jednog u drugo stanje ravnoteže.

c) Više stanja ravnoteže. Karakteristika koju daju realni sustavi za veliki x ostaje u drugom i četvrtom kvadrantu, pa je broj ravnotežnih točaka neparan i alterniraju stabilna stanja, nestabilna, stabilna, itd. kao na Sl. 4.18.



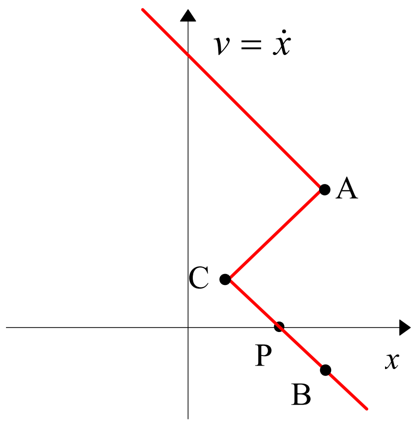
Sl. 4.18

Podešavanjem polariteta i trajanja okidnog impulsa sustav se može prebaciti u bilo koju stabilnu točku.

2. Relacijski blok (višeznačna funkcija)

a) Jedna nestabilna točka ravnoteže. Astabilno vladanje tj. pojava relaksacijskih oscilacija.

b) Jedna stabilna točka ravnoteže Sl. 4.19.

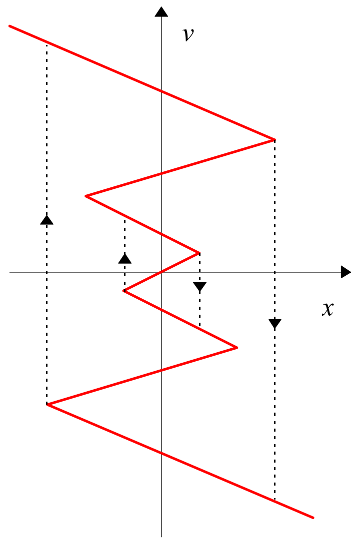


Sl. 4.19

Ako je početno stanje $x_0 > x_P$ vraća se u P.

Ako je $x_0 < x_C$ stanje stiže do koljena A gdje dx/dt skače u točku B uz $x_A = x_B$. Zatim se sustav postepeno vraća u P. Ovaj ciklus nastaje nakon što je sustav doveden u stanje $x_0 < x_C$ okidnim impulsom. To je model elektroničkog monostabila, koji je izuzetno koristan za generiranje impulsa određenog trajanja ili kašnjenja.

3. Brojnija višeznačnost kao na Sl. 4.20.

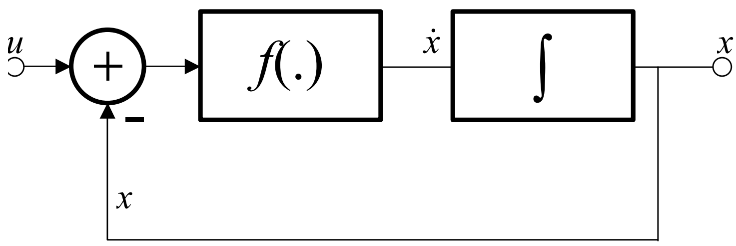


Sl. 4.20

Ako se koljena karakteristike pojavljuju na pogodnim mjestima, sustav može oscilirati relaksacijski na nekoliko načina. Na slici imamo dvije zatvorene staze tzv. graničnog ciklusa.

4.5.3 Pobuđeni nelinearni sustav I reda

Uzmimo model sustava prikazan na Sl. 4.21 s $f(z) = e^z - 1$ i općom pobudom $u(t)$. To je model elektroničkih sklopova-pojačala s povratnom vezom u kojima je nelinearni element bipolarni tranzistor. Eksponencijalna karakteristika potiče od svojstva *pn* spoja.



$$\frac{dx}{dt} = f(x,u),$$
$$\frac{dx}{dt} = f(u-x),$$
$$\frac{dx}{dt} = f(z), \quad z = u - x.$$

Sl. 4.21

Difencijalna jednadžba sustava

$$\dot{x} = e^{u-x} - 1,$$

može se svesti na oblik

$$(\dot{x}+1)e^x = e^u$$

u kojem nakon množenja s e^t

$$(\dot{x}+1)e^{x+t} = e^{u+t},$$

lijevu stranu prepoznajemo kao $\frac{d}{dt}\left(e^{x+t}\right)$ pa formalno rješenje možemo dobiti iz

$$\frac{d}{dt}\left(e^{x+t}\right) = e^{u+t} \qquad e^{x_0} = \mathrm{C},$$

odnosno

$$e^{x+t} = \int_0^t e^{u+t}dt + \mathrm{C}\,.$$

Početno stanje $x(0) = x_0$ omogućuje određivanje konstante C.

$$e^{x_0} = \int_0^0 + \mathrm{C}\,.$$

Odatle slijedi

$$e^{x+t} = \int_0^t e^{u(\tau)+\tau}d\tau + e^{x_0}\,.$$

Nakon množenja s e^{-x_0} imamo

$$e^{x-x_0+t} = 1 + e^{-x_0}\cdot\int_0^t e^{u(\tau)+\tau}d\tau\,,$$

za $x_0 = 0$;

$$e^{x} = e^{-t} + \int_0^t e^{u(\tau)}e^{-(t-\tau)}d\tau = e^{-t} + \int_0^t v(\tau)h(t-\tau)d\tau\,.$$

Opće rješenje na pobudu $u(t)$ izlazi eksplicitno:

$$x = \mathrm{x}_0 + \ln e^{-t}\left[1 + e^{-\mathrm{x}_0}\int_0^t e^{u(\tau)+\tau}d\tau\right]. \tag{4.33}$$

Za slučaj mirnog sustava $x_0 = 0$ izraz se pojednostavnjuje

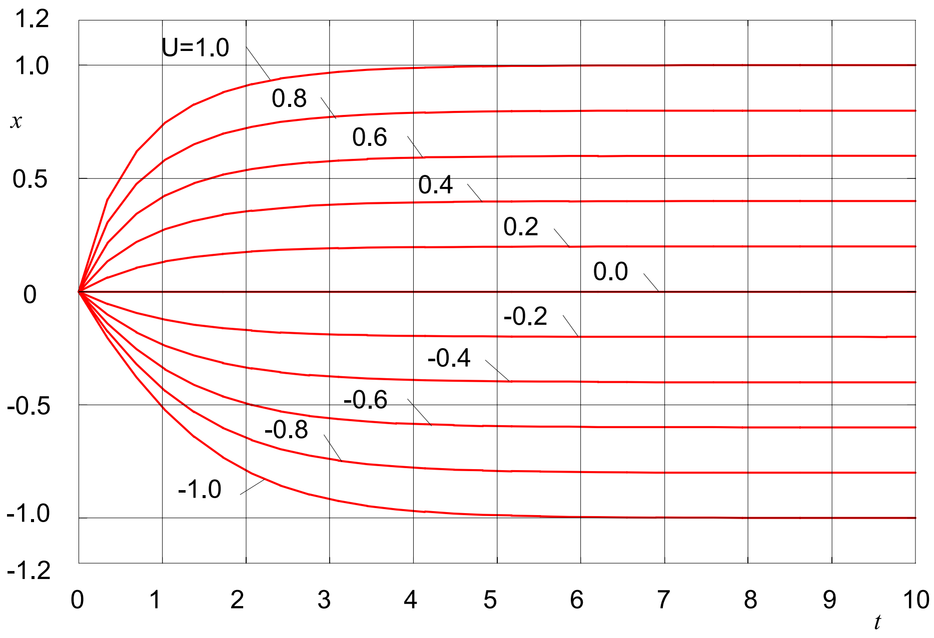
$$x = \ln\left[e^{-t} + \int_0^t e^{u(\tau)}e^{-(t-\tau)}d\tau\right],$$

$$x = \ln\left[1 + \int_0^t e^{u(\tau)+\tau}d\tau\right] - t \tag{4.34}$$

Za pobudu stepenicom $u(t) = U\mu(t)$

$$x = x_0 + \ln e^{-t}\left[1 + e^{-x_0}\int_0^t e^{U+\tau}d\tau\right], \tag{4.35}$$

$$x = \mathrm{x}_0 + \ln e^{-t}\left[1 + e^{-\mathrm{x}_0}e^{\mathrm{U}}(e^t - 1)\right].$$



Sl. 4.22

Stanje za $t\to\infty$ teži k

$$x = x_0 + \ln e^{-x_0} e^U, \qquad x_s = U,$$

$$x = x_0 + \ln\left[e^{-t} + e^{x_s - x_0}(1-e^{-t})\right],$$

$$e^{x-x_0} = e^{-t} + e^{x_s - x_0}\left(1-e^{t}\right).$$

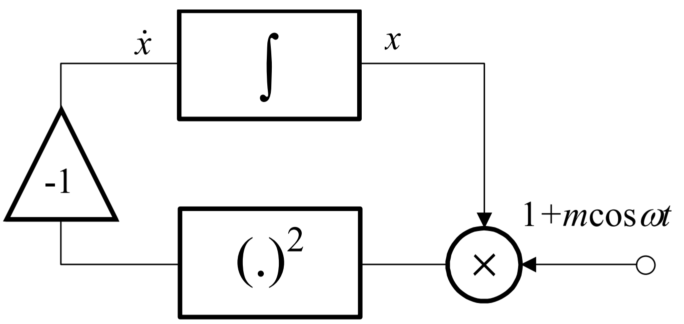
Uz $x' = x - x_0$ i $x_s' = x_s - x_0$ izlazi

$$e^{x'} = e^{-t} + e^{x'_s}\left(1-e^{-t}\right) = e^{x'_s} + \left(1-e^{x'_s}\right)e^{-t},$$

odakle se u kompaktnom, ali inverznom obliku dobiva

$$t = \ln\frac{e^{x'_s} - 1}{e^{x'_s} - e^{x'}}. \tag{4.36}$$

4.5.4 Vremenski promjenljivi nelinearni sustav prvog reda



Sl. 4.23

Uzet ćemo model *LR* kruga s $L(t)$ i otporom $v_R = ki^2$. Jednadžba stanja

$$\frac{dx}{dt} = -k\left[x(1+m\cos\omega t)\right]^2,$$

gdje je stanje flux, $x = \psi = Li$, a

$$L = \frac{1}{x(1 + m\cos\omega t)} .$$

Jednadžba se može riješiti separacijom varijabli:

$$\frac{dx}{x^2} = -k(1 + m\cos\omega t)^2\, dt .$$

Integracijom dobivamo

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} = k\left(t + \frac{2m}{\omega}\sin\omega t + \frac{m^2}{2}t + \frac{m^2}{2}\frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right)$$

i konačno

$$x = \frac{x_0}{1 + kx_0\left| \left(1 + \frac{m^2}{2}\right)t + \left(\frac{2m}{\omega}\right)\sin\omega t + \left(\frac{m^2}{4\omega}\right)\sin 2\omega t \right|} . \tag{4.37}$$

Ilustrirali smo svojstva sustava I reda analitičkim rješavanjem nekoliko primjera linearnih i nelinearnih sustava. Međutim, već kod sustava I reda u općem slučaju pobude i drugačijih karakteristika $f(x)$ te ako su nelinearni ili vremenski varijantni, trebat će upotrijebiti analognu ili digitalnu simulaciju na računalima.

5. SUSTAVI DRUGOG REDA

5.1 Definicija i blok dijagram

Sustav drugog reda je klasa sustava koja može biti modelirana s dvije simultane diferencijalne jednadžbe prvog reda i više izlaznih jednadžbi. To pretpostavlja dva elementa s memorijom, dakle, dva integratora u blok dijagramu. U bilo kakvom sustavu drugog reda trebat će identificirati dvije varijable stanja i dva početna uvjeta. Ako nađemo koje varijable predstavljaju početne uvjete, njih možemo smatrati varijablama stanja. U našem blok dijagramu to će biti izlazne varijable integratora.

Sustav s ulazom u i izlazom y je drugog reda ako se mogu identificirati dvije varijable stanja x_1 i x_2 tako da

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, u) \qquad x_1(\mathrm{t}_0) = x_{10}$$

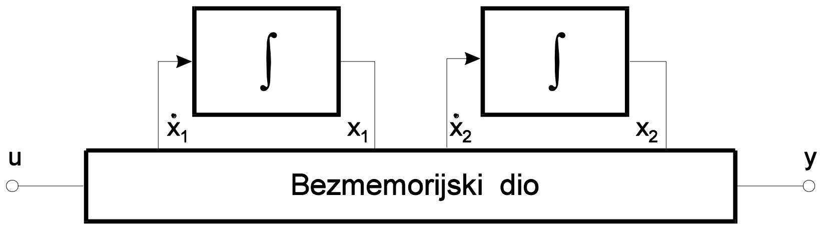
$$\text{za } t > \mathrm{t}_0$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, u) \qquad x_2(\mathrm{t}_0) = x_{20}$$

$$y = g(x_1, x_2, u),$$

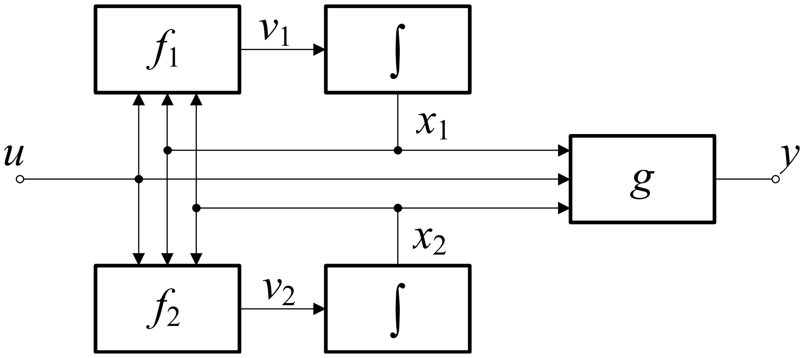
gdje je t vrijeme, t_0 početni trenutak, x_1 i x_2 realni brojevi, $f_1(.,.,.)$, $f_2(.,.,.)$ i $g(.,.,.)$ funkcije realnih vrijednosti i x_{10} i x_{20} početni uvjet ili početno stanje sustava.

Sustav koji se sastoji od dva integratora i jednog ili više funkcijskih blokova može se uvijek prikazati gornjim jednadžbama. Uzmimo da su izlazi iz integratora varijable stanja, a da smo integratore izvukli iz sustava



Sl. 5.1

Preostali sustav sastoji se isključivo od funkcijskih blokova. Ulazi u preostali bezmemorijski sustav su x_1, x_2 i u, a izlazi dx_1/dt, dx_2/dt i y. Dovodeći u vezu tri izlaza s tri ulaza s funkcijama f_1, f_2 i g dobivamo gore navedene jednadžbe. Primijetimo međutim kao kod sustava I reda da funkcije možda neće uvijek biti eksplicitno vezane s funkcijskim blokovima sustava već će se nekad dobiti rješenjem skupa implicitnih jednadžbi bezmemorijskog sustava. To će biti u slučaju kad bezmemorijski sustav ima petlje. Mi ćemo pretpostaviti da funkcije f_1, f_2 i g egzistiraju. Opći oblik blok dijagrama za sustav drugog reda može se nacrtati s funkcijskim blokovima samo s jednim izlazom, kako slijedi:



Sl. 5.2

Možemo izvesti vektor stanja

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

te **f** i **g** kao vektorske funkcije, pa možemo sustav drugog reda napisati ukratko

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x},u) \qquad \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1,x_2,u) \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 . \tag{5.2}$$
$$y = \mathbf{g}(\mathbf{x},u) \qquad \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1,x_2,u)$$

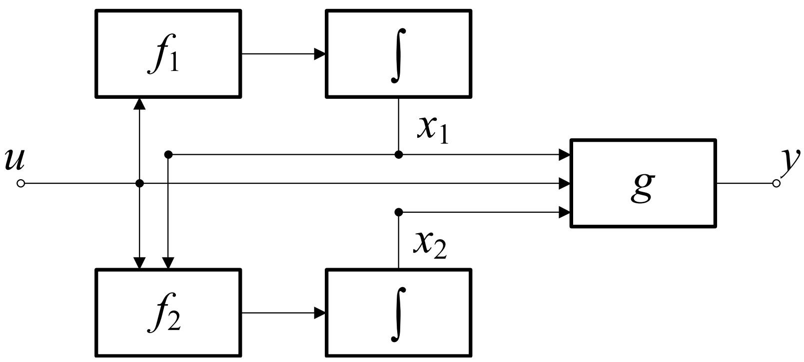
Rješenje vektorske diferencijalne jednadžbe možemo napisati formalno u obliku kao da se radi o diferencijalnoj jednadžbi prvog reda

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), u(\tau))d\tau . \tag{5.3}$$

Ovdje je stanje **x** vektorska veličina i **f** vektorska funkcija. Dobivena je integralna jednadžba u kojoj se funkcija stanja $\mathbf{x}(t)$ pojavljuje implicitno, pa ju nije moguće jednostavno riješiti kao ni kod jednadžbe prvog reda. (Treba poznavati $\mathbf{x}(t_0,t)$, $\mathbf{x}_0$ da se dobije $\mathbf{x}(t)$).

Ustanovimo međutim, da ukoliko nema povratnih veza u sustavu drugog reda, kao u blok dijagramu na slici:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(u)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1,u)$$
$$y = g(x_1,x_2,u)$$



Sl. 5.3

pojedine varijable se mogu dobiti integracijom poznatih vremenskih funkcija.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_{10} + \int_{t_0}^{t} f_1(u(\tau))d\tau, \\
x_2 &= x_{20} + \int_{t_0}^{t} f_2\left[\left[x_{10} + \int_{t_0}^{t} f_1(u(t''))dt''\right], u(t')\right]dt'.
\end{aligned} \tag{5.4}
$$

Izlazni signal, dakle, može biti određen postupkom integriranja poznatih funkcija i algebarskim operacijama određenim s funkcijskim blokovima.

U oba slučaja, sa ili bez petlje povratne veze, može se sustav opisati jednadžbama koje uključuju vektorsku diferencijalnu jednadžbu i algebarsku jednadžbu. Njihovo rješenje zavisi od početnog stanja danog vektorom $\mathbf{x}_0$. Sam $\mathbf{x}_0$ je dovoljan da uz poznavanje pobudnog signala $u(t)$ počevši od t_0 dalje, odredimo izlaz iz sustava u svakom trenutku t.

Poznavanje varijabli x_1 i x_2 odnosno vektora $\mathbf{x}$, u bilo kojem trenutku t_1 sadržava svu prošlost sustava pa je moguće zaboraviti sve što se događalo u sustavu do trenutka t_1.

Vektor $\mathbf{x}(t_1)$ može se uzeti kao početno stanje za daljnji proces u sustavu. Uz poznate signale pobude u intervalu $(t_1,t]$ mi možemo odrediti novo stanje $\mathbf{x}(t)$ i izlaz sustava $\mathbf{y}(t)$. Vektor $\mathbf{x}(t)$, dakle, u svakom trenutku predstavlja stanje sustava. Zato se ovakav model sustava naziva model stanja ili bolje, model s varijablama stanja.

5.2 Vladanje i svojstva sustava drugog reda

5.2.1 Linearni sustav vremenski stalan

Opći oblik jednadžbe stanja

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2, \\
\dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2,
\end{aligned} \tag{5.5}
$$

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}. \tag{5.6}
$$

Može se transformirati jedino u diferencijalnu jednadžbu drugog reda

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}_1 - T\dot{x}_1 + \Delta x_1 &= u(t), \qquad \text{ako je } a_{12} \neq 0, \\
\ddot{x}_2 - T\dot{x}_2 + \Delta x_2 &= v(t), \qquad \text{ako je } a_{21} \neq 0.
\end{aligned} \tag{5.7}
$$

Ako su obje konstante $a_{12} = a_{21} = 0$ (matrica $\mathbf{A}$ je dijagonalna) sustav je opisan s dvije razvezane jednadžbe prvog reda.

$$
T = a_{11} + a_{22} \qquad \text{trag matrice } \mathbf{A}, \tag{5.8}
$$

$$
\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad \text{determinanta od } \mathbf{A}, \tag{5.9}
$$

$$
\begin{aligned}
u(t) &= (a_{12}b_{21} - a_{22}b_{11})u_1 + (a_{12}b_{22} - a_{22}b_{12})u_2 + b_{11}\dot{u}_1 + b_{12}\dot{u}_2, \\
v(t) &= (a_{21}b_{11} - a_{11}b_{21})u_1 + (a_{21}b_{12} - a_{11}b_{22})u_2 + b_{21}\dot{u}_1 + b_{22}\dot{u}_2.
\end{aligned} \tag{5.10}
$$

Često se jednadžba drugog reda nepobuđenog (autonomnog; $u = 0$, $v = 0$) sustava piše u donjem obliku (gdje x može biti x_1 ili x_2 iz (5.7))

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0\,, \tag{5.11}$$

gdje je $2\alpha = -\mathrm{T}$, α je faktor prigušenja

$$\omega_0^2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\,, \tag{5.12}$$

ω_0 je frekvencija neprigušenog titranja.

Rješenje jednadžbe se dobiva pretpostavkom da je eksponencijala $x(t) = Xe^{pt}$ rješenje. Uvrštenje vodi do karakteristične jednadžbe

$$p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 = 0\,, \tag{5.13}$$

čija rješenja su karakteristične ili prirodne frekvencije sustava drugog reda.

$$p_{12} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \begin{cases} -\alpha \pm \alpha_d & \text{za} \quad \alpha > \omega_0 > 0, \\ -\alpha & \text{za} \quad \alpha = \omega_0 > 0, \\ -\alpha \pm j\omega_d & \text{za} \quad 0 < \alpha < \omega_\mathrm{d}, \end{cases} \tag{5.14}$$

$$\alpha_d = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}\,,$$
$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}.$$

Rješenje je oblika $x = \mathrm{X}_1 e^{\mathrm{p}_1 t} + \mathrm{X}_2 e^{\mathrm{p}_2 t}$ i zavisno od veličina α i ω_0 vodi na tzv.

nadkritično	$\alpha > \omega_0$,	
kritično	$\alpha = \omega_0$,	
i podkritično prigušenje	$\alpha < \omega_0$,	(5.15)
te neprigušeni slučaj	$\alpha = 0$.	

Proizvoljne konstante određuju početni uvjeti $x(0)$ i $\dot{x}(0)$ tako da se rješenje može napisati u obliku

$$x(t) = \frac{\dot{x}(0) - x(0)\mathrm{p}_2}{(\mathrm{p}_1 - \mathrm{p}_2)} e^{\mathrm{p}_1 t} + \frac{\dot{x}(0) - x(0)\mathrm{p}_1}{(\mathrm{p}_2 - \mathrm{p}_1)} e^{\mathrm{p}_2 t}. \tag{5.16}$$

Rješenje homogene jednadžbe stanja može se dobiti u općem slučaju opet pretpostavkom da eksponencijalne funkcije $x_1 = \mathrm{X}_1 e^{pt}, x_2 = \mathrm{X}_2 e^{pt}$ zadovoljavaju sustav od dvije jednadžbe

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \xrightarrow[x_2=\mathrm{X}_2 e^{pt}]{x_1=\mathrm{X}_1 e^{pt}} \begin{aligned} p\mathrm{X}_1 &= (a_{11}\mathrm{X}_1 + a_{12}\mathrm{X}_2), \\ p\mathrm{X}_2 &= (a_{21}\mathrm{X}_1 + a_{22}\mathrm{X}_2). \end{aligned} \tag{5.17}$$

Uvrštenjem smo dobili sustav algebarskih jednadžbi

$$(a_{11} - p)\mathrm{X}_1 + a_{12}\mathrm{X}_2 = 0,$$
$$a_{21}\mathrm{X}_1 + (a_{22} - p)\mathrm{X}_2 = 0.$$

Da bi taj sustav karakterističnih jednadžbi dao rješenja za amplitude X_1, X_2 različita od nule, mora determinanta sustava iščezavati, tj.

$$\begin{vmatrix} (a_{11}-p) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22}-p) \end{vmatrix} = 0. \tag{5.18}$$

To daje polinom drugog stupnja u p

$$p^2 - \mathrm{T}p + \Delta = 0, \tag{5.19}$$

odakle slijede opet prirodne frekvencije p_1 i p_2 za koje e^{pt} zadovoljava jednadžbu. Rješenje se može napisati u obliku

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \mathrm{X}_{11}e^{\mathrm{p}_1 t} + \mathrm{X}_{12}e^{\mathrm{p}_2 t}, \\ x_2(t) &= \mathrm{X}_{21}e^{\mathrm{p}_1 t} + \mathrm{X}_{22}e^{\mathrm{p}_2 t}. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Iako su napisane četiri proizvoljne konstante, nezavisne su samo dvije. Njih ćemo odrediti iz dva početna uvjeta x_{10} i x_{20}, dok druge dvije izlaze iz prvih uvrštenjem u jednadžbe stanja za $t = 0$.

$$\begin{aligned} x_{10} &= \mathrm{X}_{11} + \mathrm{X}_{12} \qquad & \dot{x}_1(0) &= \mathrm{p}_1\mathrm{X}_{11} + \mathrm{p}_2\mathrm{X}_{12} = a_{11}x_{10} + a_{12}x_{20}, \\ x_{20} &= \mathrm{X}_{21} + \mathrm{X}_{22} \qquad & \dot{x}_2(0) &= \mathrm{p}_1\mathrm{X}_{21} + \mathrm{p}_2\mathrm{X}_{22} = a_{21}x_{10} + a_{22}x_{20}. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Iz ove četiri jednadžbe se mogu odrediti sve konstante X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{X}_{11} + \mathrm{X}_{12} = x_{10} \Rightarrow a_{12}e^{\mathrm{p}_1 t} + a_{12}e^{\mathrm{p}_2 t} = x_{10} \\ &\mathrm{p}_1\mathrm{X}_{11} + \mathrm{p}_2\mathrm{X}_{12} = a_{11}x_{10} + a_{12}x_{20} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \mathrm{X}_{11} = \frac{(a_{11}-\mathrm{p}_2)x_{10} + a_{12}x_{20}}{\mathrm{p}_1 - \mathrm{p}_2}$$

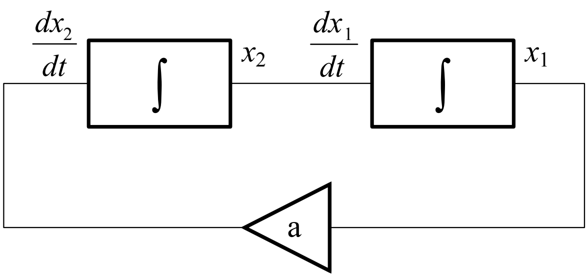
$$\mathrm{X}_{12} = \frac{(a_{11}-\mathrm{p}_1)x_{10} + a_{12}x_{20}}{\mathrm{p}_2 - \mathrm{p}_1}$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{X}_{21} + \mathrm{X}_{22} = x_{20} \\ &\mathrm{p}_1\mathrm{X}_{21} + \mathrm{p}_2 X_{22} = a_{21}x_{10} + a_{22}x_{20} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \mathrm{X}_{21} = \frac{a_{21}x_{10} + (a_{22}-\mathrm{p}_2)x_{20}}{\mathrm{p}_1 - \mathrm{p}_2} \tag{5.22}$$

$$\mathrm{X}_{22} = \frac{a_{21}x_{10} + (a_{22}-\mathrm{p}_1)x_{20}}{\mathrm{p}_2 - \mathrm{p}_1}$$

Odakle se može napisati rješenje za svaku varijablu stanja kako se mijenja u vremenu počevši od početnog stanja (x_{10}, x_{20}).

Primjer: Uzmimo najjednostavniji slučaj dva integratora s povratnom vezom



Sl. 5.4

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \mathrm{a}x_1 \end{aligned} \tag{5.23}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \mathrm{a} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} a_{11} &= 0 \qquad & a_{12} &= 1 \\ a_{21} &= \mathrm{a} \qquad & a_{22} &= 0 \\ T &= 0 \qquad & \Delta &= -\mathrm{a} \end{aligned} \tag{5.24}$$

$$\begin{vmatrix} -p & 1 \\ \mathrm{a} & -p \end{vmatrix} = p^2 - \mathrm{a} = 0 \qquad \mathrm{p}_{12} = \pm\sqrt{\mathrm{a}} = \pm\alpha \qquad \text{za } \mathrm{a} > 0, \tag{5.25}$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= X_{11}e^{\alpha t} + X_{12}e^{-\alpha t} \\ &= \frac{\alpha x_{10} + 1\cdot x_{20}}{2\alpha}e^{\alpha t} - \frac{-\alpha x_{10} + 1\cdot x_{20}}{2\alpha}e^{-\alpha t} \\ &= \frac{x_{10}}{2}e^{\alpha t} + \frac{x_{10}}{2}e^{-\alpha t} + \frac{x_{20}}{2\alpha}e^{\alpha t} - \frac{x_{20}}{2\alpha}e^{-\alpha t}, \end{aligned}$$

$$x_1(t) = x_{10}\,\mathrm{ch}(\alpha t) + \frac{x_{20}}{\alpha}\mathrm{sh}(\alpha t), \tag{5.26}$$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \frac{\alpha\cdot x_{10} + \alpha x_{20}}{2\alpha}e^{\alpha t} - \frac{\alpha\cdot x_{10} - \alpha x_{20}}{2\alpha}e^{\alpha t}, \\ x_2(t) &= \alpha x_{10}\,\mathrm{sh}(\alpha t) + x_{20}\,\mathrm{ch}(\alpha t), \end{aligned} \tag{5.27}$$

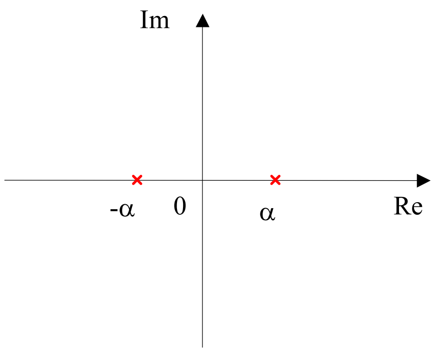
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{ch}(\alpha t) & \dfrac{\mathrm{sh}(t)}{\alpha} \\ \alpha\,\mathrm{sh}(\alpha t) & \mathrm{ch}(\alpha t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}, \tag{5.28}$$

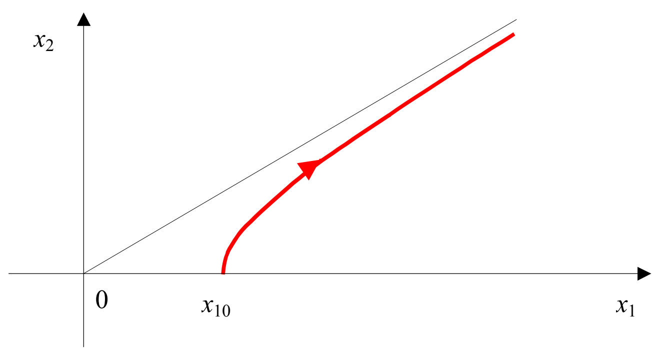
$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0$, gdje je Φ(t)-prijelazna matrica

Kakva je međusobna veza između $x_1(t)$ i $x_2(t)$. Shvatimo ove funkcije kao parametarske jednadžbe krivulje u ravnini (x_1, x_2) Jednadžbu krivulje $F(x_1,x_2) = 0$ možemo dobiti eliminacijom vremena.

Uzmimo početno stanje x_{10}, ($x_{20} = 0$)

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{10}\,\mathrm{ch}\,\alpha t \quad \Big|: x_{10} \quad \Big|^2 \\ x_2 &= \alpha x_{10}\mathrm{sh}\,\alpha t \quad \Big|: \alpha x_{10} \quad \Big|^2 \\ \left(\frac{x_1}{x_{10}}\right)^2 &- \left(\frac{x_2}{\alpha x_{10}}\right)^2 = 1. \end{aligned} \tag{5.29}$$





Sl. 5.5

Jednadžba trajektorije u ravnini stanja $\quad x_1 \to \infty \quad$ za $\quad t \to \infty$

$$x_2 \to \infty \quad \text{za} \quad t \to \infty.$$

(Nestabilan sustav. Ravnoteža $x = 0$ se ne dosegne) - sedlo

$$\text{za } a<0 \qquad p_{12}=\pm\sqrt{-\omega_0^2}=\pm j\omega_0\,, \tag{5.30}$$

$$x_1(t)=x_{10}\cos\omega t-\frac{x_{20}}{\omega}\sin\omega t\,, \tag{5.31}$$

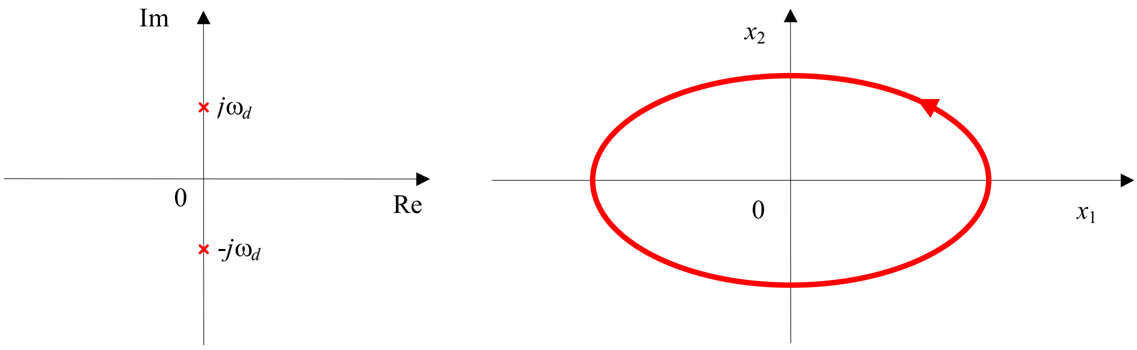
$$x_2(t)=\omega x_{10}\sin\omega t+x_{20}\cos\omega t\,, \tag{5.32}$$

za $x_{20}=0$

$$\left.\begin{array}{ll} x_1(t)=x_{10}\cos\omega t & \left|:x_{10}\right|^2 \\ x_2(t)=\omega x_{10}\sin\omega t & \left|:\omega x_{10}\right|^2 \end{array}\right|+ \tag{5.33}$$

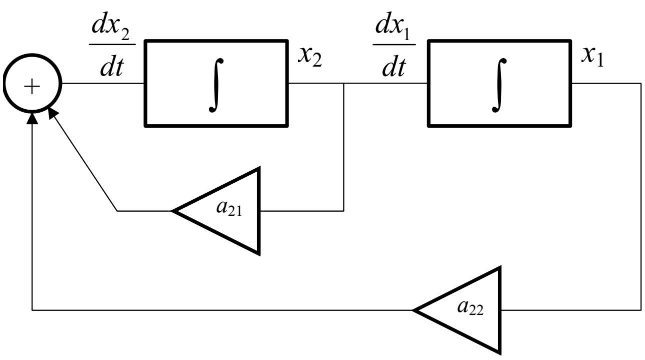
$$\left(\frac{x_1}{x_{10}}\right)^2+\left(\frac{x_2}{\omega x_{10}}\right)^2=1.$$

Zatvorena krivulja - periodičan proces. Trajektorija obilazi oko točke ravnoteže (fokus).



Sl. 5.6

Sustav na slici



$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \tag{5.34}$$

Sl. 5.7

$$p_{12}=-\alpha\pm\alpha_d=\frac{T}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{T}{2}\right)^2-\Delta}=\frac{a_{22}}{2}\pm\sqrt{\frac{a_{22}^2}{4}+a_{21}}\,, \tag{5.35}$$

za $a_{22}<0$ i $a_{21}<0$ i $a_{22}^2<<-4a_{21}$,

$$x_1(t)=\frac{(\alpha+j\omega_d)x_{10}}{2j\omega_d}e^{(-\alpha+j\omega_d)t}-\frac{(\alpha-j\omega_d)x_{10}}{2j\omega_d}e^{(-\alpha-j\omega_d)t}\,, \tag{5.36}$$

$$p_{12}=-\alpha\pm j\omega_d \qquad \omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}\,,$$

$$x_1(t)=x_{10}e^{-\alpha t}\left[\frac{\alpha+j\omega_d}{j\omega_d}\frac{e^{j\omega_d}}{2}-\frac{\alpha-j\omega_d}{j\omega_d}\frac{e^{-j\omega_d}}{2}\right],$$

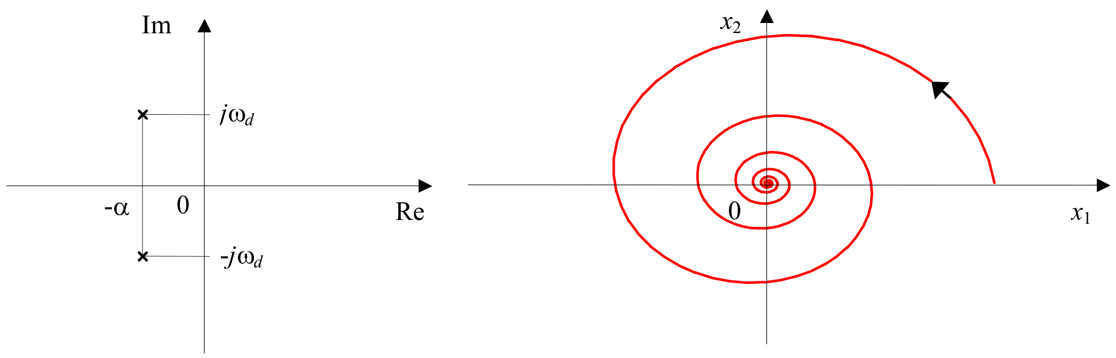
$$x_1(t) = x_{10}e^{-\alpha t}\left[\frac{\alpha}{\omega_d}\sin\omega_d t + \cos\omega_d t\right], \tag{5.37}$$

$$x_2(t) = \frac{\omega_d^2 x_{10}}{2j\omega_d}e^{(-\alpha+j\omega_d)t} - \frac{\omega_d^2 x_{10}}{2j\omega_d}e^{(-\alpha-j\omega_d)t}, \tag{5.38}$$

$$x_2(t) = \omega_d x_{10}e^{-\alpha t}\sin(\omega_d t),$$

$$x_1(t) = x_{10}e^{-\alpha t}\cos(\omega_d t), \qquad \text{za } \frac{\alpha}{\omega_d} << 1,$$

$$\left(\frac{x_1}{x_{10}e^{-\alpha t}}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\omega_d x_{10}e^{-\alpha t}}\right)^2 = 1. \tag{5.39}$$



Sl. 5.8

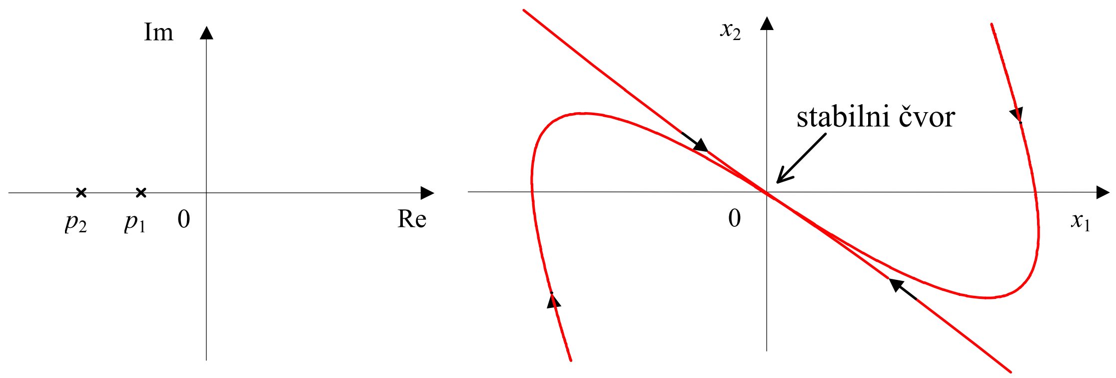
<u>Slučaj realnih i različitih p_1 i p_2</u>

$$p_{12} = -\alpha \pm \alpha_d \qquad\qquad p_{12} = \alpha \pm \alpha_d \quad , \tag{5.40}$$

$$a_{11} < 0 \qquad\qquad \Delta < \frac{T^2}{4} \qquad\qquad x_{10} \neq 0\,,\, x_{20} = 0\,,$$

vodi na trajektorije koje u prvom slučaju završavaju u ishodištu, a u drugom bježe iz ishodišta. Ishodište kao, ravnotežno stanje predstavlja stabilni odnosno nestabilni čvor.

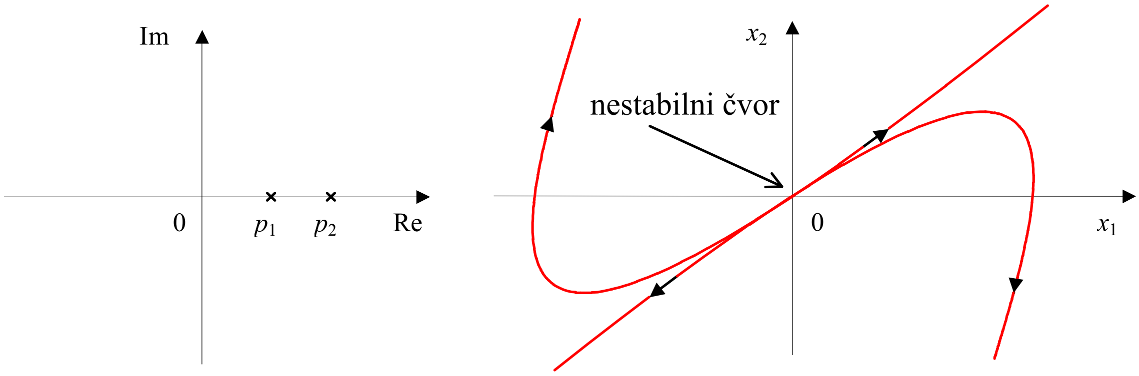
(i)



Sl. 5.9

$$x_1(t) = x_{10}e^{-\alpha t}\left[\mathrm{ch}(\alpha_d) + \frac{\alpha}{\alpha_d}\mathrm{sh}(\alpha_d t)\right],$$
$$x_2(t) = \alpha_d x_{10}e^{-\alpha t}\left[\mathrm{sh}(\alpha_d t)\right]. \tag{5.41}$$

(ii)



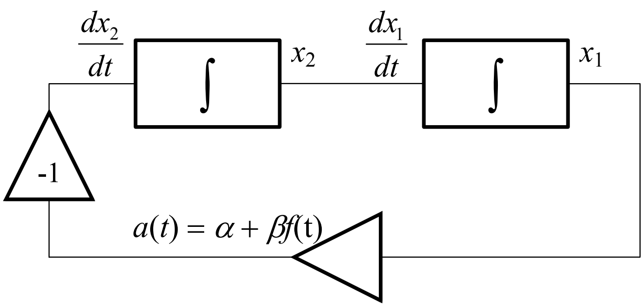
Sl. 5.10

$$x_1(t) = x_{10}e^{-\alpha t}\left[\mathrm{ch}(\alpha_d) + \frac{\alpha}{\alpha_d}\mathrm{sh}(\alpha_d t)\right],$$
$$x_2(t) = \alpha_d x_{10}e^{-\alpha t}\left[\mathrm{sh}(\alpha_d t)\right]. \tag{5.42}$$

Sumarni prikaz trajektorija autonomnog sustava drugog reda u ravnini stanja je na Sl. 5.12.

5.2.2 Vremenski promjenjiv sustav drugog reda

Dva integratora s povratnom vezom će postati vremenski promjenjiv sustav drugog reda, ako pojačanje u petlji blok dijagrama na slici bude zavisno od vremena $a(t)$.



$$\dot{x}_1(t) = x_2$$
$$\dot{x}_2(t) = -a(t)x_1(t) \tag{5.43}$$

Sl. 5.11

Vremenska će funkcija pojačanja razumljivo utjecati na vladanje sustava. Diferencijalne jednadžbe s nekim $a(t)$ su pobudile veći interes pa su dobile ime po istraživačima. Tako se jednadžba sa $a(t) = \alpha + \beta f(t)$ naziva Hillova diferencijalna jednadžba,

$$\ddot{x}_1 = \dot{x}_2 = -(\alpha + \beta f(t))x_1,$$
$$\ddot{x}_1 + (\alpha + \beta f(t))x_1 = 0,$$

dok za $f(t) = 2\cos 2t$ izlazi

$$\ddot{x}_1 + (\alpha + 2\beta \cos 2t)x_1 = 0 \qquad \text{Mathieu-ova dif. jednadžba.}$$

Ako za $f(t) = r(t)$ pravokutan oblik, dobiva se funkcija konstantna po odsječcima (Meissnerova jednadžba). Zbog konstantnih koeficijenata ispred x_2 u subintervalu, jednadžba se može rješavati po intervalima kao diferencijalna jednadžba s konstantnim koeficijentima.

Pretpostavimo $a(t)$ u obliku

$$a(t) = \alpha(1 + mr(t)) \qquad r(t) = \begin{cases} 1 & 0 < \sqrt{(1+m)\alpha} \le \dfrac{\pi}{2}, \\ -1 & \dfrac{\pi}{2} < \sqrt{(1-m)\alpha} \le \pi. \end{cases} \tag{5.44}$$

Za 1,3,5,... četvrtinu perioda jednadžba stanja je

$$\begin{gathered} \dot{x}_2 = -\alpha(1+m)x_1, \qquad \dot{x}_1 = x_2 \\ \text{ili} \\ \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = 0, \end{gathered} \tag{5.45}$$

a za 2,4,6,... četvrtinu perioda je jednadžba stanja

$$\begin{gathered} \dot{x}_2 = -\alpha(1-m)x_1, \qquad \dot{x}_1 = x_2 \\ \text{ili} \\ \ddot{x}_1 + \omega_2^2 x_1 = 0. \end{gathered} \tag{5.46}$$

U oba slučaja je to rješenje vremenski nepromjenljivog sustava, gdje je $\omega_1^2 = \alpha(1+m)$ u prvom, a $\omega_2^2 = \alpha(1-m)$ u drugom slučaju. Rješenje izraženo s početnim uvjetima je (5.31) i (5.32)

$$x_1 = x_{10} \cos \omega t + \frac{x_{20}}{\omega} \sin \omega t,$$
$$x_2 = -\omega x_{10} \sin \omega t + x_{20} \cos \omega t.$$

Odredimo rješenje gornjih diferencijalnih jednadžbi u 1, 2, 3 i 4. vremenskom odsječku. U svakom odsječku ćemo smatrati da vrijeme počinje od $t = 0$, a kao početno stanje uzet ćemo krajnje stanje iz prethodnog vremenskog intervala. Kao početno stanje u prvom intervalu uzmimo $x_{10} \neq 0,\ x_{20} = 0$

$$\begin{array}{lll} x_1(t) = x_{10} \cos(\omega_1 t) & x_2(t) = -\omega_1 x_{10} \sin(\omega_1 t) & \\ x_1(\omega_1 t = \pi/2) = 0 & x_2(\omega_1 t = \pi/2) = -\omega_1 x_{10} & 0 < \omega_1 t < \dfrac{\pi}{2} \\ x_1(t = \pi/2\omega_1) = 0 & x_2(t = \pi/2\omega_1) = -\omega_1 x_{10} & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} x_1(t) = \dfrac{-\omega_1 x_{10}}{\omega_2} \sin(\omega_2 t) & x_2(t) = -\omega_1 x_{10} \cos(\omega_2 t) & \\ & & 0 < \omega_2 t < \dfrac{\pi}{2} \\ x_1(\omega_2 t = \pi/2) = \dfrac{-\omega_1 x_{10}}{\omega_2} & x_2(\omega_2 t = \pi/2) = 0 & \end{array}$$

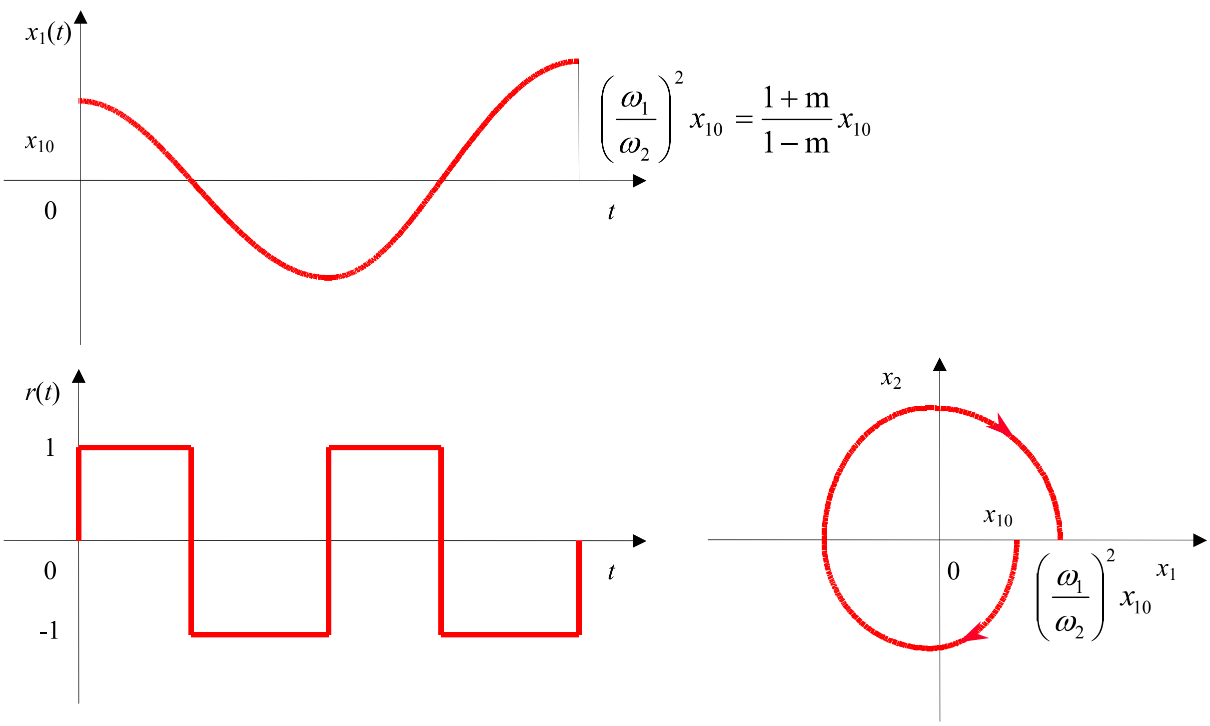
$$x_1(t) = \frac{-\omega_1 x_{10}}{\omega_2}\cos(\omega_1 t) \qquad x_2(t) = \omega_1 \frac{\omega_1 x_{10}}{\omega_2}\sin(\omega_1 t)$$

$$x_1(\omega_1 t = \pi/2) = 0 \qquad x_2(\omega_1 t = \pi/2) = \frac{\omega_1^2 x_{10}}{\omega_2}$$

$$x_1(t) = \frac{\omega_1^2 x_{10}}{\omega_2^2}\sin(\omega_2 t) \qquad x_2(t) = \frac{\omega_1^2 x_{10}}{\omega_2^2}\cos(\omega_2 t)$$

$$x_1(\omega_2 t = \pi/2) = \frac{\omega_1^2 x_{10}}{\omega_2^2} \qquad x_2(\omega_2 t = \pi/2) = 0$$

$$x_1(2\pi) = \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 x_{10} = \frac{1+m}{1-m} x_{10}$$



Sl. 5.12

Ovdje se vidi da periodična promjena parametra pogodnog polariteta $m>0$ i dvostruke frekvencije izaziva porast amplitude titranja.

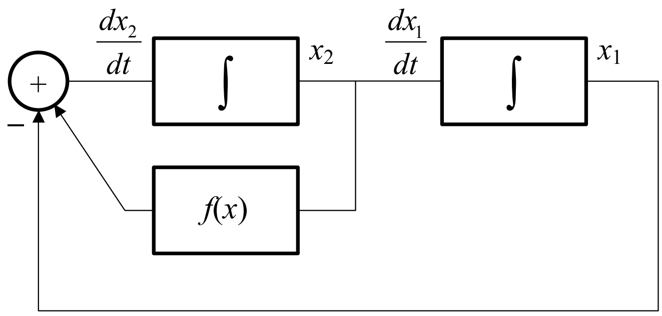
Analizirani sustav je model fizikalnog njihala (dječja ljuljačka) gdje se težište mase mijenja ili model titrajnog kruga čiji se kapacitet mijenja dvostrukom frekvencijom od frekvencije titranja kruga. Promjena kapaciteta u gornjem primjeru se događa u trenucima kad je na kondenzatoru maksimalni napon ili nula. Smanjivanje kapaciteta kondenzatora tj. razmicanje ploča kondenzatora vrši se savladavanjem privlačne sile među pločama pa taj rad povećava energiju u kondenzatoru u trenutku kad se energija nalazi u kondenzatoru (najveći napon).

Vraćanje na prijašnji kapacitet i razmak ploča vrši se u trenutku nikakvog napona na kondenzatoru, pa nema rada niti promjene energije. Ovim postupkom se pumpa energija u krug i odatle slijedi rast amplitude oscilacija.

Ovakvo vladanje titrajnog kruga primjenjuje se u elektronici za pojačavanje ili generaciju sinusnih signala (parametarska pojačala ili oscilatori) gdje se varijabilni kapacitet realizira specijalnim poluvodičkim diodama (varikap).

5.2.3 Nelinearni sustav drugog reda

Uzmimo kao primjer nelinearni funkcijski blok čija funkcija je polinom trećeg stupnja, $f(x) = \mathrm{a}x - \mathrm{c}x^3$, u autonomnom sustavu drugog reda prema blok dijagramu:



$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + f(x_2) \qquad (5.47)$$

Sl. 5.13

Jednadžba se može svesti na jednadžbu drugog reda

$$\begin{aligned}\frac{d^2x_2}{dt^2} &= -\frac{dx_1}{dt} + \frac{df}{dx_2}\cdot\frac{dx_2}{dt},\\ &= -x_2 + \frac{df}{dx_2}\cdot\frac{dx_2}{dt},\\ \frac{d^2x_2}{dt^2} &= -x_2 + (\mathrm{a} - 3\mathrm{c}x_2^2)\frac{dx_2}{dt},\end{aligned}$$

odnosno

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} - (\mathrm{a} - 3\mathrm{c}x_2^2)\frac{dx_2}{dt} + x_2 = 0, \qquad (5.48)$$

koja se obično naziva Van der Polova jednadžba. Ova jednadžba je poslužila za analizu nekoliko tipova oscilatora, ali je Rayleigh već ranije studirao održavanje vibracija jednadžbom koja se može svesti na Van der Polovu. Studiranju svojstava ove jednadžbe posvetili su se i ruski znanstvenici (Bogoljubov). Analitički postupci razvijeni za njeno rješenje preneseni su na rješavanje nekih klasa nelinearnih sustava općenito.

Od niza zanimljivih fenomena posvetit će se pažnja radu ovog sustava kao oscilatora. Pretpostavit ćemo da veličine a << 1 i c << 1 tako da je sustav vrlo oscilatoran. U tom slučaju dominantni proces može se opisati uz zanemarenje člana s $\frac{dx_2}{dt}$, jednadžbom $\ddot{x}_2 + x_2 = 0$.

Za očekivati je, dakle, da će se taj proces moći opisati približno s harmonijskim titranjem dok će mali srednji član $(\mathrm{a}-3\mathrm{c}x_1^2)\dot{x}$ utjecati na mijenjanje amplitude titranja. Pretpostavimo, dakle, rješenje u obliku:

$$x = A(t)\sin(t)\,, \tag{5.49}$$

gdje je $A(t)$ sporo mijenjajuća amplituda oscilacija. Uvrštenje ovakvog rješenja u jednadžbu pokazuje da ono uz odgovarajuće aproksimacije zadovoljava jednadžbu, te da se može odrediti oblik mijenjanja i stabiliziranja amplitude oscilacija $A(t)$.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{A}(t)\sin t + A(t)\cos t,\\ \ddot{x} &= \ddot{A}(t)\sin t + 2\dot{A}(t)\cos t - A(t)\sin t.\end{aligned}$$

Uvrštenje u jednadžbu daje

$$\ddot{A}(t)\sin(t) + 2\dot{A}(t)\cos t - A(t)\sin t - \left[\mathrm{a} - 3\mathrm{c}A^2(t)\sin^2 t\right]\cdot\left[\dot{A}(t)\sin t + A(t)\cos t\right] + A(t)\sin t = 0\,.$$

Da bi jednadžba bila zadovoljena, svi članovi koji množe sin(t) i koji množe cos(t) moraju biti jednaki nuli.

$$\begin{aligned}&\ddot{A}(t)\sin t - A(t)\sin t - \mathrm{a}\dot{A}(t)\sin t + 3A^2(t)\mathrm{c}\dot{A}(t)\sin^3 t = 0,\\ &2\dot{A}(t)\cos t - \mathrm{a}A(t)\cos t + 3\mathrm{c}A^3(t)\sin^2 t\cos t = 0.\end{aligned} \tag{5.50}$$

Dovoljna nam je druga jednadžba koja uz $\sin^2 t = \dfrac{1-\cos 2t}{2}$ i

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t\right)\cos t = \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{4}\left[\cos(2t-t) + \cos(2t+t)\right],$$

daje treći član $\dfrac{3\mathrm{c}}{4}A^3(\cos t - \cos 3t)$.

Druga jednadžba izlazi

$$2\dot{A}(t)\cos t - \mathrm{a}A(t)\cos t + \frac{3\mathrm{c}}{4}A^3(\cos t - \cos 3t) = 0\,.$$

Efekt treće harmoničke komponente ($3t$) u ovom veoma oscilatornom sustavu koji titra s $\omega_0 = 1$ može se zanemariti pa dobivamo diferencijalnu jednadžbu za sporo mijenjanje amplitude

$$2\dot{A}(t) - \mathrm{a}A(t) + \frac{3\mathrm{c}}{4}A^3(t) = 0\,. \tag{5.51}$$

Stalna amplituda $\dot{A}(t) = 0$ uspostavit će se pri

$$A(t)\left(\mathrm{a} - \frac{3\mathrm{c}}{4}A^2(t)\right) = 0 \qquad \text{tj. } \mathrm{A}_{s1} = 0 \qquad \text{i} \qquad \mathrm{A}_{s2,3}^2 = \frac{4\mathrm{a}}{3\mathrm{c}}\,. \tag{5.52}$$

Ako pretpostavimo da je početno stanje u sustavu izazvalo početnu amplitudu titranja $A(0) = \mathrm{A}_0$ utitravanje oscilatora od A_0 do A_s dobit će se rješenjem gornje jednadžbe separacijom varijabli. Pogodne transformacije su množenje s A

$$2A\dot{A} = \mathrm{a}A^2(t) - \frac{3\mathrm{c}}{4}A^4(t) = \frac{dA^2}{dt}\,.$$

Uz supstituciju $A^2 = \dfrac{1}{y}$

$$-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dt}=\frac{\mathrm{a}}{y}-\frac{3\mathrm{c}}{4y^2} \qquad \rightarrow \qquad \frac{dy}{dt}=-\mathrm{a}y+\frac{3\mathrm{c}}{4}$$

$$\int_{\mathrm{y}_0}^{y}\frac{d\eta}{\frac{3\mathrm{c}}{4\mathrm{a}}-\eta}=\mathrm{a}\int_{\mathrm{y}_0}^{y}d\tau=\mathrm{a}t=\int_{\mathrm{y}_0}^{y}\frac{d\eta}{\mathrm{y}_s-\eta}=-\ln\frac{\mathrm{y}_s-y}{\mathrm{y}_s-\mathrm{y}_0}$$

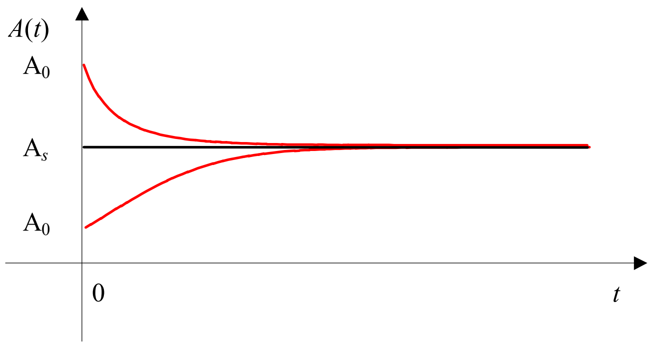
$$\frac{\mathrm{y}_s-y}{\mathrm{y}_s-\mathrm{y}_0}=e^{-at}=\frac{\frac{1}{A_s^2}-\frac{1}{\mathrm{a}^2}}{\frac{1}{A_s^2}-\frac{1}{A_0^2}} \tag{5.53}$$

Amplitudu dobivamo konačno

$$\frac{1}{A^2}=\frac{1}{\mathrm{A}_0^2}e^{-\mathrm{a}t}+\frac{1}{\mathrm{A}_s^2}(1-e^{-\mathrm{a}t})\,. \tag{5.54}$$

Odnosno

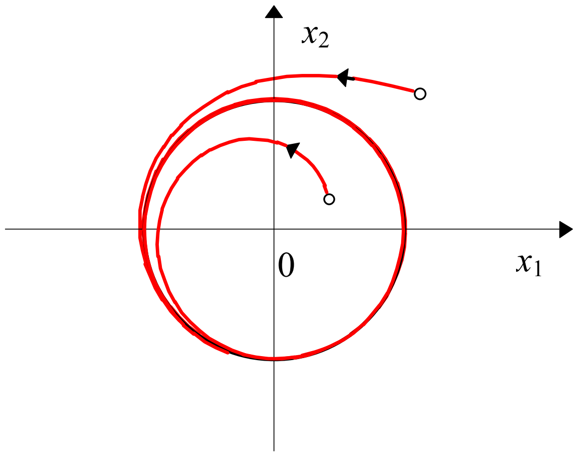
$$A(t)=\frac{\mathrm{A_s}}{\sqrt{1+\left[\left(\frac{\mathrm{A_s}}{\mathrm{A_0}}\right)^2-1\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{at}}}}\,. \tag{5.55}$$



Sl. 5.14

Amplituda se u početku eksponencijalno razvija počevši od A_0, a kasnije asimptotički približava stalnoj vrijednosti A_s. U slučaju $A_0<A_s$ raste, dok za $A_0>A_s$ asimptotički pada na A_s. Amplituda oscilacija pokazuje svojstvo stabilnosti. Trajektorija u ravnini stanja kreće od početnog stanja i teži zatvorenoj krivulji. Zatvorena krivulja opisuje tzv. granični ciklus u sustavu.

Za razliku od zatvorenih trajektorija u linearnom sustavu, gdje početno stanje određuje veličinu zatvorene krivulje, ovdje parametri nelinearnog funkcijskog bloka (a,c) određuju veličinu zatvorene trajektorije. U njenoj neposrednoj blizini nema drugih trajektorija. Takve trajektorije se nazivaju izoliranim.



Sl. 5.15

6. OPĆI LINEARNI SUSTAVI

Linearni sustavi čine vrlo važnu klasu sustava, jer se veliki broj realnih sustava može modelirati linearnim sustavom.

6.1 Primjeri signala u kontinuiranom vremenu

Za analizu linearnih sustava najveće značenje imaju signali: kompleksna eksponencijala i Diracova δ-funkcija.

6.1.1 Kompleksna eksponencijala

Kompleksna eksponencijala je vrlo važan signal u analizi sustava, a predstavljen je s

$$u(t) = \mathrm{U}e^{st},\ \mathrm{U},\ s \in \mathbf{C},\ t \in \mathbb{R},$$

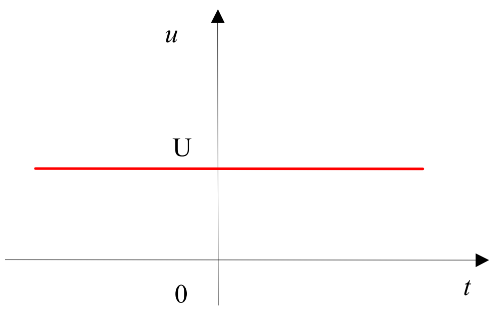
gdje su $\mathrm{U} = |\mathrm{U}|\, e^{j\varphi}$ kompleksna amplituda, a $s = \sigma + j\omega$ kompleksna frekvencija.

Specijalni slučajevi pokriveni s ovim matematičkim modelom signala:

a) konstantan signal $s = 0$

$$u(t) = \mathrm{U},\ t \in (-\infty, \infty),$$

gdje je U realna konstanta.

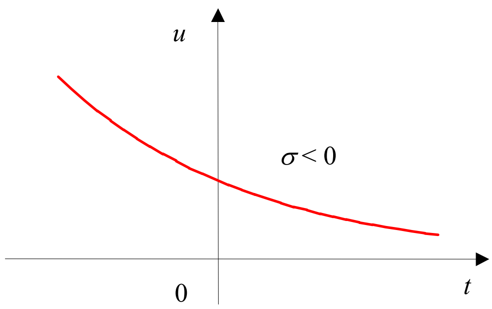


Sl. 6.1

b) eksponencijalni signal $s = \sigma$

$$u(t) = \mathrm{U}e^{\sigma t},\ t \in (-\infty, \infty),\ \sigma \in \mathbb{R},\ \mathrm{U} \in \mathbb{R},$$

gdje su U i σ realni brojevi.



Sl. 6.2

c) kompleksni harmonijski signal $s = j\omega$

$$u(t) = \mathrm{U}e^{j\omega t},\ t \in (-\infty, \infty),\ \omega \in \mathbb{R},$$

gdje je $U = |U|\, e^{j\varphi}$ kompleksna amplituda, a ω realna kružna frekvencija

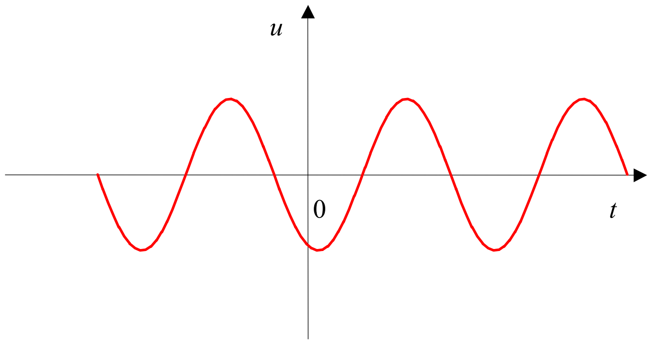
$$\omega = 2\pi f.$$

Kompleksni harmonijski signal se može rastaviti na dvije komponente: realnu i imaginarnu

$$u(t) = Ue^{j\omega t} = |U|\, e^{j(\omega t + \mathrm{i})} = |U|\, [\cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi)].$$

Realni harmonijski signal predstavlja titranje konstantne amplitude Sl. 6.3.

$$u_r(t) = \mathrm{Re}\{u(t)\} = |U|\cos(\omega t + \varphi)\ .$$



Sl. 6.3

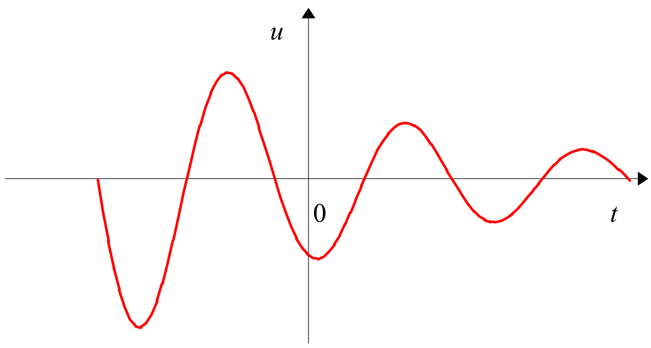
Može se također prikazati i s dvije eksponencijale

$$u_r(t) = \frac{u(t) + u^*(t)}{2} = \frac{1}{2}\left(Ue^{j\omega t} + U^* e^{-j\omega t}\right).$$

Harmonijski signal s frekvencijom $f \neq 0$ je periodičan tj. $u(t) = u(t + T)$, gdje je $T = 1/f$ najmanja pozitivna vrijednost za $T \neq 0$, takova da vrijedi $e^{j\omega t} = e^{j\omega(t+T)}$ odnosno $e^{j\omega T} = 1$. Za $f = 0$ harmonijski signal postaje konstanta $u(t) = U$.

d) opći slučaj kompleksne eksponencijale $\sigma \neq 0$ i $\omega \neq 0$.

$\mathrm{Re}\{u(t)\}$ predstavlja eksponencijalno rastuće ($\sigma > 0$) ili padajuće ($\sigma < 0$) titranje frekvencijom ω Sl. 6.4.



Sl. 6.4

6.1.2 Dirac-ova delta funkcija

Drugi važni model signala za analizu sustava je Dirac-ova δ-funkcija. Potreba za delta funkcijom pojavila se u fizici kad je trebalo predstaviti gustoću električkog naboja u prostoru s točkastim nabojima ili vremenski tok struje $i(t)$ u idealnom krugu bez induktiviteta i otpora koja nastaje pri nabijanju kondenzatora. Napon kondenzatora trenutno skače na napon izvora U, a struja donosi konačnu količinu naboja $Q = CU$, u beskonačno kratkom vremenu. Možemo zamisliti da je oblik struje vrlo kratkotrajan impuls, vrlo velikog iznosa koji u graničnom slučaju (R, $L \to 0$), ima trajanje 0 i beskonačan iznos.

Da se uzme u obzir i ovakav impuls morat će se uzeti matematički objekt, tzv. Dirac-ova delta funkcija koja ima svojstvo da je svugdje jednaka 0 osim u ishodištu

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0,$$

te da joj je integral jednak jedinici

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1 .$$

Tada struju u kondenzatoru možemo predstaviti s

$$i(t) = CU\delta(\mathrm{t}), \text{ a } q(t) = CU \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau .$$

Isti vremenski tijek sile $p(t)$ imamo kad jedna biljarska kuglica udari drugu. Taj sudar je za idealno elastične kugle zanemarivog trajanja, a sila ima oblik impulsa koji predaje konačnu veličinu gibanja mv drugoj kugli

$$m\frac{dv}{dt} = p(t) \quad \to \quad m\int_{0}^{v_1} dv = \int_{0}^{t_1} p(t)\,dt .$$

Delta funkciju svrstavamo u obitelj tzv. singularnih signala koji se mogu tretirati samo pod znakom integrala, jer je samo integral delta funkcije konačan.

Matematička teorija koja uključuje singularne funkcije naziva se teorijom distribucija. Distribucija ili generalizirana funkcija uključuje uz singularne funkcije poput δ-funkcije i regularne funkcije klasične matematike preko djelovanja na skup tzv. ispitnih ili test funkcija.

Polazno stanovište je da se regularna funkcija može karakterizirati linearnim funkcionalom koji specificira djelovanje te funkcije na definirani skup ispitnih funkcija. Funkcional preslikava funkciju u broj i može uključiti i objekte koji nisu regularne funkcije. Tim putem se mogu opravdati sve operacije na singularnim funkcijama koje su ekvivalentne operacijama na regularnim funkcijama.

Generalizirane funkcije su opisane dakle pomoću linearnih funkcionala na skupu ispitnih funkcija $\mathcal{D}$. Dalje, skup $\mathcal{D}$ se sastoji od svih funkcija omeđenog područja (konačne amplitude) koje su jednake nuli izvan nekog konačnog intervala i mogu se derivirati proizvoljan broj puta.

Dobar primjer ispitne funkcije je

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{-\alpha^2/(\alpha^2 - t^2)} & |t| < \alpha \\ 0 & |t| \geq \alpha \end{cases} .$$

Distribucija je kontinuirani linearni funkcional $F(\varphi)$ definiran s

$$F(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt\,.$$

Funkcija F je regularna ako postoji funkcija f, odnosno singularna ako ne postoji. Mi ipak često pišemo $F(\varphi)$ simbolički kao integral i f u integrandu nazivamo singularnom funkcijom. Integral, dakle, pridružuje broj funkciji φ zavisan od (težinske) funkcije f.

Delta distribucija $\delta(\varphi)$ se piše simbolički kao

$$\delta(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)\, dt = \varphi(0).$$

Singularna funkcija $\delta(t)$ se naziva delta funkcijom. Njeno osnovno svojstvo je da ispitnoj funkciji φ pridružuje broj $\varphi(0)$. Sva njena svojstva se dadu prikazati upotrebom gornjeg integrala i ispitne funkcije φ iz skupa $\mathcal{D}$.

Za rad s δ-distribucijom na funkcijama koje nisu iz $\mathcal{D}$ rezultat zavisi samo od iznosa $\varphi(0)$, pa kad radimo s delta funkcijom dovoljno je da φ bude kontinuirana na $t = 0$.

Neka svojstva delta funkcije

Produkt $\delta(t)f(t)$, gdje je $f(t)$ neprekinuta funkcija u $t = 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)f(t)\varphi(t)dt = f(0)\varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)f(0)\varphi(t)dt\,.$$

Odatle slijedi da je

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t).$$

Derivacija delta funkcije

$$F(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t)\varphi(t)dt\,.$$

Parcijalna integracija daje

$$= \delta(t)\varphi(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi'(t)dt = -\varphi'(0)\,.$$

Za n-tu derivaciju parcijalnu integraciju će trebati provesti n-puta da se dobije

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(t)\varphi(t)dt = (-1)^n \varphi^{(n)}(0)\,.$$

Integral delta funkcije

Heavisideova jedinična stepenica je definirana s

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}.$$

Može se pokazati da je delta funkcija derivacija jedinične stepenice tj.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\varphi(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu}{dt}(t)\varphi(t)dt\,.$$

Integrirajmo parcijalno desnu stranu

$$\mu(\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{dt}\varphi(t)dt=\mu(t)\varphi(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(t)\varphi'(t)dt=$$

$$=\mu(t)\varphi(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{0}^{+\infty}\varphi'(t)dt=\varphi(\infty)-0-\varphi(t)\Big|_{0}^{+\infty}=\varphi(0).$$

Time smo pokazali da su $\delta(t)$ i $d\mu/dt$ ekvivalentni jer funkcional u oba slučaja daje $\varphi(0)$. Pregled najvažnijih svojstava delta funkcije je u tablici 6.1.

Svojstvo	Uvjet
$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\varphi(t)dt=\varphi(0)$	φ(t) neprekinuta u $t=0$
$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$	f(t) neprekinuta u $t=0$
$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-\vartheta)\varphi(t)dt=\varphi(\vartheta)$	φ(t) neprekinuta u $t=\vartheta$
$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(n)}(t)\varphi(t)dt=(-1)^n\varphi^{(n)}(0)$	$n\in\mathbf{N}$, φ(t) je najmanje n-puta derivabilna u $t=0$
$f(t)\delta^{(n)}(t)=\sum_{\mathrm{k}=0}^{n}(-1)^{(n)}\binom{n}{k}f^{(k)}(0)\delta^{(n-k)}(t)$	
$\frac{du}{dt}(t)=\delta(t)$	
$\frac{d^nu}{dt}(t)=\delta^{(n)}(t)$	$n\in\mathbf{N}$
$\delta(\alpha t)=\frac{1}{\lvert\alpha\rvert}\delta(t)$	$\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0$.

Tablica 6.1 Svojstva Diracove delta funkcije

6.2 Linearne operacije među signalima

Pretpostavimo linearnu kombinaciju od N signala

$$u(t)=\sum_{k=1}^{N}\mathrm{a}_k\;u_k(t),\tag{6.1}$$

kojom je predstavljen složeni signal u(t). Pri tom su $\{\mathrm{a}_k\}$ realne ili kompleksne težinske konstante (amplitude). Ovdje je parametar $k\in\mathbb{Z}$ cijeli broj, a rezultat u(t) je dobiven sumacijom konačnog ili beskonačnog ($N\to\infty$), ali prebrojivog skupa funkcija u_k(t) (elementarnih signala). Za trenutne vrijednosti imamo

$$u(t) = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{a}_k u_k(t) = \sum_{k=1}^{N} a(k)u(t,k) \ , \quad t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z} . \tag{6.1a}$$

U ovom obliku se pojavljuju transformacije, gdje je domena funkcije kontinuirana, a parametar k cijeli broj. Ovdje je funkcija u(t) jednoznačno određena sa skupom ili nizom amplituda $\{a(k)\}$.

Na primjer Fourierov red

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{a}_k e^{jk\omega_1 t} \text{ , gdje je } u(t,k) = e^{jk\omega_1 t} .$$

Ako je skup elementarnih funkcija neprebrojiv, indeks k će biti kontinuirani parametar λ. Težinska konstanta $a(\lambda)$ postaje kontinuirana funkcija parametra λ, a sumacija integral, tako da se složena vremenska funkcija dade predstaviti integralom.

$$v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\lambda)u(t,\lambda)d\lambda . \tag{6.2}$$

Signal v je dakle predstavljen integralom elementarnih signala s težinskom funkcijom $a(\lambda)$, koja se obično naziva spektar i kojom je v jednoznačno određen. Ovaj integralni oblik se naziva transformacijom dok se $u(t, \lambda)$ naziva jezgrom transformacije. U tom obliku su linearne <u>integralne transformacije</u> koje se upotrebljavaju u analizi sustava kao što su:

(i) Fourierova

$$u(t, \lambda) = e^{j\lambda t},$$

gdje je parametar kontinuirana $\lambda \in \mathbb{R}$ realna frekvencija.

(ii) Laplaceova

$$u(t, \lambda) = e^{\lambda t}, \ \ \lambda \in \mathbf{C},$$

gdje je parametar $\lambda \in \mathbf{C}$ kompleksna frekvencija elementarnog signala. U jezgri, dakle, u oba slučaja figurira eksponencijalna funkcija.

Za uzorke vremenski diskretnog signala vrijedi

$$v(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{a}_k u_k(n) ,$$

$$v(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a(k)u(n,k) \ , \qquad n, k \in \mathbb{Z} , \tag{6.3}$$

što je analogno izrazu (6.1a).

Signal je ovdje predstavljen sumom elementarnih signala. U tom obliku su <u>zbrojne transformacije</u> kao na primjer diskretna Fourierova transformacija.

$$u(n,k) = e^{j\frac{2\pi nk}{\mathrm{N}}} , \qquad n, k \in \mathbb{Z} ,$$

$$v(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a(k) e^{+j\frac{2\pi nk}{\mathrm{N}}} .$$

Brojevna transformacija $a(k) \in (0,1)$

$$u(n,k) = 2^{nk} \quad , \quad v(n) = \sum_{k=1}^{b} a(k) 2^{kn} \ .$$

S druge strane parametar može biti kontinuiran, pa umjesto sumacije po parametru imamo integral

$$v(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\lambda) u(n,\lambda) d\lambda \, , \quad n \in \mathbb{Z} \, , \lambda \in \mathbb{R} . \tag{6.4}$$

Na primjer: Vremenski diskretna Fourierova transformacija

$$v(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \, .$$

Ovdje je niz predstavljen integralom eksponencijala, dakle, obratno nego kod razvoja periodične vremenske funkcije u zbroj eksponencijala diskretnih frekvencija—Fourierov red.

Slijedeći primjer: $\mathcal{Z}$-transformacija $\lambda = z \in \mathbf{C}$

$$v(n) = \oint a(z) z^{n-1} dz \, .$$

Svojstva ovih transformacija upoznat će se pobliže u kasnijim poglavljima.

Preslikavanje s linearnim operatorom F može se posebno jednostavno odrediti korištenjem superpozicije ako se operator vremenski ne mijenja.

$$v = F\left(\sum_{i=1}^{N} \mathrm{a}_i u_i \right) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{a}_i F(u_i) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{a}_i v_i \, , \tag{6.5}$$

gdje je $v_i = F(u_i)$ komponenta složenog signala uzrokovana komponentom izvornog signala (6.1) ili komponenta v_i dobivena preslikavanjem komponente u_i.

Ako izvorni signal predstavimo integralom (6.2) primjena operatora F će dati složeni signal u obliku

$$v = F\left(\int_{-\infty}^{+\infty} a(\lambda) u(\cdot,\lambda) d\lambda \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\lambda) F\big(u(\cdot,\lambda)\big) d\lambda$$

i konačno

$$v = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\lambda) z(\cdot,\lambda) d\lambda \, , \tag{6.6}$$

gdje je $F(u(\cdot,\lambda)) = z(\cdot,\lambda)$.

Za trenutne vrijednosti signala nakon primjene operatora imamo

$$v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\lambda) z(t,\lambda) d\lambda \, . \tag{6.7}$$

Izrazi (6.5) i (6.7) proizlaze iz linearnosti operatora F i predstavljaju vrlo važne operacije na signalu. Dovest ćemo ih u vezu s δ-funkcijom.

Pretpostavimo specijalni slučaj da je kontinuirani signal $u(t)$ predstavljen linearnom kombinacijom δ-funkcija.

$$u(t)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_i\delta(t-\tau_i)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}u(\tau_i)\delta(t-\tau_i)\,. \tag{6.8}$$

Nakon primjene operatora F na zakašnjelu δ-funkciju možemo pisati

$$F(\delta(t-\tau_i))=h(t,\ \tau_i) \tag{6.9}$$

odnosno iz (6.5)

$$v(t)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\mathrm{a}_i h(t,\tau_i)\,. \tag{6.10}$$

Kod predstavljanja signala integralom δ-funkcija imamo

$$u(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}a(\lambda)\delta(t-\lambda)d\lambda=a(t)\,.$$

Izjednačavanje $a(t)=u(t)$ izlazi zbog svojstva δ-funkcije, pa se gornji integral može napisati u obliku

$$u(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\,. \tag{6.11}$$

Nakon primjene operatora na gornju prezentaciju signala, odnosno δ-funkciju

$$F(\delta(t-\tau))=h(t,\tau) \tag{6.12}$$

izlazi konačno za trenutne vrijednosti

$$v(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau)h(t,\tau)d\tau\,. \tag{6.13}$$

Kao što se vidi, bilo kakvo linearno preslikavanje dade se predstaviti gornjim integralom, gdje $h(t,\ \tau)$ predstavlja rezultat djelovanja operatora na zakašnjelu δ-funkciju $\delta(t-\tau)$.

U specijalnom slučaju kad je funkcija $h(t,\ \tau)=h(t-\tau)$ uvijek ista, samo vremenski kasni za τ, koliko kasni i δ-funkcija, (6.13) dobiva oblik

$$v(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)u(t-\tau)d\tau\,, \tag{6.14}$$

koji se naziva konvolucijom. Preslikavanje je potpuno određeno funkcijom h.

Općenito za linearne sustave, preslikavanje signala (6.1) $u\rightarrow v$ će biti moguće predstaviti superpozicijom istih elementarnih funkcija, ako nađemo takve elementarne funkcije koje se ne mijenjaju primjenom operatora F osim za skalni faktor, tj.

$$v_i=F(u_i)=Hu_i.$$

H je konstanta i naziva se vlastita ili karakteristična vrijednost operatora.

Bilo koji signal čija transformacija s F daje svoju repliku naziva se vlastita ili karakteristična funkcija operatora F (*eigenfunction*).

Za vremenski stalan linearni operator to je kompleksna eksponencijala e^{st}, $t\in\mathbb{R}$ i $s\in\mathbf{C}$ što se može dokazati konvolucijskim integralom (6.14).

$$v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau = Hu(t).$$

Pretpostavimo da je $u(t) = e^{st}$. Za $v(t)$ izlazi

$$v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau\right]e^{st} = He^{st}, \tag{6.14a}$$

gdje je

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st}dt,$$

karakteristična vrijednost za karakterističnu funkciju e^{st}, tako da u (6.5) izlazi

$$v_i(t) = a_i H(s_i)e^{s_i t}.$$

Integral treba biti konvergentan što određuje područje s-a za koje je $H(s)$ vlastita vrijednost.

6.3 Ulazno izlazni model linearnog sustava

Sustav je dan relacijom, odnosno skupom parova $\{(u, y)\}$ ulazno izlaznih varijabli. Ako bilo koja dva para (u_1, y_1) i (u_2, y_2) daju linearnom kombinacijom par $(\alpha u_1 + \beta u_2, \alpha y_1 + \beta y_2)$, koji je također ulazno izlazni par, sustav je linearan. Sustav dan relacijom nema nužno jedan izlaz za svaki ulaz. Ako za dani ulaz postoji samo jedan izlaz, ulazno izlazni model karakteriziran je funkcijom, odnosno preslikavanjem koje pridružuje jedinstven izlaz za svaki ulaz.

Funkcija $F{:}\mathcal{U}\rightarrow\mathcal{Y}$ koja pridružuje jedinstven izlaz $y\in\mathcal{Y}$ svakom ulazu $u\in\mathcal{U}$ naziva se i ulazno izlazno preslikavanje $y = F(u)$.

Ako je F linearni operator, tj. ako vrijedi $\overline{F}\ (\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha\overline{F}\ (u_1) + \beta\overline{F}\ (u_2)$, tada se $y(t)$ može izraziti eksplicitno kako smo pokazali u poglavlju 6.2 u obliku integrala (6.13).

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t,\tau)u(\tau)d\tau \tag{6.15}$$

Za kauzalan sustav vrijedi

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t,\tau)u(\tau)d\tau, \quad h(t,\ \tau) = 0, \quad \tau > t, \tag{6.16}$$

te ako je kauzalan sustav miran u t_0 i $u(t) = 0$ za $t<t_0$

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} h(t,\tau)u(\tau)d\tau. \tag{6.17}$$

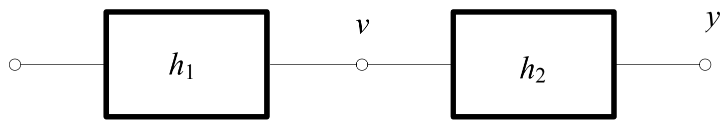
U razvoju ulazno izlaznog modela pretpostavlja se da je sustav miran prije početka pobude, te da je izlaz posljedica jedino ulaznih signala, kojima je i jednoznačno dan. Kako se pretpostavlja da je sustav miran za $t = -\infty$ (6.15), signal $u_{(-\infty,\infty)}$ osigurava da je izlaz dobiven samo i jednoznačno s u(t). Svaki linearni sustav može biti predstavljen u obliku (6.15).

Jezgra $h(t, \tau)$ se može interpretirati kao odziv linearnog vremenski promjenjivog sustava na δ-funkciju u trenutku $t = \tau$ (6.12).

Integralni oblik (6.15), (6.16), (6.17) je funkcional koji pobudnoj funkciji pridružuje broj $y(t)$. Jezgra $h(t, \tau)$ zavisi od sustava. Ovaj integralni oblik predstavlja formalno rješenje za linearne sustave, bili oni diferencijalni ili ne. Ovi posljednji su beskonačnog reda kao što su linije, valovodi, sustavi s kašnjenjem ili nekauzalni sustavi kao što su idealni niskopropusni filtar, itd.

S druge strane, u složenim sustavima impulsni odziv je često jedini podatak koji imamo, a dobiven je mjerenjem.

Osnovna spajanja sustava paralelno i u kaskadu za vremenski promjenjive sustave kada su nam poznati samo njihovi impulsni odzivi h_1 i h_2, se mogu dobiti kako slijedi iz slike.



Sl. 6.5

$$v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(t,\vartheta)v(\vartheta)d\vartheta$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(t,\vartheta)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\vartheta,\tau)u(\tau)d\tau\right]d\vartheta =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h_2(t,\vartheta)h_1(\vartheta,\tau)d\vartheta\right]u(\tau)d\tau.$$

U zagradi je funkcija od t i τ i predstavlja impulsni odziv kaskade.

$$h1_2(t,\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(t,\vartheta)h_1(t,\vartheta)d\vartheta.$$

Linearni vremenski promjenjiv sustav je stabilan ako je njegov odziv na bilo koji omeđeni ulaz $|u(t)| < M_u < \infty$, omeđen $|y(t)| \leq M_y < \infty$.

Nužan i dovoljan uvjet za to je apsolutno integrabilan impulsni odziv sustava.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t,\tau)|d\tau \leq N.$$

Dokaz:

$$|y(t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t,\tau)u(\tau)|d\tau < M_u \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t,\tau)|d\tau.$$

Odatle $|y(t)| < M_u N$.

6.4 Vremenski stalni sustavi

Vremenski stalni sustav ima impulsni odziv po obliku uvijek isti, nezavisno od trenutka pobude, tj. za svaki ϑ, odziv u trenutku t + ϑ na impuls $u(\tau + \vartheta)$ je isti kao odziv u trenutku t na impuls u trenutku τ.

$$h(t + \vartheta,\ \tau + \vartheta) = h(t,\ \tau).$$

Odatle proizlazi da je h funkcija razlike svojih argumenata.

Vrijednosti funkcije impulsnog odziva $h(t,\ \tau)$ u trenutku t zavisit će samo od proteklog vremena od trenutka τ impulsne pobude, dakle od $t - \tau$.

$$h(t,\ \tau) = h(t - \tau) \qquad t, \tau \in \mathbb{R}.$$

Odziv sustava se može napisati u obliku

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) u(\tau) d\tau\ ,$$

koji se naziva konvolucijskim integralom, a operacija između funkcija h i u naziva se konvolucijom i označava s

$$y = h * u,\ \ y(t) = (h * u)(t)\ .$$

Konvolucijsko preslikavanje vrijedi za sve linearne vremenski stalne sustave koji se zato često nazivaju konvolucijski sustavi.

Za određivanje konvolucije dovoljno je znati impulsni odziv $h(t) = h(t - 0)$ tj. vrijednosti funkcije h za svaki trenutak t na pobudu impulsom u trenutku 0, jer je za $\delta(t - \tau)$ odziv isti ali zakašnjen za τ, tj. $h(t - \tau)$.

Primjer: Odziv konvolucijskog sustava g na jediničnu stepenicu $\mu(t)$.

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\mu(\tau) d\tau = \int_{0}^{\infty} h(t-\tau) d\tau \qquad \begin{aligned} t - \tau &= \vartheta \\ d\tau &= -\vartheta \end{aligned}$$

$$g(t) = -\int_{t}^{-\infty} h(\vartheta) d\vartheta = \int_{-\infty}^{t} h(\vartheta) d\vartheta\ .$$

Deriviranjem integrala po gornjoj granici dobivamo

$$h(t) = \frac{dg}{dt}(t)\ .$$

Odziv na stepenicu je katkad lakše odrediti.

Kauzalan sustav ima svojstvo $h(t - \tau) = 0$ za $t < \tau$ ili $h(t) = 0$ za $t<0$.

Odziv kauzalnog sustava

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t - \tau) u(\tau) d\tau\ .$$

Odziv kauzalnog sustava na kauzalnu pobudu ($u(t) = 0$ za $t < 0$):

$$y(t)=\int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau\ .$$

6.5 Svojstva konvolucije

Konvolucija preslikava funkciju u u funkciju y tako da trenutna vrijednost rezultirajuće funkcije $y(t)$ je određena integralom, dakle cijelim vremenskim tijekom jezgre h i signala u. Prema tome to zaista nije preslikavanje točke u točku već funkcije u funkciju.

Da bi se izvršila konvolucijska operacija i dobila vrijednost $y(t)$ za neki trenutak t treba izvršiti slijedeće:

(i) Vremensku inverziju signala h i njen pomak naprijed za t.

(ii) Multiplikaciju signala kako stoje.

(iii) Integrirati produkt u danom intervalu da bi se dobio $y(t)$.

Ovaj postupak treba provesti za svaki t.

Pretpostavimo da su signali u, z, h definirani na beskonačnoj osi $t\in(-\infty, \infty)$.

Može se pokazati da za konvoluciju signala vrijedi:

Komutativnost	$h*u=u*h$	ako $\exists(h*u)$
Asocijativnost	$(h*u)*z=h*(u*z)$	ako $\exists((h*u)*z)$
Distributivnost	$h*(u+z)=h*u+h*z$	ako $\exists(h*u)$ i $\exists(h*z)$
Multiplikacija skalarom	$\alpha(h*u)=(\alpha h)*u=h*(\alpha u)$	ako $\exists(h*u)$ $\alpha\in\mathbf{C}$.
Diferenciranje	$D(h*u)=Dh*u=h*Du$	ako je funkcija h odnosno u diferencijabilna.

Suport konvolucije je skup vremenskih trenutaka za koje je signal različit od nule $\{t\in\mathbf{T}\,|\,u(t)\neq 0\}$.

Ako je suport od h u nekom intervalu $[a,b]$ i od u u $[c,d]$ s tim da se a i c eventualno protežu do $-\infty$, a b i d do $+\infty$, tada je suport konvolucije

$$[a + c, b + d].$$

Ako je suport obaju signala h i u omeđen (tj. suport je sadržan u konačnom intervalu), onda je i suport konvolucije omeđen.

Konvolucija sa singularnim funkcijama:

$$u*\delta=u\,,$$
$$\delta*\delta=\delta\,.$$

Ako je h regularna funkcija m-puta derivabilna

$$(h*\delta^{(m)})(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\delta^{(m)}(\tau)d\tau=(-1)^m\left[\frac{d^m}{d\tau^m}h(t-\tau)\right]\cdot\tau=0$$
$$=h^{(m)}(t)\qquad t\in\mathbb{R}\ .$$

Isto tako vrijedi za singularne funkcije

$$\delta^{(m)}*\delta^{(n)}=\delta^{(n+m)}.$$

Stabilnost konvolucijskog sustava

Konvolucijski sustav je stabilan ako je odziv y konačan za svaki ulaz u konačne amplitude. Nužan i dovoljan uvjet stabilnosti je da mu je impulsni odziv apsolutno integrabilan.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty .$$

6.6 Harmonijska pobuda konvolucijskog sustava

Harmonijska pobuda je zanimljiva jer se svojstva sustava mogu sagledati u frekvencijskoj domeni, što je još jedan način koji osigurava uvid u ponašanje sustava. S druge strane veliki broj signala se dade predstaviti konačnim ili beskonačnim skupom (linearnom kombinacijom) harmonijskih signala kao što su Fourierov red i integral. Linearnost konvolucijskog sustava se onda može iskoristiti da se njegov odziv dobije kao linearna kombinacija odziva na jednu komponentu signala u

$$u(t) = Ue^{j\omega t} ,\ t \in (-\infty, \infty),$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau) U e^{j\omega\tau} d\tau ,$$

supstitucijom $t - \tau = \vartheta$ izlazi

$$y(t) = Ue^{j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\vartheta) e^{-j\omega\vartheta} d\vartheta ,$$

$$y(t) = H(\omega) U e^{j\omega t} \text{ , gdje je } H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\vartheta) e^{-j\omega\vartheta} d\vartheta . \tag{6.18}$$

Odziv je eksponencijalan (sinusni) kao i pobuda. Veličina $H(\omega)$ je kompleksan broj na pobudnoj frekvenciji ω, koji svojom veličinom $|H(\omega)|$ pokazuje koliko puta je veća amplituda odziva $H(\omega)$ od amplitude pobude U, a fazom $\varphi = \arg H(\omega)$, koliko je izlaz fazno pomaknut prema ulazu.

Ovdje vidimo oblik odziva jednak obliku pobude. Eksponencijala $e^{j\omega t}$ je karakteristična funkcija $F(\nu_k(t)) = \delta_k(t)$ (6.14a).

Ako pobuda mijenja frekvenciju, mijenjat će se i $H(\omega)$. H shvaćena kao funkcija od ω naziva se frekvencijskom karakteristikom. Redovito je kompleksna i predstavlja se u pravokutnom i polarnom obliku:

$$H(j\omega) = H_r(\omega) + H_i(\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} , \tag{6.19}$$

gdje su $H_r(\omega)$ i $H_i(\omega)$ realni i imaginarni dio, a $A(\omega)$ amplitudna i $\varphi(\omega)$ fazna karakteristika. Integral $H(\omega)$ egzistira ako je konvolucijski sustav stabilan, odnosno ako je impulsni odziv sustava apsolutno integrabilan

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\vartheta)| d\vartheta < \infty . \tag{6.20}$$

Ako je h realna funkcija vremena, frekvencijska karakteristika sustava je konjugirano simetrična, tj. $H(-\omega) = H^*(\omega)$ što znači da je veličina $|H(\omega)| = A(\omega)$, dok je fazna funkcija neparna $\varphi(\omega) = -\varphi(\omega)$, što se lako vidi iz izraza za $H(\omega)$ (6.18). Zbog te simetrije dovoljno je za realne sustave specificirati frekvencijsku karakteristiku samo za $\omega \geq 0$, tj. nenegativne frekvencije.

Frekvencijske karakteristike sustava mogu imati različite oblike važne za filtriranje signala što ima veliko značenje za obradu signala.

Zbog toga su se razvile metode projektiranja električkih mreža ili elektroničkih sustava prema zahtjevima u frekvencijskom domenu.

Za linearne sustave vrijedi (6.1) i (6.5). Ovdje ćemo ukratko razmotriti specijalni slučaj kad su pojedine funkcije u linearnoj kombinaciji eksponencijale

$$v_k(t) = e^{j\omega_k t} .$$

Specijalni slučaj kad su $\omega_k = k\omega_1$ predstavlja periodičnu funkciju perioda $\mathrm{T} = 2\pi/\omega_1$ u obliku

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{U}_k e^{jk\omega_1 t} , \tag{6.21}$$

što predstavlja Fourierov red.

Linearni operator primijenjen na u dat će

$$\begin{aligned} y = F(u) &= F\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{U}_k e^{jk\omega(\cdot)} \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{U}_k F(e^{jk\omega_1(\cdot)}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{U}_k H(k\omega_1) e^{k\omega(\cdot)}, \end{aligned}$$

Za trenutne vrijednosti izlazi

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{U}_k H(k\omega_k) e^{jk\omega_1 t} . \tag{6.22}$$

Izlaz iz sustava je, kao i ulaz, suma harmonijskih komponenti. Veličina $\mathrm{H}(k\omega_1)$ određuje koliko će harmonijske komponente na izlazu iz sustava biti veće od harmonijskih komponenti ulaza.

Prijelaz na neprebrojiv skup funkcija $\{e^{j\omega t}\}$, gdje je ω kontinuirana, linearna kombinacija (6.1) će dobiti integralni oblik

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\omega) e^{-j\omega t} d\omega , \tag{6.23}$$

gdje se umjesto težinskog koeficijenta za k-tu komponentu U_k u (6.23) pojavila težinska funkcija $U(\omega)$, koja pokazuje relativnu zastupljenost svake infinitezimalno male harmonijske komponente frekvencije ω. Budući da pri prijelazu na kontinuiranu frekvencijsku os $\omega = k\omega_1$, kod neke frekvencije ω svaki $k \rightarrow \infty$, a $\omega_1 \rightarrow 0$, odnosno period $2\pi/\omega_1 \rightarrow \infty$, gornji integral (Fourier), predstavlja aperiodičnu funkciju definiranu na cijeloj vremenskoj osi. Težinska funkcija $U(\omega)$ se naziva Fourierov spektar signala u

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt .$$

Linearno preslikavanje od strane sustava $y = F(u)$, daje primjenom aditivnosti i homogenosti operatora F slijedeće:

$$y = F(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\omega) F\left(e^{j\omega(\cdot)}\right) d\omega .$$

U $F(e^{j\omega(\cdot)})$ prepoznajemo odziv sustava na eksponencijalnu pobudu

$$\left(F(e^{j\omega(\cdot)})\right)(t) = H(\omega) e^{j\omega t} \tag{6.24}$$

pa izlazi konačno

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\omega) H(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\omega) e^{j\omega t} d\omega . \tag{6.25}$$

Izlazni signal je predstavljen Fourierovim integralom. Spektar tog signala je dan jednostavno s produktom spektra pobude i transfer funkcije

$$Y(\omega) = U(\omega) \cdot H(\omega).$$

Odziv za pobudu eksponencijalom se dobiva vrlo jednostavno jer za tu funkciju u linearnim sustavima vrijedi

$$e^{j\omega t} \rightarrow H \cdot e^{j\omega t}.$$

To svojstvo ima tzv. vlastita ili karakteristična funkcija (engl. *eigenfunction*) diferencijalne jednadžbe.

Ona zadovoljava zahtjev da elementarne funkcije za predstavljanje signala osiguravaju najjednostavnije operacije u određivanju odziva.

Tada se linearna kombinacija eksponencijala pobude nalazi i kao linearna kombinacija eksponencijala na izlazu tek s promijenjenim parametrima - kompleksna amplituda.

Pobuda i odziv linearnog sustava se dakle mogu prikazati općenito s prebrojivom ili neprebrojivom linearnom kombinacijom eksponencijali.

Najopćenitija eksponencijala je ona s kompleksnom frekvencijom s. Za nju također vrijedi

$$\mathrm{e}^{\mathrm{st}} \rightarrow \mathrm{H} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{st}}.$$

Za konstantu H izlazi

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-st} dt , \tag{6.26}$$

koja je funkcija kompleksne frekvencije s, pod uvjetom da integral konvergira.

Izraz (6.26) za transfer funkciju definira dvostranu Laplaceovu transformaciju impulsnog odziva $h(t)$. Funkcija $h(t)$ se može prikazati preko cijele vremenske osi $(-\infty, \infty)$.

Umjesto sume harmonijskih signala ovdje imamo kontinuiranu sumu eksponencijalnih funkcija s kompleksnom frekvencijom s. Zbog spomenutih svojstava Fourierova transformacija je dakle specijalni slučaj Laplaceove za $s = j\omega$.

Fourierova i Laplaceova transformacija imaju veliko značenje u analizi sustava. Veliki broj sustava se može modelirati diferencijalnim jednadžbama. $\mathcal{L}$-transformacijom se one svode na algebarske jednadžbe koje omogućuju:

- jednostavno, katkad rutinsko određivanje odziva sustava;
- dobar uvid u svojstva sustava i njegovih podsustava u domeni realne i kompleksne frekvencije;
- projektiranje sustava u domeni realne i kompleksne frekvencije;
- različite realizacije i transformacije sustava specificiranog odziva.

6.7 Laplaceova transformacija

Integralni oblik dobiven za transfer funkciju, koja predstavlja ekvivalent za vremensku funkciju $h(t)$, je bilateralna ili dvostrana $\mathcal{L}$-transformacija. $\mathcal{L}$-transformacija je operator koji funkciji u domeni t pridružuje funkciju u domeni s

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt ,$$

pod pretpostavkom da gornji integral konvergira. Kaže se tada da $\mathcal{L}$-transformacija egzistira.

Budući da je funkcija x množena eksponencijalom $e^{(-\sigma + j\omega)t}$, koja sadržava prigušni član, za očekivati je da će $\mathcal{L}$-transformacija postojati za veći broj funkcija nego kod $\mathcal{F}$-transformacije.

$\mathcal{L}$-integral će biti konačan ako vrijedi

$$X(s) < \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| e^{-st} dt < \infty .$$

Pretpostavimo da je:

$$|x(t)| < \begin{cases} re^{\sigma_1 t} & t \geq 0 \\ re^{\sigma_2 t} & t < 0 \end{cases},$$

eksponencijalnog reda, gdje je $r \in \mathbb{R}_+$, a $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$.

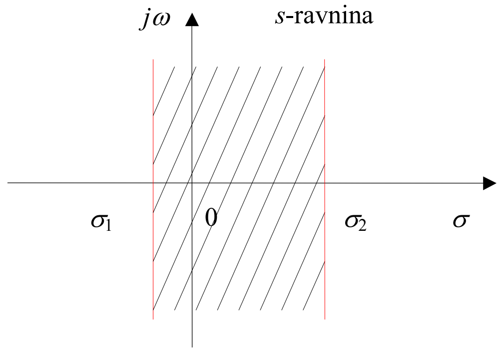
Tada će biti

$$X(s) = \int_{-\infty}^{0} re^{(\sigma_2 - s)t} dt + \int_{0}^{+\infty} re^{(\sigma_1 - s)t} dt ,$$

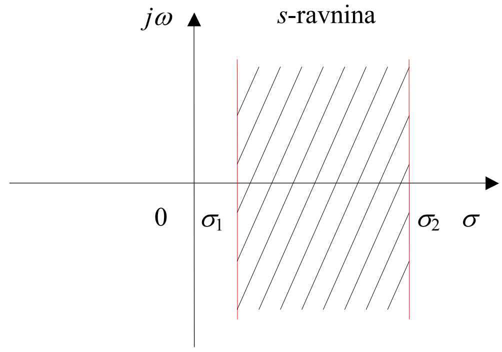
$$X(s) \leq r \left[\frac{1}{\sigma_2 - s} e^{(\sigma_2 - s)t} \Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{\sigma_1 - s} e^{(\sigma_1 - s)t} \Big|_{0}^{+\infty} \right].$$

Vrijednosti integrala na donjoj $(-\infty)$ i gornjoj $(+\infty)$ granici su konačne ako i samo ako su $\mathrm{Re}\{s\} < \sigma_2$ i $\mathrm{Re}\{s\} > \sigma_1$. $F(s)$ konvergira dakle u području kompleksne ravnine s za koji vrijedi

$\sigma_1 < \mathrm{Re}\{s\} < \sigma_2$, kako pokazuje Sl. 6.6 i Sl. 6.7 , odnosno u području širine $\sigma_2 - \sigma_1$.



Sl. 6.6



Sl. 6.7

Lijeva granica σ_1 je određena ponašanjem funkcije x za $t > 0$, a desna granica σ_2 ponašanjem funkcije x za $t < 0$.

Kad područje konvergencije uključuje imaginarnu os $s = j\omega$ (Sl. 6.6) , tada se može odrediti Fourierova transformacija

$$X(j\omega) = X(s)\big|_{s=j\omega} \qquad \text{ili} \qquad \mathcal{F}\{x\} = \mathcal{L}\{x\}\big|_{s=j\omega} . \tag{6.27}$$

U protivnom funkcija $x(t)$ nije apsolutno integrabilna i ne posjeduje $\mathcal{F}$-transformaciju u klasičnom smislu.

Za funkcije eksponencijalnog reda za koje vrijedi

$$\lim_{t\to\infty} e^{\sigma_1 t} x(t) = 0 , \qquad t > 0 ,$$

koje dakle ne rastu brže od eksponencijale, postoji područje konvergencije $\mathcal{L}$-integrala.

Za funkcije koje brže rastu nema konvergencije, osim ako se takva funkcija ne načini konačnom

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < \mathrm{T}_1 \\ 0 & t > \mathrm{T}_2 \end{cases}$$

Može se pokazati da je opći izraz inverzna transformacija dana integralom

$$x(t) = \int_{c-\infty}^{c+\infty} F(s) e^{st} \, ds \tag{6.28}$$

gdje je integracija provedena u kompleksnoj ravnini duž linije $s = c$, koja leži unutar područja konvergencije $\mathcal{L}$ -integrala.

Za kauzalne sustave $h(t) = 0$ za $t < 0$ i kauzalne pobude $u(t) = 0$ za $t < 0$, dakle pri analizi realnih sustava, upotrebljava se jednostrana ili unilateralna $\mathcal{L}$ -transformacija

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} \, dt .$$

Zbog toga za jednoznačnu vezu između izvorne funkcije i njene transformacije odnosno da bi se mogla odrediti iz transformata sama funkcija, treba znati područje konvergencije.

Primjer 6.1. Odaberimo dvostranu $\mathcal{L}$-transformaciju funkcije

$$x_1(t) = e^{-a|t|} \qquad -\infty < t < +\infty \qquad a > 0$$

$$x_2(t) = \left(e^{-at} - e^{at}\right)\mu(t)$$

$$X_1(s) = \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-st} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-at} e^{-st} dt$$

$$X_1(s) = \left.\frac{e^{-(\sigma-a)t} \cdot e^{-j\omega t}}{-(s-a)}\right|_{-\infty}^{0} + \left.\frac{e^{-(\sigma+a)t} \cdot e^{+j\omega t}}{-(s+a)}\right|_{0}^{+\infty}$$

$$(\sigma - a) < 0 \qquad (\sigma + a) > 0$$

$$\sigma < a \qquad \sigma > -a$$

$$X_1(s) = \frac{1}{a-s} + \frac{1}{a+s} = \frac{2a}{a^2 - s^2} \qquad -a < \sigma < a$$

$$X_2(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt - \int_{0}^{\infty} e^{at} e^{-st} dt$$

$$X_2(s) = \left.\frac{e^{-(\sigma+a)t} \cdot e^{-j\omega t}}{-(s+a)}\right|_{0}^{\infty} - \left.\frac{e^{-(\sigma-a)t} \cdot e^{-j\omega t}}{-(s-a)}\right|_{0}^{\infty}$$

$$X_1(s) = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s-a} = \frac{2s}{a^2 - s^2} \qquad (\sigma - a) > 0 \Rightarrow \sigma > a$$

Iz primjera se vidi da su Laplaceove transformacije signala $\mathcal{L}\,\{x_1\}$ i $\mathcal{L}\,\{x_2\}$ jednake mada su signali različiti. Područja konvergencije su međutim različita i dodiruju se za $\sigma = a$.

Budući da se inverziju integrala mora odrediti za vrijednost σ, za koju je Laplaceov integral konvergentan to će osigurati jednoznačnost veze. Kako vidimo, područje konvergencije za $\mathcal{L}$-transformaciju mora biti poznato.

6.8 Svojstva dvostrane $\mathcal{L}$-transformacije

1. Linearnost

$$\mathcal{L}\{ax_1 + bx_2\} = aX_1 + bX_2 \qquad \max(\alpha_1, \alpha_2) < \sigma < \min(\beta_1, \beta_2)\,.$$

2. Vremenska kompresija

$$\mathcal{L}\{at\} = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right) \qquad |a|\alpha < \sigma < |a|\beta\,.$$

3. Vremenski pomak

$$\mathcal{L}\{x(t-\tau)\} = X(s)e^{-\tau s} \qquad \alpha < \sigma < \beta\,.$$

4. Frekvencijski pomak

$$\mathcal{L}\left\{e^{-at} \cdot x(t)\right\} = X(s+a) \qquad \alpha - \mathrm{Re}\{a\} < \sigma < \beta - \mathrm{Re}\{a\}.$$

5. Konvolucija u vremenu

$\mathcal{L}\{x_1 * x_2\} = X_1 \cdot X_2$ $\qquad \max(\alpha_1,\alpha_2) < \sigma < \min(\beta_1,\beta_2)$.

6. Integracija u vremenu

$\mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right\} = \frac{X(s)}{s}$ $\qquad \max(\alpha,0) < \sigma < \beta$,

$\mathcal{L}\left\{\int_{t}^{\infty} x(\tau)d\tau\right\} = \frac{X(s)}{s}$ $\qquad \alpha < \sigma < \min(\beta,0)$.

7. Vremenska derivacija

$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = sX(s)$ $\qquad \alpha < \sigma < \beta$.

8. Frekvencijska derivacija

$\mathcal{L}\{(-t)^n x(t)\} = \frac{d^nF}{ds^n}(s)$ $\qquad \alpha < \sigma < \beta$.

Da bi se $\mathcal{L}$-transformacija efikasno upotrebljavala u analizi sustava, transformiranje iz t u s domenu i obratno treba biti lagano. Određivanje $\mathcal{L}$-transformacije provodi se $\mathcal{L}$-integralom, ali vrlo često i korištenjem gornjih pravila i malog broja osnovnih transformacija. U tabeli 6.1 su dani korisni osnovni signali, njihove transformacije i područje konvergencije.

Transformacija je dvostrana iako su suport signala osim $(-\infty, \infty)$ često polubeskonačan $[0,\infty)$ ili $(-\infty,0]$, odnosno iako su signali nekauzalni, kauzalni ili antikauzalni.

TABELA

6.9 Inverzija Laplaceove transformacije

Inverzna transformacija definirana integralom (6.28) može se provoditi linijskom ili integracijom po zatvorenoj krivulji u domeni kompleksne frekvencije s.

Nije međutim uvijek potrebno ići tim putem da bi se dobila $x(t)$. Izvjesne klase sustava, kao što su sustavi opisani običnim diferencijalnim jednadžbama, odnosno razlomljenim racionalnim funkcijama u s domeni, omogućuju jednostavne postupke. Oni se opet naslanjaju na nekoliko osnovnih i tipičnih transformacija danih u tabelama, te na pravila koja vrijede za $\mathcal{L}$-transformaciju.

Pri tom značajnu ulogu igra razlaganje složenih sustava u ekvivalentni skup povezanih jednostavnijih podsustava.

Polovi razlomljene racionalne funkcije određuju eksponente eksponencijale i područje konvergencije $\mathcal{L}$-integrala.

Područje konvergencije za kauzalne signale ($x(t) = 0$ za $t < 0$) je oblika $\sigma > \sigma_c$, za antikauzalne signale ($x(t) = 0$ za $t > 0$) je $\sigma < \sigma_c$, te za opći nekauzalni signal $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, gdje σ_c određuju najbliži polovi.

$$\left\{s \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}(s) > \max_i \mathrm{Re}(p_i)\right\},$$

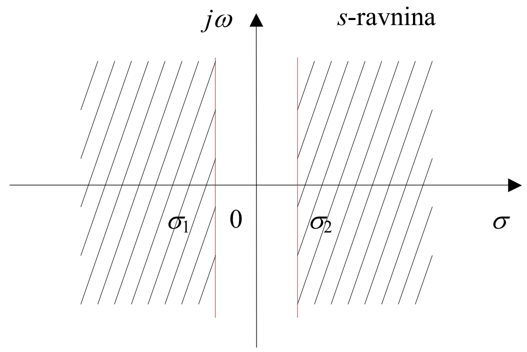
$$\left\{s \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}(s) < \min_i \mathrm{Re}(p_i)\right\}.$$

Prekrivanje

$$\left\{s \in \mathbf{C} \mid \min_i \mathrm{Re}(s) < \mathrm{Re}(s) < \max_i \mathrm{Re}(\mathrm{p}_i)\right\}.$$

Integracija po vertikalnoj liniji racionalne funkcije $X(s)$ unutar područja konvergencije svodi se na integraciju po zatvorenoj krivulji i sumu reziduuma svih polova i to za $t > 0$ oko polova lijevo od linije (područja konvergencije), a za $t < 0$ oko polova desno od linije (područja konvergencije) integracije.

Uz upotrebu razvoja funkcije $X(s)$ na parcijalne razlomke to se odnosi na inverziju parcijalnih razlomaka koji pripadaju spomenutim polovima lijevo ($t > 0$) i desno ($t < 0$) od linije integracije $s = c$.



Sl. 6.8

7. LINEARNI DIFERENCIJALNI SUSTAVI

7.1 Model sustava s ulazno izlaznim varijablama

Klasičan način opisivanja vladanja sustava s jednim ulazom i jednim izlazom je diferencijalna jednadžba koja vezuje izlaznu y i ulaznu vremensku funkciju u. Iako sustav u početku može biti opisan sa simultanim diferencijalnim jednadžbama obično se nekim sustavom eliminiranja uklone ostale varijable i jednadžba napiše samo pomoću jedne, obično izlazne varijable. Tipično je dakle da je sustav s jednim izlazom i ulazom opisan diferencijalnom jednadžbom višeg reda.

$$\mathrm{a}_n y^{(n)} + \mathrm{a}_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + \mathrm{a}_0 y = f(t) = \mathrm{b}_m u^{(m)} + \mathrm{b}_{m-1} u^{(m-1)} + \ldots + \mathrm{b}_0 u. \tag{7.1}$$

Desna strana u (7.1) $f(t)$ je funkcija smetnje ili funkcija pobude, koja u općem slučaju kako se vidi može biti funkcija ulaznog signala $u(t)$ i njegovih derivacija do m-tog reda.

U realnim sustavima broj m je ograničen s $m \leq n$.

Linearna diferencijalna jednadžba može imati koeficijente $\{\mathrm{a}_i\}$ i $\{\mathrm{b}_j\}$ kao funkcije vremena ili kao konstante. U posljednjem slučaju jednadžba opisuje stalni (stacionarni) odnosno vremenski nepromjenjivi linearni sustav. Ako koeficijenti $\{\mathrm{a}_i\}$ i $\{\mathrm{b}_j\}$ zavise od izlazne ili ulazne veličine (zavisna varijabla), odnosno njihovih derivacija, bit će to nelinearna diferencijalna jednadžba, odnosno nelinearni sustav.

Redukciju simultanih diferencijalnih jednadžbi nekog sustava na jednu diferencijalnu jednadžbu višeg reda može se izvršiti na više načina. Uobičajeno je da se provede eliminacija pojedinih varijabli tako da se iz jedne jednadžbe dobije jedna varijabla eksplicitno i uvrsti u drugu jednadžbu. Obično je pri tom potreban postupak deriviranja ako je varijabla pod znakom integrala.

Daljnja mogućnost da se integrali uklone iz jednadžbe je uzimanje integrala kao varijable. U električkim krugovima je to čest slučaj kad se umjesto struje uzme naboj na kapacitetima, kao varijabla ili umjesto napona fluks u induktivitetima, što je posebno uputno pri analizi vremenski promjenjivih ili nelinearnih električkih mreža.

Mnogo brže i sistematizirano može se postupak eliminacije provesti upotrebom operatora kod linearnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima. Operator deriviranja u (7.3) ima slijedeća svojstva

$$\mathrm{D}^n\left(\mathrm{D}^m y\right) = \mathrm{D}^m\left(\mathrm{D}^n y\right) = \mathrm{D}^{n+m} y,$$

uz C_1 i C_2 konstante vrijedi:

$$\mathrm{D}^n\left(\mathrm{C}_1 y_1 + \mathrm{C}_2 y_2\right) = \mathrm{C}_1 \mathrm{D}^n y_1 + \mathrm{C}_2 \mathrm{D}^n y_2,$$
$$\left(\mathrm{D} + \mathrm{C}_1\right)\left(\mathrm{D} + \mathrm{C}_2\right) y = \left[\mathrm{D}^2 + \left(\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2\right)\mathrm{D} + \mathrm{C}_1\mathrm{C}_2\right] y.$$

Zbog ovih svojih svojstava operatorom se može računati kao s brojem i algebarskim operacijama svesti simultane jednadžbe na jednadžbu višeg reda. U tehničkoj literaturi se često umjesto D operator označava s p.

Diferencijalna jednadžba se može napisati uz pomoć operatora deriviranja D ili p.

$$\left(\mathrm{a}_n \mathrm{D}^n + \ldots + \mathrm{a}_0\right) y = \left(\mathrm{b}_m \mathrm{D}^m + \ldots + \mathrm{b}_0\right) u. \tag{7.2}$$

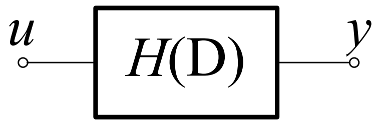
ili

$$A(\mathrm{D}) y = B(\mathrm{D}) u,. \tag{7.3}$$

gdje su

$$\mathrm{D}y \equiv \frac{dy}{dt},\ \mathrm{D}^n y \equiv \frac{d^n y}{dt^n}.$$

Linearni sustav se obično predstavlja u obliku



Sl. 7.1

gdje je H(D) složeni operator $H(D) = B(\mathrm{D})/A(\mathrm{D})$, kojeg treba interpretirati kao diferencijalnu jednadžbu.

7.2 Klasične metode rješavanja

Linearna diferencijalna jednadžba (7.1) je nehomogena jer ima pobudnu funkciju $f(t)$ ili funkciju smetnja $f(t)$.

Jednadžba postaje homogena za $f(t) = 0$.

$$\mathrm{a}_n \frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + \mathrm{a}_0 y = 0. \tag{7.4}$$

Iz teorije ovakvih jednadžbi proizlazi da homogena jednadžba n-tog reda ima n linearno nezavisnih rješenja $\{y_i\}$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Opće rješenje homogene jednadžbe je linearna kombinacija ovih pojedinačnih rješenja

$$y_0 = \mathrm{K}_1 y_1 + \mathrm{K}_2 y_2 + \ldots + \mathrm{K}_n y_n \tag{7.5}$$

Postoji opća metoda da se odrede pojedinačna rješenja $y_1,\ldots,y_n$ za vremenski stalne sustave dok za vremenski promjenljive to ne postoji. Proizvoljne konstante se određuju iz početnih ili rubnih uvjeta, tj. na temelju n podataka o funkciji y_0.

Rješenje nehomogene jednadžbe se dobiva tako da se rješenju homogene doda jedna funkcija y_p tzv. partikularno rješenje ili partikularni integral koji zadovoljava nehomogenu jednadžbu.

$$y = y_0 + y_\mathrm{p}. \tag{7.6}$$

Za određenje te funkcije može se pokušati s uvrštavanjem nekih funkcija koje bi mogle zadovoljiti ili uvrstiti rješenje u obliku reda, određivati koeficijente reda i njegovu konvergenciju.

Za teoriju sustava je zanimljiva metoda neodređenih koeficijenata i Lagrangeova metoda varijacije parametara. Prva s matematičkog gledišta je vrlo ograničena, jer se odnosi na jednadžbu s konstantnim koeficijentima i ograničen broj funkcija koje se mogu svesti na eksponencijalne i polinome. No kako je eksponencijalna, karakteristična funkcija linearne diferencijalne jednadžbe, računanje je izuzetno jednostavno, pa se ta metoda puno upotrebljava u analizi sustava.

Metoda varijacija parametra se može primijeniti za vremenski promjenjive i stalne sustave uz opće pobudne funkcije. Postupak iskorištava rješenje homogene jednadžbe da se nađe partikularno odnosno opće rješenje, tako da se umjesto proizvoljnih konstanti u rješenju homogene jednadžbe pretpostave vremenske funkcije, kako smo to pokazali kod sustava prvog reda.

7.3 Vremenski stalni sustavi

Homogena jednadžba napisana s operatorom D je

$$(\mathrm{a}_n\mathrm{D}^n+\mathrm{a}_{n-1}\mathrm{D}^{(n-1)}+\ldots+\mathrm{a}_1\mathrm{D}+\mathrm{a}_0)y=0. \tag{7.7}$$

Ovdje se može pretpostaviti rješenje npr. u obliku reda, ali linearnu jednadžbu s konstantnim koeficijentima će zadovoljiti eksponencijalne funkcije što bi i red pokazao.

Supstitucijom $y(t)=e^{pt}$, gdje je p neki broj $p\in\mathbf{C}$, dobivamo

$$(\mathrm{a}_n p^n+\mathrm{a}_{n-1}p^{(n-1)}+\ldots+\mathrm{a}_1 p+\mathrm{a}_0)e^{pt}=0.$$

Ta jednakost će biti zadovoljena za svaki t ako je broj p takav da zadovoljava uvjet

$$\mathrm{a}_n p^n+\mathrm{a}_{n-1}p^{(n-1)}+\ldots+\mathrm{a}_1 p+\mathrm{a}_0=0. \tag{7.8}$$

Ovo se naziva karakteristična jednadžba gornje diferencijalne jednadžbe.

Lijeva strana je polinom n-tog stupnja, tako da karakteristična jednadžba ima n rješenja za p. Kad je n karakterističnih korijena $p_1,\ldots,p_n$ različito, eksponencijale $e^{p_i t}$ su pojedinačna rješenja diferencijalne jednadžbe.

$$y_1=e^{\mathrm{p}_1 t};\quad y_2=e^{\mathrm{p}_2 t};\ldots\quad y_n=e^{\mathrm{p}_n t}; \tag{7.9}$$

Opće rješenje homogene diferencijalne jednadžbe može se tada napisati u obliku:

$$y_0(t)=\mathrm{K}_1 e^{\mathrm{p}_1 t}+\mathrm{K}_2 e^{\mathrm{p}_2 t}+\ldots+\mathrm{K}_n e^{\mathrm{p}_n t}=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{K}_i e^{\mathrm{p}_i t}, \tag{7.10}$$

gdje su $\{\mathrm{K}_i\}$ proizvoljne konstante. Ako među korijenima ima jednakih na primjer $\mathrm{p}_1=\mathrm{p}_2=\ldots=\mathrm{p}_k$, tj. p_1 se ponavlja k puta kao korijen, može se pokazati da su:

$$y_1=e^{\mathrm{p}_1 t};\qquad y_2=te^{\mathrm{p}_1 t};\ldots;\quad y_k=t^{k-1}e^{\mathrm{p}_1 t}; \tag{7.11}$$

pojedinačna rješenja. Tada se opće rješenje može napisati u obliku

$$y_0(t)=\mathrm{K}_1 e^{\mathrm{p}_1 t}+\mathrm{K}_2 te^{\mathrm{p}_1 t}+\ldots+\mathrm{K}_k t^{k-1}e^{\mathrm{p}_1 t}+\mathrm{K}_{k+1}e^{\mathrm{p}_{k+1}t}+\ldots+\mathrm{K}_n e^{\mathrm{p}_n t}, \tag{7.12}$$

gdje je eksponencijala, $e^{p_i t}$ množena s polinomima ($k-1$) stupnja u varijabli t. Koeficijenti su proizvoljne konstante. U općem slučaju sustava n-tog reda s korijenima p_1, $p_2,\ldots, p_{n'}$ višestrukosti m_1, $m_2,\ldots,$ $m_{n'}$ rješenje je oblika

$$y_0(t) = \sum_{i=1}^{n'} e^{\mathrm{p}_i t} \sum_{j=1}^{m_i} \mathrm{K}_{ij} t^{j-1}. \tag{7.13}$$

Pri tom vrijedi da je suma višestrukosti pojedinih korijena jednaka redu jednadžbe n.

$$\sum_{i=1}^{n'} m_i = n\,. \tag{7.14}$$

Rješenje homogene jednadžbe se obično naziva komplementarno rješenje ili slobodni odziv sustava. Ono može postojati kako se vidi i kad nema funkcije pobude. Tada je to opće rješenje jednadžbe sustava i opisuje titranje energije u sustavu bez vanjskog poticaja. Naziva se vlastito gibanje ili titranje sustava. Pridjev vlastito potječe od činjenice da pojedina rješenja $y_1,\ldots, y_n$ ili komponente slobodnog odziva sustava titraju isključivo karakterističnim frekvencijama sustava p_i, koje zavise od samog sustava (njegove strukturne sheme i parametara), a ne vanjske pobude.

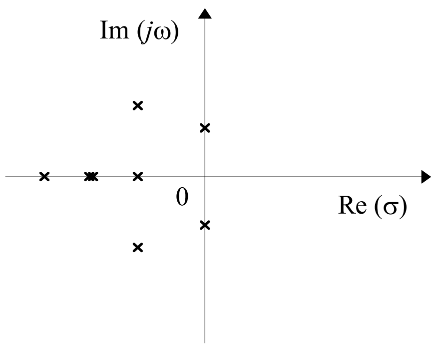
Titranje sustava vlastitim frekvencijama može biti potaknuto i vanjskom pobudom jer je komplementarno rješenje općenito prisutno u općem rješenju nehomogene jednadžbe.

7.4 Oblici vlastitog titranja sustava

Karakteristični polinom realnih sustava ima realne koeficijente$\{\mathrm{a}_i\}$. Korijeni mogu biti kompleksni, ali se tada pojavljuju uvijek u konjugiranom paru

$$\mathrm{p}_i = \sigma + j\omega \qquad \mathrm{p}_j = \sigma - j\omega.$$

Pri tom može nastati specijalni slučaj kad su korijeni čisto imaginarni $\mathrm{p}_i = +j\omega$, $\mathrm{p}_j = -j\omega$, ili realni $\mathrm{p}_i = -\alpha$, ili nula $\mathrm{p}_i = 0$. Obično se korijeni predstavljaju kao točke u Gausovoj kompleksnoj ravnini.



Sl. 7.2

Za realne i pasivne sustave nalaze se u lijevoj polovini te ravnine. Konjugirano kompleksni par će dati dvije komponente odziva

$$y_0(t) = \mathrm{K}_1 e^{\mathrm{p}_1 t} + \mathrm{K}_2 e^{\mathrm{p}_2 t}\,,$$

koje zajedno daju realnu funkciju vremena. Vidi se da pri tom moraju i proizvoljne konstante K_1 i K_2 biti konjugirani par.

Vrijedi da je

$$p_2 = p_1{}^* \ i \ \ K_2 = K_1 . \tag{7.15}$$

Uz

$$K_1 = |K_1| e^{j\varphi} \quad \text{izlazi} \quad K_2 = |K_1| e^{j\varphi}$$

$$y_0(t) = |K_1| e^{j\varphi} e^{(-\sigma + j\omega)t} + |K_1| e^{-j\varphi} e^{(-\sigma - j\omega)t}$$

$$y_0(t) = |K_1| e^{-\sigma t} \left[e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t - \varphi)} \right]$$

$$y_0(t) = 2|K_1| e^{-\sigma t} \cos(\omega t + \varphi) , \tag{7.16}$$

pa je to prigušeno titranje frekvencijom ω i faktora prigušenja σ. Specijalni slučaj σ = 0 daje neprigušeno sinusno titranje

$$y_0(t) = 2|K_1| \cos(\omega t + \varphi)$$

Realni korijen daje čistu eksponencijalu (konstanta je realna) u odzivu.

$$y_0(t) = K_1 e^{-\sigma t}$$

Korijen nula daje ($\sigma \to 0$) konstantu u odzivu

$$y_0(t) = K_1$$

Posebno je zanimljiv granični slučaj $\sigma = \omega_0$ kad par korijena prelazi na jedan dvostruki korijen. Tom se možemo približiti iz kompleksnih $\sigma < \omega_0$ i iz realnih korijena $\sigma > \omega_0$. Zanimljivo je naime, što se događa eksponencijalama neposredno prije nego što korijeni padnu u jednu točku. Pretpostavimo da su u jednadžbi početni uvjeti za $t = 0$, $y(0) = y_0$ i $\dot{y}(0) = 0$, i odredimo iznose konstanti K_1 i K_2 ($\sigma > \omega_0$).

Za realne korijene izlazi

$$y_0(t) = y_0(0) \left[\frac{\sigma + \varepsilon}{2\varepsilon} e^{(-\sigma + \varepsilon)t} - \frac{\sigma - \varepsilon}{2\varepsilon} e^{(-\sigma - \varepsilon)t} \right] \tag{7.17}$$

Kad se σ padajući približava graničnom slučaju ε = 0, σ = ω_0.

Vidi se da pojedine eksponencijale postaju po vremenskim konstantama $1/(\sigma + \varepsilon)$ i $1/(\sigma - \varepsilon)$ sve bliže dok njihove amplitude dobivaju vrlo velike iznose kada se korijeni dovoljno približe. Funkcija odziva je konačna veličina reda $|y_0(t)| \le y_0(0)$. Njen trenutni iznos $y_0(t)$ daje razlika dviju eksponencijala vrlo visokih iznosa, ali malih razlika u vremenskoj konstanti. Numerička računanja odziva zato pokazuju velike pogreške kad su korijeni bliski. U nazivniku su male razlike velikih brojeva.

Granični prijelaz dobiven analitički pokazuje da funkcija koja predstavlja odziv nije čista eksponencijala

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y_0(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[y_0 e^{-\sigma t} \frac{(\sigma + \varepsilon) e^{\varepsilon t} - (\sigma - \varepsilon) e^{-\varepsilon t}}{2\varepsilon} \right] = y_0 (1 + \sigma t) e^{-\sigma t} \tag{7.18}$$

Limes je određen upotrebom L' Hospitalovog pravila. Istim postupkom se može doći do gornjeg oblika rješenja polazeći od rješenja s kompleksnim korijenima, graničnim prijelazom za $\sigma \to \omega_0$ odnosno $\omega \to 0$.

Veće točnosti u slučaju bliskih korijena može pružiti upotreba hiperbolnih i trigonometrijskih funkcija gdje se one u zanimljivom području $t < \frac{3-5}{\sigma}$ mogu razviti u red, ako je ε odnosno ω malen. Uzimanje samo prvog člana reda vodi na gornji izraz (7.18) što znači da se dva bliska korijena mogu aproksimirati jednim dvostrukim kad se uđe u računske teškoće zbog njihove male razlike.

7.5 O stabilnosti slobodnog odziva

Ako varijable u sustavu rastu bez granica kad vrijeme raste u beskonačnost, kaže se da je takav odziv i sustav nestabilan. To je slučaj kad karakteristični korijeni sustava imaju pozitivan realni dio, odnosno kad se nalaze u desnoj polovini kompleksne p-ravnine. Pojedini članovi odzivne funkcije rastu eksponencijalno s t i mogu postati veći (u linearnom sustavu!) od bilo kako velikog unaprijed zadanog iznosa.

Za korijene koji leže na imaginarnoj osi, koja za kriterij stabilnosti predstavlja granicu, može se ustanoviti slijedeće: imaginarni par korijena ako su korijeni sustava jednostruki daje titranje s amplitudom koja ostaje konstantna. To se smatra se granično stabilnim slučajem. Jednako tako korijen u ishodištu, koji daje za odziv konstantu.

Višestruki korijeni na imaginarnoj osi međutim daju odziv oblika t^k ili $t^k\cos(\omega t + \varphi)$ koji mogu rasti linearno ili parabolično u beskonačnost s vremenom. Prema tome sustav je stabilan samo ako su korijeni na imaginarnoj osi jednostruki.

Iz gornjeg slijedi da treba odrediti korijene kako bi se znalo da li je neki linearni sustav stabilan. Postoji međutim više postupaka koji omogućuju određivanje stabilnosti na temelju koeficijenata diferencijalne jednadžbe i bez određivanja korijena.

7.6 Amplitude vlastitog titranja sustava

Proizvoljne konstante pojedinih rješenja se mogu odrediti iz početnih uvjeta, koje mora zadovoljiti opće rješenje diferencijalne jednadžbe. Za slučaj nejednakih korijena opće rješenje jednadžbe je

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{K}_i e^{\mathrm{p}_i t} + y_\mathrm{p}(t). \tag{7.19}$$

Mada još nije razmatrana metoda određivanja partikularnog rješenja ovdje će se uzeti da je to poznata funkcija y_p.

Početni uvjeti za diferencijalnu jednadžbu višeg reda daju se redovito kao vrijednost funkcije i njenih derivacija do $(n-1)$ reda

$$\left\{y(0), \dot{y}(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)\right\}, \tag{7.20}$$

u nekom trenutku kojeg ćemo uzeti kao početni $t = 0$.

Za taj trenutak može se napisati sustav od n jednadžbi deriviranjem izraza (7.19).

$$
\begin{aligned}
y(0) - y_{\mathrm{p}}(0) &= \mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_2 + \ldots + \mathrm{K}_n, \\
\dot{y}(0) - \dot{y}_{\mathrm{p}}(0) &= p_1\mathrm{K}_1 + p_2\mathrm{K}_2 + \ldots p_n\mathrm{K}_n, \\
&\vdots \\
y^{(n-1)}(0) - y_{\mathrm{p}}^{(n-1)}(0) &= p_1^{n-1}\mathrm{K}_1 + p_2^{n-1}\mathrm{K}_2 + \ldots + p_n^{n-1}\mathrm{K}_n,
\end{aligned}
\tag{7.21}
$$

odakle se mogu odrediti konstante rješenja homogene jednadžbe.

Vrijednosti partikularnog rješenja i njegovih derivacija za $t = 0$, kao poznatih, stavljene su na lijevo tako da imamo sustav linearnih algebarskih jednadžbi. Svaka konstanta K_i se može dobiti Cramerovim pravilom. Determinanta sustava sastavljena od potencija korijena p_i^n je tzv. Van der Mondova. Njeni elementi su potencije korijena p_i.

Iz sustava jednadžbi se vidi da je veličina konstanti K_i zavisna od razlike početnih uvjeta tj. cjelovitog odziva sustava u trenutku $t = 0$ i partikularnog rješenja u čas $t = 0$. Izgleda dakle kao da je partikularno rješenje počelo odmah u $t = 0$, a da komplementarno pokriva razliku između njega i početnih uvjeta u trenutku $t = 0$.

Ako je pobuda konstanta ili periodična funkcija (trajna pobuda), partikularno rješenje je istog karaktera, pa se često naziva stacionarno stanje. Komplementarno rješenje predstavlja jedan proces koji s vremenom iščezava, pa se naziva prelazno ili prolazno stanje. Za trajne pobude to je jedan međustadij u procesu dok se ne uspostavi isključivo stacionarno stanje. Prelazno stanje se sastoji od titranja vlastitim frekvencijama sustava p_i, *dok njegove amplitude određuje razlika početnog stanja i iznosa stacionarnog stanja*, *u trenutku* $t = 0$.

Pri tom je moguć specijalan slučaj da su početni uvjeti baš jednaki partikularnom rješenju u trenutku $t = 0$ tj.

$$
y^{(i)}(0) - y_p^{(i)}(0) = 0, \quad i = 0,1,2,\ldots,n-1\,.
$$

Tada homogeni sustav, uz Van der Mondeovu determinantu različitu od nula, ima samo trivijalno rješenje tj. da su sve konstante $K_i = 0$. Komplementarnog rješenja odnosno prijelaznog procesa tada nema, već partikularno rješenje (stacionarno stanje) kreće odmah. (To je slučaj kad u sustavu imamo samo stacionarni proces koji počnemo promatrati u nekom trenutku $t = 0$).

Osim gornjeg specijalnog slučaja možemo imati još dva.

Slučaj homogenih početnih uvjeta $y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0, \ddot{y}(0) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(0) = 0,$ tada je sustav bez početne energije, tj. *miran sustav*.

Drugi je slučaj kad je *sustav nepobuđen* $f(t) = 0$; pa je i partikularni integral $y_p(t) = 0$ i sve njegove derivacije, $y_p^{(i)}(t) = 0$.

Neka su proizvoljne konstante koje slijede samo iz početnih uvjeta ($y_p^{(i)}(0) = 0$) u (7.21) označene s K_{0i}, a konstante koje slijede samo iz partikularnog rješenja kad je sustav miran ($y^{(i)}(0) = 0$) u (7.21) s $\mathrm{K}_{\mathrm{p}i}$, pa se konstante rješenja homogene jednadžbe K_i mogu razdvojiti

$$
\mathrm{K}_i = \mathrm{K}_{0i} + \mathrm{K}_{pi}\,.
$$

Ukupno rješenje (7.21) odnosno, odziv sustava će biti prikazan s

$$y(t)=\left[\sum_{i=1}^{n}\mathrm{K}_{0i}e^{\mathrm{p}_i t}+\sum_{i=1}^{n}\mathrm{K}_{\mathrm{p}i}e^{\mathrm{p}_i t}\right]+y_{\mathrm{p}}(t)=y(t)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{K}_{0i}e^{\mathrm{p}_i t}+\left[\sum_{i=1}^{n}\mathrm{K}_{\mathrm{p}i}e^{\mathrm{p}_i t}+y_{\mathrm{p}}(t)\right].$$

Ovdje možemo izdvojiti dio s *vlastitim titranjem* frekvencijom p_i, koje čine prve dvije sume u zagradi, te *prisilno titranje* $y_p(t)$ frekvencijom pobude. S druge strane možemo grupirati odziv *nepobuđenog sustava* - prva sumacija, te odziv *mirnog sustava* - druga sumacija i partikularno rješenje $y_p(t)$. Odziv mirnog sustava ($\mathrm{K}_{0i}=0$) titra vlastitim frekvencijama sustava p_i i frekvencijom pobude.

Na kraju spomenimo da veličine $\{\, y(0),\dot{y}(0),\ldots,y^{(n-1)}(0)\,\}$ često treba izračunati iz sheme sustava ili polaznih diferencijalnih jednadžbi, što često predstavlja dodatni napor. Nadalje iz partikularnog rješenja treba tražiti sve više derivacije da bi se odredile konstante $\{\mathrm{K}_i\}$. Problem konstanti je daleko preglednije riješen predstavljanjem i rješavanjem skupa diferencijalnih jednadžbi prvog reda kod modela sustava s varijablama stanja.

7.7 Prisilni odziv sustava

Prisilni odziv sustava predstavlja partikularno rješenje nehomogene jednadžbe. Većinu potreba može zadovoljiti metoda neodređenih koeficijenata. Osnovni postupak se sastoji u tome da se $y_p(t)$ predstavi kao linearna kombinacija članova koji se nalaze u $f(t)$ ukoliko je to suma eksponencijala $e^{\mathrm{p}_i t}$ ili potencija t^i i njihovih derivacija. Pri tom je svaki član pomnožen s jednim neodređenim koeficijentom. Pretpostavljeno rješenje se uvrsti u jednadžbu i koeficijenti odrede iz uvjeta za koje je jednadžba zadovoljena.

Razmotrit ćemo određivanje y_p za dvije važne funkcije u teoriji sustava.

a) Pobuda se može predstaviti kao polinom:

$$f(t)=\mathrm{c}_m t^m+\ldots+\mathrm{c}_0$$

Rješenje možemo također predstaviti u obliku polinoma m-tog stupnja i to uvijek sa svim članovima odnosno svim potencijama od t.

$$y_{\mathrm{p}}(t)=\mathrm{d}_m t^m+\ldots+\mathrm{d}_0$$

Nakon uvrštenja u diferencijalnu jednadžbu slijede uvjeti koji moraju zadovoljiti neodređeni koeficijenti. Uvrštenje u jednadžbu traži derivaciju do n-tog reda.

$$y_{\mathrm{p}}(t)=m\mathrm{d}_m t^{m-1}+(m-1)\mathrm{d}_{m-1}t^{m-2}+\ldots$$

Derivacije pretpostavljenog rješenja su polinomi sve nižeg stupnja. Odatle slijedi da stupanj pretpostavljenog polinoma mora biti barem jednak stupnju polinoma pobude, da bi se mogla postići jednakost lijeve i desne strane za svaki t. Pretpostaviti polinom još više potencije također nema smisla jer će njegov koeficijent izaći jednak nuli.

Nadalje pretpostavljeni polinom u y_p mora imati sve potencije iako ih u polinomu pobude u nema jer zbog deriviranja neodređeni koeficijenti se grupiraju.

b) Pobuda dana eksponencijalnom funkcijom

Pobuda eksponencijalom je najzanimljivija pobuda ne samo zbog toga što ta funkcija koja se u prirodi i sustavima najčešće pojavljuje nego što se odziv sustava izuzetno jednostavno određuje na tu pobudu. Jednostavnost određivanja odziva potiče od svojstva eksponencijale da su sve njene derivacije opet eksponencijale pa u linearnom diferencijalnom sustavu jedino ona ne doživljava promjenu oblika. Jedini efekt koji eksponencijala doživljava u sustavu je promjena njene kompleksne amplitude (amplitude i faze). (Eksponencijalna funkcija (*eigen function*) linearnog operatora).

Napišimo opći oblik diferencijalne jednadžbe operatorski

$$(a_n\mathrm{D}^n + \mathrm{a}_{n-1}\mathrm{D}^{n-1} + \ldots + \mathrm{a}_0)y = (\mathrm{b}_m\mathrm{D}^m + \mathrm{b}_{m-1}\mathrm{D}^{m-1} + \ldots + \mathrm{b}_0)u.$$

Desna strana sadržava pobudni signal i njegove derivacije. Ako pretpostavimo pobudni signal u obliku eksponencijale

$$u(t) = \mathrm{U}e^{st}, \qquad \mathrm{U} = |\mathrm{U}|e^{j\varphi},$$

gdje U predstavlja njenu kompleksnu amplitudu, odnosno $|\mathrm{U}|$ amplitudu, a φ fazu, dok $\mathrm{s} = \sigma + \mathrm{j}\omega$ kompleksnu frekvenciju. Za očekivati je da će partikularno rješenje biti eksponencijala iste kompleksne frekvencije

$$y(t) = \mathrm{Y}e^{st},$$

gdje Y predstavlja neodređeni koeficijent.

Uvrštenjem u jednadžbu, vodeći računa da je:

$$\frac{d}{dt}(e^{st}) = se^{st}, \ldots, \frac{d^n}{dt^n}(e^{st}) = s^n e^{st},$$

dobivamo

$$(\mathrm{a}_n s^n + \mathrm{a}_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \mathrm{a}_1 s + \mathrm{a}_0)\mathrm{Y}e^{st} = (\mathrm{b}_m s^m + \mathrm{b}_{m-1}s^{m-1} + \ldots + \mathrm{b}_1 s + \mathrm{b}_0)\mathrm{U}e^{st}.$$

Jednakost će biti zadovoljena za svaki t ako je

$$(\mathrm{a}_n s^n + \mathrm{a}_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \mathrm{a}_0)Y = (\mathrm{b}_m s^m + \mathrm{b}_{m-1}s^{m-1} + \ldots + \mathrm{b}_0)U,$$

odnosno:

$$\mathrm{Y} = \frac{\mathrm{b}_m s^m + \ldots + \mathrm{b}_0}{\mathrm{a}_n s^n + \ldots \mathrm{a}_0}\mathrm{U} = H(s)\,\mathrm{U}.$$

Odatle slijedi da je partikularno rješenje eksponencijala čija je amplituda Y određena osim amplitudom pobude i svojstvima sustava sadržanim u koeficijentima $\{\mathrm{a}_i\}$ i $\{\mathrm{b}_i\}$ te kompleksnom frekvencijom pobude $\mathrm{s} = \sigma + j\omega$.

Veličina koja određuje odnos kompleksne amplitude prisilnog odziva $\mathrm{Y}e^{st}$ i kompleksne amplitude pobude $\mathrm{U}e^{st}$ se naziva transfer ili prijenosna funkcija sustava, ili jednostavno funkcija sustava:

$$H(s) = \frac{\mathrm{b}_m s^m + \ldots + \mathrm{b}_0}{\mathrm{a}_n s^n + \ldots \mathrm{a}_0} = \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{U}}$$

Transfer funkcija je kako se vidi kompleksan broj koji kazuje koliko je puta kompleksna amplituda prisilnog odziva *Y* veća od kompleksne amplitude eksponencijalne pobude *U*.

Moglo bi se napisati i u obliku:

$$H(s) = \left[\frac{y_p(t)}{u(t)} \right]_{u(t)=Ue^{st}}$$

Transfer funkcija zavisi od kompleksne frekvencije *s*. Za fiksirani s ona ima određen iznos (kompleksan broj).

Gledajući na koeficijente i potencije varijable *s* ona je formalno jednaka operatoru *H*(D). Operator *H*(D), međutim, pridružuje vremensku funkciju *y* funkciji *u*.

$$y = H(\mathrm{D})u$$

dok *H*(*s*) ima značenje faktora ili broja, kojim treba množiti kompleksnu amplitudu ulaza da se dobije amplituda izlaza.

$$Y = H(s)Y$$

Transfer funkcija sadržava bitna svojstva sustava kao i operator *H*(D) ili diferencijalna jednadžba.

Operator *H*(D) i transfer funkcija *H*(*s*) mogu se napisati direktno iz blok dijagrama ili kruga koristeći funkcije ili impedancije elemenata pišući jednadžbe ravnoteže za kompleksne amplitude umjesto za vremenske funkcije. Tada se dobivaju algebarske jednadžbe pa se operator ili transfer funkcija određuje jednostavno i brzo, kako se to radi u krugovima izmjenične struje.

Kompleksna frekvencija pobude *s* može imati još, specijalne slučajeve $s = 0$, $s = -\alpha$ i $s = j\omega$

Uz $s = 0$ imamo podatak o prisilnom odzivu na pobudu konstantom.

$$u = Ue^{0t} = U, \quad H(0) = \frac{\mathrm{b}_0}{\mathrm{a}_0}.$$

Uz $\mathrm{s} = j\omega$ dobiva se odziv na eksponencijalnu pobudu oblika $e^{j\omega t} = \cos\ \omega t + j\sin\ \omega t$, dakle harmonijskom ili sinusnom pobudom

$$H(s) = \frac{\mathrm{b}_m (j\omega)^m + \ldots + \mathrm{b}_0}{\mathrm{a}_n (j\omega)^n + \ldots \mathrm{a}_0}.$$

Kako je H($j\omega$) ili H(ω) je kompleksna veličina piše se obično u pravokutnom ili polarnom obliku

$$H(j\omega) = H(\omega) = H_{\mathrm{r}}(\omega) + jH_{\mathrm{i}}(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)},$$

i naziva frekvencijska karakteristika sustava. Pri tom je H_{r} i H_{i} realni i imaginarni dio frekvencijske karakteristike, a $A(\omega)$ amplitudna i $\varphi(\omega)$ fazna karakteristika.

Harmonijska ili sinusna pobuda se zbog jednostavnosti računanja s eksponencijalom redovito predstavlja u eksponencijalnom obliku

$$u(t) = \mathrm{U}e^{j\omega t},$$

gdje kompleksna amplituda $\mathrm{U} = |\mathrm{U}|e^{j\Psi}$, sadržava amplitudu i fazu pobude. Sinusna pobuda i odgovarajuće partikularno rješenje su realni odnosno imaginarni dio eksponencijalne pobude odnosno partikularnog rješenja. To vrijedi općenito za pobudu kompleksnom frekvencijom s kod sustava s a_i, $b_i \in \mathbb{R}$.

Ako je $y_p(t) = \mathrm{Y}e^{st}$ posljedica pobude $u = \mathrm{U}e^{st}$ onda je $y_p(t) = \mathrm{Re}\{\mathrm{Y}e^{st}\}$ posljedica $\mathrm{Re}\{\mathrm{U}e^{st}\}$ što proizlazi iz principa superpozicije ako pobudu predstavimo s $u = \mathrm{U}e^{st} = \mathrm{Re}[\mathrm{U}e^{st}] + j\mathrm{Im}[\mathrm{U}e^{st}]$.

c) Slučaj pobude vlastitom kompleksnom frekvencijom sustava

Ako je sustav pobuđen eksponencijalom čija je frekvencija jednaka jednoj od karakterističnih frekvencija, pretpostavka partikularnog rješenja u obliku eksponencijale u jednadžbi neće moći zadovoljiti identitet bez obzira na izbor neodređenog koeficijenta. To znači da pretpostavljena funkcija ne odgovara.

Razmotrimo pobliže taj slučaj na jednom jednostavnom primjeru.

Primjer 2.9. Pretpostavimo RC krug s pobudom $e^{-\beta t}$

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = e^{-\beta t}.$$

Odziv mirnog sustava će biti:

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \qquad q_0 = Ce^{-\frac{t}{RC}} = Ce^{-\alpha t}.$$

Partikularni integral pretpostavimo u obliku:

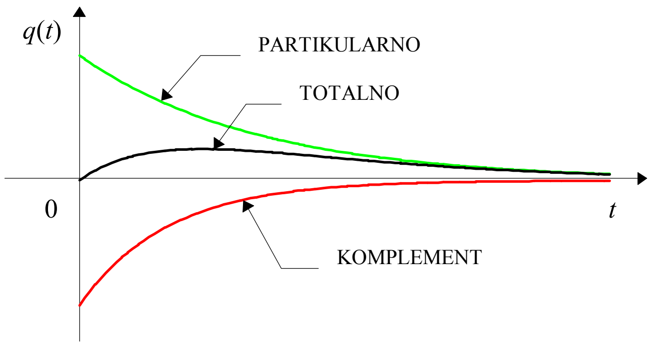
$$q_p = Qe^{-\beta t}, \qquad \left(R(-\beta) - \frac{1}{C}\right)Qe^{-\beta t} = Ee^{-\beta t},$$

$$q(t) = q_0(t) + q_p(t) = Ce^{-\alpha t} + Qe^{-\beta t}, \quad Q = \frac{E}{R}\frac{1}{\alpha - \beta},$$

$$q(0) = 0 = C + Q \Rightarrow C = -Q.$$

Prema tome:

$$q(t) = \frac{E}{R}\frac{1}{\alpha - \beta}(e^{-\beta t} - e^{-\alpha t})$$



Sl. 7.3

Pustimo sad da se vremenska konstanta pobude približava vremenskoj konstanti sustava:

$$\beta \to \alpha$$

$$\beta - \alpha = \Delta \qquad \beta = \alpha + \Delta$$

$$q(t) = -\frac{E}{R}\frac{1}{\Delta}(e^{-(\alpha+\Delta)t} - e^{-\alpha t}),$$

za $\Delta = 0$ imamo oblik $\frac{0}{0}$.

Upotrebom L'Hospitalovog pravila dolazimo da za $\Delta \to 0$ taj oblik teži

$$\lim_{\Delta\to 0} q(t) = \left. \frac{-\frac{E}{R}\frac{d}{d\Delta} e^{-\alpha t}(e^{-\Delta t} - 1)}{\frac{d}{d\Delta}\Delta} \right|_{\Delta=0} = -\frac{E}{R}\left.\frac{e^{-\alpha t}(-t)}{1}\right|_{\Delta=0} = \frac{E}{R} t e^{-\alpha t}.$$

Vidimo da smo trebali za partikularno rješenje pretpostaviti oblik $q = Qte^{-\alpha t}$ kad je $\beta = \alpha$.

$$\frac{dq}{dt} + \alpha q = \frac{E}{R} e^{-\alpha t},$$

$$q_p = Qte^{-\alpha t}, \qquad \frac{dq_p}{dt} = Q(e^{-\alpha t} - \alpha t e^{-\alpha t}),$$

$$Q(e^{-\alpha t} - \alpha t e^{-\alpha t}) + \alpha Q t e^{-\alpha t} = \frac{E}{R} e^{-\alpha t},$$

$$Q = \frac{E}{R}, \qquad q_p = \frac{E}{R} t e^{-\alpha t},$$

Ako postoji početni uvjet $q(0)$ rješenje dobiva oblik

$$q(0) = Ce^{-\alpha t} + \frac{E}{R} t e^{-\alpha t},$$

$q(0) = C$ pa imamo:

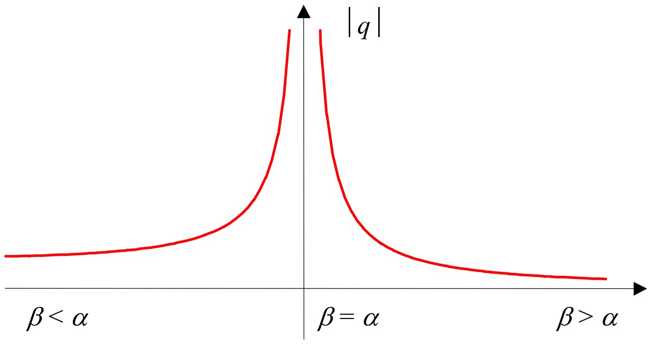
$$q(t) = q(0)e^{-\alpha t} \qquad + \qquad \frac{E}{R} t e^{-\alpha t}$$

odziv nepobuđepog sustava	partikularni integral odziv mirnog sustava

Onaj dio vlastitog titranja koji izaziva pobuda stopio se s partikularnom eksponencijalom u partikularno rješenje novog oblika.

Pri procesu približavanja $\beta \to \alpha$, amplituda jedne i druge eksponencijale je rasla u beskonačnost, ali tako da je njihova razlika ostajala uvijek konačna i podjednaka.

Da smo samo promatrali amplitudu partikularne eksponencijale mogli bi vidjeti da njena amplituda za $\beta = \alpha$ divergira u beskonačnost.

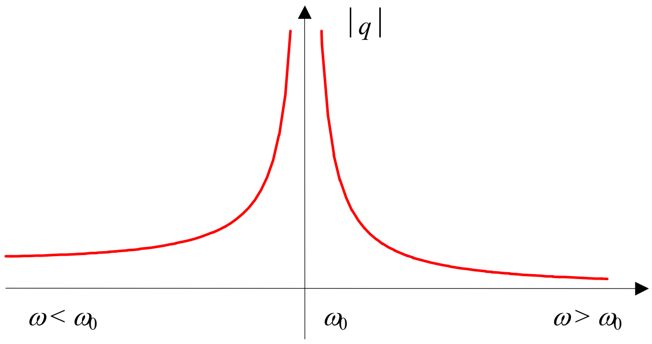


Sl. 7.4

To je fenomen koji nam je poznat kao rezonancija. On se ovdje pojavljuje za realne korijene, ali se može općenito pojaviti za svaki tip korijena. Stvarno je mnogo poznatiji slučaj kompleksnog korijena $\pm j\omega_0$ i pobude $Ee^{j\omega t}$, kad se ω mijenja u okolišu ω_0.

Rješenje za titrajni krug je:

$$q(t) = \frac{EC}{1-(\omega/\omega_0)^2}(\cos\omega t - \cos\omega_0 t)\,.$$

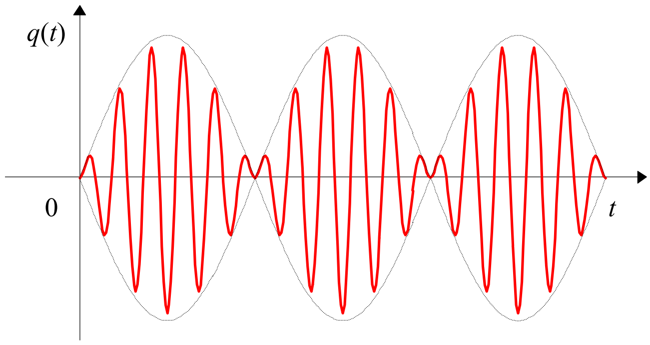


Sl. 7.5

Ovdje imamo superpoziciju dviju neprigušenih sinusoida od kojih jedna predstavlja prisilni odziv frekvencije ω koje je izazvala pobuda i vlastito titranje sustava izazvano neslaganjem početnog stanja na kapacitetu i onog kojeg traži prisilni odziv. Ovdje su titranja iste amplitude pa se dobije proces tzv. treptaj što se lako vidi ako se suma kosinusoida napiše kao produkt.

$$q(t) = \frac{2EC}{1-(\omega/\omega_0)^2}\left[\sin\left(\frac{\omega+\omega_0}{2}\right)t\right]\sin\left(\frac{\omega-\omega_0}{2}\right)t\,. \tag{7.22}$$

Vidimo jedno titranje s razlikom frekvencija $(\omega_0 - \omega)/2$ koja određuje dodirnicu i titranje srednjom frekvencijom $(\omega + \omega_0)/2$ unutar dodirnice. Ako su frekvencije bliske $\omega \approx \omega_0$, frekvencija treptanja je malena. Približavanje pobudne frekvencije rezonantnoj će još izazvati i povećanje njihovih amplituda.



Sl. 7.6

U graničnom slučaju $\omega = \omega_0$ amplituda $EC/\left[1-(\omega/\omega_0)^2\right]$ teži u beskonačnost što znači da prisilno i vlastito titranje idu u beskonačnost. Ustanovimo međutim, iz izraza (__) kakav je vremenski tok titranja kad $\omega \to \omega_0$.

$$\lim_{\omega \to \omega_0} q(t) = \frac{EC\omega_0}{1+\omega/\omega_0}\left[\sin\left(\frac{\omega+\omega_0}{2}\right)t\right]\left(\lim_{\omega \to \omega_0}\frac{\sin(\omega_0-\omega)t/2}{(\omega_0-\omega)/2}\right)$$

$$q(t) = \frac{\omega_0 ECt}{2}\sin(\omega_0 t)$$

Amplituda dakle raste postepeno od 0 prema beskonačnosti.

Točna koincidencija kompleksne frekvencije pobude i vlastite kompleksne frekvencije sustava se naziva nekad superrezonancija ili potpuna rezonancija jer koincidira realni i imaginarni dio dok se normalna rezonancija pojavljuje u sustavu koji ima vlastitu kompleksnu frekvenciju $s = \delta + j\omega_0$, a pobudna eksponencijala je oblika $Ee^{j\omega_0 t}$

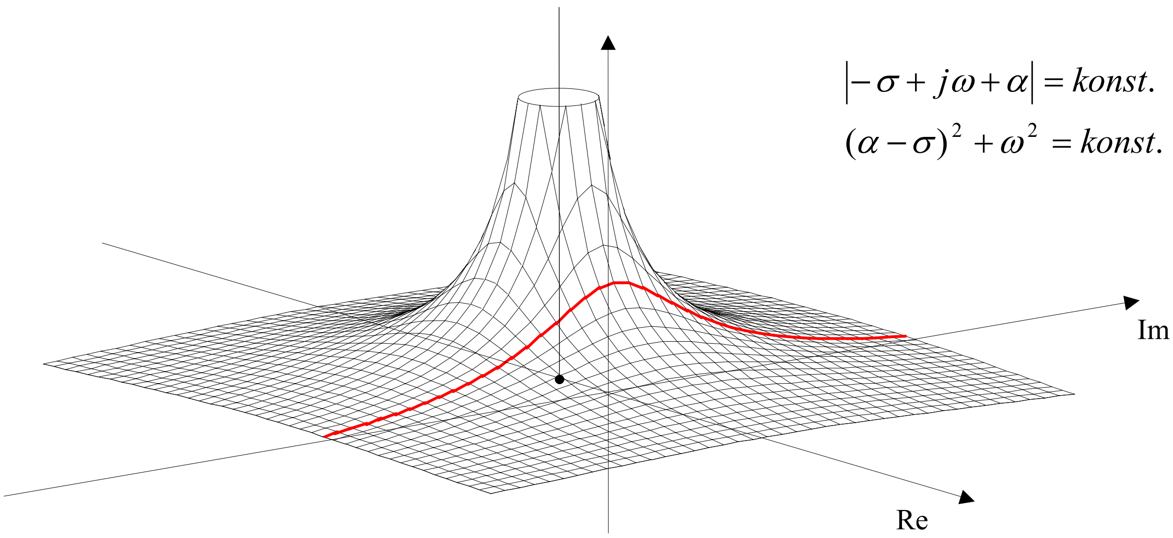
Uzmimo primjer pobude s kompleksnom frekvencijom Ee^{st} jednog sustava prvog reda (RL krug) s realnim korijenom.

Partikularni dio je određen s transfer funkcijom

$$I = \frac{E}{sL+R} = \frac{E}{L}\cdot\frac{1}{s-(-R/L)} = \frac{E}{L}\cdot\frac{1}{s-p_1},$$

gdje je p_1 korijen karakterističnog polinoma ili pol transfer funkcije.

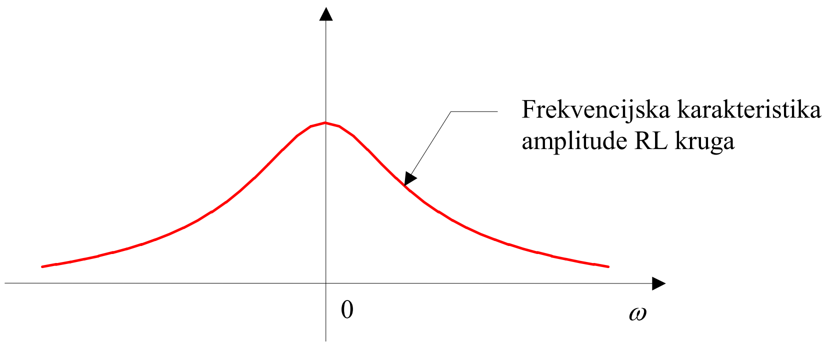
Ako uzmemo da su s i p_1 kompleksni brojevi predočeni u kompleksnoj ravnini s radij vektorima onda $s - s_1$ predstavlja vektor njihove razlike, koji određuje amplitudu struje (I) i njen kut ($\angle I$) za bilo koji s-pobude. Za sve kompleksne frekvencije pobude s bi dobili jednu plohu iznad kompleksne ravnine Sl. 7.7,



Sl. 7.7

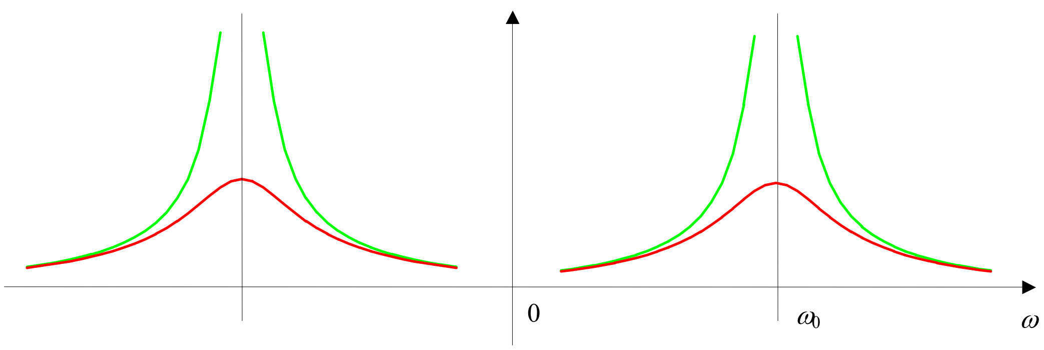
za koju bi mogli reći da predstavlja rezonantnu plohu jer za svaku kompleksnu frekvenciju pobude daje amplitudu prisilnog odziva. Specijalno zanimljiv slučaj je kad je pobuda sinusna $s = j\omega$.

Tada se sve frekvencije nalaze na imaginarnoj osi i amplitude prisilnog odziva će se dobivati za sve frekvencije na krivulji koja je presjecište rezonantne plohe s ravninom koju određuje imaginarna os (podebljana krivulja na Sl. 7.7 posebno nacrtana na Sl. 7.8).



Sl. 7.8

Analogno se može nacrtati struja (I) za titrajni krug odnosno sustav drugog reda, što će dati rezonantnu plohu s dva šiljka, a iznad osi $s = j\omega$, $\omega \in (-\infty, \infty)$ će biti rezonantna krivulja Sl. 7.9.



Sl. 7.9

A. Transfer funkcija dobiva velike apsolutne iznose u okolini polova te je simetrična obzirom na simetričnu os $\omega = 0$ jer su polovi realnog sustava $\alpha_i \in \mathbb{R}$ uvijek razmješteni simetrično oko realne osi. Zbog rada s kompleksnom pobudom oblika $e^{j\omega t}$, gdje ω može imati negativne iznose frekvencijska karakteristika se dobiva i za pozitivne i negativne frekvencije. Zbog simetrije amplitudne i antisimetrije fazne karakteristike dovoljno je poznavati karakteristiku samo u polovici frekvencijske skale, tj. bilo za $\omega \geq 0$ ili za $\omega \leq 0$.

7.8 Transfer funkcija linearnog vremenski invarijantnog sustava

U analizi linearnih vremenski invarijantnih sustava veoma važnu ulogu imaju integralne transformacije posebice Fourierova i Laplaceova. Opis sustava nakon transformacije je moguć u domenu kompleksne frekvencije.

Takav model sustava ima izuzetne prednosti, jer se diferencijalne jednadžbe svode na algebarske, pa se razlaganje modela ili njegove transformacije mogu provesti algebarskim transformacijama.

Provedimo jednostranu Laplaceovu transformaciju ulazno izlaznog modela.

Laplaceova transformacija signala u i y se obično označava s

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\},\ Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}.$$

Transformacija derivacija ulaza i izlaza je:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^m u}{dt^m}\right\} = s^m U(s) - s^{m-1}u(0) - \ldots - u^{(m-1)}(0), \tag{7.23}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n y}{dt^n}\right\} = s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - \ldots - y^{(n-1)}(0). \tag{7.24}$$

Na temelju linearnosti Laplaceove transformacije može se napisati

$$\left(\mathrm{a}_n s^n + \mathrm{a}_{n\text{-}1} s^{n-1} + \ldots + \mathrm{a}_0\right) Y(s) = \left(\mathrm{b}_m s^m + \ldots + \mathrm{b}_0\right) U(s) + E(s)\,, \tag{7.25}$$

gdje $E(s)$ sadržava članove proporcionalne početnim iznosima odziva y i pobude u.

U slučaju da je

$$y^{(\nu)}(0) = 0 \quad \text{za} \quad \nu = 0,1,2,3,4,\ldots,n-1\,, \tag{7.26}$$

$$u^{(\mu)}(0) = 0 \quad \text{za} \quad \mu = 0,1,2,3,4,\ldots,m-1\,, \tag{7.27}$$

izlazi rješenje za odziv mirnog sustava u obliku

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + \ldots + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_0} U(s). \tag{7.28}$$

Rješenje se može napisati kao

$$Y(s) = H(s)U(s). \tag{7.29}$$

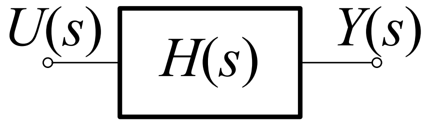
Funkcija $H(s)$ kompleksne frekvencije s naziva se transfer funkcija ili prijenosna funkcija sustava. Ona je definirana s

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}}, \tag{7.30}$$

dakle kao kvocijent transformata izlaznog i transformata ulaznog signala sustava, koji je bio miran prije pobude ($u(t) = 0$ za $t<0$).

Transfer funkcija je model sustava ekvivalentan diferencijalnoj jednadžbi. Obratan postupak od gornjeg, vodi u diferencijalnu jednadžbu.

Linearan dinamički sustav s jednim ulazom možemo predstaviti kao blok u s-domeni.



Sl. 7.10

7.8.1 Impulsni odziv sustava i konvolucijski integral

Odziv mirnog sustava za opću pobudu dan je u s domeni s $Y(s) = H(s)\ U(s)$.

Ako pretpostavimo da je pobuda impuls $u(t) = \delta(t)$ odnosno $U(s) = 1$, dobivamo impulsni odziv sustava

$$Y(s)=H(s)\ \ ili\ \ h(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}. \tag{7.31}$$

Za opću pobudu u izlazi

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)U(s)\}=\int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau\,, \tag{7.32}$$

u obliku konvolucijskog integrala.

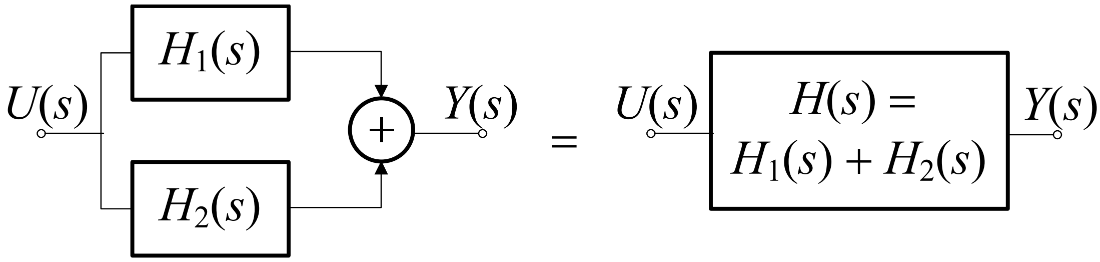
Odziv sustava na opću pobudu u može se dakle dobiti pomoću impulsnog odziva sustava.

7.9 Transfer funkcija složenih sustava

Linearni sustavi s transfer funkcijom $H_i(s)$ mogu biti podsustavi većeg sustava. Za njihovo spajanje važe ista pravila kao za spajanje funkcijskih blokova.

Složeni linearni sustav se može opisati s rezultirajućom transfer funkcijom. Ona se može dobiti pomoću transfer funkcija podsustava.

7.9.1 Paralelni spoj podsustava

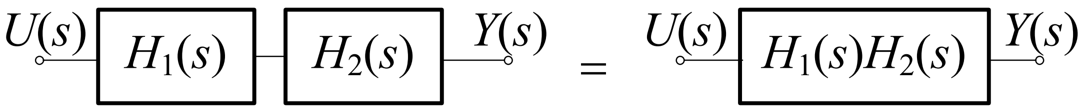


Sl. 7.11

$$\begin{aligned} &Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = [H_1(s) + H_2(s)]U(s) = H(s)U(s), \\ &H(s) = H_1(s) + H_2(s). \end{aligned} \tag{7.33}$$

Impulsni odziv paralelnog sloga je $h(t) = h_1(t) + h_2(t)$. (7.34)

7.9.2 Kaskadni spoj podsustava



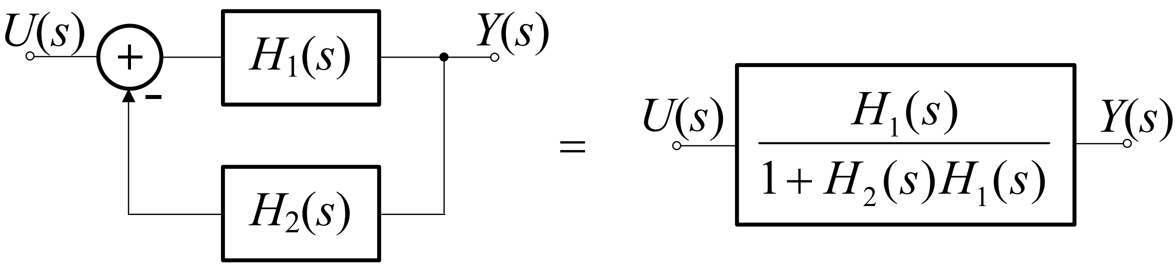
Sl. 7.12

$$\begin{aligned} &Y(s) = H_2(s)V(s) = H_2(s)H_1(s)U(s), \\ &H(s) = H_2(s)H_1(s). \end{aligned} \tag{7.35}$$

Impulsni odziv kaskade je

$$h(t) = \int_0^t h_1(t-\tau)h_2(\tau)d\tau . \tag{7.36}$$

7.9.3 Prstenasti spoj podsustava - sustav s povratnom vezom



Sl. 7.13

$$\begin{aligned} &E(s) = U(s) - H_2(s)Y(s), \\ &Y(s) = H_1(s)E(s) = H_1(s)[U(s) - H_2(s)Y(s)] = Y(s), \\ &Y(s)(1 + H_1(s)H_2(s)) = H_1(s)U(s), \\ &H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}. \end{aligned} \tag{7.37}$$

odnosno

$$H(s) = \frac{1}{H_1^{-1} + H_2(s)}. \tag{7.38}$$

Zanimljiv je specijalni slučaj kad je

$$\left|H_1^{-1}(s)\right| << \left|H_2(s)\right|, \qquad \text{za svaki s,}$$

odnosno

$$\left|H_1(s)\right| >> \left|H_2(s)\right|.$$

Tada sustav s povratnom vezom ima transfer funkciju približno

$$H(s) \cong \frac{1}{H_2(s)} = H_2^{-1}(s)\,, \tag{7.39}$$

koja je recipročna transfer funkciji povratnog podsustava.

Praktički se to postiže velikim pojačanjem u direktnom podsustavu. Na taj način se može dobiti inverzni sustav sustavu H_2(s).

Ako transfer funkciju inverznog sustava sustavu $H(s)$ označimo s $I(s)$, vrijedi

$$H(s)\,I(s) = 1\,, \tag{7.40}$$

odnosno u vremenskoj domeni

$$\int_{0^-}^{t} h(t-\tau)i(\tau)d\tau = \delta(t)\,. \tag{7.41}$$

U složenom linearnom sustavu signali dolaze kao linearna kombinacija iz linearnih podsustava i mogu se uz korištenje gornjih osnovnih spojeva i inverznog sustava s transfer funkcijom $I(s) = H^{-1}(s)$ razlagati na strukture sastavljene od jednostavnijih podsustava ili elemenata, što se može pregledno predstaviti blokovskim dijagramom.

Podsustavi su najčešće prvog i drugog reda, odnosno elementi kao što su zbrajala, pojačala i integratori.

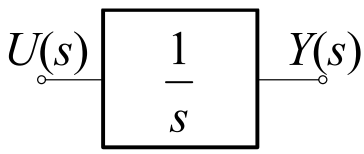
Za mirni $y(0) = 0$ integrator vrijedi

$$y(t) = \int_{0}^{t} u(\tau)d\tau\,. \tag{7.42}$$

$\mathcal{L}$ transformacijom izlazi

$$Y(s) = \frac{1}{s}U(s)\,. \tag{7.43}$$

Transfer funkcija mirnog integratora je $H(s) = \dfrac{1}{s}$ (7.44)



Sl. 7.14

7.10 Ulazno izlazni model sustava s više ulaza i izlaza

Složeni sustav s više ulaza u_j i izlaza y_k može biti opisan skupom diferencijalnih jednadžbi višeg reda.

Upotrijebimo složene operatore $A_{ik}(D)$ i $B_{ij}(D)$, da bi pisanje bilo zbijeno i pregledno.

$$\begin{aligned}
A_{11}(\mathrm{D})y_1 + \ldots + A_{1r}(\mathrm{D})y_r &= B_{11}(\mathrm{D})u_1 + \ldots + B_{1m}(\mathrm{D})u_m\,,\\
A_{21}(\mathrm{D})y_1 + \ldots + A_{2r}(\mathrm{D})y_r &= B_{21}(\mathrm{D})u_1 + \ldots + B_{2m}(\mathrm{D})u_m\,,\\
\vdots \qquad\qquad & \qquad\qquad \vdots\\
A_{r1}(\mathrm{D})y_1 + \ldots + A_{rr}(\mathrm{D})y_r &= B_{r1}(\mathrm{D})u_1 + \ldots + B_{rm}(\mathrm{D})u_m\,.
\end{aligned} \tag{7.45}$$

Ako definiramo izlazni i ulazni vektor s

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &\equiv [y_1, y_2, \ldots, y_r]^t \\ \mathbf{u} &\equiv [u_1, u_2, \ldots, u_m]^t\end{aligned} \tag{7.46}$$

možemo skup jednadžbi napisati u matričnom obliku

$$\mathbf{L}(\mathrm{D})\mathbf{y} = \mathbf{K}(\mathrm{D})\mathbf{u}. \tag{7.47}$$

7.10.1 Transfer matrica sustava s više ulaza i izlaza

Laplaceova transformacija skupa jednadžbi ima oblik

$$\mathbf{L}(s)\mathbf{Y}(s) = \mathbf{K}(s)\mathbf{U}(s) + \mathbf{E}(s). \tag{7.48}$$

U $\mathbf{E}(s)$ su skupljeni članovi koji sadržavaju početne iznose funkcija $u_j(0)$ i $y_k(0)$, te iznose njihovih viših derivacija u $t = 0$. Za mirni sustav kod kojeg su svi početni iznosi jednaki nuli $\mathbf{E}(s) = \mathbf{0}$, izlazni vektor se može dobiti u obliku.

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{L}^{-1}(s)\mathbf{K}(s)\mathbf{U}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{U}(s), \tag{7.49}$$

gdje se ulazni vektor množi matricom

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{L}^{-1}(s)\mathbf{K}(s). \tag{7.50}$$

Ova matrica se naziva transfer matricom sustava.

7.11 Model s varijablama stanja linearnog sustava

Vladanje vremenski stalnog linearnog sustava opisuje obična nehomogena vektorska diferencijalna jednadžba n-tog reda

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}. \tag{7.51}$$

A je matrica koeficijenata s realnim i konstantnim elementima $a_{ij} \in \mathbb{R}$

$$\{a_{ij}\}, \quad i, j = 1,2,\ldots,n. \tag{7.52}$$

B je pobudna ili kontrolna matrica s konstantnim elementima

$$\{b_{ik}\}, \quad i = 1,2,\ldots,n; \quad k = 1,2,\ldots,m. \tag{7.53}$$

Gornja vektorska jednadžba je identična skupu linearnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda:

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t) + \sum_{k=1}^{m} b_{ik} u_k(t), \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{7.54}$$

Ako je pobuda $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ rezultirajuća jednadžba je homogena

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t). \tag{7.55}$$

Izlazna vektorska jednadžba

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \tag{7.56}$$

identična je skupu od r linearnih algebarskih jednadžbi

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j(t) + \sum_{k=1}^{m} d_{ik} u_k(t), \quad i = 1,2,\ldots,r. \tag{7.57}$$

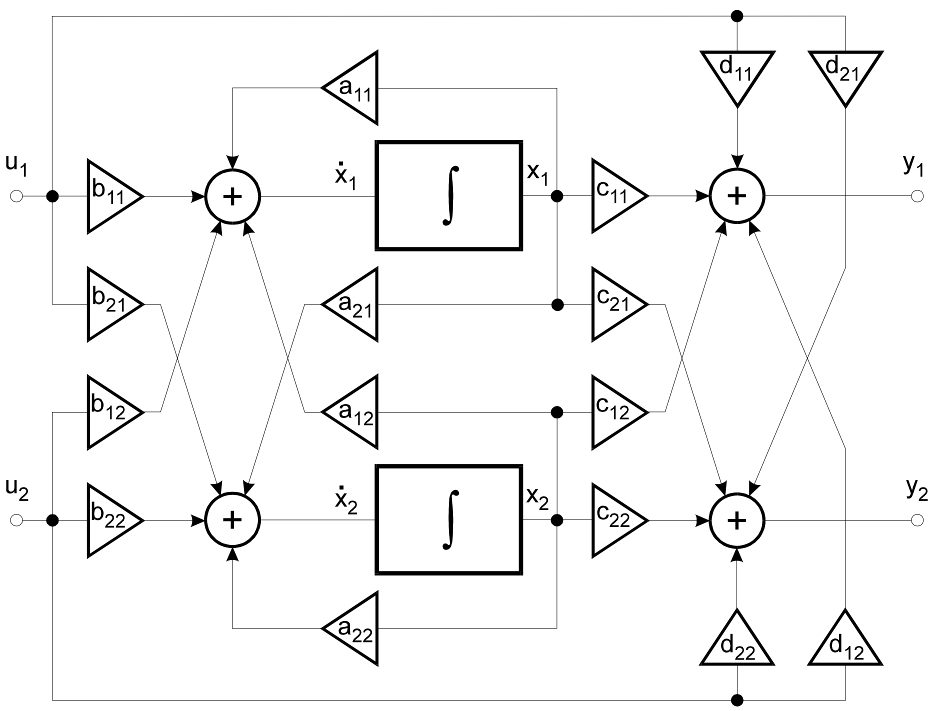
7.11.1 Blok dijagram linearnog sustava

Blok dijagram omogućava vizualnu predstavu međusobne povezanosti odnosno interakcije varijabli sustava.

Na temelju linearnih jednadžbi stanja može se nacrtati blok dijagram sustava. Budući da u linearnim jednadžbama imamo operacije zbrajanja i množenja s konstantom u bezmemorijskom dijelu ćemo imati zbrajala i pojačala. Vezu između $\dot{x}_i$ i x_i realizira integrator. Uzmimo jednostavni sustav drugog reda s dva ulaza i izlaza. Jednadžbe stanja su:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2. \end{aligned} \tag{7.58}$$

One izriču sumu signala na ulazu u dva integratora.



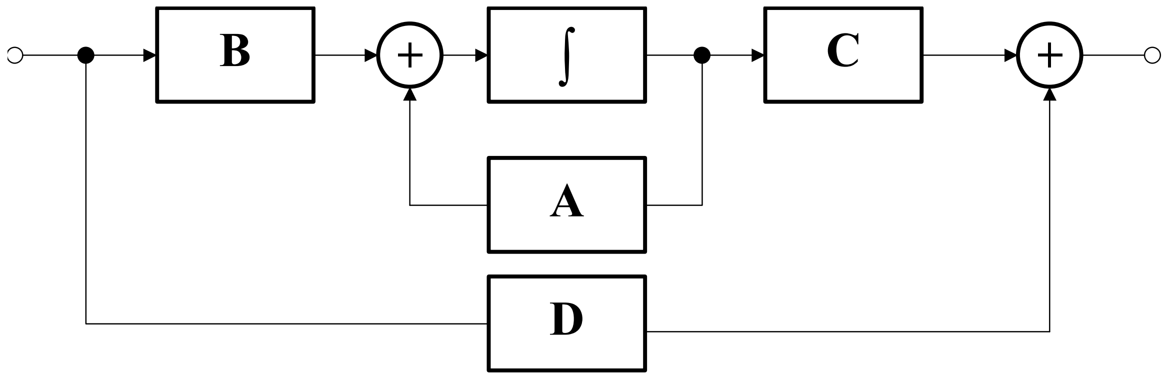
Sl. 7.15

Izlazi iz integratora su varijable stanja x_1 i x_2, a ulazi su njihove derivacije. Razumljivo je da se varijable stanja pojavljuju kao izlazi iz integratora, jer izlaz iz integratora u svakom trenutku t_1 predstavlja podatak, koji je dovoljan da se uz poznavanje ulaza u integrator, počevši od trenutka t_1, odredi njegov izlaz u bilo koji kasniji trenutak $t > t_1$.

Izlazna jednadžba se realizira s dva zbrajala

$$\begin{aligned} y_1(t) &= c_{11}x_1(t) + c_{12}x_2(t) + d_{11}u_1(t) + d_{12}u_2(t), \\ y_2(t) &= c_{21}x_1(t) + c_{22}x_2(t) + d_{21}u_1(t) + d_{22}u_2(t). \end{aligned} \tag{7.59}$$

Za kompletan sustav jednadžbi stanja i izlaznih jednadžbi možemo nacrtati tzv. kabelski blok dijagram (Sl. 7.16).



Sl. 7.16

Blok dijagram ne samo da nam osigurava uvid u interakciju varijabli u sustavu, nego nam daje i shemu spajanja za simulaciju procesa na analognom i digitalnom računalu.

7.11.2 Razlaganje sustava na jednostavnije podsustave i elemente

Model s varijablama stanja je skup diferencijalnih jednadžbi prvog reda. Ako smo u mogućnosti da jedan složeni sustav razložimo na ekvivalentni, sastavljen od podsustava prvog reda, otvara nam se mogućnost da tako razložen sustav predstavimo u standardnom obliku

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}. \tag{7.60}$$

Pogotovo će to biti jednostavno ako smo i te podsustave prvog reda dalje razložiti na elemente: integrator, kao memorijski dio, i pojačala i zbrajala kao bezmemorijski dio. Za dani razloženi sustav, predstavljen blok dijagramom, dovoljno je izlaze iz integratora kvalificirati kao varijable stanja da bismo iz blok dijagrama mogli napisati diferencijalne jednadžbe u standardnom obliku.

Algebarskim transformacijama transfer funkcije sustava, na primjer s jednim ulazom i jednim izlazom, možemo dobiti podsustave prvog reda i nacrtati blok dijagram s integratorima, služeći se s tri klasične metode razlaganja: direktnom, iterativnom i paralelnom.

7.12 Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

7.12.1 Direktna metoda

Uzmimo sustav s transfer funkcijom

$$H(s) = \frac{\mathrm{b}_0}{s^n + \ldots + \mathrm{a}_0}, \qquad \mathrm{a}_n = 1, \tag{7.61}$$

odnosno

$$(s^n + \ldots + \mathrm{a}_0)Y(s) = \mathrm{b}_0 U(s). \tag{7.62}$$

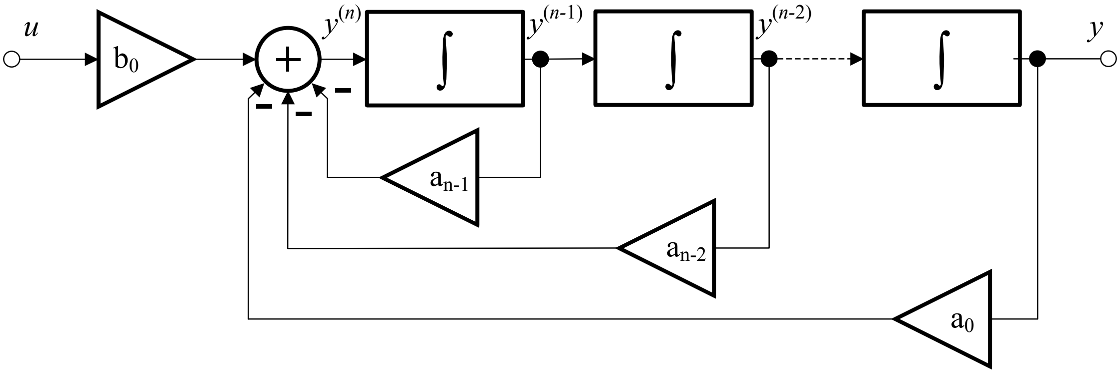
Izrazimo član najviše derivacije $s^n Y(s)$ s ostalim derivacijama

$$s^n Y(s) = \mathrm{b}_0 U(s) - \frac{1}{s}\mathrm{a}_{n-1}\left(s^n Y(s)\right) - \ldots - \frac{1}{s^n}\mathrm{a}_0\left(s^n Y(s)\right), \tag{7.63}$$

odnosno

$$y^{(n)} = \mathrm{b}_0 u - \mathrm{a}_{n-1} y^{(n-1)} - \ldots - \mathrm{a}_0 y.$$

Ovako napisana jednakost uključuje operaciju sumiranja i n integracija.

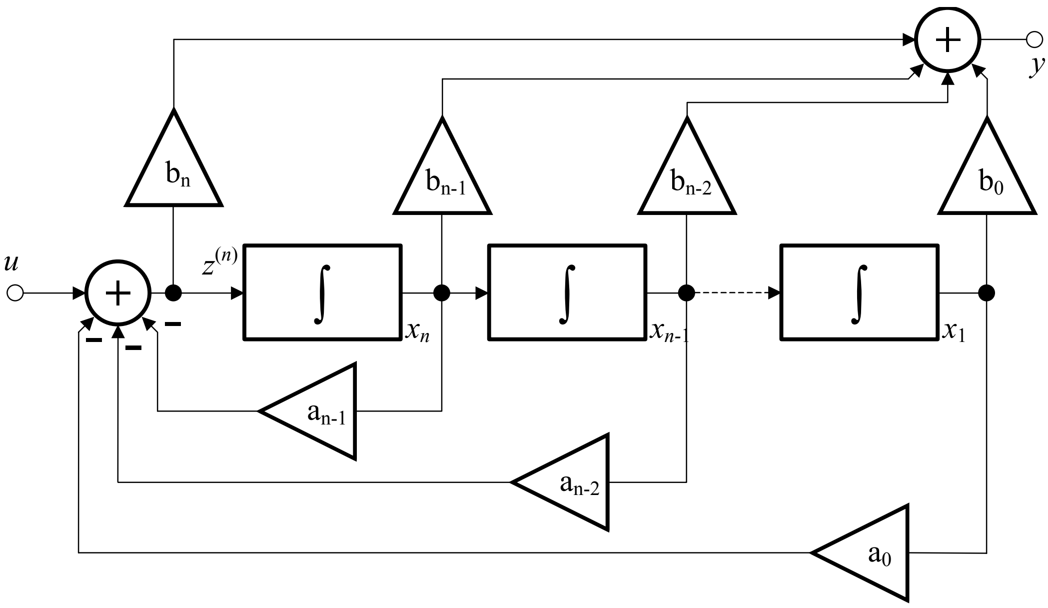


Sl. 7.17

Opći slučaj transfer funkcije $\mathrm{b}_i \neq 0$ može se interpretirati kao

$$Y(s) = B(s)\left(\frac{U(s)}{A(s)}\right) = B(s)Z(s) \tag{7.64}$$

Struktura za $Z(s) = U(s) / A(s)$ je ista kao na Sl. 7.17, samo umjesto $Y(s)$ stoji $Z(s)$, dok polinom $B(s)Z(s) = (\mathrm{b}_m s^m + \ldots + \mathrm{b}_0)Z(s)$ izriče da treba načiniti linearnu kombinaciju svih izlaza integratora, odnosno derivacija $\mathrm{z}^{(\mu)}(t)$, $\mu = 0, 1, 2, \ldots, m-1$.



Sl. 7.18

Izlazi iz integratora (Sl. 7.18) su veličine $y(t)$, $\dot{y}(t)$, …, $y^{(n-1)}(t)$. Kako je poznavanje tih veličina u trenutku $t = 0$ neophodno da bi se riješila polazna diferencijalna jednadžba višeg reda, izlazi da se te veličine kvalificiraju kao varijable stanja. Ovako izabrane varijable stanja nazivaju se fazne varijable.

Prema tome, uz varijable stanja

$$y = x_1, \dot{y} = x_2, \cdots, y^{(n-1)} = x_n \tag{7.65}$$

i $a_n = 1$, možemo napisati diferencijalnu jednadžbu

$$\dot{x}_n + a_{n-1} + a_{n-2}x_{n-1} + \cdots + a_1 x_2 + a_0 x_1 = b_0 u\,. \tag{7.66}$$

Dobivenu jednadžbu možemo interpretirati kao jednu jednadžbu stanja za $\dot{x}_n$, dok ostale jednadžbe proizlaze iz gornjeg izbora varijabli stanja

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n, \\ \dot{x}_n &= -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_n + b_0 u. \end{aligned} \tag{7.67}$$

Jednadžba izlaza ima oblik

$$y(t) = x_1(t)\,, \tag{7.68}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Te smo jednadžbe mogli napisati i direktno iz blok dijagrama označivši izlaze iz integratora kao varijable stanja.

Iz dijagrama izlazi da se opći model sustava s jednim izlazom i ulazom dade prikazati s faznim varijablama u standardnom obliku

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \tag{7.69}$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_n & b_1 - a_1 b_n & \cdots & b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u. \tag{7.70}$$

7.12.2 Iterativna metoda

Iterativna metoda vodi na razlaganje sustava na kaskadu podsustava.

Polinomi $A(s)$ i $B(s)$ u transfer funkciji mogu se predstaviti kao produkt korjenih faktora.

Polinom $A(s)$ je nazivnik transfer funkcije $H(s)$. Njegove nultočke su polovi transfer funkcije $H(s)$.

$$A(s) = \mathrm{a}_n s^n + \ldots + \mathrm{a}_0 = \mathrm{a}_n \prod_{k=1}^{n} (s - \mathrm{p}_k). \tag{7.71}$$

Polinom $B(s)$ je brojnik od $H(s)$

$$B(s) = \mathrm{b}_m s^m + \ldots + \mathrm{b}_0 = \mathrm{b}_m \prod_{1}^{m} (s - \mathrm{s}_k). \tag{7.72}$$

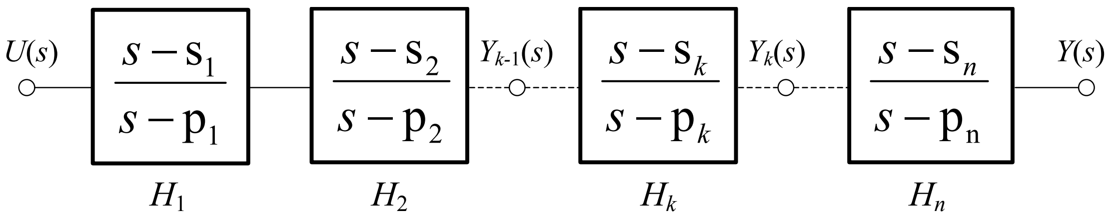
Korijeni brojnika s_k se nazivaju nule transfer funkcije $H(s)$. Uz pomoć korjenih faktora $(s - \mathrm{s}_k)$ i $(s - \mathrm{p}_k)$ može se transfer funkcija predstaviti u obliku

$$H(s) = \frac{\mathrm{b}_m}{\mathrm{a}_n} \frac{\prod_{1}^{m} (s - \mathrm{s}_k)}{\prod_{1}^{n} (s - \mathrm{p}_k)}. \tag{7.73}$$

dakle kao produkt članova

$$\frac{(s - \mathrm{s}_k)}{(s - \mathrm{p}_k)}. \tag{7.74}$$

Oni se mogu interpretirati kao podsustavi prvog reda jedne kaskade.



Sl. 7.19

$$Y(s) = \left[\prod_{1}^{n} H_k(s) \right] U(s). \tag{7.75}$$

Svaka pojedina sekcija s nulom i jednim polom naziva se bilinearnom sekcijom i može se realizirati s jednim integratorom

$$Y_k = H_k(s) Y_{k-1} = \frac{s - \mathrm{s}_k}{s - \mathrm{p}_k} Y_{k-1}, \tag{7.76}$$

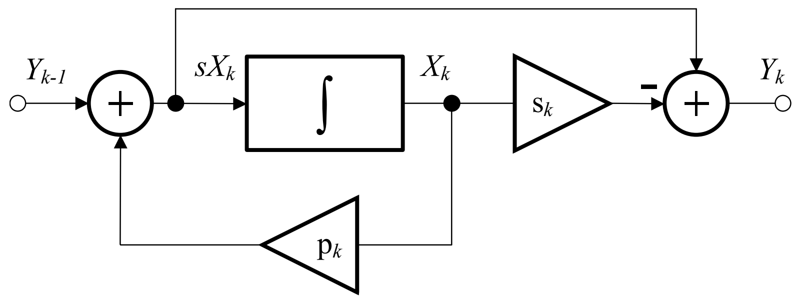
$$X_k(s) = \frac{1}{s - \mathrm{p}_k} Y_{k-1}, \tag{7.77}$$

$$Y_k(s) = (s - \mathrm{s}_k) X_k(s), \tag{7.78}$$

odatle

$$s X_k(s) = \mathrm{p}_k X_k(s) + Y_{k-1}, \tag{7.79}$$

$$sX_k(s) = Y_{k-1} + \mathrm{p}_k \frac{1}{s}(sX_k(s)) \,. \tag{7.80}$$



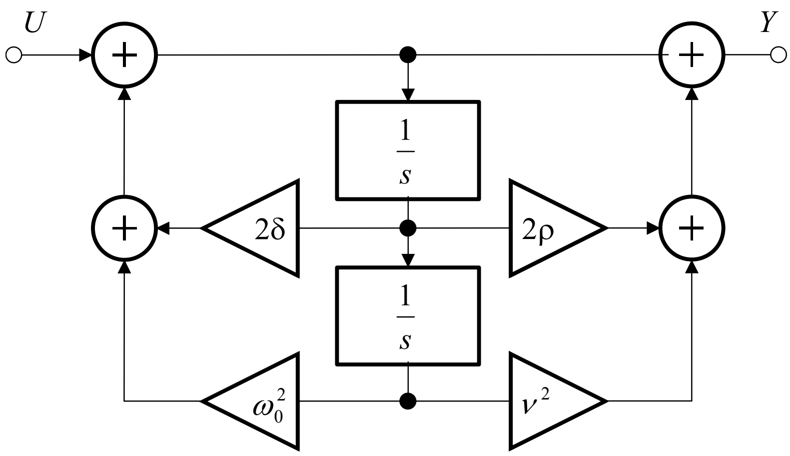
Sl. 7.20

Budući da $\{\mathrm{s}_k\}$ i $\{\mathrm{p}_k\}$ mogu biti kompleksni, proizlazi da su i koeficijenti pojačala kompleksni, što nije svojstvo realnog sustava. Gornje razlaganje se koristi u analizama, ali za realizaciju sustava sklopovljem ili na analognom računalu, trebaju koeficijenti polinoma biti realni. Realni sustavi imaju realne koeficijente, pa se polovi i nule javljaju u konjugiranim parovima.

Kombiniranjem konjugiranog para nultočaka i para polova

$$H_k = \frac{(s-\mathrm{s}_k)(s-\mathrm{s}_k{}^*)}{(s-\mathrm{p}_k)(s-\mathrm{p}_k{}^*)} \qquad \begin{aligned} \mathrm{s}_k &= -\rho + j\nu, \quad \nu_0^2 = \rho^2 + \nu^2 \\ \mathrm{p}_k &= -\delta + j\omega, \quad \omega_0^2 = \delta^2 + \omega^2 \end{aligned} \tag{7.81}$$

može se sustav drugog reda predstaviti blok dijagramom



Sl. 7.21

Dobivena struktura se naziva bikvadratna sekcija. U općem slučaju kaskada će se sastojati od sekcija prvog i drugog reda.

Razlaganje sustava u kaskadu bilinearnih sekcija ukazuje da se impulsni odziv složenog sustava može dobiti višestrukom konvolucijom.

$$h = \mathcal{L}^{1}\left\{\prod_{1}^{n} H_i(s)\right\} = h_1 * h_2 * \cdots * h_n \,, \tag{7.82}$$

gdje je h_i impulsni odziv podsustava

$$h_i(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s - \mathrm{s}_i}{s - \mathrm{p}_i}\right\} = \delta(t) + (\mathrm{p}_i - \mathrm{s}_i)e^{p_i t}(t)\,. \tag{7.83}$$

Za k-ti podsustav prvog reda u kaskadi na Sl. 7.19 mogu se napisati jednadžbe u vremenskoj domeni. Uz izlaz iz integratora označen s x_k na Sl. 7.20 izlazi:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_k = \mathrm{p}_k x_k + y_{k-1}\,, \qquad y_k = \dot{x}_k - \mathrm{s}_k x_k \\ &\text{za} \quad k = 1, 2, \cdots, n. \end{aligned} \tag{7.84}$$

Polazeći u ovom rekurzivnom sustavu jednadžbi od $y_0 = u$, dolazimo postupnom eliminacijom derivacije x_k iz jednadžbe za y_k do skupa jednadžbi

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = p_1 x_1 + u && y_1 = (p_1 - s_1)x_1 + u \\ &\dot{x}_2 = p_2 x_2 + (p_1 - s_1)x_1 + u && y_2 = (p_2 - s_2)x_2 + (p_1 - s_1)x_1 + u \\ &\dot{x}_3 = p_3 x_3 + y_2\ \text{, itd.} && \\ & && y_{n\text{-}1} = (p_{n\text{-}1} - s_{n\text{-}1})x_{n\text{-}1} + \cdots \\ &\dot{x}_n = p_n x_n + (p_{n\text{-}1} - s_{n\text{-}1})x_{n\text{-}1} + \cdots + (p_1 - s_1)x_1 + u, && \end{aligned} \tag{7.85}$$

a izlaz

$$y = y_n = (\mathrm{p}_n - \mathrm{s}_n)x_n + (\mathrm{p}_{n-1} - \mathrm{s}_{n-1})x_{n-1} + \cdots + (\mathrm{p}_1 - \mathrm{s}_1)x_1 + u\,, \tag{7.86}$$

odnosno standardni oblik izlazi kao:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{p}_1 & 0 & \cdots & \\ (\mathrm{p}_1 - \mathrm{s}_1) & \mathrm{p}_2 & 0 & \\ \vdots & & & \\ (\mathrm{p}_1 - \mathrm{s}_1) & (\mathrm{p}_2 - \mathrm{s}_2) & \cdots & \mathrm{p}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u\,, \tag{7.87}$$

$$y = \begin{bmatrix} (\mathrm{p}_1 - \mathrm{s}_1) & (\mathrm{p}_2 - \mathrm{s}_2) & \cdots & (\mathrm{p}_n - \mathrm{s}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + u\,. \tag{7.88}$$

7.12.3 Paralelna metoda

Paralelna metoda vodi na razlaganje sustava na paralelni slog podsustava kako će se pokazati. Transfer funkcija sustava s $m \le n$ može se razložiti na parcijalne razlomke.

Za različite polove

$$\mathrm{p}_k \ne \mathrm{p}_i \qquad i, k = 1,2,3,\ldots,n\,,$$

moguće je transfer funkciju predstaviti s

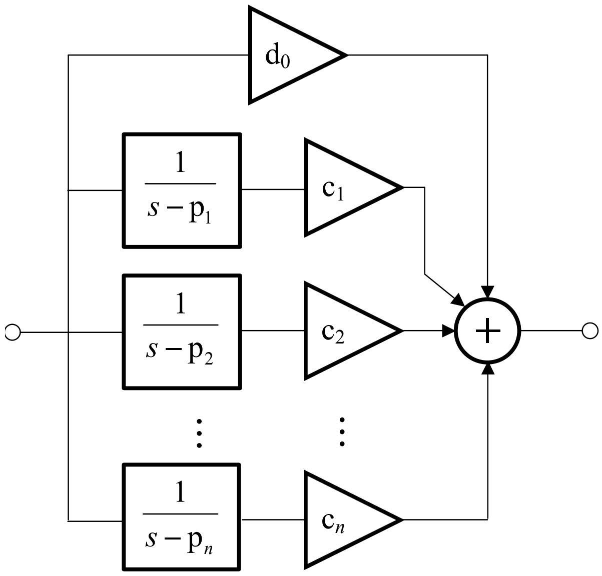
$$H(s) = \mathrm{d}_0 + \frac{\mathrm{c}_1}{\mathrm{s} - \mathrm{p}_1} + \cdots + \frac{\mathrm{c}_n}{s - \mathrm{p}_n} = \mathrm{d}_0 + \sum_1^n \frac{\mathrm{c}_k}{s - \mathrm{p}_k}\,, \tag{7.89}$$

Skalar c_k se naziva koeficijent parcijalnog razlomka s polom p_k. Koeficijenti c_k mogu se izračunati kada su polovi jednostruki iz

$$c_k = (s - p_k) H(s)\big|_{s=p_k}, \tag{7.90}$$

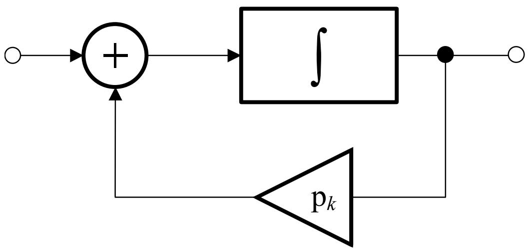
$$d_0 = \frac{b_n}{a_n}. \tag{7.91}$$

Linearna kombinacija parcijalnih razlomaka upućuje na paralelni spoj podsustava prvog reda.



Sl. 7.22

Svaki pojedini podsustav se može svesti na elemente s jednim integratorom i povratnom vezom

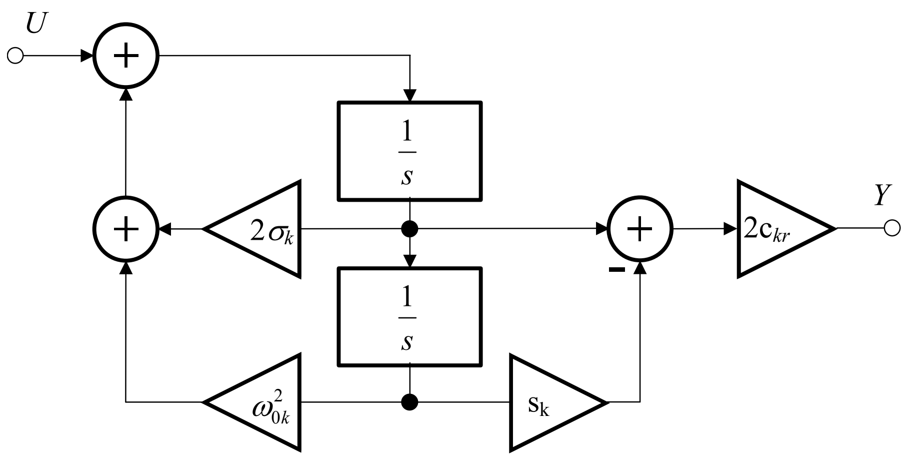


Sl. 7.23

I ovaj oblik, međutim, ima koeficijent pojačanja p_k, koji može biti kompleksan broj. Ovakvo pojačanje nije svojstveno realnom sustavu. U realnom sustavu pojavljuju se kompleksni polovi u konjugiranim parovima. Trebat će dakle složiti po dva razlomka s konjugiranim parom polova $p_k = \rho_k + j\omega_k$ i $p_k^* = \rho_k - j\omega_k$.

$$\begin{aligned} &\frac{c_k}{s-p_k} + \frac{c_k^*}{s-p_k^*} = \frac{c_k(s-p_k^*) + c_k^*(s-p_k)}{(s-p_k)(s-p_k^*)} = \frac{s(c_k + c_k^*) - p_k^* c_k - p_k c_k^*}{s^2 + 2\rho_k s + \rho_k^2 + \omega_k^2} = \\ &= 2c_{kr}\frac{s - s_k}{s^2 + 2\rho_k s + \omega_{0k}^2}, \qquad \omega_{0k}^2 = \rho_k^2 + \omega_k^2, \qquad s_k = c\frac{p_k^* c_k + p_k c_k^*}{c_k + c_k^*}. \end{aligned} \tag{7.92}$$

Ovo se dade predstaviti slijedećim blok dijagramom ($c_{kr} = \mathrm{Re}[c_k]$)



Sl. 7.24

u kojem su svi koeficijenti realni.

Polazeći od slučaja s jednostrukim polovima, (Sl. 7.22), svaki sustav prvog reda daje jednadžbu u vremenskoj domeni

$$\dot{x}_j = \mathrm{p}_j x_j + u\,, \tag{7.93}$$

dok je izlaz dan linearnom kombinacijom

$$y = \sum_{1}^{n} \mathrm{c}_j x_j + \mathrm{d}u\,, \tag{7.94}$$

odatle slijedi standardni oblik jednadžbe

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{p}_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \mathrm{p}_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \mathrm{p}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u, \tag{7.95}$$

$$y = \begin{bmatrix} \mathrm{c}_1 & \mathrm{c}_2 & \cdots & \mathrm{c}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \mathrm{d}u. \tag{7.96}$$

Dobili smo dijagonalnu matricu **A**. Ovakav sustav se naziva razvezanim, budući da je predstavljen s n nezavisnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda, a blok dijagram od n nezavisnih kanala. Naziva se često kanonskim oblikom, a varijable stanja kanonske varijable. Iz njega se vrlo lagano dolazi do odziva sustava jer se vremensko mijenjanje svake varijable stanja dobiva rješenjem jedne diferencijalne jednadžbe, koja vrijedi za dotičnu varijablu, a ne cijelog sustava jednadžbi.

Slučaj višestrukog pola višestrukosti k daje skup jednadžbi oblika

$$\dot{x}_j = \mathrm{p}_1 x_j + x_{j+1}, \qquad j = 1,2,\ldots,k-1\,, \tag{7.97}$$

$$\dot{x}_j = \mathrm{p}_1 x_j + u, \qquad j = k\,. \tag{7.98}$$

Ostali podsustavi s jednostrukim polovima daju kao i prije

$$\dot{x}_j = \mathrm{p}_j x_j + u, \qquad j = k+1,\ldots,n\,. \tag{7.99}$$

Odatle slijedi oblik

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{p}_1 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & \mathrm{p}_1 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & \mathrm{p}_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \mathrm{p}_k & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \mathrm{p}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u., \tag{7.100}$$

$$y = \begin{bmatrix} \mathrm{c}_1 & \mathrm{c}_2 & \cdots & \mathrm{c}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \mathrm{d}u.. \tag{7.101}$$

Matrica **A** je kvazidijagonalna, ima jedan tzv. Jordanov blok. Svaki višestruki pol u transfer funkciji će dati jedan takav blok u matrici **A**.

U slučaju da transfer funkcija ima višestruke polove, postupak razlaganja treba modificirati kako slijedi.

Uzmimo da je pol p_1 višestrukosti k, dok su ostali polovi jednostruki p_{k+1}, …, p_n. Transfer funkcija se rastavlja u parcijalne razlomke

$$H(s) = \mathrm{d}_0 + \sum_{j=1}^{k} \frac{\mathrm{c}_j}{(s-\mathrm{p}_1)^{k-j+1}} + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\mathrm{c}_j}{(s-\mathrm{p}_j)}\,. \tag{7.102}$$

Koeficijenti parcijalnih razlomaka mogu se dobiti iz

$$\mathrm{d}_0 = \frac{\mathrm{b}_n}{\mathrm{a}_n}, \qquad \mathrm{c}_j = \frac{1}{(j-1)!} \frac{d^{\,j-1}}{ds^{\,j-1}} \left[(s-\mathrm{p}_1)^k \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s\,=\,\mathrm{p}_1}, \tag{7.103}$$

za $j = 1, 2, \ldots, k$.

Dok je za jednostruke polove

$$\mathrm{c}_j = \left[(s-\mathrm{p}_j) \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s\,=\,\mathrm{p}_j}, \quad j = k+1,\cdots,n\,. \tag{7.104}$$

Kako se izlaz može napisati kao linearna kombinacija razlomaka

$$Y(s) = \mathrm{d}_0 U(s) + \sum_{1}^{k} \mathrm{c}_j \frac{U(s)}{(s-\mathrm{p}_1)^{k-j+1}} + \sum_{k+1}^{n} \mathrm{c}_j \frac{U(s)}{(s-\mathrm{p}_j)}, \tag{7.105}$$

članovi $X_j(s) = U(s)/(s - \mathrm{p}_1)^{k-j+1}$ prve sumacije su takovi da se može napisati

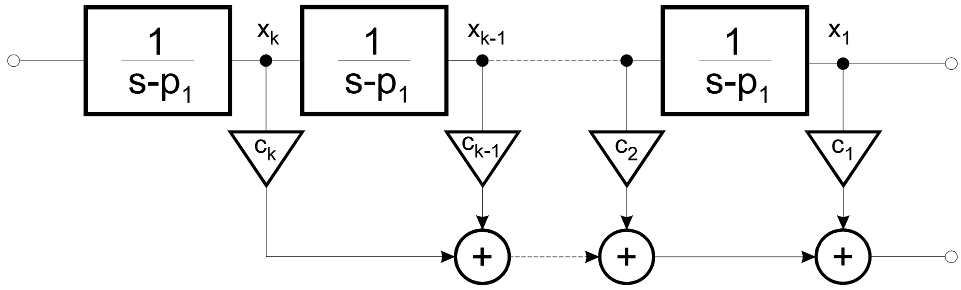
$$\frac{X_j(s)}{X_{j+1}(s)}=\frac{\dfrac{U}{(s-\mathrm{p}_1)^{k-j-1}}}{\dfrac{U}{(s-\mathrm{p}_1)^{k-j-1+1}}}=\frac{1}{s-\mathrm{p}_2},$$

odnosno rekurzivni izraz

$$X_j(s)=\frac{1}{(s-\mathrm{p}_1)}X_{j+1}(s). \tag{7.106}$$

Taj izraz se može predstaviti kaskadom od k jednakih sekcija s transfer funkcijom

$$\frac{1}{s-\mathrm{p}_1}.$$



Sl. 7.25

Ovakvom strukturom za svaki višestruki pol treba proširiti strukturu na Sl. 7.22.

Prvi član razvoja pripada direktnom prijenosu signala kad je $d_0 \neq 0$, a zadnji član već ranije dobivenom paralelnom slogu podsustava prvog reda koji pripadaju jednostrukim polovima.

Ako su višestruki polovi kompleksni, svaki konjugirani par se može složiti u kvadratnu sekciju. Za par višestrukosti m formira se kaskada jednakih sekcija drugog reda dužine m.

Razlaganje sustava na paralelni slog podsustava ukazuje da se impulsni odziv može dobiti kao linearna kombinacija odziva jednostavnih sustava, danih s parcijalnim razlomcima.

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{d_0+\sum_{1}^{k}\mathrm{c}_j\frac{1}{(s-\mathrm{p}_1)^{k-j+1}}+\sum_{k+1}^{n}\mathrm{c}_j\frac{1}{(s-\mathrm{p}_j)}\right\}, \tag{7.107}$$

$$h(t)=\left(\mathrm{d}_0\delta(t)+\sum_{1}^{k}\frac{c_j}{(k-j)!}t^{k-j}e^{\mathrm{p}_j t}+\sum_{k+1}^{n}\mathrm{c}_j e^{\mathrm{p}_j t}\right) \qquad \text{za } t\geq 0. \tag{7.108}$$

7.13 Transformacija varijabli stanja

Pretpostavimo da je jedan linearni sustav opisan pomoću varijabli stanja x_i u standardnom obliku

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u} \qquad \mathbf{y}=\mathbf{C}\mathbf{x}+\mathbf{D}\mathbf{u}.$$

Mi možemo taj sustav prikazati pomoću nekih drugih varijabli stanja **z**, koje će, budući da se radi o linearnom sustavu biti linearna kombinacija starih varijabli stanja. Ovo se može napisati u matričnoj simbolici kao

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{z} . \tag{7.109}$$

Pri tom je jedini zahtjev da matrica **P** ne bude singularna, tj. det **P** = 0. Supstituirajmo nove varijable u jednadžbu stanja.

$$\mathbf{P}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{z} + \mathbf{B}\mathbf{u} .$$

Množenjem s inverznom matricom $\mathbf{P}^{-1}$ dobivamo

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{z} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \qquad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{z} + \mathbf{D}\mathbf{u} , \tag{7.110}$$

što može biti napisano u obliku

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^{*}\mathbf{z} + \mathbf{B}^{*}\mathbf{u} \qquad \mathbf{y} = \mathbf{C}^{*}\mathbf{z} + \mathbf{D}^{*}\mathbf{u} , \tag{7.111}$$

gdje je

$$\mathbf{A}^{*} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} \qquad \mathbf{B}^{*} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} \qquad \mathbf{C}^{*} = \mathbf{C}\mathbf{P} \qquad \mathbf{D}^{*} = \mathbf{D} . \tag{7.112}$$

Iz više razloga je interesantno reducirati standardni oblik na oblik s kanonskim varijablama. Matrica **P** formirana tako da transformacija daje dijagonalnu matricu **A*** naziva se modalna matrica. U općem slučaju se može dobiti na temelju vlastitih vrijednosti i vlastitih vektora matrice **A**.

Do karakteristične jednadžbe dolazimo razmatranjem linearne transformacije vektora **x** u vektor **y**

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} .$$

Da li postoji vektor **x** takav da njegova transformacija daje vektor **y** koji ima isti smjer u vektorskom prostoru? Ako takav vektor postoji, on je proporcionalan s **x** tj.:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} , \tag{7.113}$$

gdje je λ neki skalar.

Ako ova jednakost ima netrivijalno rješenje ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) za neku vrijednost skalara λ_k, tada je λ_k vlastita vrijednost matrice **A**. Vektor $\mathbf{x}_k$ koji se dobije kao rješenje je vlastiti vektor matrice **A** koji pripada vrijednosti λ_k.

Jednakost $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ je homogeni sustav algebarskih jednadžbi

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0} , \tag{7.114}$$

gdje je **I** jedinična matrica

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

U homogenom sustavu netrivijalno rješenje $\mathbf{x}_k \neq 0$, može se dobiti jedino ako determinanta koeficijenata homogenog sustava iščezava, tj.

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0\,. \tag{7.115}$$

Ako je **A** matrica *n* x *n*, determinanta je polinom *n*-tog stupnja u varijabli λ i za to ima *n* korijena. Oni su vlastite vrijednosti matrice **A**. Ako su elementi matrice **A** realni, tada su i koeficijenti polinoma realni. Odatle slijedi da korijeni mogu biti realni ili kompleksni. Kada su kompleksni, javljaju se u konjugiranim parovima.

Kod polinoma stupnja višeg od $n = 3$ računanje korijena nije jednostavno, ali danas postoje programi za njihovo numeričko računanje.

Pri transformaciji varijabli karakteristični polinom slijedi iz nove matrice $\mathbf{A^*} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$

$$\begin{aligned} \mathbf{P_n}(\lambda) &= \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A^*}) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}) = \\ &= \det(\lambda\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}) = \det\mathbf{P}^{-1}\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\cdot\det\mathbf{P} = \\ &= \det\mathbf{P}^{-1}\det\mathbf{P}\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \\ &= \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}). \end{aligned} \tag{7.116}$$

Dobili smo isti karakteristični polinom, dakle i iste vlastite vrijednosti. Pri linearnoj transformaciji varijabli sustava $\mathbf{P_n}(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$ je invarijantan, pa prema tome i vlastite vrijednosti.

Vlastiti vektori se dobivaju rješenjem jednadžbe $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Vratimo se transformaciji jednadžbi u kanonski oblik.

Formirajmo matricu **M** od vlastitih vektora matrice **A**.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}.$$

Odredimo produkt **AM**

$$\mathbf{AM} = \mathbf{A}\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Ax}_1 & \mathbf{Ax}_2 & \cdots & \mathbf{Ax}_n \end{bmatrix}.$$

Korištenjem $\mathbf{Ax}_k = \lambda_k\mathbf{x}_k$ izlazi

$$\mathbf{AM} = \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{x}_1 & \lambda_2\mathbf{x}_2 & \cdots & \lambda_n\mathbf{x}_n \end{bmatrix},$$

što se može napisati u obliku

$$\mathbf{AM} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{M\Lambda}\,.$$

Vrijedi dakle jednakost

$$\mathbf{AM} = \mathbf{M\Lambda} \rightarrow \mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{AM}\,. \tag{7.117}$$

Matrica **M** je tražena modalna matrica, jer vrši transformaciju matrice **A** u dijagonalnu matricu Λ.

Za slučaj jednakih korijena modalna matrica se može odrediti tako da se matrica **A** dobije u Jordanovom obliku.

7.14 Upravljivost i osmotrivost sustava

Transformacijom standardnog oblika jednadžbi stanja s matricom **A** u kanonski oblik s dijagonalnom $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots\ ,\ \lambda_n]$ daje nam mogućnost da uvedemo i jednostavno interpretiramo koncept upravljivosti i osmotrivosti sustava.

Ta, za vladanje sustava vrlo važna svojstva, pokazuju da li su varijable stanja povezane s ulaznim, odnosno izlaznim varijablama.

Upravljivost se može lagano ustanoviti u sustavu prikazanom u kanonskom obliku za slučaj različitih korijena

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mathrm{p}_1 x_1 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2, \\ \dot{x}_2 &= \mathrm{p}_2 x_2 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2, \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= \mathrm{p}_n x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2. \end{aligned} \qquad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{\Lambda x} + \beta\mathbf{u}, \tag{7.118}$$

Sustav je razvezan pa se ne rješava kao cjelina. Svaka varijabla stanja može se dobiti rješenjem jedne jednadžbe. Tako će jednadžba za x_i

$$\dot{x}_i = \mathrm{p}_i x_i + b_{i1}u_1 + b_{i2}u_2\,, \quad i = 1,2,...,n\,, \tag{7.119}$$

dati odziv na pobudu s u_1 i u_2. U tom odzivu će biti prisutno titranje karakterističnom frekvencijom p_1. Ako je postojao neki početni iznos varijable $x_1(0)$, taj će se također istitrati s p_1.

Varijabla x_2 se istitrava s frekvencijom p_2, itd. Svaka varijabla se istitrava svojom frekvencijom. U slučaju pune matrice **A**, tj. vezanog sustava jedna će varijabla titrati s nekoliko ili svim karakterističnim frekvencijama p_1 , p_2 , … , p_n .

Sustav je upravljiv ako ulazni signali mogu pobuditi sve karakteristične frekvencije sustava.

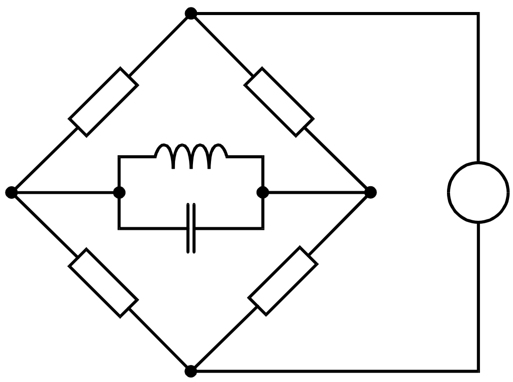
U kanonskom obliku lako je vidjeti da će se sustav moći pobuditi na titranje nekom frekvencijom p_i, ako se s ulaznim signalima može pobuditi na titranje varijabla x_i, dakle ako b_{i1} i b_{i2} nisu jednaki nuli.

Sustav s različitim karakterističnim frekvencijama je upravljiv ako matrica $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}$ nema nultih redaka, tj. nije slučaj da su svi elementi nekog retka jednaki nuli.

U slučaju da je i-ti redak matrice nul-redak, titranje frekvencijom p_i može postojati samo od početnog uvjeta $x_i(0) \neq 0$, ali ne od pobude u.

Za varijablu stanja x_i, koja odgovara nul retku kaže se da je neupravljiva.

Primjer: Pobuda je u jednoj dijagonali uravnoteženog mosta, a titrajni krug u drugoj dijagonali.



Sl. 7.26

Za slučaj kad matrica **A** ima višestruke vlastite vrijednosti sustav je upravljiv

(i) *ako ne postoje dva Jordanova bloka koja pripadaju istim vlastitim vrijednostima*,

(ii) *ako elementi matrice* β, *koji odgovaraju zadnjem retku svakog Jordanovog bloka nisu jednaki nuli*,

(iii) *ako svi elementi svakog retka matrice* β, *koji pripadaju jednostrukim vlastitim vrijednostima nisu jednaki nuli*.

Osmotrivost je drugo važno svojstvo sustava, koje se može također lako interpretirati iz jednadžbi u kanonskom obliku.

$$\mathbf{y} = \mathbf{\Gamma x} + \mathbf{Du}\,. \tag{7.120}$$

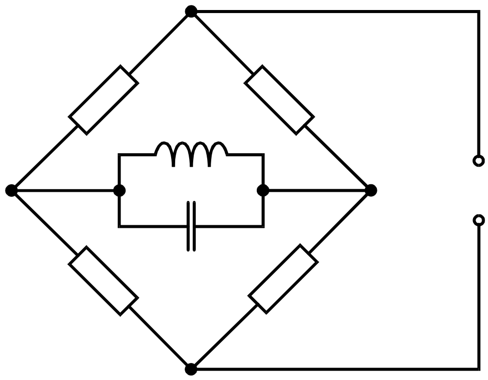
Sustav je osmotriv ako se preko izlaza sustava mogu registrirati sve prirodne frekvencije sustava. Na izlazu iz sustava se neće moći registrirati neka frekvencija p_i, ako nema veze između bilo kojeg izlaza i varijable x_i koja titra s p_i. To je slučaj kad postoji nulti stupac u matrici Γ, kako se to vidi iz jednadžbi izlaza ($\mathrm{d}_i = 0$).

$$\begin{aligned} y_1 &= \gamma_{11}x_1 + \gamma_{12}x_2 + \cdots + \gamma_{1n}x_n \\ y_2 &= \gamma_{12}x_1 + \gamma_{22}x_2 + \cdots + \gamma_{2n}x_n \\ &\vdots \\ y_r &= \gamma_{r1}x_1 + \gamma_{r2}x_2 + \cdots + \gamma_{rn}x_n \end{aligned} \tag{7.121}$$

Neka su na primjer svi $\gamma_{i2} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$ na izlazima y_i se neće moći ustanoviti što se događa s varijablom x_2. Za varijablu koja odgovara nultom stupcu kaže se da je neosmotriva.

Sustav je dakle osmotriv ako matrica Γ nema nul stupaca.

Primjer: Uravnoteženi most



Sl. 7.27

Titranje kruga njegovom frekvencijom se ne može registrirati.

Sustav je osmotriv za slučaj višestrukih korijena

(i) *ako ne postoje dva Jordanova bloka koji pripadaju istim vlastitim vrijednostima*,

(ii) *ako u stupcima matrice* Γ, *koji pripadaju prvom retku Jordanovog bloka nisu nule*,

(iii) *ako se u stupcima koji pripadaju jednostrukim vlastitim vrijednostima nisu nule*.

U jednom sustavu možemo ustanoviti upravljive, neupravljive, osmotrive i neosmotrive varijable, tako da u općem slučaju možemo jedan sustav razložiti na četiri podsustava

osmotriv	neosmotriv	SUSTAV
$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{\Lambda}_1\mathbf{x}_1 + \boldsymbol{\beta}_1\mathbf{u}_1$ $\mathbf{y}_1 = \mathbf{\Gamma}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_1\mathbf{u}_1$	$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{\Lambda}_2\mathbf{x}_2 + \boldsymbol{\beta}_2\mathbf{u}_2$ $\mathbf{y}_2 = \mathbf{0}$	upravljiv
$\dot{\mathbf{x}}_3 = \mathbf{\Lambda}_3\mathbf{x}_3$ $\mathbf{y}_3 = \mathbf{\Gamma}_3\mathbf{x}_3$	$\dot{\mathbf{x}}_4 = \mathbf{\Lambda}_4\mathbf{x}_4$ $\mathbf{y}_4 = \mathbf{0}$	neupravljiv

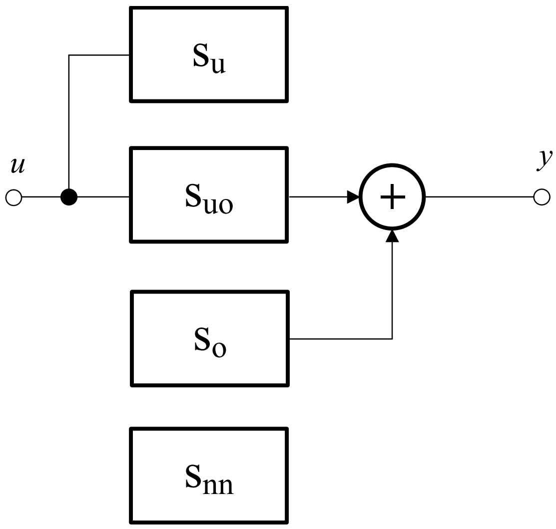
(7.122)

Kombiniranjem ovih kanonskih jednadžbi dolazimo do jednadžbi sustava

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_3 \\ \dot{\mathbf{x}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_1 & & & \\ & \mathbf{\Lambda}_2 & & \\ & & \mathbf{\Lambda}_3 & \\ & & & \mathbf{\Lambda}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\beta}_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix}, \tag{7.123}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{\Gamma}_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix}. \tag{7.124}$$

Razlaganje sustava na četiri podsustava se može prikazati blok dijagramom (sl. 7.28) iz kojeg se vidi da samo upravljivi i osmotrivi dio osigurava prolaz signala kroz sustav i određuje transfer funkciju $H(s)$.

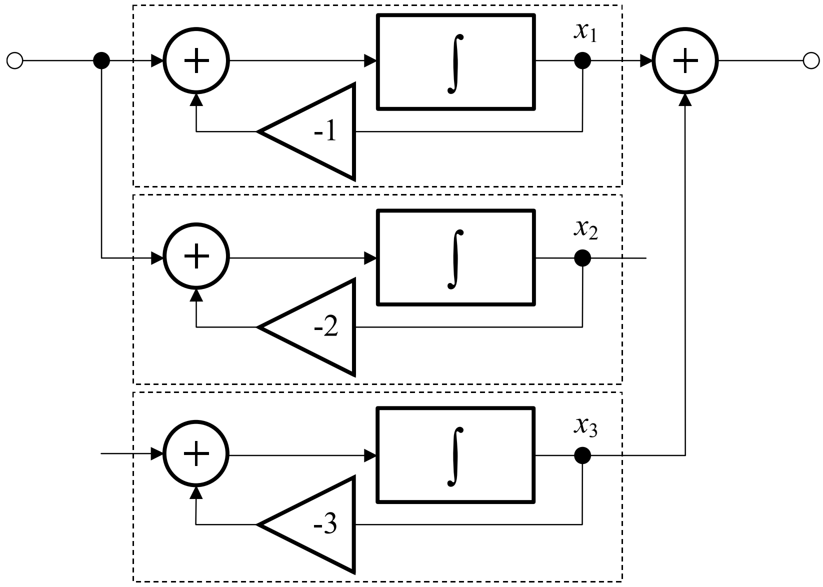


Sl. 7.25

Primjer:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$



Sl. 7.26

Odziv sustava $y(t)$ je određen samo s upravljivim i osmotrivim podsustavom $p_1 = -1$. Na izlazu se sustav vlada kao da je prvog reda. Neupravljivost x_3 i neosmotrivost x_2 skriva činjenicu da je sustav trećeg reda.

8. ODZIV I SVOJSTVA LINEARNIH SUSTAVA

8.1 Odziv nepobuđenog sustava

Dinamičko vladanje i svojstva linearnog sustava mogu se odrediti rješenjem jednadžbi stanja sustava.

Jednadžba stanja linearnog sustava ima oblik

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \tag{8.1}$$

gdje su matrice **A** i **B** u općem slučaju funkcije vremena, dok za sustav vremenski stalan, elementi $\{a_{ij}\}$ i $\{b_{ij}\}$matrica **A** i **B** su konstante. Iz pobude **u** i početnog stanja $\mathbf{x}_0$ može se odrediti stanje sustava počevši od trenutka t_0 do bilo kojeg trenutka t rješenjem gornje matrične jednadžbe.

Prvo ćemo riješiti njen homogeni dio, tj. kad nema pobude. Rješenje je vektor zavisan od vremena $\mathbf{x}_n(t)$, koja zadovoljava jednadžbu

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \tag{8.2}$$

i rubni uvjet, tj. početno stanje $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$. Da dođemo do analitičkog rješenja ove jednadžbe možemo pretpostaviti rješenje u obliku reda potencija u varijabli t.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1 t + \ldots + \mathbf{c}_k t^k + \ldots,$$

gdje su koeficijenti $\mathbf{c}_k$ vektori.

Supstitucijom u diferencijalnu jednadžbu dobivamo

$$\mathbf{c}_1 + 2\mathbf{c}_2 t + \ldots + k\mathbf{c}_k t^{k\text{-}1} + \ldots = \mathbf{A}(\mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1 t + \ldots + k\mathbf{c}_k t^k + \ldots).$$

Da bi ova jednakost bila zadovoljena za svaki t, koeficijenti ispred istih potencija moraju biti identični, tj.

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{c}_0; \\
\mathbf{c}_2 &= \frac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{c}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{A}^2\mathbf{c}_0; \\
\mathbf{c}_3 &= \frac{1}{3}\mathbf{A}\mathbf{c}_2 = \frac{1}{3\cdot 2}\mathbf{A}^3\mathbf{c}_0; \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\mathbf{c}_k &= \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k\mathbf{c}_0.
\end{aligned} \tag{8.3}$$

Iz pretpostavljenog reda za $t = 0$ izlazi

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}_0. \tag{8.4}$$

Rješenje se može sada napisati:

$$\mathbf{x}(t) = \left[\left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{1!} + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 t^2 + \ldots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k + \ldots\right)\right]\mathbf{x}(0). \tag{8.5}$$

Red podsjeća na razvoj eksponencijalne funkcije.

$$\mathbf{x}(t) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}\right]\mathbf{x}(0) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0).$$

Sumacija je pravokutna matrica $e^{\mathbf{A}t}$ kao i matrica **A**, tj. $n \times n$, i naziva se *matrična eksponencijala*.

Matrična eksponencijala ima slična svojstva svojstvima eksponencijalne funkcije. Ona zadovoljava diferencijalnu jednadžbu.

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{\Phi}}(t) = \mathbf{A}\Phi(t), \\ &\text{uz} \qquad \mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}, \quad \mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Poznavanje matrice $\Phi(t)$ i početnog stanja sustava omogućuje da se odredi stanje nepobuđenog sustava u bilo koji trenutak $t > \mathrm{t}_0$. Ona dakle određuje proces prijelaza iz jednog stanja u drugo, pa se naziva prijelazna matrica (engl. *state-transition matrix*). Naziva se također i fundamentalna matrica sustava.

Ta se matrica može smatrati matricom linearne transformacije, koja transformira početno stanje sustava $\mathbf{x}_0$ u stanje $\mathbf{x}(t)$.

Svojstva fundamentalne matrice:

a) Matrica $e^{\mathbf{A}t}$ nije singularna za sve konačne t.

b) $e^{\mathbf{A}t_1} \cdot e^{\mathbf{A}t_2} = e^{\mathbf{A}(t_1+t_2)}$ odnosno $\Phi(t_1)\,\Phi(t_2) = \Phi(t_1 + t_2)$

c) $e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}t} = \mathbf{I}$ odnosno $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$

d) $e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} = e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}$ ako je $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

Svojstva, matrice se mogu iskoristiti na primjer da se izrazi stanje u t, ako je poznato stanje u t_0.

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-\mathrm{t}_0)}\mathbf{x}(\mathrm{t}_0) = \mathbf{\Phi}(t-\mathrm{t}_0)\mathbf{x}(\mathrm{t}_0). \tag{8.7}$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\mathrm{t}_0) = \mathbf{\Phi}(\mathrm{t}_0)\mathbf{x}(0) \rightarrow \mathbf{x}(0) = \mathbf{\Phi}^{-1}(\mathrm{t}_0)\mathbf{x}(\mathrm{t}_0) = \mathbf{\Phi}(-\mathrm{t}_0)\mathbf{x}(\mathrm{t}_0), \\ \mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\,\mathbf{\Phi}(-\mathrm{t}_0)\mathbf{x}(\mathrm{t}_0) = \mathbf{\Phi}(t-\mathrm{t}_0)\mathbf{x}(\mathrm{t}_0). \end{aligned} \tag{8.8}$$

Fundamentalna matrica sadržava sve informacije o vlastitom gibanju ili titranju sustava.

Upotrebom reda za matričnu eksponencijalu može se pokazati da je

$$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}, \tag{8.9}$$

a također

$$\int_{\mathrm{t}_0}^{t} e^{\mathbf{A}\tau}d\tau = \mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}t} - e^{\mathbf{A}\mathrm{t}_0}). \tag{8.10}$$

8.2 Određivanje fundamentalne matrice razvojem u red

Gornji izvod za fundamentalnu matricu daje mogućnosti za njezino računanje u obliku reda. Množenje matrica je pogodan oblik za numeričko računanje pomoću računala.

Matrica $e^{\mathbf{A}t}$ se aproksimira s N članova reda

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}(\mathbf{A}t)^2 + \ldots + \frac{1}{N!}(\mathbf{A}t)^N. \tag{8.11}$$

Potrebni N za neki **A** je teško predvidjeti pa je najbolje pustiti računalo da uzme toliko članova reda N dok norma zadnjeg člana ne padne ispod dopuštene greške ε.

$$\left\| \frac{1}{N!}(\mathbf{A}t)^N \right\| < \varepsilon. \tag{8.12}$$

N će zavisiti od vlastitih vrijednosti matrice **A**. U redovima se nekad mogu prepoznati elementarne funkcije koje su za vremenski invarijantne sustave - eksponencijale. Ako se želi matrica u kompaktnom obliku, predočena pomoću elementarnih funkcija, trebat će upotrijebiti druge metode. Za numeričke postupke može biti povoljniji prikaz.

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{(\mathbf{A}t)^2}{2!} + \frac{(\mathbf{A}t)^3}{3!} + \ldots = \mathbf{I} + \mathbf{A}t\left\{\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{2!} + \frac{(\mathbf{A}t)^2}{3!} + \ldots\right\},$$

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}t\left\{\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{2}\left[\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{3}\left(\ldots\left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{N-1}\left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{N}\right)\right)\ldots\right)\right]\right\}.$$

8.3 Klasična metoda određivanja fundamentalne matrice.

Budući da matrica $\Phi(t)$ sadržava vremenske funkcije svih varijabli stanja pri općenito zadanim početnim uvjetima mogla bi se odrediti na klasičan način. Svaku varijablu stanja može se pretpostaviti u obliku eksponencijale

$$x_i = \mathrm{X}_i \, e^{pt}. \tag{8.13}$$

Supstitucija u skalarizirani sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{aligned} \tag{8.14}$$

daje sustav homogenih algebarskih jednadžbi za veličine X_i, nakon prebacivanja pX_i na desnu stranu. Da bi amplitude eksponencijala X_i bile različite od nule, mora determinanta sustava biti jednaka nuli.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - p & a_{12} & & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - p & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & & \\ a_{n1} & & & \cdots & a_{nn} - p \end{vmatrix} = 0. \tag{8.15}$$

Odatle slijedi karakteristični polinom u varijabli p, koji daje karakteristične korijene ili frekvencije sustava. Opće rješenje za svaku varijablu stanja bi sadržavalo sumu eksponencijala sa svakom od karakterističnih korijena ili frekvencija p_j

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{X}_{ij} e^{p_j t}, \quad i=1,.....,n. \tag{8.16}$$

Amplitude pojedinih eksponencijala se mogu odrediti iz početnih uvjeta $x_k(0)$. Formiramo li matricu od svih rješenja $\varphi_{ik}(t)$ uz općenito zadane $x_k(0)$, tako da početni uvjeti stoje posebno, izlazi za $x_i(t)$

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{ik}(t) x_k(0), \tag{8.17}$$

odnosno vektor stanja

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0).$$

Funkcije $\varphi_{ij}(t)$ bit će elementi fundamentalne matrice sustava.

Iako ovaj način daje vezu s klasičnim metodama analize i interpretaciju fundamentalnoj matrici, ipak računski izgleda prilično dugotrajan.

Ovim putem je najjednostavnije odrediti fundamentalnu matricu kada je matrica $\mathbf{A}$ dijagonalna $\mathbf{A} = \Lambda$. Sustav se sastoji tada od n nezavisnih sustava prvoga reda opisanih s diferencijalnim jednadžbama

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i, \qquad i = 1,2,\ldots,n \tag{8.18}$$

pa je rješenje

$$x_i = e^{\lambda_i t} x_i(0). \tag{8.19}$$

Svaka varijabla x_i titra samo svojom karakterističnom frekvencijom λ_i počevši od početnog iznosa $x_i(0)$ nezavisno od ostalih varijabli. Rješenje se može napisati u obliku

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = e^{\Lambda t}\mathbf{x}(0), \tag{8.20}$$

gdje je i $\mathbf{\Phi}(t) = e^{\Lambda t}$ dijagonalna matrica.

Budući da se transformacijom može sustav s punom matricom $\mathbf{A}$ svesti na oblik s dijagonalnom matricom Λ, to je moguće odrediti i fundamentalnu matricu općeg sustava $e^{\mathbf{A}t}$ iz rješenja u obliku (8.20)

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{M}e^{\Lambda t}\mathbf{M}^{-1}. \tag{8.21}$$

To se može pokazati polazeći od sustava koji je opisan jednadžbama u obliku

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{\Lambda x} + \boldsymbol{\beta}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{\Gamma x} + \mathbf{D u}. \end{aligned} \tag{8.22}$$

Neka je matrica Λ je dijagonalna s različitim vlastitim vrijednostima

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n.$$

Njezina potencija je

$$\mathbf{\Lambda}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{bmatrix} \tag{8.23}$$

Odatle slijedi da je matrična eksponencijala

$$e^{\mathbf{\Lambda}t} = \left[\mathbf{I} + \frac{\mathbf{\Lambda}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{\Lambda}^3 t^3}{3!} + \ldots + \frac{\mathbf{\Lambda}^k t^k}{k!} + \ldots \right] = \tag{8.24}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k t^k}{k!} & & & \\ & \sum\limits_{0}^{\infty} \frac{\lambda_2^k t^k}{k!} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum\limits_{0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k t^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}. \tag{8.25}$$

Kako su $\lambda_1,\ldots, \lambda_n$ vlastite vrijednosti matrice Λ, a vrijednosti λ_1^k, $\lambda_2^k,\ldots,\lambda_n^k$ matrice Λ^k, izlazi da su $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_n}$ vlastite vrijednosti matrice e^{Λ}.

Preko odziva danog s $e^{\Lambda t}$ možemo dobiti odziv za izvornu matricu **A** ako izvršimo transformaciju standardnog u kanonski oblik.

Za to su potrebne vlastite vrijednosti matrice **A** koje slijede iz $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$, vlastiti vektori $\{\mathbf{q}_k \mid, k = 1,2,\ldots,n\}$ i modalna matrica **M**.

Matrica Λ formirana je od vlastitih vrijednosti λ_i vezana je s matricom **A**

$$\Lambda = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} \quad \text{ili} \quad \mathbf{A} = \mathbf{M}\Lambda\mathbf{M}^{-1}. \tag{8.26}$$

Odatle

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{I} + (\mathbf{M\Lambda\Lambda}^{-1})t + (\mathbf{M\Lambda\Lambda}^{-1}\mathbf{M\Lambda\Lambda}^{-1})\frac{t^2}{2!} + \ldots, \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{M\Lambda\Lambda}^{-1}t + \mathbf{M\Lambda}^2\mathbf{M}^{-1}\frac{t^2}{2} + \ldots, \\ &= \mathbf{M}(\mathbf{I} + \mathbf{\Lambda}t + \mathbf{\Lambda}^2\frac{t^2}{2} + \mathbf{\Lambda}^3\frac{t^3}{3!} + \ldots)\mathbf{M}^{-1}, \\ e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{M}e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{M}^{-1}. \end{aligned} \tag{8.27}$$

odakle slijedi

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{M}e^{\Lambda t}\mathbf{M}^{-1}\,\mathbf{x}_0. \tag{8.28}$$

8.4 Geometrijska interpretacija rješenja

Vrlo ilustrativno geometrijsko predstavljanje rješenja može se dobiti pomoću vlastitih vektora matrice **A**.

Neka su $\lambda_1,\ldots, \lambda_n$ vlastite vrijednosti, a $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2,\ldots, \mathbf{q}_n$ vlastiti vektori matrice **A**.

Za njih vrijedi (   )

$$\mathbf{A}\mathbf{q}_k = \lambda_k \mathbf{q}_k. \tag{8.29}$$

Pretpostavimo da je početno stanje $\mathbf{x}(0) = \mathbf{q}_k$, dano jednim vlastitim vektorom $\mathbf{q}_k$, odziv izlazi u obliku

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k(t) &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{q}_k = \left[\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3 t^3 + \ldots\right]\mathbf{q}_k \\ \mathbf{x}_k(t) &= \mathbf{q}_k + \mathbf{A}\mathbf{q}_k t + \mathbf{A}^2\mathbf{q}_k \frac{t^2}{2!} + \mathbf{A}^3\mathbf{q}_k \frac{t^3}{3!} + \ldots \end{aligned} \tag{8.30}$$

Uzevši (8.29) izlazi

$$\mathbf{x}_k(t) = \mathbf{q}_k + \lambda_k \mathbf{q}_k t + \lambda_k^2 \mathbf{q}_k \frac{t^2}{2!} + \lambda_k^3 \mathbf{q}_k \frac{t^3}{3!} + \ldots = e^{\lambda_k t}\mathbf{q}_k .$$

Gornje vrijedi jer je vlastiti vektor od $\mathbf{A}^k$ jednak vlastitom vektoru od $\mathbf{A}$ tj. $\mathbf{q}_k$. Odavde zaključujemo da je rješenje $\mathbf{x}_k$ kolinearno uvijek s vlastitim vektorom, ako početno stanje koincidira s njim.

Kako su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ različiti, vlastiti vektori $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n$ su linearno nezavisni, pa mogu predstavljati novi koordinatni sustav. Bilo koji vektor se može predstaviti linearnom kombinacijom ovih vektora.

Uzmimo da smo početno stanje sustava predstavili s vlastitim vektorima matrice $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{x}(0) = \alpha_1\mathbf{q}_1 + \alpha_2\mathbf{q}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{q}_n , \tag{8.31}$$

tada će stanje $\mathbf{x}(t)$ biti dano sumom

$$\mathbf{x}(t) = \alpha_1\mathbf{x}_1(t) + \alpha_2\mathbf{x}_2(t) + \ldots + \alpha_n\mathbf{x}_n(t), \tag{8.32}$$

gdje je svaki $\mathbf{x}_k(t) = e^{\lambda_k t}\mathbf{q}_k$. Izlazi

$$\mathbf{x}(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{q}_1(t) + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{q}_2(t) + \ldots + \alpha_n e^{\lambda_n t}\mathbf{q}_n(t). \tag{8.33}$$

Dobili smo jednadžbu identičnu jednadžbi

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{M}e^{\Lambda t}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}(0). \tag{8.34}$$

ali iz prve se vidi da titranje vlastitom frekvencijom λ_k ide duž vlastitog vektora $\mathbf{q}_k$ matrice $\mathbf{A}$ ako su λ_k realni.

Kad su vlastite vrijednosti imaginarne λ_k i λ_{k+1}, gdje je $\lambda_{k+1} = \lambda_k^*$, titranje ide po elipsi u ravnini određenoj s vektorima $\mathbf{q}_k$ i $\mathbf{q}_{k+1}$.

8.5 Određivanje $\Phi(t)$ pomoću $\mathcal{L}$ - transformacije

Laplaceova transformacija stupčaste matrice, čiji su elementi funkcije vremena (u gornjem području) je opet matrica s elementima koje su funkcije kompleksne frekvencije s.

$$\mathcal{L}\{\mathbf{x}(t)\} = \mathbf{X}(s).$$

Inverzna transformacija je matrica čiji elementi su inverznom transformacijom prebačeni u gornje područje

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{X}(s)\} = \mathbf{x}(t).$$

Transformacija matrične jednadžbe $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ je

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s)\,. \tag{8.35}$$

$\mathbf{X}(s)$ je stupčasta matrica

$$[X_1(s)\ X_2(s)\ \ldots\ X_n(s)]^t. \tag{8.36}$$

Prebacimo nepoznato na lijevo i iskoristimo jediničnu matricu **I**, da bi dobili kvadratnu matricu koja množi stupčastu matricu $\mathbf{X}(s)$.

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{A}\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0). \tag{8.37}$$

Stanje u donjem području eksplicitno se može dobiti množenjem s lijeva matricom $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) = \hat{\mathbf{\Phi}}(s)\,\mathbf{x}(0)., \tag{8.38}$$

što izgleda vrlo slično skalarnom slučaju, tj. sustavom opisanim s jednom diferencijalnom jednadžbom prvog reda.

Matrica u donjem području $\hat{\mathbf{\Phi}}(s)$ što množi početno stanje $\mathbf{x}(0)$, naziva se matricom karakterističnih frekvencija ili rezolventom sustava. Ona predstavlja $\mathcal{L}$ - transformat fundamentalne matrice sustava

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\hat{\mathbf{\Phi}}(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right\}, \tag{8.39}$$

gdje je

$$\hat{\mathbf{\Phi}}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \tag{8.40}$$

transponirana matrica kofaktora.

Matrica $\mathrm{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ je pridružena matrica matrici $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$, a $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ determinanta matrice $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ ili determinanta sustava.

Elementi matrice $\hat{\mathbf{\Phi}}(s)$ su razlomljene racionalne funkcije kompleksne frekvencije s. U brojniku se nalazi polinom $n - 1$ stupnja. U nazivniku se nalazi polinom n-tog stupnja koji slijedi iz $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Determinanta $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ kao i svaki polinom može se prikazati kao produkt korjenih faktora.

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (s - \mathrm{p}_1)^{\mathrm{m}_1}(s - \mathrm{p}_2)^{\mathrm{m}_2}\ldots(s - \mathrm{p}_i)^{\mathrm{m}_i}\ldots(s - \mathrm{p}_n)^{m_n} = \prod_1^{n'}(s - \mathrm{p}_i)^{\mathrm{m}_i}. \tag{8.41}$$

Pri tom su $\mathrm{p}_1,\ldots,\ \mathrm{p}_\mathrm{n}$, korijeni polinoma odnosno korijeni karakteristične jednadžbe sustava $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$, pa se nazivaju i karakteristične frekvencije sustava. Veličina m_i predstavlja višestrukost i-tog korijena. Zbroj višestrukosti svakog korijena predstavlja red sustava

$$\sum_{i=1}^{n'} \mathrm{m}_i = n\,. \tag{8.42}$$

Determinanta sustava može se također prikazati u obliku polinoma

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + \mathrm{d}_1 s^{n-1} + \ldots + \mathrm{d}_{n-1}s + \mathrm{d}_n. \tag{8.43}$$

Koeficijenti $\{\mathrm{d}_i\}$se mogu dobiti iz tragova matrice **A** i njenih potencija [ ].

$$\text{Trag matrice } \mathbf{T}_1 = tr\ \mathbf{A} = tr\left[a_{ij}\right] = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,. \tag{8.44}$$

Slijedeća rekurzivna formula osigurava put za određivanje koeficijenata karakteristične jednadžbe koji je vrlo pogodan za računalo

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_1 &= -\operatorname{tr}\mathbf{A},\\
\mathrm{d}_2 &= -\frac{1}{2}(\mathrm{d}_1 \operatorname{tr}\mathbf{A} + \operatorname{tr}\mathbf{A}^2),\\
\mathrm{d}_3 &= -\frac{1}{3}(\mathrm{d}_2 \operatorname{tr}\mathbf{A} + \mathrm{d}_1 \operatorname{tr}\mathbf{A}^2 + \operatorname{tr}\mathbf{A}^3),\\
\mathrm{d}_n &= -\frac{1}{n}(\mathrm{d}_{n-1} \operatorname{tr}\mathbf{A} + \mathrm{d}_{n-2} \operatorname{tr}\mathbf{A}^2 + \ldots + \mathrm{d}_1 \operatorname{tr}\mathbf{A}^{n-1} + \operatorname{tr}\mathbf{A}^n).
\end{aligned} \tag{8.45}$$

Fundamentalna matrica se općenito može dobiti kao inverzna $\mathcal{L}$ transformacija od $\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}$.

Uobičajeni put je razvoj u parcijalne razlomke svakog elementa $\varphi_{jk}(s)$ što se može napisati zbijeno u obliku

$$\hat{\mathbf{\Phi}}(s) = (s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \sum_{k=1}^{n'}\sum_{j=1}^{\mathrm{m}_k} \mathbf{C}_{jk}\,\frac{1}{(s-\mathrm{p}_k)^j}\,. \tag{8.46}$$

Matrice $\mathbf{C}_{jk}$ su matrice koeficijenata parcijalnih razlomaka, čiji se elementi mogu naći iz elemenata matrice $\hat{\mathbf{\Phi}}(s)$ ili cijela matrica kao

$$\mathbf{C}_{jk} = \frac{1}{(\mathrm{m}_k - j)!}\frac{\mathrm{d}^{\mathrm{m}_k - j}}{\mathrm{d}s^{\mathrm{m}_k - j}}\left[(s-\mathrm{p}_k)^{\mathrm{m}_k}\hat{\mathbf{\Phi}}(s)\right]_{s\,=\,\mathrm{p}_k}, \tag{8.47}$$

$$\mathbf{C}_{jk} = \frac{1}{(\mathrm{m}_k - j)!}\frac{\mathrm{d}^{\mathrm{m}_k - j}}{ds^{\mathrm{m}_k - j}}\left[\frac{\operatorname{adj}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}{\prod\limits_{i=1}^{n}(s-\mathrm{p}_i)^{\mathrm{m}_i}}\right]_{s\,=\,\mathrm{p}_k}, \tag{8.48}$$

gdje je m_k višestrukost k-tog korijena, što u slučaju jednostrukog korijena ima oblik

$$\mathbf{C}_{1k} = \left[(s-\mathrm{p}_k)\hat{\mathbf{\Phi}}(s)\right]_{s=p_k} = \frac{\operatorname{adj}(\mathrm{p}_k\mathbf{I}-\mathbf{A})}{\prod\limits_{\substack{1\\ i\neq k}}^{n}(\mathrm{p}_k-\mathrm{p}_i)}. \tag{8.49}$$

Inverzna transformacija daje fundamentalnu matricu u obliku

$$\mathbf{\Phi}(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{\mathrm{p}_k t}\sum_{j=1}^{\mathrm{m}_k}\mathbf{C}_{jk}\,\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}. \tag{8.50}$$

Svaki član fundamentalne matrice se sastoji od sume eksponencijala eventualno množenih s polinomom u varijabli t, ($\mathrm{m}_k - 1$)-stupnja, ako je frekvencija (p_k) višestruki korijen.

Najteži dio u gornjem postupku je određivanje inverzne matrice od $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$, posebice kad je sustav višeg reda. Spomenut ćemo dvije metode pomoću kojih se laganije dolazi do matrice karakterističnih frekvencija, analitički a naročito numerički.

8.6 Leverierov algoritam []

Matrica karakterističnih frekvencija se može u donjem području napisati u obliku

$$\hat{\mathbf{\Phi}}(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\frac{\operatorname{adj}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}=\frac{s^{n-1}\mathbf{F}_1+s^{n-2}\mathbf{F}_2+\ldots+\mathbf{F}_n}{s^n+d_1s^{n-1}+\ldots+d_n}. \tag{8.51}$$

Polinom u brojniku je $(n-1)$ stupnja budući da je svaki element pridružene matrice polinom (n-1) stupnja, dok su matrice $\mathbf{F}_1,\ldots,\mathbf{F}_n$ kvadratne matrice n-tog reda. Lako se vidi da je $\mathbf{F}_1=\mathbf{I}$. Računanje ostalih matrica $\mathbf{F}_k$ i koeficijenata karakterističnih polinoma može se izvršiti pomoću slijedećeg algoritma [ ]

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{F}_1=\mathbf{I} & \mathrm{d}_1=-\frac{1}{1}\operatorname{tr}\mathbf{AF}_1\\
\mathbf{F}_2=\mathbf{AF}_1+\mathrm{d}_1\mathbf{I} & \mathrm{d}_2=-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\mathbf{AF}_2\\
\mathbf{F}_3=\mathbf{AF}_2+\mathrm{d}_2\mathbf{I} & \mathrm{d}_3=-\frac{1}{3}\operatorname{tr}\mathbf{AF}_3\\
\vdots & \vdots\\
\mathbf{F}_k=\mathbf{AF}_{k-1}+\mathrm{d}_{k-1}\mathbf{I} & \mathrm{d}_k=-\frac{1}{k}\operatorname{tr}\mathbf{AF}_k\\
\vdots & \vdots\\
\mathbf{F}_n=\mathbf{AF}_{n-1}+\mathrm{d}_{n-1}\mathbf{I} & \mathrm{d}_n=-\frac{1}{n}\operatorname{tr}\mathbf{AF}_n
\end{array} \tag{8.52}$$

Kao kontrola točnosti može poslužiti još jednadžba

$$\mathbf{0}=\mathbf{AF}_n+\mathrm{d}_n\mathbf{I}.$$

Algoritam je pogodan za računanje s računalom posebice kad se radi o sustavu višeg reda.

8.7 Sylvestrov razvoj za fundamentalnu matricu

Spomenut ćemo još jednu metodu za određivanje fundamentalne matrice u vremenskoj domeni. Ona se temelji na Sylvestrovom teoremu razvoja. Dokaz za teorem se može naći u literaturi [1][2]. Sylvestrov teorem za matrice s različitim karakterističnim vrijednostima je kako slijedi.

Ako se funkcija matrice $\mathbf{f}(\mathbf{A})$ dade prikazati kao matrični polinom

$$\mathbf{f}(\mathbf{A})=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{C}_k\mathbf{A}^k , \tag{8.53}$$

tada $\mathbf{f}(\mathbf{A})$ se može izraziti u obliku

$$\mathbf{f}(\mathbf{A})=\sum_{1}^{n} f(\mathrm{p}_j)\mathbf{F}_j\,, \tag{8.54}$$

gdje su p_j karakteristične vrijednosti matrice $\mathbf{A}$, a $\mathbf{F}_j$ produkt

$$\mathbf{F}_j=\prod_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{\mathbf{A}-\mathrm{p}_i\mathbf{I}}{\mathrm{p}_j-\mathrm{p}_i}\,. \tag{8.55}$$

Za određivanje fundamentalne matrice funkcija matrice je $\mathbf{f}(\mathbf{A})=e^{\mathbf{A}t}$, pa primjena gornjeg teorema daje

$$\mathbf{\Phi}(t)=\sum_{j=1}^{n} e^{\mathrm{p}_j t}\mathbf{F}_j=\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} e^{\mathrm{p}_j t}\prod_{i=1}^{n}\frac{\mathbf{A}-\mathrm{p}_i\mathbf{I}}{\mathrm{p}_j-\mathrm{p}_i}\,. \tag{8.56}$$

Poznavanje korijena sustava p_j omogućuje da se nađu matrice $\mathbf{F}_j$ iz gornjeg izraza.

Za slučaj višestrukih korijena karakterističnog polinoma Sylvestrov teorem dobiva tzv. konfluentni oblik

$$\mathbf{f}(\mathbf{A})=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(\mathrm{m}_k-1)!}\left\{\frac{d^{m_k-1}}{ds^{m_k-1}}\left[\frac{f(s)\mathrm{adj}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}{\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(s-\mathrm{p}_i)^{m_i}}\right]\right\}_{s=p_k}\,. \tag{8.57}$$

Za funkciju matrice $\mathbf{f}(\mathbf{A})=e^{\mathbf{A}t}$ treba staviti $f(s)=e^{st}$.

8.8 Odziv pobuđenog linearnog sustava

Da bi se odredio totalni odziv linearnog sustava treba odrediti rješenje nehomogene matrične jednadžbe

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u}\,. \tag{8.58}$$

Poslužit ćemo se Lagrangeovom metodom varijacije parametra. Metoda se sastoji u tome da se proizvoljne konstante rješenja homogene jednadžbe $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}$ pretpostave kao funkcije vremena.

Pretpostavimo dakle

$$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{f}(t), \tag{8.59}$$

gdje umjesto početnog stanja stoji za sada nepoznata funkcija vremena $\mathbf{f}(t)$.

Uvrštenjem u jednadžbu dobiva se

$$e^{\mathbf{A}t}\dot{\mathbf{f}}(t)=\mathbf{B}\mathbf{u}\,. \tag{8.60}$$

Množenjem s lijeva s inverznom matricom $e^{-\mathbf{A}t}$ dobivamo $\dot{\mathbf{f}}(t)$ eksplicitno

$$\dot{\mathbf{f}}(t)=e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t)\,. \tag{8.61}$$

Integriranjem u intervalu $(0,t]$ izlazi

$$\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(0) = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau . \tag{8.62}$$

Stanje slijedi iz (8.59) kao

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\left[\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{f}(0)\right]. \tag{8.63}$$

Iz stanja $\mathbf{x}(0)$ u početnom trenutku $t = 0$, izlazi

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{f}(0).$$

Kako je $\mathbf{f}(0) = \mathbf{x}(0)$ početno stanje u $t = 0$ možemo dobiti konačno rješenje za stanje sustava za linearne, vremenski invarijantne sustave kao superpoziciju dvaju procesa različitog uzorka.

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau , \tag{8.64}$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau . \tag{8.64a}$$

Prvi član predstavlja istitravanje početnog stanja ili funkciju stanja sustava $x_n(t)$ kada nema pobude.

Drugi član, koji ima oblik konvolucijskog integrala predstavlja komponentu stanja sustava, koja rezultira od pobude u intervalu $(0, t]$. Ta komponenta je odziv stanja mirnog sustava $x_m(t)$.

Odziv sustava na izlazu se dobiva nakon uvrštenja u izlaznu jednadžbu

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t),$$

odnosno

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{\Phi}(t-t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{C}\mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t). \tag{8.65}$$

Prvi član predstavlja odziv sustava bez pobude, a drugi i treći član predstavlja odziv mirnog sustava. Odziv sustava kad je pobuda počela u $t = \mathrm{t}_0$ dan je izrazom

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{\Phi}(t-\mathrm{t}_0)\mathbf{x}(\mathrm{t}_0) + \int_{\mathrm{t}_0}^t \mathbf{C}\mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t). \tag{8.65a}$$

Konvolucijski integral daje cjeloviti odziv kada $\mathrm{t}_0 \to -\infty$, ako je pobuda trajna $(-\infty,\infty)$.

$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{C}\mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t). = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{C}\mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \tag{8.66}$$

jer se pretpostavlja da je početno stanje $\mathbf{x}(-\infty) = \mathbf{0}$ ili ako je $\mathbf{x}(-\infty) \neq \mathbf{0}$, vlastito titranje je davno utrnulo.

Drugi integral je napisan s gornjom granicom ∞, pa vrijedi za kauzalne i nekauzalne sustave.

8.9 Impulsni odziv sustava

Promatrajmo sustav pobuđen impulsima $\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}\delta(t)$, gdje elementi matrice $\mathbf{U}$ predstavljaju intenzitet impulsa na svakom pojedinom ulazu.

Stanje sustava je dano s

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0^-) + \int_{0^-}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{BU}\delta(\tau)d\tau \\ &= e^{\mathbf{A}t}\left[\mathbf{x}(0^-) + \mathbf{BU}\right] = \mathbf{\Phi}(t)\left[\mathbf{x}(0^-) + \mathbf{BU}\right].\end{aligned} \tag{8.67}$$

Odavde se vidi da stanje u trenutku t sustava bez pobude određeno početnim stanjem $\mathbf{x}(0^-)$, dok stanje mirnog sustava $[\mathbf{x}(0^-) = 0]$ određeno impulsima pobude $\mathbf{BU}$. Vremenska funkcija $\Phi(t)$ je jednaka bez obzira da li se radi o istitravanju početnog stanja ili uslijed impulsne pobude. Jedno se može s drugim nadomjestiti ako vrijedi

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{BU}. \tag{8.68}$$

Impulsni odziv mirnog sustava $[\mathbf{x}(0) = 0]$ se može dobiti u još jednom obliku ako pobudu razložimo na impulse

$$\mathbf{u}(t) = \int_{0^-}^{t^+} \delta(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau. \tag{8.69}$$

Množenjem s matricom $\mathbf{D}$ i stavljanjem u konvolucijski integral, dobivamo

$$\mathbf{y}(t) = \int_{0^-}^{t^+} \left[\mathbf{C\Phi}(t-\tau)\mathbf{B} + \delta(t-\tau)\mathbf{D}\right]\mathbf{u}(\tau)d\tau, \tag{8.70}$$

odnosno

$$\mathbf{y}(t) = \int_{0^-}^{t^+} \mathbf{H}(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau, \tag{8.71}$$

gdje je matrica u zagradi ($r \times m$) matrica impulsnog odziva sustava

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{C\Phi}(t)\mathbf{B} + \delta(t)\mathbf{D} = \begin{bmatrix} h_{11}(t) & \cdots & h_{1m}(t) \\ h_{21}(t) & \cdots & h_{2m}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ h_{k1}(t) & \cdots & h_{km}(t) \end{bmatrix}.. \tag{8.72}$$

Kao i (8.66) konvolucijski integral može predstavljati cjeloviti odziv kauzalnog sustava za $t_0 \to -\infty$, pa i nekauzalnog sustava s gornjom granicom ∞.

$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathbf{H}(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\tau)\mathbf{u}(t-\tau)d\tau. \tag{8.73}$$

8.10 Odziv stanja sustava na stepenicu eksponencijalne pobude

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}\mu(t)e^{s_0 t}.,$$

gdje su elementi stupca $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$,…,$\mathbf{U}_m$, amplitude skoka na ulazima 1,2,…,m.

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{BU}e^{s_0\tau}d\tau,$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{(s_0\mathbf{I}-\mathbf{A})\tau}\mathbf{BU}d\tau, \tag{8.74}$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t}\left[e^{(s_0\mathbf{I}-\mathbf{A})t} - \mathbf{I}\right](s_0\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU},$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + (\mathbf{I}e^{s_0t} - e^{\mathbf{A}t})(s_0\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}.$$

U odzivu stanja možemo razlikovati tri komponente:

(i) *stanje nepobuđenog sustava*

$$\mathbf{x}_n(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0), \tag{8.75}$$

koje titra vlastitim frekvencijama sustava,

(ii) *stanje mirnog sustava*

$$x_{mp}(t) = -e^{\mathbf{A}t}(\mathrm{s}_0\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}, \tag{8.76}$$

koje također titra vlastitim frekvencijama sustava $\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_m$,

(iii) *stanje mirnog sustava*

$$\mathbf{x}_{ms}(t) = (\mathrm{s}_0\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}e^{\mathrm{s}_0t} \tag{8.77}$$

koje titra frekvencijom pobude s_0.

Ako se skupe članovi titranja vlastitim frekvencijama tj. prve dvije komponente, izlazi

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\left[\mathbf{x}(0) - (\mathrm{s}_0\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}\right] + (\mathrm{s}_0\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}e^{\mathrm{s}_0t}. \tag{8.78}$$

Prvi član se naziva prolaznim ili prelaznim stanjem jer u stabilnom sustavu eksponencijalno trne. Drugi član se naziva prisilnim stanjem, koji u slučaju konstantne $s_0 = 0$ ili periodične pobude $s_0 = j\omega$ naziva stacionarnim stanjem sustava.

Lako se vidi da su amplitude titranja prelaznog stanja određene neskladom između početnog stanja $\mathbf{x}(0)$ i prisilnog stanja $\mathbf{x}_{ms}(0)$ u trenutku $t = 0$. Kako se vidi iz (8.78) cjeloviti odziv stanja sustava može se napisati kao

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\left[\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_{ms}(0)\right] + \mathbf{x}_{ms}(t). \tag{8.79}$$

Cjelovit odziv sustava na eksponencijalnu pobudu izlazi iz (8.65a):

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C\Phi}(t)\left[\mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{\Phi}}(\mathrm{s}_0)\mathbf{BU}\right] + \left[\mathbf{C}\hat{\mathbf{\Phi}}(s_0)\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]\mathrm{U}\mathrm{e}^{\mathrm{s}_0t} = \mathbf{y}_{pr}(t) + \mathbf{y}_s(t). \tag{8.80}$$

Prvi član se može nazvati prolaznim ili prelaznim odzivom $\mathbf{y}_{pr}$, a drugi prisilnim $\mathbf{y}_s$.

Posvetimo pažnju prisilnom odzivu koji je partikularno rješenje diferencijalne vektorske jednadžbe

$$\mathbf{y}_s(t) = \left[\mathbf{C}\hat{\mathbf{\Phi}}(\mathrm{s}_0)\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]\mathrm{U}e^{\mathrm{s}_0t} = \mathbf{H}(\mathrm{s}_0)\mathbf{U}e^{\mathrm{s}_0t} = \mathbf{Y}e^{\mathrm{s}_0t}, \tag{8.81}$$

gdje je $\hat{\mathbf{H}}(s_0)$ transfer matrica sustava

$$\hat{\mathbf{H}}(s_0) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{\Phi}}(s_0)\mathbf{B} + \mathbf{D}.$$

Komponente vektora $\mathbf{Y}$ su kompleksne amplitude eksponencijala na izlazu sustava

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Y}_1 \\ \mathrm{Y}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{Y}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(\mathrm{s}_0) & H_{12}(\mathrm{s}_0) & \cdots & H_{1m}(\mathrm{s}_0) \\ H_{21}(\mathrm{s}_0) & & & \\ \vdots & & & \vdots \\ H_{r1}(\mathrm{s}_0) & & \cdots & H_{rm}(\mathrm{s}_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{U}_1 \\ \mathrm{U}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{U}_m \end{bmatrix}. \tag{8.82}$$

Element matrice $H_{ij}(s_0)$ je transfer funkcija između i-tog izlaza i j-tog ulaza sustava. Ona je za zadanu frekvenciju pobude s_0, broj kojim treba množiti kompleksnu amplitudu ulaza U_j da se dobije amplituda izlaza Y_i, uz ostale ulaze $\mathrm{U}_k = 0$ za $k \neq j$.

$$\mathrm{Y}_i = H_{ij}(s_0)\ \mathrm{U}_j, \text{ ako je } \mathrm{U}_k = 0 \text{ za } k\neq j,$$

kako se vidi iz (8.82) razvijanjem i-tog retka

$$\mathrm{Y}_i = H_{i1}\ \mathrm{U}_1 + H_{i2}\ \mathrm{U}_2 + \ldots + H_{ij}\ \mathrm{U}_j + \ldots + H_{im}\ \mathrm{U}_m.$$

Transfer funkcija $H_{ij}(s_0)$ zavisi od pobudne frekvencije s_0.

Ovdje je transfer matrica dobivena traženjem kompleksnih amplituda prisilnog odziva ili partikularnog rješenja pri pobudi sustava eksponencijalom.

Transfer matrica predstavlja poopćenje transfer funkcije za sustave s više ulaza i izlaza.

Odziv na stepenicu ($s_0 = 0$),

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}\mu(t).$$

Stanje izlaza je specijalan slučaj (8.78) i (8.80).

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}[\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{BU}] - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{BU}. \quad t \geq 0, \tag{8.83}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}[\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{BU}] - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{BU} + \mathbf{DU} \quad t \geq 0.$$

Odziv na sinusnu pobudu frekvencijom ω, $s_0 = j\omega$,

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}e^{j\omega t}\mu(t),.$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}[\mathbf{x}(0) - (j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}] + (j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}e^{j\omega t},$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\ \Phi(t)[\mathbf{x}(0) - (j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}\ ] + [\mathbf{C}\ (j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\ \mathbf{U}\ e^{j\omega t}.$$

Prisilni odziv odnosno stacionarni odziv izlazi

$$\mathbf{y}_s(t) = \left[\mathbf{C}(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]\mathbf{U}e^{j\omega t} = \hat{\mathbf{H}}(j\omega)\mathbf{U}e^{j\omega t}, \tag{8.84}$$

gdje je $\hat{\mathbf{H}}(j\omega)$ transfer matrica pri frekvenciji ω. Elementi te matrice $H_{ij}(j\omega)$ su frekvencijske karakteristike sustava između pojedinih ulaza i izlaza.

Uvrštenjem pobude $\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}e^{j\omega t}$, $t \in (-\infty,\infty)$ u zadnji konvolucijski integral u (8.73) dobivamo odziv u obliku

$$\mathbf{y}(t) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right]\mathbf{U}e^{j\omega t}. \tag{8.85}$$

Usporedbom s (8.89) zaključujemo da je transfer matrica $\hat{\mathbf{H}}(j\omega)$ vezana s matricom impulsnog odziva

$$\hat{\mathbf{H}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \tag{8.86}$$

8.11 Odziv sustava $\mathcal{L}$ - transformacijom

Cjeloviti odziv sustava možemo odrediti i $\mathcal{L}$ - transformacijom jednadžbe stanja (8.58).

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{AX}(s) + \mathbf{BU}(s),$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{BU}(s),$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}(s),$$

$$\mathbf{X}(s) = \hat{\mathbf{\Phi}}(s)\mathbf{x}(0) + \hat{\mathbf{\Phi}}(s)\mathbf{BU}(s), \tag{8.87}$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{\mathbf{\Phi}}(s)\}\mathbf{x}(0) + \mathcal{L}^{-1}\{\hat{\mathbf{\Phi}}(s)\mathbf{BU}(s)\}.$$

Matrica $\mathcal{L}^{-1}\{\hat{\mathbf{\Phi}}(s)\}$ što množi $\mathbf{x}(0)$ mora biti fundamentalna matrica $\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}$ sustava, pa slijedi:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{BU}(\tau)d\tau. \tag{8.88}$$

Izlazni signal (vektor) u donjem području je

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{CX}(s) + \mathbf{DU}(s),$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\,\hat{\mathbf{\Phi}}(s)\,\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}\,\hat{\mathbf{\Phi}}(s)\,\mathbf{BU}(s) + \mathbf{DU}(s),$$

što se može napisati u obliku

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{\Phi}}(s)\mathbf{x}(0) + \left[\mathbf{C}\hat{\mathbf{\Phi}}(s)\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]\mathbf{U}(s). \tag{8.89}$$

Sustav u mirnom stanju $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ ima na izlazu vektor:

$$\mathbf{Y}(s) = \left[\mathbf{C}\hat{\mathbf{\Phi}}(s)\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]\mathbf{U}(s) = \hat{\mathbf{H}}(s)\mathbf{U}(s). \tag{8.90}$$

$\hat{\mathbf{H}}(s)$ je matrica s r redaka i m stupaca i naziva se transfer matrica sustava.

U razvijenoj formi (8.72) se može napisati u obliku (8.82) s elementima koji su transfer funkcije između pojedinih ulaza i izlaza sustava.

Ovdje je transfer matrica odnosno funkcije $H_{ij}(s)$ za razliku od onih u sekciji 8.10 dobivene su $\mathcal{L}$ - transformacijom.

Transfer funkcija $H_{ij}(s)$ se može interpretirati s

$$\mathrm{Y}_i(s) = H_{ij}(s)\mathrm{U}_j(s) \;; \qquad H_{ij} = H_{ij}(s)\cdot 1, \tag{8.91}$$

što u vremenskoj domeni daje

$$y_i(t) = \int_{0^-}^{t} h_{ij}(t-\tau)u_j(\tau)d\tau; \quad h_{ij}(t) = \int_{0^-}^{t} h_{ij}(t-\tau)\delta(\tau)d\tau. \tag{8.92}$$

Vremenska funkcija $h_{ij}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H_{ij}(s)\}$ je odziv sustava na i-tom izlazu na jedinični impuls na j–tom ulazu, pa se može reći da je $H_{ij}(s)$ spomenuti odziv u donjem području $\mathcal{L}$ - transformacije.

Inverzna transformacija odnosno matrica s elementima $\{h_{ij}(t)\}$ je, kako znamo iz (8.72), matrica impulsnog odziva $\mathbf{H}(t)$ za koju dakle vrijedi

$$\mathbf{H}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\hat{\mathbf{H}}(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathbf{C}\hat{\mathbf{\Phi}}(s)\mathbf{B} + \mathbf{D}\right\}.$$

Posljednje razmatranje generalizira koncepciju transfer funkcije i impulsnog odziva za sustave s višestrukim ulazom i izlazom.

9. UVOD U VREMENSKI DISKRETNE SIGNALE I SUSTAVE

Diskretni procesi se susreću u prirodi i ljudskim aktivnostima. Primjer diskretnog procesa je množenje neke biološke vrste (bakterija, zečeva). Bankovno ili financijsko poslovanje je primjer gdje se računanja s brojevima novčanih jedinica provode na kraju nekog vremenskog intervala (dnevno, kvartalno).

Sva računanja na digitalnom elektroničkom računalu provode se postupno korak po korak, a (među)rezultati stoje na raspolaganju samo u diskretnim vremenskim trenucima. Procesi kontinuirani u vremenu mogu se također modelirati diskretnim sustavom. Matematički model diskretnog sustava je skup operacija, koji treba izvršiti na jednom skupu brojeva da se dobije drugi skup brojeva. Pri tom se te operacije obično svode na aritmetičke, a računanje se provodi konačnom točnosti. Definicija sustava izložena u uvodu kontinuiranih sustava je općenita, prema tome vrijedi i za diskretne sustave.

Varijable diskretnog sustava u, x, y su funkcije diskretne nezavisne varijable $\mathrm{t}_k \in \mathbf{T}$ gdje je $\mathbf{T} \subset \mathbb{R}$ prebrojivi skup. Sve t_k možemo poredati u niz, s rastućim indeksima k koji možemo interpretirati kao niz vremenskih trenutaka.

Niz ćemo definirati kao funkciju t: $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbf{T}$. Vrijednost niza t na cijelom broju $k \in \mathbb{Z}$, označava se s $t(k)$ ili češće s t_k. Opći član niza t je t_k. Nizovi se označavaju s …, t_{-1}, t_0, t_1, t_2,…, ili $\{\mathrm{t}_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$ ili s (t_k), $k \in \mathbb{Z}$.

Budući da vrijeme neprestano raste, funkcija t: $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbf{T}$ je strogo rastuća, odnosno niz $\{\mathrm{t}_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$ je strogo rastući, tj. za $k > \kappa \rightarrow \mathrm{t}_k > \mathrm{t}_\kappa$.

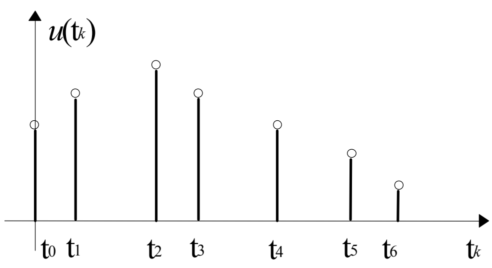
Najjednostavniji i ujedno najvažniji slučaj niza $t = \{\mathrm{t}_k\}$ je slučaj aritmetičkog niza kad je funkcija $\mathrm{t}_k = \mathrm{T}_0 k$, gdje je T_0 po volji uzeta pozitivna konstanta (aritmetički niz).

$$\mathrm{t}_k = \mathrm{T}_0 k, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{9.1}$$

Diskretizacija vremena je ovdje jednolika. Nekad se ovakva diskretizacija naziva kvantizacijom vremena, gdje je T_0 kvant vremena.

Varijable odnosno signali sustava u, x, y s uvedenom restrikcijom domene signala na skup $\mathbf{T}$, postali su vremenski diskretni signali. Npr.

$$u = \{(\mathrm{t}_k, u(\mathrm{t}_k))\}, \mathrm{t}_k \in \mathbf{T}. \tag{9.2}$$

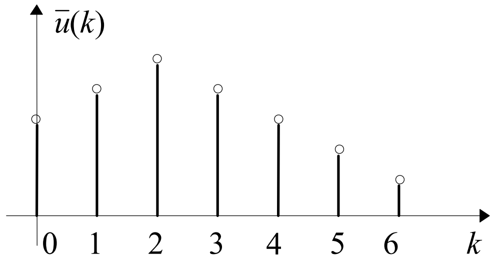


Sl. 9.1

Kompozicijom signala u s funkcijom t, dobit ćemo $\bar{u} = u \circ t$, koja je funkcija od k, tj.

$$\bar{u} = \{(k,\ \bar{u}(k))\} = \{(k,\ \bar{u}_k)\},\ k \in \mathbf{K}, \tag{9.3}$$

gdje su signali funkcije $\bar{u}{:}\mathbf{K} \to \mathbf{U}$, $\mathbf{U} \subseteq \mathbb{R}$, koraka k i također nizovi brojeva.



Sl. 9.2

Jedan element niza $u_k = u(k)$ naziva se podatak ili uzorak. Upotrebom kompozicije, vrijednosti funkcije $\bar{u}$ dobile su indekse i tvore niz koji označavamo

$$u = \{u_k\} \text{ ili } u = \{u(k)\}, k \in \mathbb{Z} \tag{9.4}$$

ili s

$$u = ...u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, ... \tag{9.5}$$

$$u = \{...u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, ...\},$$

odnosno s vrijednostima i indeksacijom koja pokazuje redoslijed članova niza

$$u = ...3_{-2}, 7_{-1}, 5_0, 9_1, 3_2, ... \tag{9.6}$$

Ako su članovi niza napisani u svom prirodnom redu, mogu se indeksi izostaviti, osim onog s $k = 0$. Njega treba označiti na neki način. Npr.

$$u = ...3, 7, 5, 9, 3, ... \tag{9.7}$$

Niz za koji vrijedi

$$u_k = 0 \quad \text{za}\, k < 0, k \in \mathbb{Z},$$

nazivamo kauzalnim

$$u_c = \{u_0, u_1, u_2, ...\}, \tag{9.8}$$

dok niz za koji vrijedi $u_k = 0$ za $k > 0$ nazivamo antikauzalnim. Niz koji se proteže od $k < 0$ preko $k = 0$ na $k > 0$ nazivamo nekauzalnim kao (9.4) (9.5). Te nizove bi mogli zvati jednostrano beskonačni, odnosno dvostrano beskonačni.

Niz za koji vrijedi

$$u_k = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 0 & k \geq K, \quad k, K \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

nazivamo konačnim, dužine K i označavamo s

$$u = \{u_0, u_1, ..., u_{K-1}\}. \tag{9.9}$$

Nizove konačne dužine K uvijek možemo nadopuniti nulama, ako trebamo niz dužine N>K. Npr.

$$u = \{u_0, u_1, ..., u_{K-1}, u_K, ..., u_{N-1}\}, \qquad u_k = 0 \text{ za } \mathrm{k} \leq k < \mathrm{N}. \tag{9.10}$$

Niz za koji vrijedi

$$u_{k+\mathrm{N}} = u_k , k, \mathrm{N} \in \mathbf{N} \tag{9.11}$$

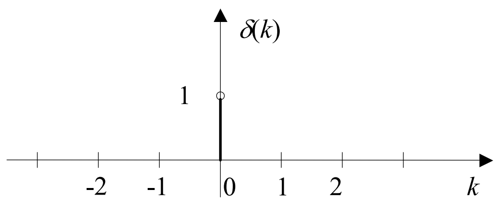
nazivamo periodičnim s periodom N.

9.1 Osnovni nizovi

<u>Jedinični niz</u> (Niz s jediničnim članom ili uzorkom, Kroneckerov delta, δ-niz)

$$\delta = ...,0,0,1,0,0,...$$

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & za \quad k = 0, k \in \mathbb{Z} \\ 0 & za \quad k \neq 0 \end{cases} \tag{9.12}$$

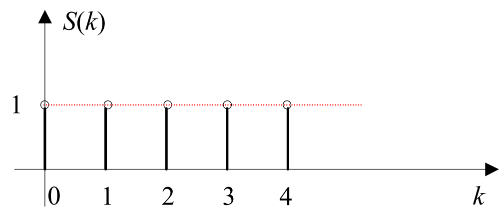


Sl. 9.3

<u>Jedinična stepenica</u> (Heavisideov niz)

$$S = ...,0,0,1,1,1,...$$

$$S(k) = \begin{cases} 1 & \text{za} \quad k \geq 0, \ k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{za} \quad k < 0 \end{cases} \tag{9.13}$$



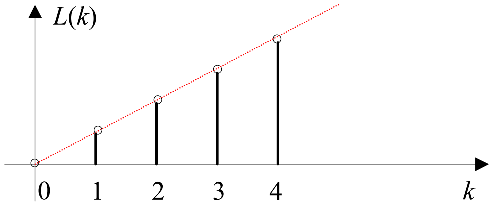
Sl. 9.4

Jedinična stepenica, osnovni je kauzalni niz. Množenjem nekauzalnog niza s Heavisideovom nizom on postaje kauzalan.

<u>Jedinična kosina</u>

$$L = ...,0,0,1,2,3,4,...$$

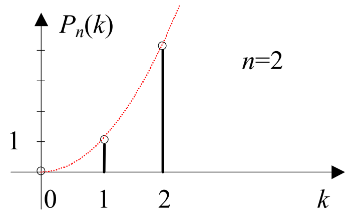
$$L(k) = \begin{cases} k & \text{za} \quad k \geq 0, k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{za} \quad k < 0 \end{cases} \tag{9.14}$$



Sl. 9.5

Jedinična parabola n-tog stupnja

$$P_n(k) = \begin{cases} k^n & \text{za} \quad k \geq 0,\ k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{za} \quad k < 0 \end{cases} \tag{9.15}$$

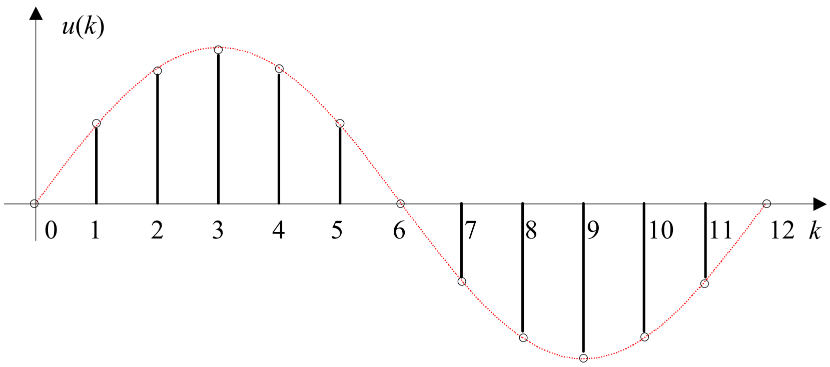


Sl. 9.6

Sinusni niz

$$u(k) = \mathrm{U}\cos(\omega \mathrm{T}_0 k + \zeta)\,,$$

gdje je ω frekvencija dodirnice



Sl. 9.7

$$u(k) = \mathrm{U}\cos(\Omega \mathrm{T}_0 k + \zeta), \qquad k \in \mathbb{Z}\,, \tag{9.16}$$

gdje je U - amplituda, ζ - faza, $\Omega = \omega \mathrm{T}_0$ je korak argumenta u radijanima analogan frekvenciji (frekvencija niza, moramo razlikovati od frekvencije signala). Period dodirnice niza slijedi iz

$$(\omega \mathrm{T}_0 k + \omega \mathrm{T} + \varphi) = (\omega \mathrm{T}_0 k + 2\pi + \varphi) \rightarrow \omega T = 2\pi,$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad p = \frac{T}{T_0}\,,\ p \in \mathbb{R}\,. \tag{9.17}$$

Prvi uzorak nakon nultočke ne mora biti isti.

$$\cos\,(\Omega(k + \mathrm{N}) + \zeta) = \cos\,(\Omega k + \zeta)$$

$$\Omega(k + \mathrm{N}) = \Omega k + 2\pi n\,, \quad n = 1, 2, \ldots \ \in \mathbb{N}$$

n - broj perioda dodirnice u periodu niza.

$$\Omega N = 2\pi n \quad N = 2\pi n / \Omega. \tag{9.18}$$

Prirodni broj n je najmanji koji daje prirodni broj N. Ako se ne može naći konačan N, niz nije periodičan. Ako se želi da period dodirnice i period niza budu jednaki onda

$$\omega T_0 = \omega T = 2\pi$$

$$\omega T_0 = \frac{2\pi}{N} = \Omega$$

Ako niz ima dulji period

$$\omega TN = 2\pi n$$

$$\frac{T_{niza}}{T_{dodirnice}} = \frac{T_0 N}{T} = n$$

Daljnja svojstva sinusnog niza

1. Za $\Omega = \pi + \Delta$ izlazi

$$u(k) = \cos(\pi + \Delta)k = \cos(-2\pi + \pi + \Delta)k$$
$$= \cos(-\pi + \Delta)k = \cos(\pi - \Delta)k.$$

Iz raspoloživog niza se ne može dakle razlikovati da li je frekvencija dodirnice

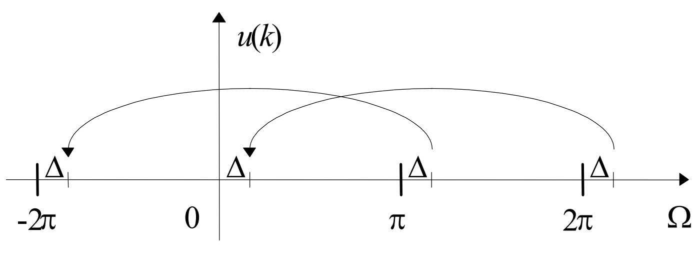
$$\Omega_1 = \pi + \Delta \quad \text{ili} \quad \Omega_2 = \pi - \Delta$$

2. Za $\Omega = 2\pi - \Delta$ izlazi

$$u(k) = \cos(2\pi - \Delta)k = \cos(-\Delta k)$$
$$u(k) = \cos(\Delta k)$$

Iz raspoloživog niza se ne može dakle razlikovati da li je frekvencija dodirnice

$$\Omega_1 = 2\pi - \Delta \quad \text{ili} \quad \Omega_2 = \Delta$$



Sl. 9.8

Vidi se da se iz ovog niza ne može razlikovati frekvencija Ω_1 od bilo koje

$$\Omega_n = \Omega_1 + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z},$$

jer je

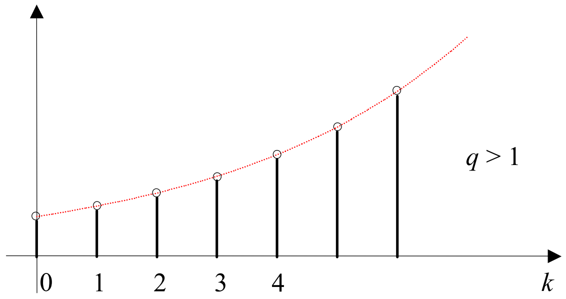
$$\cos[(\Omega_1 + 2n\pi)k] = \cos(\Omega_1 k + 2nk\pi) = \cos(\Omega_1 k);\quad n, k \in \mathbb{Z}. \tag{9.19}$$

Ako ustanovimo u danom nizu frekvenciju Ω ili frekvenciju dodirnice takvu da je $\Omega_1 < \pi$ ili $\omega_1 T_0 < \pi$, izvorna frekvencija signala frekvencije može biti bilo koja. $\omega_n = \omega - \frac{2n\pi}{T_0}$.

Da bi se Ω mogao odrediti jednoznačno iz niza moramo biti sigurni da je $|\Omega| < \pi$, odn. $\omega < \pi/T_0$ ili $f = 1/(2T_0)$.

Eksponencijalni niz

$$u(k) = q^k,\ q \in \mathbb{R}, \quad \begin{array}{ll} q < 1 & \text{padajući niz} \\ q > 1 & \text{rastući niz} \\ q = 1 & \text{konstantni niz} \\ q = -1 & \text{alternirajući niz} \end{array}$$



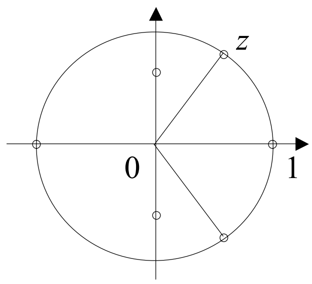
Sl. 9.9

Eksponencijalni niz ovisno od kompleksnog parametra q ili z_n može poprimiti različite oblike, a pogotovo ako nekoliko elementarnih nizova z_n^k formira linearnu kombinaciju.

$$u(k) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n z_n^k \ .$$

Za $k \in \mathbb{Z}$ nizovi su nekauzalnog oblika, a za $k \in \mathbf{N}$ su kauzalni.

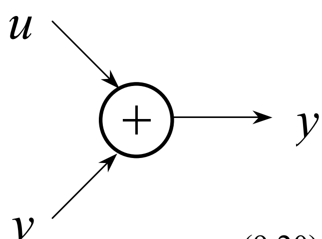
Kompleksna frekvencija niza z može biti realna, kompleksna, imaginarna.



Sl. 9.10

9.2 Osnovne operacije na nizovima i elementi diskretnog sustava

Zbrajanje nizova



Zbroj dva niza

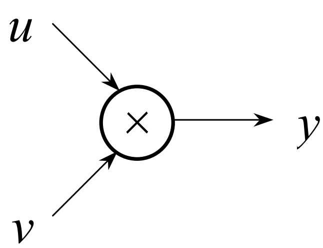
$y = u + v$ ili

$\{y(k)\} = \{u(k)\} + \{v(k)\}$

je niz s općim članom

$$y(k) = u(k) + v(k) \ \text{ za svaki } k \in \mathbb{Z}\,. \tag{9.20}$$

Produkt nizova



Produkt dvaju nizova

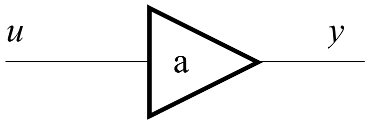
$y = u \cdot v$ ili

$\{y(k)\} = \{u(k)\} \cdot \{v(k)\}$

je niz s općim članom

$$y(k) = u(k) \cdot v(k) \text{ za svaki } k \in \mathbb{Z}. \tag{9.21}$$

<ins>Množenje s konstantom</ins>

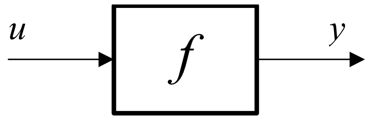


$y = a\, u$ ili

$\{y(k)\} = a\{u(k)\} = \{a\, u(k)\}$

$$y(k) = a\, u(k). \tag{9.22}$$

<ins>Funkcijski blok</ins>



$y = f(u)$ ili

$\{y(k)\} = f\,[\{u(k)\}]$

$$y(k) = f\,[u(k)]. \tag{9.23}$$

Ovo su osnovni bezmemorijski elementi vremenski diskretnog sustava.

9.3 Osnovne memorijske i predikcijske operacije

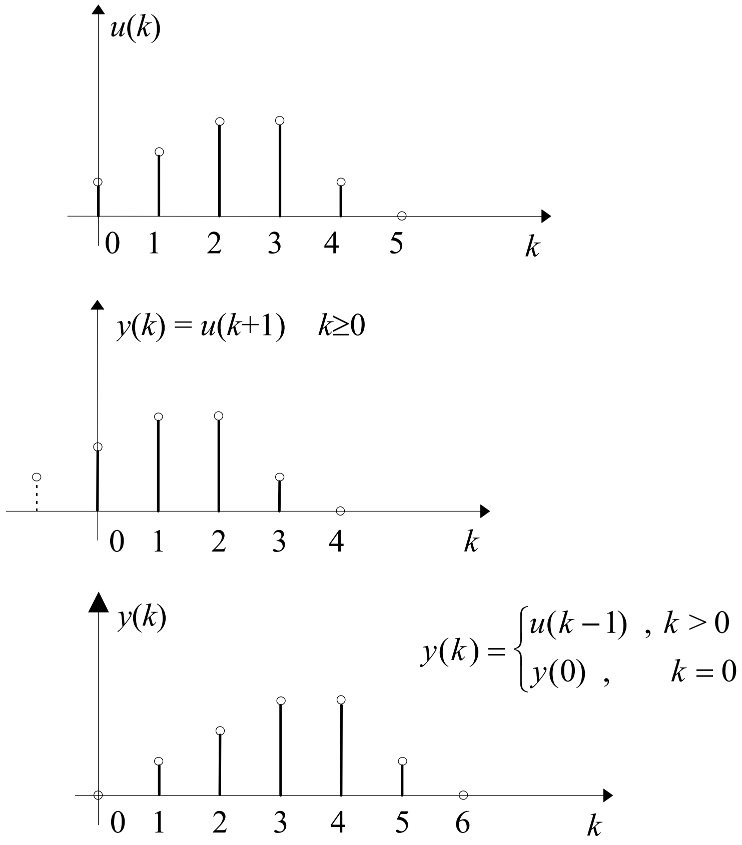
<ins>Pomak niza</ins>

Jedinični pomak daje iz ulaznog niza, niz pomaknut za jedan korak.

unaprijed (predikcija)	unatrag (kašnjenje i pamćenje)
$y = \mathrm{E}\, u$, ili $\{y(k)\} = \mathrm{E}\ \{u(k)\}$,	$y = \mathrm{E}^{-1}\ u$, ili $\{y(k)\} = \mathrm{E}^{-1}\ \{u(k)\}$,
$y(k) = (\mathrm{E}u)(k)$,	$y(k) = (\mathrm{E}^{-1}u)(k)$,
$y(k) = u(k+1) \quad k \geq 0$,	$y(k) = u(k-1) \quad k > 0$. (1.24)

Operacija niza unaprijed traži nekauzalan sustav pa je neostvariva u realnom vremenu. Zato se u sustavima služimo redovito jedinicama za kašnjenje, odnosno operacijom E^{-1}. Ako je poznat ulazni niz u intervalu $[0, k)$, treba poznavati $y(0)$ da bi se dobio izlaz u intervalu $[0, k]$, tj.

$$y(k) = \begin{cases} y(0)\ , & k = 0 \\ u(k-1)\ , & k > 0 \end{cases}$$



Sl. 9.11

Početak i kraj zbog oznake intervala

<u>Diferencija niza</u>

$$y = \Delta u \quad \text{ili} \quad \{y(k)\} = \Delta\{u(k)\}, \qquad y = \nabla u \quad \text{ili} \quad \{y(k)\} = \nabla\{u(k)\},$$

$$y(k) = (\Delta u)(k) = u(k+1) - u(k) \qquad y(k) = (\nabla u)(k) = u(k) - u(k-1), \tag{1.25}$$

,

$$\{y(k)\} = (\mathrm{E} - 1)\{u(k)\}, \qquad \{y(k)\} = (1 - \mathrm{E}^{-1})\{u(k)\}.$$

<u>Diferencija višeg reda</u>

$$\Delta^{\mathrm{n}}\{u(k)\} = (E-1)^n\{u(k)\} = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}E^{n-1}\{u(k)\}, \tag{9.26}$$

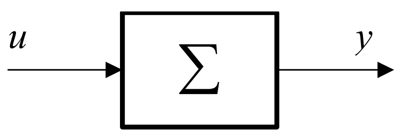
$$\nabla^{\mathrm{n}}\{u(k)\} = (1-E^{-1})^n\{u(k)\} = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}E^{-r}\{u(k)\},$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

<u>Akumulacija niza</u>

Antidiferencijski operator Δ^{-1} daje niz

$\{y(k)\} = \Delta^{-1}\ \{u(k)\}$,



takav da je

$\Delta\{y(k)\} = \{u(k)\}$.

Može se pokazati da vrijedi

$$\Delta\left\{\sum_{j=0}^{k-1} u(j) + K\right\} = \{u(k)\}. \tag{9.27}$$

Za slučaj kauzalnih signala

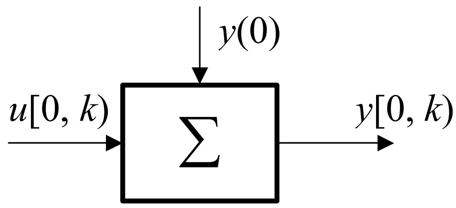
$$\left(\sum_{j=0}^{k} u(j) + K\right) - \left(\sum_{j=0}^{k-1} u(j) + K\right) = u(k).$$

Prema tome

$$\Delta^{-1}\{u(k)\} = \left\{\sum_{j=0}^{k-1} u(j) + K\right\}, \tag{9.28}$$

$$y(k) = \begin{cases} y(0), & k = 0, \\ y(0) + \sum_{j=0}^{k-1} u(j), & k > 0. \end{cases}$$

Uzlazni akumulator



$y(k + 1) - y(k) = u(k)$,

$y(k + 1) = u(k) + y(k)$,

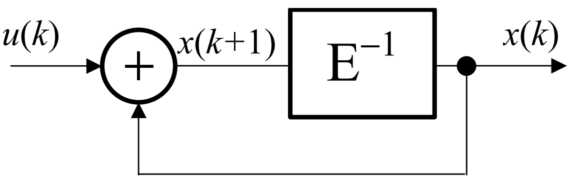
$y(1) = u(0) + y(0)$ Moramo poznavati $y(0)$,

$y(2) = u(1) + y(1) = u(1) + u(0) + y(0)$,

$y(k) = \sum_{j=0}^{k-1} u(j) + y(0)$, $k > 0$.

Zato se ovaj element naziva akumulator. Jednoznačna veza između izlaza i ulaza postoji ako je poznat početni iznos izlaza $y(0)$, pa je akumulator diskretni analogon integratora.

Akumulator je ekvivalentan bloku na slijedećoj slici, može se svesti na sustav s kašnjenjem i zbrajanjem



Sl. 9.12

$x(k + 1) = x(k) + u(k)$,

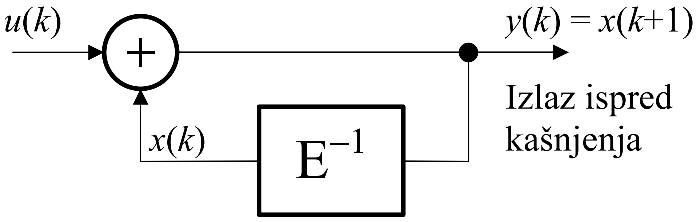
$y(0,k] = F(y(0), u[0, k)\ )$.

<u>Silazni akumulator</u>

$$\nabla^{-1}\{u(k)\} = \left\{\sum_{j=0}^{k} u(j) + K\right\}, \tag{9.29}$$

$$y(k) = y(-1) + \sum_{j=0}^{k-1} u(j), \quad k \geq 0.$$

Ovaj akumulator se može svesti na



Sl. 9.13

$x(k+1) = u(k) + x(k)$,

$y(k) - y(k-1) = u(k)$,

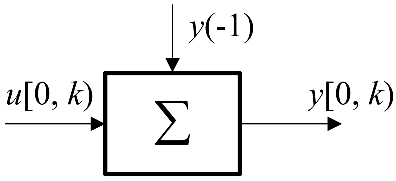
$y(k) = u(k) + y(k-1)$,

$y(0) = u(0) + y(-1)$ Moramo poznavati $y(-1)$,

$y(1) = u(1) + u(0) + y(-1)$,

$y(2) = u(2) + u(1) + u(0) + y(-1)$,

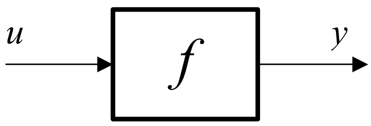
$y(k) = \sum_{j=0}^{k-1} u(j) + y(-1)$, $k \geq 0$.



U oba slučaja je prisutna elementarna operacija kašnjenja niza i u oba slučaja je izlaz iz akumulatora određen s vrijednošću izlaza iz jedinice za kašnjenje, pa se sustavi s akumulatorom dadu svesti na sustave složene od jedinice za kašnjenje.

9.4 Model vremenski diskretnog sustava

Za bezmemorijski sustav vrijedi



Sl. 9.14

$$y(k) = f\,[u(k)]. \tag{9.30}$$

Izlaz u koraku k zavisi samo od ulaza u koraku k. Funkcijski blokovi se mogu slagati u sustave kao i kontinuirani.

Za memorijski sustav vrijedi

$$y(k) = F\,(x(k_0), u_{(k_0,k]}\,) \text{ za } k>k_0 \text{ ili} \tag{9.31}$$

$$y(k) = F\,(x(k_0),\; u_{[k_0,k)}) \text{ za } k>k_0,$$

da je izlaz u koraku k određen stanjem memorijskog elementa i s pobudom u iz intervala $(k_0, k]$, odn. intervala $[k_0, k)$.

Model sustava s varijablama stanja sastoji se od bezmemorijskog i memorijskog dijela.

Bezmemorijski:

$$v(k) = f\,(x(k), u(k)).$$

$$y(k) = g(x(k), u(k)), \tag{9.32}$$

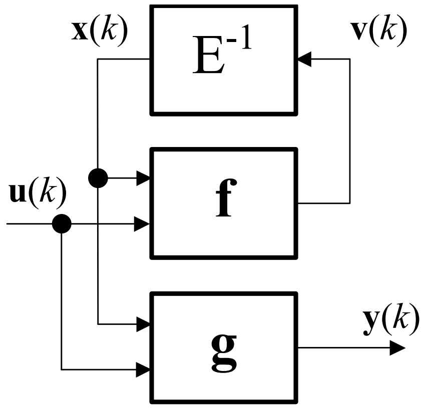
Memorijski dan funkcijom stanja

$$x(k) = f(x(k_0), v[k_0, k)),$$
$$y(k) = g(x(k), v(k)). \tag{9.33}$$

Funkcija f daje vrijednost $v(k)$ za pripremu stanja, a funkcija g daje izlaz $y(k)$, za danu vrijednost stanja $x(k)$ i ulaza $u(k)$ u koraku k. Funkcija F je pravilo koje daje stanje sustava u bilo kojem koraku $k > k_0$ za dani $x(k_0)$ i niza za pripremu stanja v iz intervala $[k_0, k)$, odn. $(k_0, k]$.

Ima više memorijskih operacija, koje se mogu pojaviti kao osnovni memorijski element u memorijskom podsustavu. Posebno važan je element jediničnog kašnjenja koji vodi na jednadžbe diferencija.

Blok dijagram modela vremenski diskretnog sustava je na slici



Sl. 9.15

Vektori sustava su u tom slučaju $\mathbf{u}(k)$, $\mathbf{x}(k)$ i $\mathbf{y}(k)$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)), \tag{9.34}$$
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)). \tag{9.35}$$

Prva je identična skupu jednadžbi diferencija, a druga skupu algebarskih jednadžbi.

Ako se funkcija $\mathbf{f}$ iskoristi da se izračuna $\mathbf{x}(k+1)$ dobivamo

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{v}(k)).$$

Veza s kontinuiranim sustavom u slučaju da se derivacija aproksimira s diferencijom

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \cong \frac{\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k)}{\mathrm{T}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)),$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + T\mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)).$$

Za linearni sustav imamo

$$\frac{\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k)}{\mathrm{T}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu},$$

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{I} + \mathrm{T}\mathbf{A})\mathbf{x}(k) + \mathrm{T}\mathbf{Bu}(k),$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d\mathbf{x}(k) + \mathrm{T}\mathbf{Bu}(k).$$

10. SUSTAVI PRVOG I DRUGOG REDA

10.1 Sustavi prvog reda

Sustav prvog reda sastoji se od jednog elementa za kašnjenje i jednog ili više funkcijskih blokova.

Memorijski element - kašnjenje, daje stanje u koraku k ako je poznat ulaz $v(k) = x(k + 1)$, pa prema tome podatak o stanju $x(k)$ i ulazu $u(k)$ dovoljni su da se odredi stanje u narednom koraku $x(k + 1)$. Tako da na temelju poznatog stanja npr. $x(0)$ u $k = 0$ i poznatog ulaznog niza $\{u(0), u(1), \ldots, u(k)\}$ možemo jednoznačno odrediti stanje $x(1), x(2), \ldots, x(k + 1)$, korak po korak.

$$x(k + 1) = f(x(k), u(k), k), \qquad y(k) = g(x(k), u(k), k).$$

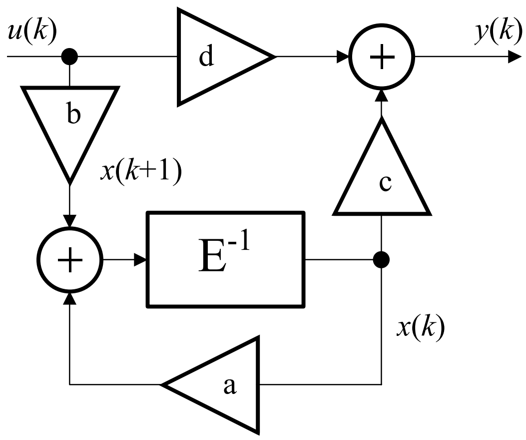
Gornja jednadžba diferencija je rekurzivna formula za numeričko rješavanje korak po korak bez obzira radi li se o linearnom, nelinearnom, vremenski stalnom ili promjenjivom sustavu.

10.2 Linearni vremenski invarijantan sustav

Za linearnu funkciju f imamo

$$x(k + 1) = \mathrm{a}x(k) + \mathrm{b}u(k), \qquad y(k) = \mathrm{c}x(k) + \mathrm{d}u(k).$$

Blok dijagram je na Sl. 10.1



Sl. 10.1

Primjer 10.1.

Uzmimo primjer štednje na bankovnoj knjižici. Tipičan slučaj je da banka plaća kamate u iznosu r na koncu svake godine, s tim, da kamate obračunava dnevno r/n. Mi pretpostavljamo da ulažemo i uzimamo novac s te knjižice u iznosu $u(k)$, k-tog dana. Zanima nas stvarno stanje tog računa $y(k)$, k-tog dana. (Ako naime zatvorimo račun, banka će nam obračunati kamate do tog dana i isplatiti). Znači da za stvarno stanje računa za bilo koji dan treba pribrojiti i kamatu.

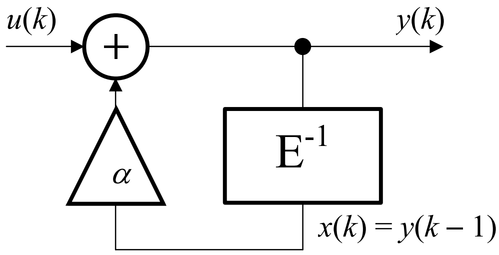
Možemo napisati jednadžbu

$$y(k) = y(k-1) + \frac{r}{n} y(k-1) + u(k),$$

$$y(k) = (1 + \frac{r}{n}) y(k-1) + u(k) . \quad (10.1)$$

Stanje računa k-tog dana $y(k)$ je određeno stanjem prethodnog dana $y(k-1)$ kojem je dodana jednodnevna kamata $\frac{r}{n} y(k-1)$, te uplata $u(k)>0$, odnosno isplata $u(k)<0$ k-tog dana. Jednadžba je diferencijska prvog reda. Da bi mogli računati $y(k)$ moramo znati $y(k-1)$ odnosno početno stanje prethodnog dana. Ako smo račun tek otvorili 0-tog dana ulogom $u(0)$, onda je $y(k-1) = 0$. Iz jednadžbe možemo izračunati $y(1)$, a zatim $y(2)$, itd., uzimajući u obzir koliko smo uplaćivali ili podizali $u(k)$.

Blok dijagram ove jednadžbe je



Sl. 10.2

Ako $x(k) = y(k-1)$ uzmemo kao varijablu stanja, izlazi standardni oblik jednadžbe stanja

$$x(k+1) = \alpha x(k) + u(k) \quad (10.2)$$

i izlazne jednadžbe

$$y(k) = \alpha x(k) + u(k). \quad (10.3)$$

Pokušajmo prvo naći rješenje jednadžbe

$$x(k+1) = \alpha x(k) + u(k),$$

računanjem $x(1)$, $x(2)$, … postupnom upotrebom jednadžbe kao rekurzivne formule počevši od poznatog $x(0)$ i poznatog niza pobude $\{u(k)\}$

$x(1) = \alpha x(0) + u(0)$,

$x(2) = \alpha x(1) + u(1) = \alpha(\alpha x(0) + u(0)) = \alpha^2 x(0) + \alpha u(0) + u(1)$,

$x(3) = \alpha x(2) + u(2) = \alpha^3 x(0) + \alpha^2 x(0) + \alpha u(1) + u(2)$,

- -

$$x(k) = \alpha^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^{k-(j+1)} u(k), k > 0 . \quad (10.4)$$

Izlaz je prema (10.3),

$$y(k) = \alpha^{k+1} x(0) + \alpha \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^{k-j-1} u(j) + u(k), \quad (10.5)$$

$$y(0) = \alpha x(0) + u(0), \quad k = 0,$$

$$y(k) = \alpha^{k+1}x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^{k-j}u(j) + u(k), \quad k > 0\,, \tag{10.6}$$

odnosno

$$y(k) = \alpha^{k+1}x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^{k-j}u(j), \quad k \geq 0\,. \tag{10.7}$$

Gornju jednadžbu (10.2) možemo riješiti i klasičnim postupkom rješavanja jednadžbi diferencija koji je analogan rješavanju linearnih diferencijalnih jednadžbi. Ovdje imamo linearnu jednadžbu diferencija čije opće rješenje možemo dobiti počevši od rješenja homogene jednadžbe $x_h(k)$, a zatim dobiti rješenje nehomogene primjenom Lagrangeove metode varijacije parametra.

Pretpostavimo da je rješenje homogene jednadžbe oblika $x(k) = \mathrm{C}q^k$ gdje je C proizvoljna konstanta

$$x(k+1) = \alpha x(k) \;\rightarrow\; q^{k+1} = \alpha q^k \;\rightarrow\; q = \alpha. \tag{10.8}$$

Jednadžbu zadovoljava $x_h = \mathrm{C}\,q^k$ ako je $q = \alpha$.

Pretpostavimo rješenje nehomogene jednadžbe u obliku

$$x(k) = q^k \cdot f(k) \rightarrow x(k) = \alpha^k \cdot f(k), \tag{10.9}$$

gdje je $\{f(k)\}$ neka sekvencija stavljena mjesto konstante u rješenju homogene jednadžbe.

Uvrštenjem u jednadžbu diferencija dobivamo

$$\alpha^{k+1} f(k+1) = \alpha\alpha^k f(k) + u(k) \rightarrow \alpha^{k+1}[f(k+1) - f(k)] = u(k),$$

$$\Delta f(k) = u(k)\, q^{-(k+1)} \qquad , q = \alpha..$$

Primjenom antidiferencijskog operatora (8.27) izlazi

$$f(k) = \Delta^{-1}\left[u(k)q^{-(k+1)}\right] = \sum_{j=0}^{k-1} u(j)q^{-(j+1)} + \mathrm{C}. \tag{10.10}$$

Rješenje nehomogene jednadžbe slijedi iz $x(k) = q^k f(k)$, tj.

$$x(k) = q^k\left[\sum_{j=0}^{k-1} u(j)q^{-(j+1)} + \mathrm{C}\right] = \mathrm{C}q^k + \sum_{j=0}^{k-1} u(j)q^{k-(j+1)}. \tag{10.11}$$

Konstantu C možemo dobiti uvrštenjem u polaznu jednadžbu (10.2) uz $k = 0$.

Za $x(1) = \mathrm{C}q + u(0) = qx(0) + u(0) \rightarrow \mathrm{C} = x(0)$. (10.12)

Dobivamo rješenje u obliku kao ranije (10.4), uz $q = \alpha$.

$$x(k) = \begin{cases} x(0), & \text{za } k = 0, \\ q^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} u(j)q^{k-(j+1)}, & \text{za } k > 0, \end{cases} \tag{10.13}$$

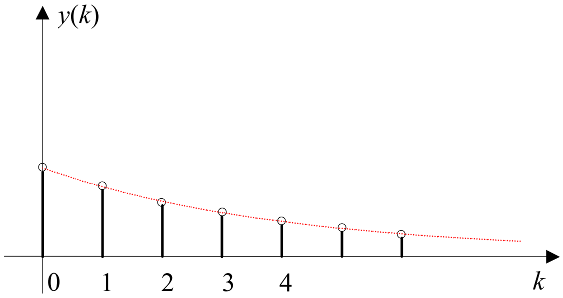
a izlaz

$$y(k) = q^{k+1}x(0) + \sum_{j=0}^{k} u(j)q^{j-\kappa}, \qquad \text{za } k \geq 0. \tag{10.14}$$

Jedinični odziv $u(k) = \delta(k)$ slijedi iz (10.13).

$$x(k)=\begin{cases} x(0), & \text{za } k=0, \\ \alpha^k x(0)+\alpha^{k-1}, & \text{za } k>0, \end{cases} \tag{10.15}$$

$$y(k)=\alpha^{k+1}x(0)+\alpha^k, \quad \text{za } k\geq 0.$$



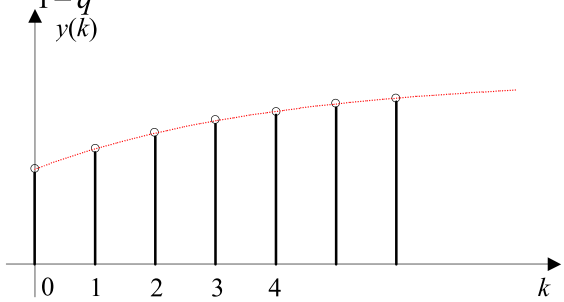
Sl. 10.3

Odziv na jediničnu stepenicu $u(k) = \mu(k)$ uz $x(0) = 0$

$$x(k)=q^k\sum_{j=0}^{k-1}q^{-(j+1)}=\frac{1-q^k}{1-q}, \quad k>0, \tag{10.16}$$

$$y(k)=q^k\sum_{j=0}^{k}q^{-j}=1+q^{-1}+\ldots+q^{-k}=\frac{1-q^{-(k+1)}}{1-q^{-1}}=q^{-1}\frac{q^{k+1}-1}{1-q^{-1}}=\frac{q^{k+1}-1}{q-1}, \quad k\geq 0,$$

$$y(k)=q^k\sum_{j=0}^{k}q^{-j}=\frac{1-q^{k+1}}{1-q}, \quad k\geq 0.$$



Sl. 10.4

10.3 Vremenski promjenjivi sustav

Primjer 10.3

Primjer je računanje binomnih koeficijenata rekurzivnom formulom

$$y(k)=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad k=0,1,2,\ldots \tag{10.17}$$

$$y(k-1)=\binom{n}{k-1}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}, \quad k=1,2,\ldots$$

Dijeljenjem ovih jednadžbi izlazi

$$y(k)=\frac{(n-k+1)}{k}y(k-1), \quad k=1,2,\ldots,n. \tag{10.18}$$

Uz početni uvjet $y(0) = 1$ slijede svi binomni koeficijenti

$$\frac{n}{1!},\ \frac{n(n-1)}{2!},\ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!},\dots$$

Uvođenjem $y(k-1) = x(k)$ za stanje izlaza iz jedinice za kašnjenje dobivamo jednadžbu stanja

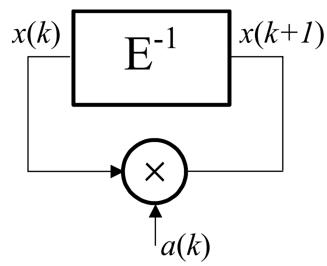
$$x(k+1) = a(k)\,x(k) + b(k)\,u(k). \tag{10.19}$$

Budući da je $u(k) = 0$, sustav je homogen. Rješenje u općem slučaju $a(k)$ možemo opet dobiti korak po korak.

$$x(1) = a(0)\,x(0)$$
$$x(2) = a(1)\,x(1) = a(1)\,a(0)\,x(0)$$
$$x(3) = a(2)\,x(2) = a(2)\,a(1)\,a(0)\,x(0)$$

$$x(k) = \left[\prod_{j=0}^{k-1} a(j)\right] x(0) \tag{10.20}$$

predstavlja opći oblik rješenja vremenski varijantnog sustava prvog reda.



Sl. 10.5

Za pobuđeni sustav može se pokazati na jedan od spomenutih načina da je

$$x(k) = \sum_{j=0}^{k-1} b(j)u(j)\prod_{i=j+1}^{k-1} a(i) + \left[\prod_{j=0}^{k-1} a(j)\right] x(0). \tag{10.21}$$

Jedinični odziv $u(k) = \delta(k)$ uz $x(0) = 0$.

$$x(k) = b(0)\prod_{i=1}^{k-1} a(i)\ ,\quad k > 0. \tag{10.22}$$

10.4 Nelinearni sustav

Primjer 10.4

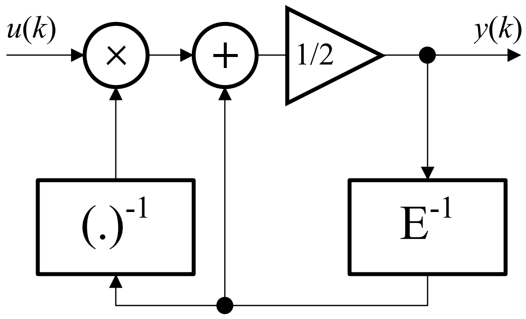
Algoritam za računanje drugog korijena iz pozitivnog broja u = konst.

$$y(k) = \frac{1}{2}\left[y(k-1) + \frac{u}{y(k-1)}\right],$$

je nelinearan sustav. Za $x(k) = y(k-1)$ dobivamo oblik

$$x(k+1) = f(x(k), u).$$

Blok dijagram je na slici.



Sl. 10.6

Ovdje rješenje dobivamo numerički, korak po korak, počevši od početnog stanja koje je ovdje pretpostavljeno približno rješenje za $\sqrt{u}$. Aproksimacija korak po korak postaje sve bliža broju $\sqrt{u}$.

10.5 Sustavi drugog reda

Ako se sustav može opisati s dvije jednadžbe diferencija prvog reda:

$$x_1(k+1) = f_1\,(x_1(k), x_2(k), u(k))\,,\ \ x_1(0) = x_{10},$$
$$x_2(k+1) = f_2\,(x_1(k), x_2(k), u(k))\,,\ \ x_2(0) = x_{20}, \qquad (10.23)$$
$$y(k) = g\,(x_1(k), x_2(k), u(k)),$$

kažemo da je sustav drugog reda. Blokovski dijagram je kao na sl. 4.2. i 4.4.

Uz vektor stanja $\mathbf{x}(k) = [x_1(k), x_2(k)]^t$ i vektorske funkcije **f** i **g** jednadžbe su zbijene

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)],\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0;$$
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)].$$

Rješenje možemo dobiti korak po korak počevši od $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ uz poznati niz $\{\mathbf{u}(k)\}$

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(0), \mathbf{u}(0)),$$
$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(1), \mathbf{u}(1)) = \mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}(0), \mathbf{u}(0)), \mathbf{u}(1)],$$
$$\mathbf{x}(3) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(2), \mathbf{u}(2)) = \mathbf{f}\{\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}(0), \mathbf{u}(0)), \mathbf{u}(1)], \mathbf{u}(2)\}.$$

Sustav se može opisati također s jednom jednadžbom diferencija drugog reda u obliku

$$y(k+2) = f\,(y(k+1), y(k), u(k+2), u(k+1), u(k))$$

ili

$$y(k) = f\,(y(k-1), y(k-2), u(k), u(k-1), u(k-2)), \qquad (10.24)$$

što predstavlja model s ulazno izlaznim varijablama.

10.6 Linearni sustav drugog reda

Ako je f_1 i f_2 odnosno f linearna funkcija, imamo linearni sustav kao (4.5) ili (4.7)

$$x_1(k+1) = a_{11}x_1(k) + a_{12}x_2(k) + u_1(k),$$
$$x_2(k+1) = a_{21}x_1(k) + a_{22}x_2(k) + u_2(k), \qquad (10.25)$$
$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k),\ \ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k), \qquad (10.26)$$

može transformirati u

$$x_1(k+2) - Tx_1(k+1) + \Delta x_1(k) = u(k),$$
$$x_2(k+2) - Tx_2(k+1) + \Delta x_2(k) = v(k). \tag{10.27}$$

Blok dijagram je na slici 4.2 i 4.4.

Primjer 10.6.

Jednostavni model nacionalnog bruto dohotka je jednadžba drugog reda. Bruto dohodak $y(k)$ ustanovljava se na kraju k-te godine, a sastoji se iz iznosa $p(k)$ koji su potrošači utrošili na kupovinu raznih dobara, zatim investicija $i(k)$ za kupovinu proizvodnih sredstava, te troškova državne uprave $d(k)$, tj.

$$y(k) = p(k) + i(k) + d(k).$$

Ustanovljeno je da približno vrijede slijedeći odnosi između navedenih veličina.

Troškovi dobara za život su proporcionalni ukupnom nacionalnom dohotku u prethodnom periodu, jer potrošači više troše kad imaju više novaca.

$$p(k) = \alpha y(k-1).$$

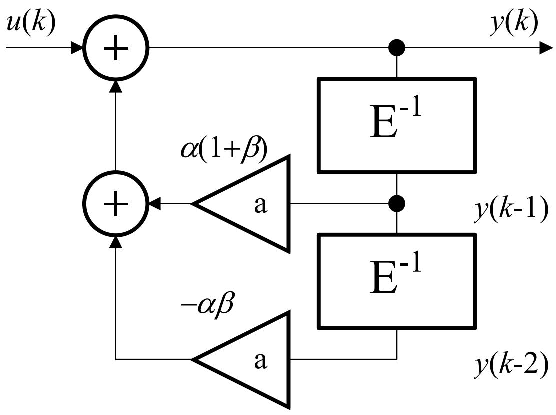
Investicije su proporcionalne prirastu potrošnje u prethodnom periodu, jer proizvođači više investiraju kad prodaja ide dobro, odnosno kad ustanove povećanje potroška u prošloj godini.

$$i(k) = \beta\,\nabla p(k-1) = \beta\,\alpha\,(y(k-1) - y(k-2)).$$

Troškovi države su približno konstantni $d(k) = d$. Ako uvrstimo u sumu dobivamo

$$y(k) = \alpha\,(1+\beta)\,y(k-1) - \alpha\,\beta\,y(k-2) + d.$$

Blok dijagram je na Sl. 10.7



Sl. 10.7

Da bi riješili jednadžbu, počevši od $k = 0$, od koje pratimo proces, moramo znati $y(-1)$ i $y(-2)$, tj. dohodak u prošloj i pretprošloj godini. Te veličine predstavljaju početne uvjete. Jednadžba se može riješiti korak po korak uz određene parametre α i β.

Pretpostavimo da za rješenje linearne homogene jednadžbe drugog reda zadovoljava sekvencija oblika

$$y(k) = q^k.$$

Uvrštenje u jednadžbu oblika

$$a_2 y(k+2) + a_1(k+1) + a_0 y(k) = 0,$$

daje karakteristični polinom

$$a_2 q^2 + a_1 q + a_0 = 0.$$

Korijeni su

$$q_{12} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^{\ 2} - 4a_0 a_2}}{2a_2}$$

Karakteristična jednadžba se često piše u obliku

$$q^2 - (2r\cos\theta)\,q + r^2 = 0, \text{ za } \cos^2\theta < 1, \tag{10.28}$$

$$q_{12} = r(\cos\theta \pm j\sin\theta) = r\,e^{\pm j\theta} \text{ (par kompl. korjena), ili} \tag{10.29}$$

$$q^2 - (2r\,\mathrm{ch}\,\alpha)\,q + r^2 = 0, \text{ za } \mathrm{ch}^2\alpha > 1, \tag{10.30}$$

$$q_{12} = r(\mathrm{ch}\,\alpha \pm \mathrm{sh}\,\alpha) = r\,e^{\pm\alpha} \text{ (par realnih korjena) ili} \tag{10.31}$$

$$q^2 - 2rq + r^2 = 0\ ,\ q_{12} = r \text{ (dvostruki korijen).}$$

Rješenje jednadžbe diferencija je linearna kombinacija od $q_1^{\ k}$ i $q_2^{\ k}$ tj.

$$y_h(k) = C_1 q_1^{\ k} + C_2 q_2^{\ k}.$$

Oscilatorni slučaj za $\cos^2\theta < 1$

$$y_n(k) = C_1 r^k e^{jk\theta} + C_2 r^k e^{-jk\theta} = 2C\,r^k \cos(\theta k - \phi), \tag{10.32}$$

pri tom je za $r < 1$ padajući, a za $r > 1$ rastući (nestabilni sustav) niz.

Za $r = 1$ imamo neprigušeni oscilatorni slučaj

$$y_n(k) = C_1 e^{jk\theta} + C_2 e^{jk\theta} = 2C\cos(\theta k + \phi). \tag{10.33}$$

Kritički aperiodičan slučaj $\cos^2\theta = 1$

$$y_n(k) = C_1 r^k + C_2 k r^k, \tag{10.34}$$

pri tom je za $r<1$ padajući, a za $r>1$ rastući niz (nestabilan sustav).

Za slučaj $r = 1$, odziv linearno raste

$$y_n(k) = C_1 + C_2 k,$$

pa je sustav nestabilan.

Aperiodičan slučaj $\mathrm{ch}\,\alpha > 1$

$$y_n(k) = C_1 r^k e^{\alpha k} + C_2 r^k e^{-\alpha k}, \tag{10.35}$$

pritom za $re^{\alpha} < 1$ i $re^{-\alpha} < 1$ niz je padajući (stabilan sustav).

Homogeni sustav jednadžbi s varijablama stanja

Rješenje jednadžbi sustava drugog reda se može dobiti slično kao kod kontinuiranih sustava. (4.12).

Supstitucijom $y(k) = q^k$ u jednadžbe stanja

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= a_{11}x_1(k) + a_{12}x_2(k) \\ x_2(k+1) &= a_{21}x_1(k) + a_{22}x_2(k) \end{aligned} \tag{10.36}$$

izlazi

$$X_1 q^{k+1} = a_{11}X_1 q^k + a_{12}X_2 q^k$$

$$X_2 q^{k+1} = a_{21} X_1 q^k + a_{22} X_2 q^k,$$

odnosno

$$qX_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2,$$
$$qX_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2. \quad (10.37)$$

Da bi sustav algebarskih jednadžbi dao rješenje za amplitude X_1, X_2 mora determinanta iščezavati. Odakle slijedi karakteristični polinom kao iz (4.19), (4.20).

$$q^2 - Tq + \Delta = 0, \quad (10.38)$$

čiji korijeni q_1 i q_2 su prirodne ili vlastite frekvencije sustava. Rješenja se mogu dobiti za konstante kao u (4.23.), a diskusija rješenja i trajektorija ima za razne slučajeve prirodnih frekvencija sličan tok. Odzivi su sekvencije a trajektorije niz točaka u ravnini stanja. Sl.

10.7 Vremenski promjenjiv sustav drugog reda

10.8 Nelinearni sustav drugog reda

Primjer 10.8.

Diskretni ekvivalent Van der Polove jednadžbe je:

$$y(k) = 2{,}1y(k-1) - 0{,}1y(k-1)y^2(k-2) - 1{,}1y(k-2) + 0{,}1y^3(k-2). \quad (10.39)$$

Rješenje korak po korak za početne uvjete $y(k-1)$ i $y(k-2)$ dano je u tablici.

TABLICA I SLIKA

11. VREMENSKI DISKRETNI LINEARNI SUSTAVI

11.1 Model sustava s ulazno-izlaznim varijablama

Najopćenitiji opis linearnog sustava s jednim ulazom u i jednim izlazom y je u obliku skalarne jednadžbe diferencija n-tog reda ($a_n \neq 0$, $a_0 \neq 0$).

$$a_n y(k+n) + a_{n-1} y(k+n-1) + \ldots + a_0 y(k) =$$
$$b_m u(k+m) + b_{m-1} u(k+m-1) + \ldots + b_0 u(k). \tag{11.1}$$

Sustav je vremenski stalan ili po koraku stalan ako su koeficijenti $\{a_i\}$ i $\{b_i\}$ konstante, a po koraku promjenjiv ako su koeficijenti funkcije koraka k.

Diferencijske odnosno jednadžbe diferencija često se pišu uz pomoć operatora pomaka E, koji se u literaturi nekad označava s q.

$$(a_n \mathrm{E}^n + \ldots + a_0)\, y = (b_m \mathrm{E}^m + \ldots + b_0)\, u \tag{11.2}$$

ili

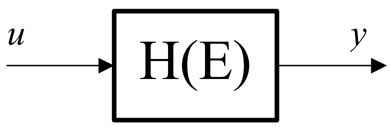
$$A(\mathrm{E})\, y = B(\mathrm{E})\, u\,, \tag{11.3}$$

gdje je
$$(\mathrm{E}\, y)(k) \stackrel{\Delta}{=} y(k+1)\,,\ \ \text{a} \left(\mathrm{E}^n\, y\right)(k) \stackrel{\Delta}{=} y(k+n), \tag{11.4}$$
$$\mathrm{E} = q \quad \mathrm{E}^{-1} = q^{-1}$$

ili

$$(qy)(k) \stackrel{\Delta}{=} y(k+1)\,,\ \text{a}\ (q^n\ y)(k) \stackrel{\Delta}{=} y(k+n)$$

Red diferencijske jednadžbe je dan razlikom između najveće i najmanje potencije operatora E ili q. Linearni sustav se može predstaviti kao blok



Sl. 11.1

gdje je $H(\mathrm{E}) = B(\mathrm{E})/A(\mathrm{E})$ složeni operator kojeg treba interpretirati kao diferencijsku jednadžbu.

Jednadžba sustava se često piše kao linearna kombinacija pobude u i njenih zakašnjelih replika, te izlaza y i njegovih zakašnjelih replika

$$c_0 y(k) + c_1 y(k-1) + \ldots + c_n y(k-n) = d_0 u(k) + d_1 u(k-1) + \ldots + d_n u(k-n) \tag{11.5}$$

odnosno uz pomoć operatora E^{-1} ili q^{-1}.

Prijelaz iz jednog oblika u drugi vrši se supstitucijom $k = k' - n$ ili množenjem s E^{-n}.

11.2 Rješavanje jednadžbe diferencija

Linearna jednadžba diferencija višeg reda može se riješiti korak po korak računanjem $y(k)$ iz $\{y(k-i)\}^n_{i=1}$ i $\{u(k-i)\}^n_{i=0}$

$$y(k) = -\sum_{i=1}^{n} \mathrm{a}_i y(k-i) + \sum_{i=0}^{n} \mathrm{b}_i u(k-i), \qquad \mathrm{a}_0 = 1,\ \text{za } k = 0,1,2,\ldots \tag{11.6}$$

Da bi to bilo moguće, potrebno je poznavati n početnih uvjeta tj.

$$y(-1), y(-2), \ldots , y(-n). \tag{11.7}$$

Postupak se može prevesti "ručno" ili se može napisati program za programabilni kalkulator ili elektroničko računalo. Rezultat će se dobiti kao niz numeričkih podataka i to će biti zadovoljavajući rezultat za konkretni slučaj. Za potrebe općenite analize i sinteze odnosno projektiranja linearnih diskretnih sustava, poželjnije je imati rješenja u obliku kompaktnog izraza, gdje parametri sustava figuriraju u rješenju. Teorija linearnih jednadžbi diferencija s konstantnim koeficijentima je razrađena i veoma upotrebljiva kao i teorija linearnih diferencijalnih jednadžbi.

Klasični put dobivanja rješenja

Rješenje linearne jednadžbe (11.1) općenito se dobiva kao rješenje homogene jednadžbe

$$\mathrm{a}_n y_h(k+n) + \mathrm{a}_{n-1} y_h(k+n-1) + \ldots + \mathrm{a}_0 y_h(k) = 0 \tag{11.8}$$

i partikularnog rješenja $y_p(k)$ koje određuje ukupna funkcija pobude na desnoj strani

$$f(k) = \mathrm{b}_m u(k+m) + \mathrm{b}_{m-1} u(k+m-1) + \ldots + \mathrm{b}_0 u(k). \tag{11.9}$$

Najopćenitije rješenje homogene jednadžbe je linearna kombinacija od n posebnih linearno nezavisnih rješenja

$$y_1(k), y_2(k), \ldots, y_n(k),$$

s proizvoljnim konstantama, dakle

$$y_h(k) = \mathrm{C}_1 y_1(k) + \mathrm{C}_2 y_2(k) + \ldots + \mathrm{C}_n y(k). \tag{11.10}$$

Jednadžbu (11.8) možemo pokušati riješiti redom, ali se lako vidi da funkcija e^{ak} ili bolje $y(k) = q^k$ zadovoljava jednadžbu, gdje ovdje $q \in \mathbf{C}$ predstavlja kompleksan broj, a ne operator. Uvrštenjem dobivamo tzv. karakterističnu jednadžbu

$$\mathrm{a}_n q^{k+n} + \mathrm{a}_{n-1} q^{k+n-1} + \ldots + \mathrm{a}_0 q^k = 0,$$

$$(\mathrm{a}_n q^n + \mathrm{a}_{n-1} q^{n-1} + \ldots + \mathrm{a}_0)\, q^k = 0.$$

Netrivijalno rješenje gornje jednadžbe traži da bude

$$\mathrm{a}_n q^n + \mathrm{a}_{n-1} q^{n-1} + \ldots + \mathrm{a}_0 = 0. \tag{11.11}$$

Karakteristični polinom (11.11) ima n korijena

$$q_1, q_2, \ldots , q_n. \tag{11.12}$$

Jednadžbu dakle zadovoljavaju funkcije odnosno nizovi q_1^k, $q_2^k, \ldots,$ q_n^k, pa se najopćenitije rješenje homogene jednadžbe, kad su korijeni različiti, dobiva u obliku

$$y_h(k) = \mathrm{C}_1 q_1^k + \mathrm{C}_2 q_2^k + \ldots + \mathrm{C}_n q_n^k. \tag{11.13}$$

Ako je neki korijen višestruk, na primjer q_1 s višestrukosti m, može se pokazati da će jednadžba zadovoljiti sekvencije oblika q_1^k, $kq_1^k, \ldots, k_{m-1} q_1^k$, $q_{m+1}{}^k, \ldots, q_m{}^k$, pa će rješenje biti

$$y(k) = \mathrm{C}_1 q_1^k + \mathrm{C}_2 k q_1^k + \ldots + \mathrm{C}_m k^{m-1} q_1^k + \mathrm{C}_{m+1} q_{m+1}{}^k + \ldots + \mathrm{C}_n q_n^k. \tag{11.14}$$

Kompleksni korijeni u jednadžbi s realnim koeficijentima $\{a_i\}$ dolaze u konjugiranim parovima.

Nadalje, budući da su $y(k) \in \mathbb{R}$, proizvoljne konstante tih sekvencija su također konjugirano kompleksne. Dakle kad

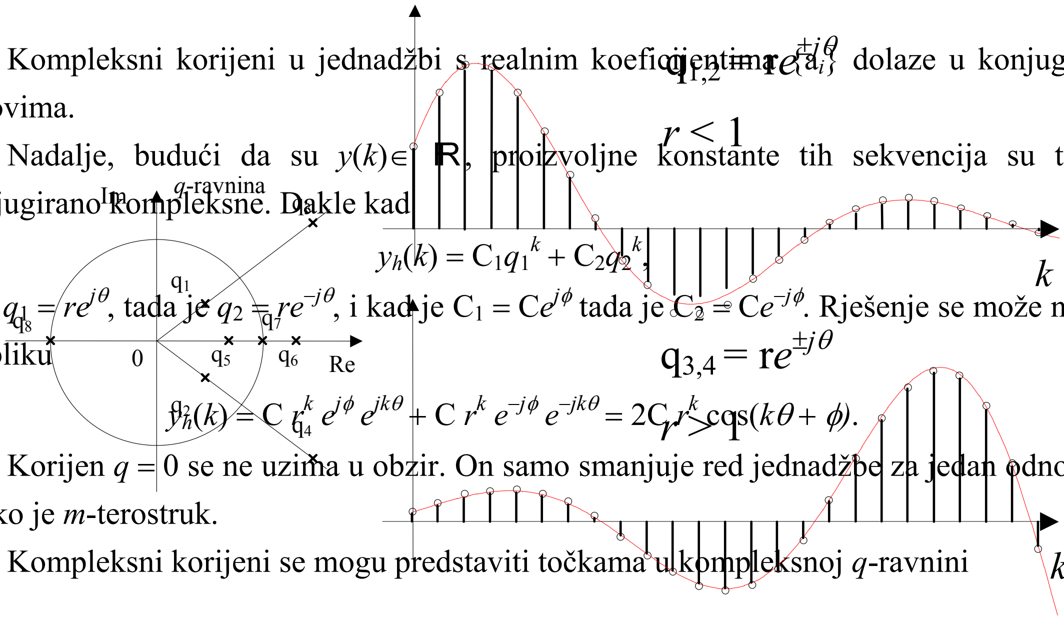
$$y_h(k) = C_1 q_1^{\,k} + C_2 q_2^{\,k},$$

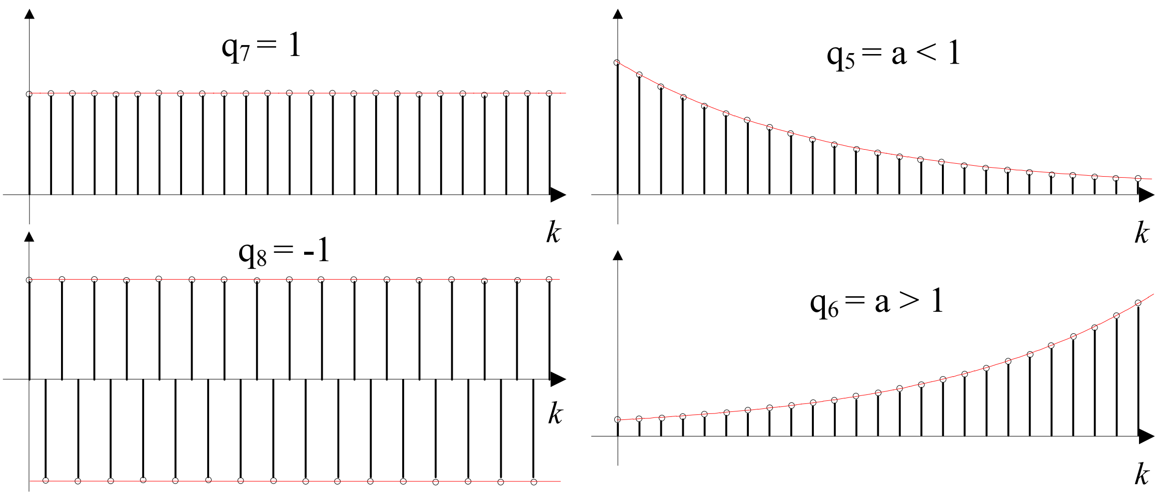
ima $q_1 = re^{j\theta}$, tada je $q_2 = re^{-j\theta}$, i kad je $C_1 = Ce^{j\phi}$ tada je $C_2 = Ce^{-j\phi}$. Rješenje se može napisati u obliku

$$y_h(k) = C\, r^k e^{j\phi} e^{jk\theta} + C\, r^k e^{-j\phi} e^{-jk\theta} = 2C\, r^k \cos(k\theta + \phi). \tag{11.15}$$

Korijen $q = 0$ se ne uzima u obzir. On samo smanjuje red jednadžbe za jedan odnosno za m ako je m-terostruk.

Kompleksni korijeni se mogu predstaviti točkama u kompleksnoj q-ravnini





Sl. 11.2

Kako se vidi, veličina $|q_i| = r_i$ je odlučna da li će sekvencija rješenja geometrijski padati $r < 1$ ili rasti $r > 1$ ili biti konstantna $r = 1$, odnosno da li su karakteristični korijeni unutar, izvan ili na jediničnoj kružnici. Za nepobuđen sustav, gdje uzorci niza rastu tako da mogu prerasti bilo kako veliki unaprijed zadani broj, kaže se da je nestabilan. Odatle se može zaključiti da je sustav nestabilan ako ima karakteristične korijene izvan jedinične kružnice ili višestruki korijen na jediničnoj kružnici.

<u>Partikularno rješenje nehomogene jednadžbe diferencija</u>

Za dobivanje partikularnog rješenja jednadžbe uz opću sekvenciju pobude $\{f(k)\}$ može se koristiti Lagrange-ov metoda varijacije parametara kao kod diferencijalnih jednadžbi, kako je to pokazano kod sustava prvog reda. Njegova primjena rezultira u sumacijama, koje su često krupne i više puta ih je teško predstaviti u kompaktnom obliku. Iako se rješenje dobiva u eksplicitnom obliku, za bilo kakvu $\{f(k)\}$, druga metoda, tzv. metoda neodređenog koeficijenta više se upotrebljava u analizi sustava. Ona je međutim ograničena na pobude oblika polinoma i eksponencijalne sekvencije. Budući se veliki broj pobuda zanimljivih za analizu dade predstaviti ili aproksimirati spomenutim sekvencijama, zadovoljit ćemo se ovdje metodom neodređenog parametra.

Pobuda polinomom oblika

$$f(k) = \mathrm{d}_0 + \mathrm{d}_1 k + \ldots + \mathrm{d}_m k^m, \tag{11.16}$$

dat će partikularno rješenje također u obliku polinoma m-tog stupnja, tj.

$$y_p(k) = \mathrm{C}_0 + \mathrm{C}_1 k + \ldots + \mathrm{C}_m k^m. \tag{11.17}$$

Partikularno rješenje se pretpostavlja uvijek u obliku kompletnog polinoma, tj. sa članovima svih potencija od 0 do m, bez obzira da li polinom pobude je kompletan ili ne.

Pobuda eksponencijalom $e^{\varepsilon k}$

Najzanimljivija pobudna sekvencija je oblika $u(k) = z^k$, $e^{\varepsilon k} = z^k$; z, $\varepsilon \in \mathbf{C}$, ponajprije zato što svi linearni sustavi kao što smo vidjeli daju vlastito titranje u oblicima q_i^k, pa se oni često pojavljuju i kao pobuda sustavima. Nadalje pobuda s z^k može dati i određeni uvid u odnose između klasičnog rješavanja diferencijskih jednadžbi i onog s transformacijama.

Partikularno rješenje koje će zadovoljiti jednadžbu (11.1) uz $u(k) = \mathrm{U}z^k$, gdje je $z \in \mathbf{C}$ kompleksan broj koji možemo predstaviti u obliku

$$y_p(k) = \mathrm{Y}\, z^k, \tag{11.18}$$

gdje se U i Y nazivaju kompleksne amplitude pobude odnosno odziva.

Uvrštenjem pretpostavljenog rješenja $y_p(k) = \mathrm{Y}\, z^k$ izlazi

$$(\mathrm{a}_n z^n + \mathrm{a}_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \mathrm{a}_0)\, \mathrm{Y}\, z^k = (\mathrm{b}_m z^m + \mathrm{b}_{m-1} z^{m-1} + \ldots + \mathrm{b}_0)\, \mathrm{U}\, z^k$$

odnosno

$$A(z)\, \mathrm{Y}\, z^k = B(z)\, \mathrm{U}\, z^k, \tag{11.19}$$

odakle slijedi kompleksna amplituda odziva Y, koja zadovoljava jednadžbu

$$\mathrm{Y} = \frac{B(z)}{A(z)}\mathrm{U} = \frac{\mathrm{b}_m z^m + \ldots + \mathrm{b}_0}{\mathrm{a}_n z^n + \ldots + \mathrm{a}_0}\mathrm{U} \tag{11.20}$$

Razlomljenu racionalnu funkciju od kompleksne varijable z nazivamo transfer funkcijom ili prijenosnom funkcijom diskretnog sustava.

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \left.\frac{y_p(k)}{u(k)}\right|_{u(k)=z^k} = \frac{\mathrm{Y}z^k}{\mathrm{U}z^k} = \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{U}}. \tag{11.21}$$

Transfer funkcija je, dakle, odnos kompleksnih amplituda prisilnog odziva i pobude, kad je pobuda z^k. (11.1) ili (11.5).

Transfer funkcija se može lako napisati iz jednadžbe diferencija formalno zamjenom operatora E s brojem z.

Partikularno rješenje koje se često naziva i prisilni odziv je

$$y_p(k) = H(z)\mathrm{U}z^k.$$

Zavisno od broja z partikularni niz može biti rastući ili padajući aperiodičan ili valovit, te stalan ili periodičan, zavisno gdje z leži u kompleksnoj ravnini. Valovitost se javlja kad je $z = \rho e^{j\theta}$, a periodičnost kad je $z = e^{j\theta}$.

Realan niz se dobiva linearnom kombinacijom

$$\rho e^{j\theta k} + \rho e^{-j\theta k} = 2\rho \cos\, \theta k$$

Za ρ = 1 je niz sinusni, dakle, konstantne amplitude

$$u(k) = |\mathrm{U}|\cos(\theta k + \varphi) = \left(\mathrm{U}e^{j\theta k} + \mathrm{U}^* e^{-j\theta k}\right)/\,2 = |\mathrm{U}|\left(e^{j\varphi}e^{j\theta k} + e^{-j\varphi}e^{-j\theta k}\right)/\,2$$

prikazan s dvije konjugirane eksponencijale. Jednako tako partikularno rješenje slijedi kao superpozicija dvije konjugirane eksponencijale

$$y_p = H(e^{j\theta})Ue^{j\theta k} + H(e^{-j\theta})U^* e^{-j\theta k}$$

Aperiodičan niz je konstantan za $z = 1$ ili alternirajuće konstantan za $z = -1$

$$y_p = H(1)U \text{ ili } y_p = H(-1)U$$

Trajnu pobudu imamo kad je z na jediničnoj kružnici, pa i prisilni odziv (odnosno partikularno rješenje) imamo trajan, ili jednak nuli. Takav odziv se naziva stacionarnim.

Za višestruki (m), pobudna frekvencija na jediničnoj kružnici daje oblik

$$u(k) = k^{m-1} \tag{11.22b}$$

koji također može dati rastući odziv.

Partikularno rješenje treba pretpostaviti u obliku polinoma u varijabli k istog stupnja.

Transfer funkcija se često upotrebljava u obliku

$$H(z) = K\frac{(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_m)}{(z - q_1)(z - q_2)\ldots(z - q_n)}, \tag{11.23a}$$

gdje su polinomi brojnika i nazivnika predstavljeni kao produkt korjenih faktora. Korijeni brojnika $B(z_i) = 0$ su nultočke, a korijeni nazivnika $A(q_i) = 0$ su polovi racionalne transfer funkcije. Koincidencija frekvencije pobude s vlastitom frekvencijom $z = q_i$ traži pretpostavku partikularnog rješenja u obliku $y_p(k) = k^m \mathrm{Y} z^k$.

Cjeloviti odziv nehomogene jednadžbe diferencija uz pobudu s $u(k) = Uz^k$ izlazi

$$y(k) = y_h(k) + y_p(k) = C_1 q_1^k + C_2 q_2^k + \ldots + C_n q_n^k + H(z)Uz^k.$$

Primjer: Riješiti jednadžbu diferencija

$$y(k + 2) + y(k + 1) + 0{,}21y(k) = (-1)^k,$$

uz početne uvjete $y(0) = 0$ i $y(1) = 0$.

Rješenje homogene jednadžbe

$$y(k + 2) + y(k + 1) + 0{,}21y(k) = 0,$$

će se pretpostaviti u obliku $y_h(k) = q^k$. Uvrštenjem se dobiva karakteristična jednadžba

$$q^2 + q + 0{,}21 = 0.$$

Korijeni su $q_1 = -0{,}7$ i $q_2 = -0{,}3$, pa izlazi

$$y_h(k) = C_1(-0{,}7)^k + C_2(-0{,}3)^k.$$

Partikularno rješenje oblika $y_p(k) = Y(-1)^k$ uvršteno u nehomogenu jednadžbu daje

$$y_p(k) = \frac{1}{1 + (-1) + 0.21}(-1)^k = \frac{1}{0.21}(-1)^k.$$

Kompletno rješenje izlazi

$$y(k) = y_h(k) + y_p(k) = \mathrm{C}_1(-0{,}7)^k + \mathrm{C}_2(-0{,}3)^k + \frac{1}{0{,}21}(-1)^k .$$

Uvrštenjem početnih uvjeta

$$0 = \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 + 1 / 0{,}21,$$

$$0 = (-0{,}7)\,\mathrm{C}_1 + (-0{,}3)\,\mathrm{C}_2 - 1 / 0{,}21\ ,$$

daje

$$y(k) = -8{,}33\ (-0{,}7)^k + 3{,}5\ (-0{,}3)^k + 4{,}76\ (-1)^k.$$

11.3 Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava

Pobuda sinusnom frekvencijom

$$u(k) = |\mathrm{U}|\cos(\Omega k + \phi) = \frac{|\mathrm{U}|}{2}(e^{j(\Omega k+\phi)} + e^{-j(\Omega k+\phi)}) = \mathrm{Re}\{\mathrm{U}e^{j\Omega k}\}. \tag{11.24}$$

Dovoljno je, dakle, uzeti pobudu oblika $e^{j\Omega k}$ s kompleksnom amplitudom $U = |\mathrm{U}|e^{j\phi}$, što znači riješiti slučaj pobude s

$$u(k) = \mathrm{U}e^{j\Omega k} = \mathrm{Re}\ \{\mathrm{U}e^{j\Omega k}\} + j\ \mathrm{Im}\ \{\mathrm{U}e^{j\Omega k}\}. \tag{11.25}$$

Partikularno rješenje će se dobiti također u obliku

$$y(k) = \mathrm{Y}e^{j\Omega k} = \mathrm{Re}\ \{\mathrm{Y}e^{j\Omega k}\} + j\ \mathrm{Im}\ \{\mathrm{Y}e^{j\Omega k}\}, \tag{11.26}$$

pa se može koristiti Re{} realni dio rješenja kao posljedica realnog dijela pobude $\mathrm{Re}\{\mathrm{U}e^{j\Omega k}\}$

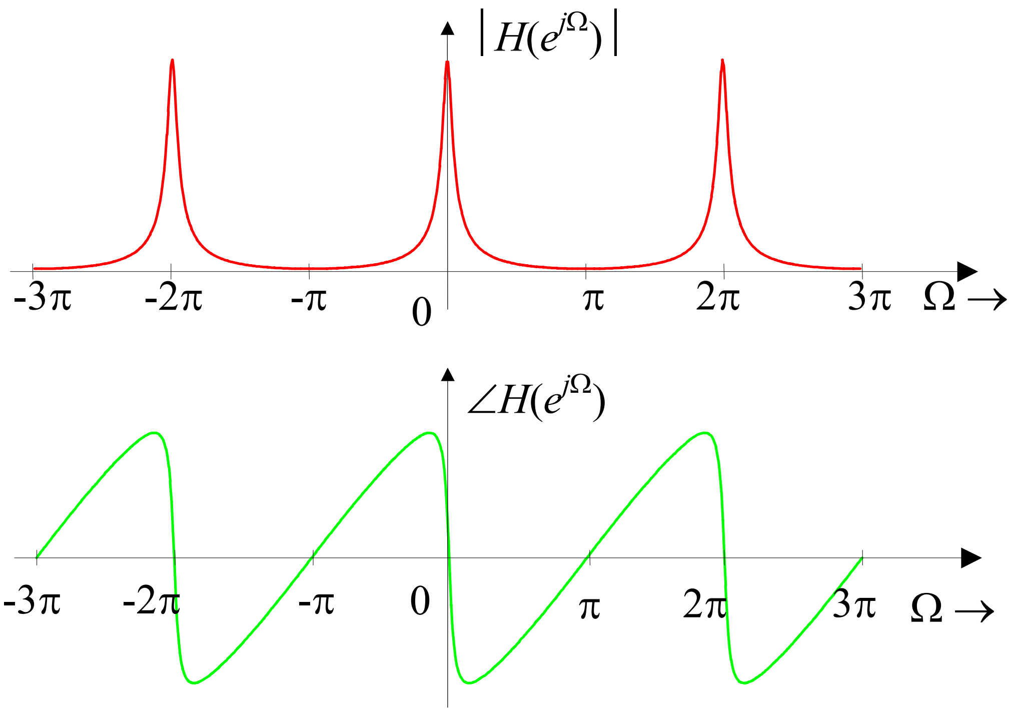
Za jednadžbu diferencija

$$A(\mathrm{E})\, y = B(\mathrm{E})\, u$$

i pobudu $e^{j\Omega k}$ dobiva se transfer funkcija

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{\mathrm{b}_m e^{jm\Omega} + \ldots + \mathrm{b}_0}{\mathrm{a}_n e^{jn\Omega} + \ldots + \mathrm{a}_0}. \tag{11.27}$$

Kako je $H(e^{j\Omega})$ funkcija argumenta $e^{j\Omega}$, zaključujemo da se ništa neće promijeniti ako mjesto $e^{j\Omega}$, stavimo $e^{j(\Omega + 2\pi i)}$. Odakle slijedi da će periodičnost argumenta s 2π dati i periodičnost transfer funkcije $H(e^{j\Omega})$ s 2π.



Sl. 11.3

Frekvencijska karakteristika vremenski diskretnog sustava dana je u jednom periodu, dakle u intervalu $(-\pi, \pi)$.

Frekvencijska karakteristika $H(e^{j\Omega})$ daje stacionarno stanje sustava $y_p = H(e^{j\Omega})\mathrm{U}$ u ovisnosti od frekvencije Ω pobudnog sinusnog signala.

Može se predstaviti u pravokutnom obliku

$$H(e^{j\Omega}) = H_r(e^{j\Omega}) + H_i(e^{j\Omega})$$

ili u polarnom obliku

$$H(e^{j\Omega}) = A(\Omega)e^{j\varphi(\Omega)},$$

gdje su $A(\Omega) = |H(e^{j\Omega})|$; $\varphi(\Omega) = \arg H(e^{j\Omega})$ frekvencijske karakteristike amplitude i faze.

Budući da transfer funkcija ima realne koeficijente $\{a_i\}$ i $\{b_i\}$ izlazi da je

$$H(e^{-j\Omega}) = H^*(e^{j\Omega}),$$

a odatle da je $H_r(e^{j\Omega})$ i $A(\Omega)$ parna, a $H_i(e^{j\Omega})$ i $\varphi(\Omega)$ neparna funkcija od Ω.

Kvadrat amplitude $A^2(\Omega)$ može se dobiti

$$A^2(\Omega) = |H(e^{j\Omega})|^2 = H(e^{j\Omega})\, H(\mathrm{e}^{-j\Omega}).$$

Za projektiranje frekvencijskih karakteristika pogodno je kvadrat amplitude izraziti s

$$A^2(\Omega) = H(e^{j\Omega})H(e^{-j\Omega}) = G\left(\frac{e^{j\Omega} + e^{-j\Omega}}{2}\right) = G(\cos\Omega) = \frac{d_0 + 2\sum_{r=0}^{n} d_r \cos(r\Omega)}{c_0 + 2\sum_{r=0}^{n} c_r \cos(r\Omega)}.$$

<u>Frekvencijska karakteristika sustava I reda.</u>

Uzmimo jednadžbu

$$y(k) - \alpha y(k-1) = \mathrm{U}z^k,\ \mathrm{U} \in \mathbb{R}. \tag{11.28}$$

Partikularno rješenje je $y(k) = Yz^k$

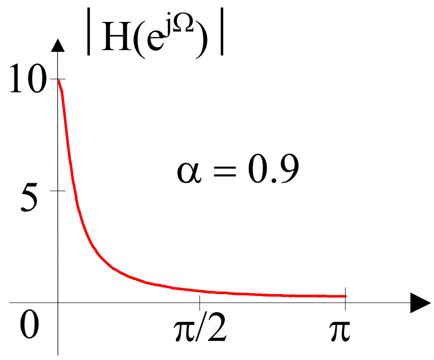
$$Y = \frac{U}{1-\alpha z^{-1}}\bigg|_{z=e^{j\Omega}} = \frac{U}{1-\alpha z^{-j\Omega}}\,.$$

Transfer funkcija odnosno frekvencijska karakteristika

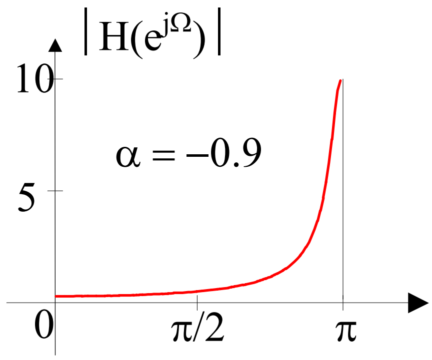
$$Y = \frac{U}{1-\alpha e^{-j\Omega}} = \frac{U}{1-\alpha(\cos\Omega - j\sin\Omega)}\,, \tag{11.29}$$

$$\left|H(e^{j\Omega})\right| = \frac{1}{\left\{(1-\alpha\cos\Omega)^2+(\alpha\sin\Omega)^2\right\}^{1/2}} = \frac{1}{(1+\alpha^2-2\alpha\cos\Omega)^{1/2}}\,. \tag{11.30}$$

Uzmimo primjer $\alpha = 0{,}9$. Izlazi karakteristika na Sl. 11.4.



Sl. 11.4

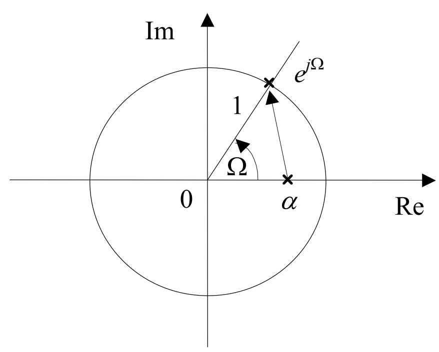


Sl. 11.5

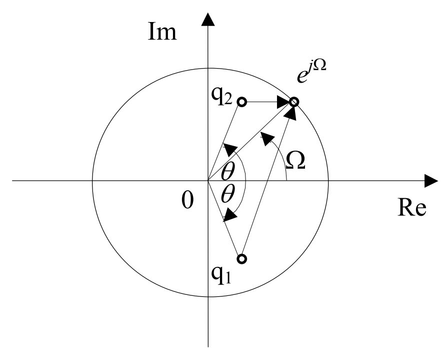
koja predstavlja jednostavni vremenski diskretni nisko-propusni filtar. Za $\alpha = -0{,}9$ dobili bismo visoko-propusni filtar Sl. 11.5.

Do rezultata smo mogli doći praćenjem dužine vektora $(e^{j\Omega} - \alpha)$ kad se Ω mijenja između $(-\pi, \pi)$, odnosno $(0, \pi)$. Nazivnik je najmanji kad Ω prolazi oko $\Omega = 0$.

$$\left|H(e^{j\Omega})\right| = \left|\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}\right| = \frac{1}{\left|e^{j\Omega}-\alpha\right|}\,.$$



Sl. 11.6



Sl. 11.7

Za sustav drugog reda izlazi transfer funkcija oblika

$$H(z) = \frac{1}{(z-q_1)(z-q_2)}\,. \tag{11.31}$$

odnosno za $z = e^{j\Omega}$ frekvencijska karakteristika izlazi

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{(e^{j\Omega} - q_1)(e^{j\Omega} - q_2)}. \tag{11.32}$$

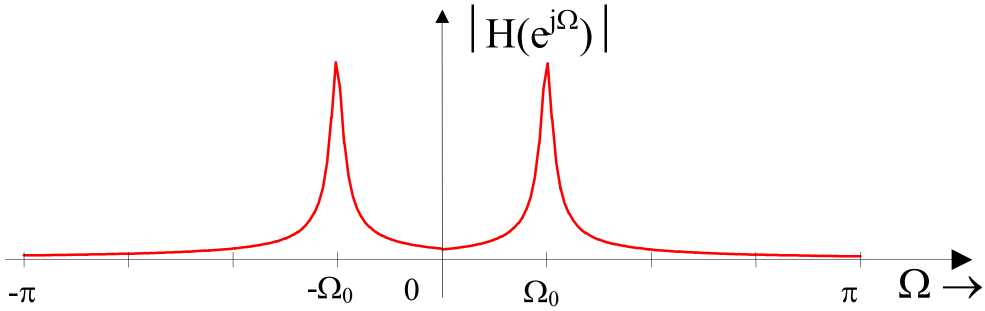
Uzmimo, na primjer $q_1 = 0{,}9e^{j\pi/4}$ i $q_2 = 0{,}9e^{-j\pi/4}$, gdje je $r = 0{,}9$. Za $|H(e^{j\Omega})|$, imamo

$$\left|H(e^{j\Omega})\right| = \frac{1}{\left|(e^{j\Omega} - re^{j\pi/4})(e^{j\Omega} - re^{-j\pi/4})\right|}. \tag{11.33}$$

Uz $r \approx 1$ može se karakteristika aproksimirati s ($\Omega_0 = \pi/4$)

$$\left|H(e^{j\Omega})\right| = \frac{1}{\left[(1-r)^2 + (2(\Omega - \Omega_0)/\Omega_0)^2\right]^{1/2}}, \tag{11.34}$$

što za $r = 0{,}9$ odgovara frekvencijskoj karakteristici titrajnog kruga s rezonantnom frekvencijom $\Omega_0 = \pi/4$ i kvalitetom $Q = 1/(1 - r) = 10$. Sl. 11.8.



Sl. 11.8

Vidimo da se diskretni sustav vlada kao rezonator, odnosno jednostavni pojasno propusni filtar. Vremenski diskretni sustavi se često realiziraju s digitalnim sklopovima, pa se ovakvi sustavi nazivaju u takvoj realizaciji - digitalnim filtrima.

Frekvencijsku karakteristiku se može odrediti grafički iz transfer funkcije predstavljene korijenim faktorima

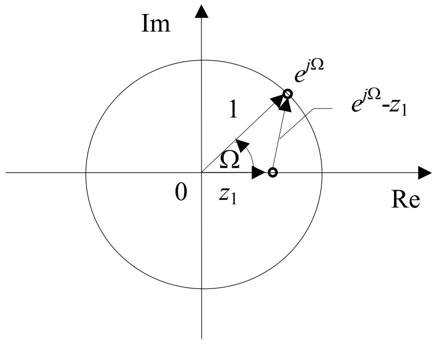
$$H(z) = K\frac{\prod_{i=1}^{m}(z - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(z - q_i)},$$

praćenjem apsolutne vrijednosti $|H(e^{j\Omega})|$ i argumenta $H(e^{j\Omega})$ transfer funkcije na jediničnoj kružnici $z = e^{j\Omega}$ ravnine z.

$$\left|H(e^{j\Omega})\right| = K\frac{\prod_{i=1}^{m}\left|(e^{j\Omega} - z_i)\right|}{\prod_{i=1}^{n}\left|(e^{j\Omega} - q_i)\right|},$$

$$\arg H(z) = \sum\left[\arg(e^{j\Omega} - z_i) - \arg(e^{j\Omega} - q_i)\right].$$

Svako korijeni faktor transfer funkcije daje svoj individualni doprinos veličini (multiplikativno) i fazi (aditivno).



Ti doprinosi se mogu pregledno vidjeti i grafički odrediti ako se nacrta dijagram polova i nula u kompleksnoj ravnini z. Korijeni faktori $(e^{j\Omega} - z_i)$ ili $(e^{j\Omega} - q_i)$ kao kompleksni brojevi mogu se interpretirati kao vektori u kompleksnoj ravnini. Na primjer član $(e^{j\Omega} - z_1)$ čini vektor koji izlazi iz točke z_1 i završava u točki $e^{j\Omega}$, koja se nalazi na jediničnoj kružnici $|z| = 1$, ima dužinu $l = |e^{j\Omega} - z_1|$ i čini kut $\varphi_1 = \arg(e^{j\Omega} - z_1)$ s pozitivnim smjerom realne osi. Taj se vektor može dobiti kao razlika vektora $e^{j\Omega}$, koji izlazi iz ishodišta i završava u točki na jediničnoj kružnici $|e^{j\Omega}| = 1$ i čini kut Ω s pozitivnim smjerom realne osi $\mathrm{Re}\{z\}$ i vektora z_1 ($r_1 = |z_1|$), koji izlazi iz ishodišta i završava u točki z_1.

U skladu s iznesenim vrijednost transfer funkcije na frekvenciji Ω

$$\left|H(e^{j\Omega})\right| = \mathrm{K}\frac{\prod_1^m \mathrm{d}_i}{\prod_1^n \mathrm{l}_i},$$

je, dakle, kvocijent produkta udaljenosti $\{d_i\}$ točke na kružnici $e^{j\Omega}$ do nultočki $\{z_i\}$ i produkta udaljenosti $\{l_i\}$ točke na kružnici $e^{j\Omega}$ do polova $\{q_i\}$.

Fazni kut transfer funkcije $\arg H(e^{j\Omega})$ je

$$\arg H(e^{j\Omega}) = \sum_1^m \varphi_i - \sum_1^n \psi_i,$$

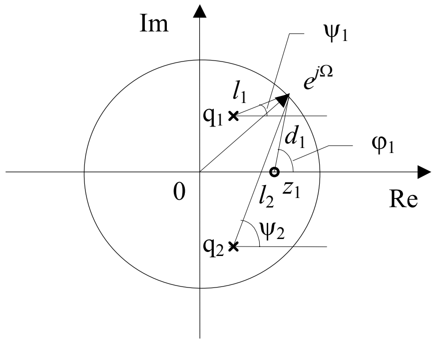
dakle razlika sume kutova $\{\varphi_i\}$ što ih čine spojnice točke na kružnici $e^{j\Omega}$ s nultočkama $\{z_i\}$ i sume kutova $\{\psi_i\}$ što ih čine spojnice točke na kružnici $e^{j\Omega}$ s polovima $\{q_i\}$.

Primjer:

$$H(z) = \mathrm{K}\frac{z - \mathrm{z}_1}{(z - \mathrm{q}_1)(z - \mathrm{q}_2)},$$

$$\left|H(e^{j\Omega})\right| = \mathrm{K}\frac{\mathrm{d}_1}{\mathrm{l}_1\mathrm{l}_2},$$

$$\arg H(e^{j\Omega}) = \varphi_1 - (\psi_1 + \psi_2).$$



Gledajući na promjenu dužina d_i i l_i kad točka $e^{j\Omega}$ putuje po kružnici pri raznim frekvencijama Ω, možemo zaključiti da veličina frekvencije karakteristike prolazi manjim iznosima kad je $e^{j\Omega}$ u blizini nultočaka, a velikim iznosima kad je $e^{j\Omega}$ u blizini polova (maleni l_i).

11.4 Jedinični odziv diferencijskog sustava

Kroneckerov ili delta niz $\{\delta(k)\}$ i Heavisideov niz $\{S(k)\}$ su izrazito važne pobude za analizu sustava. One odgovaraju jediničnom impulsu i stepenici. Ponajprije bitna svojstva sustava se mogu ustanoviti iz odziva $\{h(k)\}$ i $\{g(k)\}$ na takove pobude. S druge strane poznavanje odziva $\{h(k)\}$ i $\{g(k)\}$ može poslužiti za određivanje odziva na bilo koji oblik pobude upotrebom principa superpozicije. Jednadžba diferencija se može riješiti korak po korak, ali analitičko rješenje ima prednost jer daje izraz u kompaktnom obliku, gdje je dana i zavisnost rješenja od parametara sustava.

Pretpostavimo opći oblik jednadžbe (11.1) uz pobudu oblika $u(k) = \delta(k)$ i miran sustav $y(k) = 0$ za $k < 0$.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{a}_n y(k+n) + \mathrm{a}_{n-1} y(k+n-1) + \ldots + y(k) = f(k) = \\
&\quad \mathrm{b}_n \delta(k+n) + \mathrm{b}_{n-1}\delta(k+n-1) + \ldots + \mathrm{b}_0 \delta(k)
\end{aligned}
\tag{11.35}
$$

Iz δ sekvencija na desnoj strani jednadžbe vidimo da $f(k) = 0$ za $k > 0$. Radi toga jedinični odziv $k > 0$ je rješenje homogene jednadžbe, tj. (11.8). Rješenje je linearna kombinacija (11.10)

$$
h(k) = \mathrm{C}_1 y_1(k) + \mathrm{C}_2 y_2(k) + \ldots + \mathrm{C}_n y_n(k) \qquad \text{za } k > 0. \tag{11.36}
$$

Za određivanje n konstanti $\{C_i\}$ potrebno je n podataka odnosno n početnih uvjeta $h(1)$, $h(2)$, …, $h(n)$.

Ovi uvjeti se mogu dobiti iz jednadžbe diferencija i svojstva δ niza da ima član $\delta(k+i) = 1$, za $k = -i$, a $\delta(k+i) = 0$, za $k \neq -i$.

Uz desnu stranu (11.53) možemo napisati $n + 1$ jednadžbu za $k \in [-n, 0]$

$$
\begin{array}{ll}
k = -n; & \mathrm{a}_n h(0) + \mathrm{a}_{n-1} h(-1) + \ldots + \mathrm{a}_0 h(-n) = \mathrm{b}_n \\
k = -n+1; & \mathrm{a}_n h(1) + \mathrm{a}_{n-1} h(0) + \ldots + \mathrm{a}_0 h(-n+1) = \mathrm{b}_{n-1} \\
k = -n+2; & \mathrm{a}_n h(2) + \mathrm{a}_{n-1} h(1) + \ldots + \mathrm{a}_0 h(-n+2) = \mathrm{b}_{n-2} \\
\text{- - - - - - - -} & \text{- -} \\
k = -1; & \mathrm{a}_n h(n-1) + \mathrm{a}_{n-1} h(n-2) + \ldots + \mathrm{a}_0 h(-1) \\
 & = \mathrm{b}_1 \\
k = 0; & \mathrm{a}_n h(n) + \mathrm{a}_{n-1} h(n-1) + \ldots + \mathrm{a}_0 h(0) = \mathrm{b}_0
\end{array}
\tag{11.37}
$$

Budući da je sustav miran, $h(k) = 0$, za $k < 0$ mogu se napisati jednadžbe u obliku

$$
\begin{bmatrix}
\mathrm{a}_n & & & & \\
\mathrm{a}_{n-1} & \mathrm{a}_n & & & \\
\mathrm{a}_{n-2} & \mathrm{a}_{n-1} & \mathrm{a}_n & & \\
\vdots & & & \ddots & \\
\mathrm{a}_0 & \mathrm{a}_1 & \mathrm{a}_2 & \cdots & \mathrm{a}_n
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ \vdots \\ h(n) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \mathrm{b}_n \\ \mathrm{b}_{n-1} \\ \mathrm{b}_{n-2} \\ \vdots \\ \mathrm{b}_0 \end{bmatrix}
\qquad
\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{h} &= \mathbf{b} \\
\mathbf{h} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}
\end{aligned}
\tag{11.38}
$$

Rješenje se može dobiti inverzijom matrice **A**, u kojoj su elementi koeficijenti $\{a_i\}$ jednadžbe diferencija.

Ako se međutim pogledaju jednadžbe, može se napisati rekurzivna formula za postupno računanje svakog člana niza $\{h(k)\}$.

Redak za neki k ima oblik

$$\mathrm{a}_n h(k) + \mathrm{a}_{n-1} h(k-1) + \ldots + \mathrm{a}_0 h(k-n) = \mathrm{b}_{n-k} \tag{11.39}$$

što se vodeći računa da su $h(k) = 0$ za $k < 0$, može napisati u obliku

$$\mathrm{a}_n h(0) = \mathrm{b}_n \text{ , za } k = 0 \tag{11.40}$$

$$\mathrm{a}_n h(k) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{a}_{n-k+i} h(i) = \mathrm{b}_{n-k}, \quad \text{za } 0 < k \le n\,, \tag{11.41}$$

odakle izlazi

$$h(k) = \begin{cases} \mathrm{b}_n / \mathrm{a}_n, & \text{za } k = 0 \\ \left[\mathrm{b}_{n-k} - \sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{a}_{n-k+1} h(i) \right] (1/\mathrm{a}_n), & \text{za } k > 0 \end{cases} \tag{11.42}$$

Sada se mogu odrediti $\{h(k)\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, potrebni za određivanje $\{\mathrm{C}_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. $\{\mathrm{C}_i\}$ će se odrediti iz skupa jednadžbi (11.54) za $k = 1, 2, \ldots, n$.

Za različite korijene karakteristične jednadžbe $q_1, q_2, \ldots, q_n$ izlazi oblik

$$h(k) = \mathrm{C}_1 q_1^{\,k} + \mathrm{C}_2 q_2^{\,k} + \ldots + \mathrm{C}_n q_n^{\,k}\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{11.43}$$

što u matričnoj simbolici vodi na

$$\begin{bmatrix} \mathrm{q}_1 & \mathrm{q}_2 & \cdots & \mathrm{q}_n \\ \mathrm{q}_1^2 & \mathrm{q}_2^2 & \cdots & \mathrm{q}_n^2 \\ \mathrm{q}_1^3 & \mathrm{q}_2^3 & \cdots & \mathrm{q}_n^3 \\ \vdots & & & \\ \mathrm{q}_1^n & \mathrm{q}_2^n & \cdots & \mathrm{q}_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{C}_1 \\ \mathrm{C}_2 \\ \mathrm{C}_3 \\ \vdots \\ \mathrm{C}_\mathrm{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(1) \\ h(2) \\ h(3) \\ \vdots \\ h(n) \end{bmatrix} \tag{11.44}$$

Rješenje

$$\mathbf{QC} = \mathbf{h}, \text{ je } \mathbf{C} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{h}. \tag{11.45}$$

Ako su jednadžbe oblika (11.5) homogeno rješenje (11.43) vrijedi za $k > n$.

Primjer 11.5

Provedimo određivanje odziva na δ niz za jednostavan primjer

$$y(k+2) - 3y(k+1) + 2y(k) = 2u(k+1) - 2u(k),$$

za $u(k) = \delta(k) \rightarrow y(k) = h(k)$,

$k = -2$; $\quad h(0) - 3h(-1) + 2h(-2) = 0 - 0$

$\quad h(0) = 0$

$k = -1$; $\quad h(1) - 3h(0) + 2h(-1) = 2$

$\quad h(1) = 2$

$k = 0$; $\quad h(2) - 3h(1) + 2h(0) = 0 - 2$

$$h(2) = 3 \cdot 2 - 2 = 4$$

Karakteristična jednadžba

$$q^2 - 3q + 2 = 0 \rightarrow q_1 = 1, q_2 = 2,$$

$$h(k) = C_1\, 1^k + C_2\, 2^k\,, \quad \text{za } k>0,$$

$$\left.\begin{aligned} h(1) &= C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 2 = 2 \\ h(2) &= C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 4 = 4 \end{aligned}\right| \cdot 2\,,$$

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 1,$$

$$h(k) = \begin{cases} 0, & k \le 0 \\ 2^k, & k > 0 \end{cases}.$$

Odziv na Heavisideov niz $\{g(k)\}$ može se dobiti iz jediničnog odziva

$$g(k) = \sum_{i=0}^{k} h(i)\,. \tag{11.46}$$

11.5Konvolucijska sumacija

Linearni sustav je karakteriziran svojstvom

$$H(\mathrm{E})[\alpha\{u_1(k)\} + \beta\{u_2(k)\}] = \alpha H(\mathrm{E})\ \{u_2(k)\} + \beta H(\mathrm{E})\ \{u_2(k)\}, \tag{11.47}$$

odnosno za jedinični odziv vrijedi

$$\{h(k)\} = H(\mathrm{E})\ \{\delta(k)\}; \quad H(\mathrm{E})\ \{c\ \delta(k)\} = \{ch(k)\}. \tag{11.48}$$

Za vremenski promjenljiv sustav vrijedi

$$H(\mathrm{E})\ \{\delta(k-i)\} = \{h(k, i)\}. \tag{11.49}$$

Za vremenski nepromjenljiv sustav vrijedi

$$H(\mathrm{E})\ \{\delta(k-i)\} = \{h(k-i)\}. \tag{11.50}$$

Pretpostavimo proizvoljni signal predstavljen s δ nizom

$$u = \ldots u(-1)\ \{\delta(k+1)\} + u(0)\ \{\delta(k)\} + u(1)\ \{\delta(k-1)\} + u(2)\ \{\delta(k-2)\} + \ldots \tag{11.51}$$

$$u(i)\ \{\delta(k-i)\} \rightarrow u(i)\ \{h(k-i)\}.$$

Odziv na niz u je:

$$y = \ldots u(-1)\ \{h(k+1)\} + u(0)\ \{h(k)\} + u(1)\ \{h(k-1)\} + u(2)\ \{h(k-2)\} + \ldots \tag{11.52}$$

Obje sekvence se mogu napisati kraće u obliku tzv. konvolucijske sumacije

$$u = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} u(i)\{\delta(k-i)\}, \quad u = u * \delta, \tag{11.53}$$

$$y = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} u(i)\{h(k,i)\}.\,, \qquad y = u * h. \tag{11.54}$$

k-ti član ili uzorak ove sekvencije je dan s

$$y(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} u(i) h(k,i)..\tag{11.55}$$

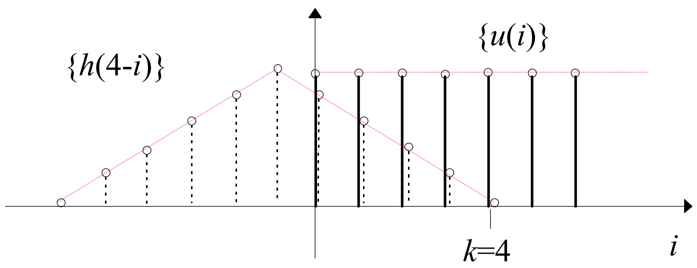
Za vremenski stalan sustav je

$$y(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} u(i)h(k-i), \tag{11.56}$$

ili

$$y(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i)u(k-i). \tag{11.57}$$

Konvolucijska sumacija nam omogućuje određivanje odziva za bilo kakvu pobudu kad je poznat odziv na δ niz. S druge strane ova operacija je veoma važna u teorijskim razmatranjima, i razumijevanju linearnih sustava.



Sl. 11.9

Računanje $y(4) \rightarrow$ Suma produkata uzoraka pobude u i prevrnutog i pomaknutog (za $k = 4$) jediničnog odziva h.

11.6 Dekonvolucija

Dekonvolucija je postupak dobivanja nepoznate pobude $\{u(k)\}$, ako je poznat odziv sustava $\{y(k)\}$.

Pokazana veličina pri nekom mjerenju uvijek je rezultat konvolucije stvarne veličine s odzivom mjernog sustava. Diskretni oblik je

$$y(k) = \sum_{i=0}^{k} u(k-i)h(i) =$$

Konvolucija napisana ovako

$$= u(k)h(0) + \sum_{i=1}^{k} u(k-i)h(i) = y(k), \tag{11.58}$$

vodi na jednostavnu rekurzivnu formulu

$$u(k) = \left[y(k) - \sum_{i=1}^{k} u(k-i)h(i) \right] \frac{1}{h(0)}. \tag{11.59}$$

Sumacija u zagradi upotrebljava uzorke, koji su izračunati u prethodnim koracima postupka tj. $u(0)$, $u(1)$, …, $u(k-1)$.

Ako dva niza daju konvolucijom δ-niz $\{u(k)\}*\{v(k)\} = \{\mathrm{i}(k)\}$ onda su oni međusobno inverzni $\{v(k)\} = \{u(k)\}^{-1}$.

12. $\mathcal{Z}$-TRANSFORMACIJA

12.1 Uvod

Linearni vremenski diskretni sustav je opisan jednadžbom diferencija

$$a_n y(k+n) + \ldots + a_0 y(k) = b_n u(k+n) + \ldots + b_0 u(k).$$

Partikularno rješenje za pobudu oblika Uz^k je istog oblika

$$y_p(k) = Yz^k.$$

To će biti i jedino rješenje ako pobuda u jednom stabilnom sustavu teče od $k = -\infty$.

Uvrštenjem se dobiva da je

$$Y = \frac{b_n z^n + \ldots + b_0}{a_n z^n + \ldots + a_0} U = H(z)U,$$

pa se rješenje može napisati u obliku

$$y(k) = UH(z)z^k. \tag{12.1}$$

Veličina $H(z)$ se naziva transfer funkcija jer zavisi od kompleksne veličine z, koja je za slučaj *eksponencijalne* pobude s frekvencijom ω jednaka $z = e^{j\omega}$ i naziva se frekvencijska karakteristika.

Odziv $y(k)$ se može dobiti i na drugi način, korištenjem superpozicije odnosno konvolucijske sumacije, ako je poznat jedinični odziv $h(k)$.

Za pobudu preko cijele vremenske osi $(-\infty, \infty)$ konvolucijska sumacija je oblika

$$y(k) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l)u(k-l).$$

Za $u(k) = Uz^k$ izlazi

$$y(k) = U\sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l)z^{k-l} = Uz^k \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l)z^{-l}. \tag{12.2}$$

Izjednačavanjem rješenja (12.1) i (12.2) izlazi da je

$$H(z) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l)z^{-l}, \tag{12.3}$$

tj. da je transfer funkcija $H(z)$ vezana s jediničnim odzivom beskonačnom sumacijom.

Frekvencijska karakteristika dobiva se za $z = e^{j\omega}$ u obliku

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l)e^{-j\omega l}. \tag{12.4}$$

Ovdje možemo prepoznati Fourierov red za periodičnu funkciju $H(e^{j\omega})$ perioda 2π.

Veličine $\{h(l)\}$ su amplitude harmonijskih komponenti tog reda. Mogu se dakle dobiti izrazom za Fourierov koeficijent

$$h(l) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega l}d\omega, \tag{12.5}$$

Ovaj par izraza (12.4) i (12.5) za $H(e^{j\omega})$ odnosno $h(k)$ možemo shvatiti kao transformaciju sekvencije $\{h(k)\}$ u spektar $H(e^{j\omega})$ i obratno - dakle $H(e^{j\omega})$ je Fourier-ova transformacija niza $\{h(k)\}$

$$H(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{h(k)\} = \mathrm{VDFT}\{h\}.$$

Par $h(k)$ i $H(z)$, koja je također funkcija kompleksne varijable z, predstavlja transformacijski par, a izraz (12.3) odnosno

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) z^{-k} = \mathcal{Z}\{x(k)\}, \tag{12.6}$$

definira $\mathcal{Z}$-transformaciju niza $\{x(k)\}$, bio on jedinični odziv nekog sustava ili bilo koji drugi niz.

Izraz (12.6) može se interpretirati s Fourierovim redom i kad je z opći kompleksan broj

$$z = re^{j\omega}, \quad r = |z|, \tag{12.7}$$

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \left(re^{j\omega}\right)^{-k},$$

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(x(k) r^{-k}\right) e^{-j\omega k}. \tag{12.8}$$

$X(re^{j\omega})$ je $\mathcal{F}$ transformacija prigušene sekvencije $\{x(k)\, r^{-k}\}$.

Za neki određeni niz $\{x(k)\}$, Fourierov red (12.8) će biti konvergentan za neke vrijednosti r-a. Tako će red koji definira $\mathcal{Z}$ transformacija biti konvergentan u nekom području z-a, koji zovemo područjem konvergencije $\mathcal{Z}$-transformacije.

Inverzija se može dobiti na temelju izraza za Fourierove koeficijente

$$x(k) r^{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(re^{j\omega}) e^{jk\omega} d\omega .$$

Množenjem s r^k i stavljanjem r^k unutar integrala dobivamo

$$x(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(re^{j\omega}) \left(re^{j\omega}\right)^k d\omega \tag{12.9}$$

i promjenom varijable integracije $re^{j\omega} = z$ uz r – konstantan $dz = jre^{j\omega} d\omega$ odnosno $d\omega = \dfrac{dz}{jz}$ izlazi

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{k-1} dz. \tag{12.10}$$

Integracija po ω je preko intervala 2π što u varijabli $z = re^{j\omega}$ odgovara jednom obilasku po kružnici radijusa $|z| = r$, pa bi se integral mogao napisati u obliku integrala u z-ravnini po zatvorenoj krivulji. Za radijus r treba biti izabran neki broj za koji $\mathcal{Z}$ transformacija konvergira. Oblik (12.10) predstavlja opći izraz za inverznu $\mathcal{Z}$ transformaciju. Ali kako će se vidjeti, ima više jednostavnih metoda da se dobije sekvencija iz njene $\mathcal{Z}$ transformacije.

$\mathcal{Z}$ transformacija za linearne vremenski diskretne sustave ima značenje koje ima Laplace-ova transformacija za vremenski kontinuirane.

12.2 Svojstva $\mathcal{Z}$-transformacije

Za kauzalne signale upotrebljava se jednostrana $\mathcal{Z}$-transformacija

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} . \tag{12.11}$$

Ako nije posebno istaknuto govorimo o jednostranoj transformaciji, koja je interesantna za određivanje vladanja vremenski diskretnih sustava.

Dvostrana transformacija se upotrebljava u analizi slučajnih signala i dvostrano beskonačnih sekvencija.

Konvergencija $\mathcal{Z}$-transformacije

Ako niz zadovoljava slijedeće uvjete:

1. $|x(k)| < \infty$ za sve konačne k.
2. postoje pozitivni brojevi A, r i K takvi da $|x(k)| \le Ar^k$ za $k > \mathrm{K}$

tada jednostrana $\mathcal{Z}$-transformacija

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} ,$$

konvergira apsolutno za svaki z sa svojstvom $|z| = \zeta > r$.

Dokaz

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\mathrm{K}-1} x(k) z^{-k}+\sum_{k=\mathrm{K}}^{\infty} x(k) z^{-k} ,$$

$$|X(z)| \le \sum_{k=0}^{\mathrm{K}-1}|x(k)| \zeta^{-k}+\sum_{k=\mathrm{K}}^{\infty}|x(k)| \zeta^{-k} . \tag{12.12}$$

Uvijek postoji broj M takav da je prva suma manja od

$$\sum_{k=0}^{\mathrm{K}-1}|x(k)| \zeta^{-k} \le M \sum_{k=0}^{\mathrm{K}-1} \zeta^{-k} ,$$

odnosno iz točke 2.

$$\sum_{k=\mathrm{K}}^{\infty}|x(k)| \zeta^{-k} \le A \sum_{k=\mathrm{K}}^{\infty}\left(\frac{r}{\zeta}\right)^{k} . \tag{12.13}$$

Odatle slijedi da je

$$|X(z)| \le M \frac{1-\zeta^{-K}}{1-\zeta^{-1}}+A \sum_{k=\mathrm{K}}^{\infty}\left(\frac{r}{\zeta}\right)^{k} . \tag{12.14}$$

Prva suma je konačna za sve ζ i $\mathrm{K} < \infty$, a druga suma (geom. red) je konačna za sve $\zeta >$ r.

Najmanja vrijednost r-a takva da $X(z)$ konvergira apsolutno naziva se radijus apsolutne konvergencije $F(z)$ i označava sa $\zeta_a = r$.

Uzmimo nekoliko sekvencija i odredimo njihovu $\mathcal{Z}$ transformaciju

$$\mathcal{Z}\{\delta(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k) z^{-k} = 1 \qquad ,\zeta_a = 0, \tag{12.15}$$

$$\mathcal{Z}\{S(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} S(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} \qquad ,\zeta_a = 1, \tag{12.16}$$

$$\mathcal{Z}\{\mathrm{a}^k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{a}^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\mathrm{a}}\right)^{-k} = \frac{1}{1-\left(\frac{z}{\mathrm{a}}\right)^{-1}} = \frac{1}{1-\mathrm{a}z^{-1}} = \frac{z}{z-\mathrm{a}} \quad ,|z| > \zeta_a = \mathrm{a}. \tag{12.17}$$

Ako je transformat racionalna funkcija područje konvergencije je izvan najdaljeg pola $|z| > \mathrm{a}_m$.

<u>$\mathcal{Z}$-transformacija je linearna</u>

$$\mathcal{Z}\{\mathrm{a}x(k) + \mathrm{b}y(k)\} = \mathrm{a}X(z) + \mathrm{b}Y(z). \tag{12.18}$$

<u>Pomak unaprijed za n-koraka</u>

$$\mathcal{Z}\{x(k+n)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k+n) z^{-k} = |k+n=j| =$$

$$= \sum_{j=n}^{\infty} x(j) z^{-j+n} = z^n \sum_{j=n}^{\infty} x(j) z^{-j} == z^n \left[\sum_{j=0}^{\infty} x(j) z^{-j} - \sum_{j=0}^{n-1} x(j) z^{-j} \right],$$

$$\mathcal{Z}\{x(k+n)\} = z^n \left[X(z) - \sum_{j=0}^{n-1} x(j) z^{-j} \right]. \tag{12.19}$$

Za $n = 1$ izlazi

$$\mathcal{Z}\{x(k+1)\} = zX(z) - zx(0). \tag{12.20}$$

<u>Kašnjenje za n-koraka</u>

$$\mathcal{Z}\{x(k-n)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k-n) z^{-k} = |k-n=j| =$$

$$= \sum_{j=-n}^{\infty} x(j) z^{-j-n} = z^{-n} \sum_{j=-n}^{\infty} x(j) z^{-j} =$$

$$= z^{-n} \left[\sum_{j=0}^{\infty} x(j) z^{-j} + \sum_{j=-n}^{-1} x(j) z^{-j} \right],$$

$$\mathcal{Z}\{x(k-n)\} = z^{-n} \left[X(z) + \sum_{j=-n}^{-1} x(j) z^{-j} \right], \tag{12.21}$$

$$\mathcal{Z}\{x(k-1)\} = z^{-1}\left[X(z) + x(-1)z\right]. \tag{12.22}$$

<u>Konvolucijska sumacija kauzalnih nizova</u>

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x\} = \mathcal{Z}\{u * h\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \sum_{i=0}^{k} u(i)h(k-i)\,.$$

Inverzijom redoslijeda sumiranja prvo po k, pa onda po i dobivamo

$$X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} u(i) \sum_{k=0}^{\infty} h(k-i) z^{-k} = \left| k - i = j \right| =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} u(i) \sum_{j=-i}^{\infty} h(j) z^{-(i+j)}.$$

Budući da je $h(j) = 0$ za $j < 0$ izlazi

$$X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} u(i) z^{-i} \sum_{j=0}^{\infty} h(j) z^{-j} = U(z)H(z)\,. \tag{12.23}$$

<u>Multiplikacija s a^k</u>, $y(k) = \mathrm{a}^k x(k)$

$$\mathcal{Z}\{y\} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{a}^k x(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \left(\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{a}}\right)^{-k} = X\left(\frac{z}{\mathrm{a}}\right). \tag{12.24}$$

<u>Multiplikacija s $e^{j\omega k}$</u> (frekvencijski pomak)

$$y(k) = x(k)\, e^{j\omega k},$$

$$\mathcal{Z}\{y\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) e^{j\omega k} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \left(\frac{z}{e^{j\omega}}\right)^{-k},$$

$$Y(z) = X(e^{-j\omega} z). \tag{12.25}$$

<u>Multiplikacija s k</u>

$$\mathcal{Z}\{kx(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} kx(k) z^{-k} = z \sum_{k=0}^{\infty} x(k) k z^{-k-1} =$$

$$= z \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \left(-\frac{d}{dz} z^{-k}\right) = -z \frac{d}{dz} \left(\sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}\right) = \tag{12.26}$$

$$= -z \frac{d}{dz} X(z).$$

Može se generalizirati za k^n

$$\mathcal{Z}\{k^n x(k)\} = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^n X(z). \tag{12.27}$$

<u>Početna vrijednost niza</u>

$$x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)\,. \tag{12.28}$$

(Svi članovi reda $X(z)$ iščezavaju za $z \to \infty$ osim nultog).

<u>Konačna vrijednost niza</u>

$$\lim_{k \to \infty} x(k) = \lim_{z \to 1} (z-1) X(z)\,. \tag{12.29}$$

Dokaz slijedi iz razmatranja transformacije s

$$\Delta x(k) = x(k+1) - x(k),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[x(k+1) - x(k)\right]z^{-k} = zX(z) - X(z) - zx(0)\,,$$

odakle izlazi

$$(z-1)X(z) = zx(0) + \sum_{k=0}^{\infty}\left[x(k+1) - x(k)\right]z^{-k}\,,$$

za $z \to 1$ dobivamo

$$\lim_{z\to 1}(z-1)X(z) = \lim_{k\to\infty} x(k)\,.$$

12.3 Inverzna $\mathfrak{z}$-transformacija

Opći izraz je dobiven u obliku integrala po zatvorenoj krivulji. $\mathfrak{z}$ transformacija omogućuje i druge metode posebice zbog toga što se može prikazati u obliku reda i što su funkcije linearnih diferencijskih sustava u donjem području razlomljene racionalne, pa se mogu razviti u parcijalne razlomke.

1. Razvoj u red

Transformacija $Y(z)$ u obliku reda

$$Y(z) = y(0) + y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \dots \tag{12.30}$$

sadržava već veličinu uzoraka $y(k)$ pa se oni mogu odrediti kao koeficijenti potencija od (z^{-1}).

U općem slučaju se taj red može dobiti razvojem funkcije $Y(z)$ u McLaurent-ov red oko točke $z^{-1} = 0$

$$y(k) = \frac{1}{k!}\left.\frac{d^k Y(z^{-1})}{d(z^{-1})^k}\right|_{z^{-1}=0}\,. \tag{12.31}$$

Kad je $Y(z)$ razlomljena racionalna funkcija, koeficijente od (z^{-1}) lakše je dobiti dijeljenjem polinoma brojnika s nazivnikom.

Primjer:

$$Y(z) = \frac{2 - 0{,}5z^{-1}}{1 - 0{,}5z^{-1} - 0{,}5z^{-2}} = 2 + 0{,}5z^{-1} + 1{,}25z^{-2} + 0{,}875z^{-3} + \dots$$

Svaki član odgovara pomaknutom jediničnom uzorku (Kronecker) u domeni koraka (vremena).

$$y(k) = 2\,\delta(k) + 0{,}5\,\delta(k-1) + 1{,}25\,\delta(k-2) + 0{,}875\,\delta(k-3) + \dots$$

Uz malo napora u ovom primjeru možemo prepoznati da se radi o nizu koji se može prikazati kompaktnim izrazom.

$$y(k) = 1 + (-0{,}5)^k \qquad \text{za } k \geq 0.$$

To prepoznavanje međutim u općem slučaju neće biti jednostavno, pa ova metoda služi kad nam treba umjereni broj uzoraka.

Druga metoda se temelji na razvoju racionalne funkcije na parcijalne razlomke. Budući da vrijedi

$$\mathcal{Z}\{a^k\} = \frac{z}{z-a},$$

trebat će razviti $Y(z)$ u sumu takvih elementarnih funkcija, odnosno razlomaka. To se može provesti razvojem funkcije $Y(z)/z$ u razlomke i pomnožiti jednakost sa z.

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A}{z-q_1} + \frac{B}{z-q_2} + \ldots \quad \Bigg| \cdot z \tag{12.32}$$

$$Y(z) = \frac{Az}{z-q_1} + \frac{Bz}{z-q_2} + \ldots \tag{12.33}$$

U gornjem području dobivamo

$$y(k) = Aq_1^k + Bq_2^k + \ldots \tag{12.34}$$

Primjer:

$$Y(z) = \frac{2z^2 - 0.5z}{z^2 - 0.5z - 0.5},$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2z - 0.5}{z^2 - 0.5z - 0.5} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+0.5} \quad \Bigg| \cdot z,$$

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z+0.5}.$$

U domeni koraka izlazi

$$y(k) = 1^k + (-0.5)^k = 1 + (-0.5)^k.$$

Treća mogućnost inverzije temelji se na općem izrazu - integralu po zatvorenoj krivulji radijusa većeg od radijusa apsolutne konvergencije. Integral se može odrediti upotrebom teorema residuuma

$$y(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint Y(z) z^{k-1} dz = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}_i\left[Y(z)z^{k-1}\right]. \tag{12.35}$$

Za residuum vrijedi

$$\mathrm{Res}_i\left[Y(z)z^{k-1}\right] = \lim_{z\to z_i}\left[Y(z)z^{k-1}(z-z_i)\right]. \tag{12.36}$$

Primjer:

$$Y(z) = \frac{2z^2 - 0{,}5z}{z^2 - 0{,}5z - 0{,}5}.$$

Polovi $Y(z)$ kao i prije su $q_1 = 1$, $q_2 = -0{,}5$

$$y(k) = \mathrm{Res}_1 \frac{2z^2 - 0{,}5z}{z^2 - 0{,}5z - 0{,}5} z^{k-1} + \mathrm{Res}_2 \frac{2z^2 - 0{,}5z}{z^2 - 0{,}5z - 0{,}5} z^{k-1},$$

$$y(k) = \frac{2z - 0{,}5}{(z-1)(z+0{,}5)}(z-1)z^k \Bigg|_{z=1} + \frac{2z - 0{,}5}{(z-1)(z+0{,}5)}(z+0{,}5)z^k \Bigg|_{z=-0{,}5},$$

$$y(k)=\frac{2-0{,}5}{1+0{,}5}\cdot 1^k+\frac{-2\cdot 0{,}5-0{,}5}{-0{,}5-1}(-0{,}5)^k\,.$$

$$y(k)=1+(\text{-}0{,}5)^k,\qquad \text{za } k\geq 0\,.$$

12.4 Rješenje jednadžbi diferencija upotrebom $\mathfrak{z}$-transformacije

Uzmimo jednadžbu diferencija drugog reda.

$$a_2y(k+2)+a_1y(k+1)+a_0y(k)=b_1u(k+1)+b_0u(k). \tag{12.37}$$

Korištenjem linearnosti i pravila za $\mathfrak{z}$-transformaciju pomaknutog niza dobivamo

$$a_2[z^2Y(z)-z^2y(0)-zy(1)]+a_1[zY(z)-zy(0)]+a_0Y(z)=$$
$$=b_1[zU(z)-zu(0)]+b_0U(z). \tag{12.38}$$

Nakon sređivanja imamo

$$[a_2z^2+a_1z+a_0]Y(z)=[b_1z+b_0]U(z)-b_1zu(0)+a_2z^2y(0)+a_2zy(1)+a_1zy(0). \tag{12.39}$$

Dijeljenjem dobivamo $Y(z)$ eksplicitno

$$Y(z)=\frac{b_1z+b_0}{a_2z^2+a_1z+a_0}U(z)+E(z)\,. \tag{12.40}$$

U $E(z)$ sadržani su članovi koji zavise od početnih veličina $u(0)$, $y(0)$, $y(1)$. Ako razmatramo sustav kod kojeg su početni uvjeti nula, imamo

$$Y(z)=\frac{b_1z+b_0}{a_2z^2+a_1z+a_0}U(z)=H(z)U(z)\,. \tag{12.41}$$

$H(z)$ je transfer funkcija vremenski diskretnog sustava.

Za pobudu jediničnim uzorkom

$$u(k)=\delta(k),\;\; U(z)=1,$$

dobivamo

$$Y(z)=H(z), \tag{12.42}$$

Zaključujemo da je transfer funkcija $\mathfrak{z}$-transformat odziva na pobudu $\{\delta(k)\}$.

Primjer: Pobuđeni mirni sustav drugog reda

$$y(k+2)+y(k+1)+0{,}21y(k)=(-1)^k.$$

Transformacijom uz $y(1)=y(0)=0$ dobivamo

$$(z^2+z+0.21)Y(z)=\frac{z}{z+1},$$

odnosno

$$Y(z)=\frac{1}{z^2+z+0.21}\cdot\frac{z}{z+1},$$

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{A}{z+0.3}+\frac{B}{z+0.7}+\frac{C}{z+1},$$

$$A=\frac{1}{0.28}\;\;B=-\frac{1}{0.12}\;\;C=\frac{1}{0.21},$$

$$y(k) = \frac{(-0.3)^k}{0.28} - \frac{(-0.7)^k}{0.12} + \frac{(-1)^k}{0.21}.$$

13. MODEL LINEARNOG VREMENSKI DISKRETNOG SUSTAVA S VARIJABLAMA STANJA

13.1 Uvod

Vremenski diskretan sustav je linearan i vremenski invarijantan ako se može opisati jednadžbama

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k), \tag{13.1}$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k), \text{ za } k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{13.2}$$

gdje su $\mathbf{x}(k)$, $\mathbf{u}(k)$, $\mathbf{y}(k)$ vektori stanja, pobude i izlaza u koraku k, dok su $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ matrica sustava, ulazna matrica, izlazna matrica i matrica direktnog prijenosa s realnim i konstantnim elementima. Gornja vektorska jednadžba stanja (13.1) je identična skupu od n linearnih jednadžbi diferencija

$$x_i(k+1) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(k) + \sum_{l=1}^{m} b_{il} u_l(k)\,;\; i = 1,2,\ldots,n\,. \tag{13.3}$$

Izlazna jednadžba (13.2) identična je skupu r linearnih algebarskih jednadžbi

$$y_i(k) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j(k) + \sum_{l=1}^{m} d_{il} u_l(k)\,;\; i = 1,2,\ldots,r\,. \tag{13.4}$$

Na temelju gornjih jednadžbi može se nacrtati blokovski dijagram. Linearne kombinacije desne strane se realiziraju bezmemorijskim dijelom (zbrajanja i množenja s konstantom) i daju stanje u koraku $(k + 1)$, dok element jediničnog kašnjenja tog stanja daje stanje u k-tom koraku. Odatle slijedi kao i iz jednadžbe stanja da poznavanjem stanja $x(k)$ i pobude $u(k)$ u koraku k možemo odrediti stanje $x(k + 1)$, odnosno korak po korak stanje u bilo kojem koraku k, počevši od $k = 0$.

Sustav drugog reda

$$x_1(k+1) = a_{11}x_1(k) + a_{12}x_2(k) + b_{11}u_1(k) + b_{12}u_2(k),$$

$$x_2(k+1) = a_{21}x_1(k) + a_{22}x_2(k) + b_{21}u_1(k) + b_{22}u_2(k),$$

ima blok dijagram na Sl. 7.15 uz blok jediničnog kašnjenja umjesto integratora.

Kabelski blok dijagram je na Sl. 7.16. Blokovski dijagram će olakšati pisanje programa za simulaciju na digitalnom računalu ili tzv. diferencijalnom analizatoru.

13.2 Jednadžbe stanja u domeni $\mathcal{Z}$-transformacije

Neka $\mathcal{Z}$-transformacija ulaza, izlaza i stanja sustava bude označena vektorima

$$\mathbf{U}(z) = \mathcal{Z}\{\mathbf{u}(k)\},\ \mathbf{Y}(z) = \mathcal{Z}\{\mathbf{y}(k)\},\ \mathbf{X}(z) = \mathcal{Z}\{\mathbf{x}(k)\}.$$

Transformacija jednadžbe stanja (13.1)

$$z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{B}\mathbf{U}(z),$$

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(z) = z\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{U}(z),$$

dobivamo $\mathbf{X}(z)$ eksplicitno

$$\mathbf{X}(z) = z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(z). \tag{13.5}$$

Izlazna jednadžba je (13.2)

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}\mathbf{X}(z) + \mathbf{D}\mathbf{U}(z), \tag{13.6}$$

odnosno

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z\mathbf{x}(0) + [\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\ \mathbf{U}(z). \tag{13.7}$$

Izlaz mirnog sistema $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ biti će određen s

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{H}(z)\ \mathbf{U}(z), \tag{13.8}$$

gdje je matrica $\mathbf{H}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$ transfer matrica vremenski diskretnog sistema.

Za sistem s jednim ulazom i jednim izlazom matrica $\mathbf{B}$ je stupčasta $\mathbf{b}$, matrica $\mathbf{C}$ redna $\mathbf{c}^t$, a matrica $\mathbf{D}$ jedan element d, pa je transfer funkcija sustava dana s

$$H(z) = \mathbf{c}^t(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d. \tag{13.9}$$

Matrica $\hat{\mathbf{\Phi}}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z$ je rezolventa sustava i može se dobiti iz

$$\hat{\mathbf{\Phi}}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z = \frac{z\,\mathrm{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A})}. \tag{13.10}$$

13.3 Prijelaz iz modela s ulazno-izlaznim varijablama u model s varijablama stanja

Izložene metode razlaganja sistema u podsisteme: direktna, iterativna i paralelna omogućuju predstavljanje blok dijagramima kao na Sl. 7.17, Sl. 7.18, Sl. 7.19 i Sl. 7.22 te pisanje jednadžbe u obliku (7.69), (7.70), (7.85), (7.86), (7.87), (7.88), (7.95) i (7.96), samo što s lijeva umjesto derivacije $\dot{x}$ stoji varijabla stanja u koraku $(k + 1)$. Ostale varijable su u koraku k.

Sve rečeno o transformaciji varijabli u 7.13, te osmotrivosti i upravljivosti u 7.14 vrijedi i za vremenski diskretne sustave.

13.4 Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava

Vektorska jednadžba sustava

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k),$$

može se riješiti korak po korak počevši od $k = k_0$, ako je poznato početno stanje $\mathbf{x}(k_0)$ i ulazni niz $\{\mathbf{u}(k_0), \mathbf{u}(k_0 + 1), \ldots, \mathbf{u}(k), \ldots\}$. Za $k_0 = 0$ rekurzivni postupak daje

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(0),\\
\mathbf{x}(2) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) =\\
&= \mathbf{A}[\mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(0)] + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) =\\
&= \mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1),\\
\mathbf{x}(3) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(2) + \mathbf{B}\mathbf{u}(2) =\\
&= \mathbf{A}[\mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1)] + \mathbf{B}\mathbf{u}(2)
\end{aligned}$$

$$=$$

$$= \mathbf{A}^3\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^2\mathbf{Bu}(0) + \mathbf{ABu}(1) + \mathbf{Bu}(2),$$

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-1-j}\mathbf{Bu}(j)\,. \tag{13.11}$$

Stanje u koraku k je određeno i rezultira iz početnog stanja $\mathbf{x}(0)$ i pobude $\{\mathbf{u}(k)\}$.

Nepobuđeni sistem ima odziv

$$\mathbf{x}_{\text{nepob.}}(k) = \mathbf{A}^k\,\mathbf{x}(0) = \Phi(k)\,\mathbf{x}(0), \tag{13.12}$$

gdje je $\Phi(k) = \mathbf{A}^k$ fundamentalna matrica sistema i odgovara matričnoj eksponencijali $\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}$.

Drugi dio je stanje mirnog sistema u koraku k

$$\mathbf{x}_{mirni}(k) = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-1-j}\mathbf{Bu}(j) = \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(k-1-j)\mathbf{Bu}(j)\,, \tag{13.13}$$

dano je konvolucijskom sumacijom. Izlaz sistema je dan s

$$\mathbf{y}(k) = \begin{cases} \mathbf{Cx}(0) + \mathbf{Du}(0)\,, & k = 0 \\ \mathbf{CA}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{CA}^{k-1-j}\mathbf{Bu}(j) + \mathbf{Du}(k)\,, & k > 0 \end{cases} \tag{13.14}$$

<u>Odziv sustava na jedinični uzorak</u>

$$\{\mathbf{u}(k)\} = \{\mathbf{U}\delta(k)\}\ ;\ \mathbf{u}(k) = \mathbf{U}\delta(k).$$

Stanje sustava je dano s

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-1-j}\mathbf{BU}\delta(j)\,, \tag{13.15}$$

$$\mathbf{x}(k) = \begin{cases} \mathbf{x}(0)\,, & k = 0 \\ \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{BU}\,, & k > 0 \end{cases}$$

Uzorak pobude u $k = 0$ utječe tek na stanje u prvom uzorku.

Izlaz je dan s

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{CA}^k\,\mathbf{x}(0) + \mathbf{CA}^{k-1}\,\mathbf{BU} + \mathbf{DU}\delta(k). \tag{13.16}$$

Izlaz mirnog sustava $\mathbf{x}(0) = 0$ koji predstavlja jedinični odziv sustava je

$$\mathbf{h}(k) = \begin{cases} \mathbf{DU}\,, & k = 0, \\ \mathbf{CA}^{k-1}\mathbf{BU}, & k > 0. \end{cases} \tag{13.17}$$

13.5 Rješenje vektorske jednadžbe diferencija $\mathcal{Z}$-transformacijom

Promatrajmo ranije dobiveni izraz (13.5)

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z\,\mathbf{x}(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{BU}(z).$$

Za nepobuđeni sustav dobivamo

$$\mathbf{x}_{\text{nepob.}}(k) = [\mathcal{Z}^{-1}\{(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z\}]\,\mathbf{x}(0) = \mathcal{Z}^{-1}\{\hat{\Phi}\ (z)\,\mathbf{x}(0)\}, \tag{13.18}$$

a za mirni dio

$$\mathbf{x}_{\text{mirni}}(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{BU}(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\{z^{-1}\,[\hat{\mathbf{\Phi}}\,(z)\,\mathbf{BU}(z)]\}. \tag{13.19}$$

Izjednačenjem ranijeg rezultata izlazi

$$\mathcal{Z}\{\mathbf{A}^k\} = z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{z\,\mathrm{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A})}, \tag{13.20}$$

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{j=0}^{k-1}\mathbf{A}^{k-1-j}\mathbf{Bu}(j)\right\} = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}(z). \tag{13.21}$$

Odziv nepobuđenog sustava se može dobiti izloženim postupcima za kontinuirane sustave. Leverier-ovim algoritmom možemo odrediti matrice $\mathbf{F}_i$ u

$$\hat{\mathbf{\Phi}}(z) = \frac{z(\mathbf{F}_1 z^{n-1} + \mathbf{F}_2 z^{n-2} + \ldots + \mathbf{F}_n)}{z^n + \mathrm{d}_1 z^{n-1} + \ldots + \mathrm{d}_n}. \tag{13.22}$$

Počevši od $\mathbf{F}_1 = \mathbf{I}$ računa se $\mathbf{d}_\nu = -\frac{1}{\nu}\mathrm{tr}\,\mathbf{AF}_\nu$, te $\mathbf{F}_{\nu+1} = \mathbf{AF}_\nu + \mathbf{d}_\nu\mathbf{I}$ za $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

Rezolventa se može razviti u parcijalne razlomke da bi se odredila fundamentalna matrica u kompleksnom obliku, a ne kao $\mathbf{A}^k$.

Razvoj se može napisati u obliku

$$\hat{\mathbf{\Phi}}(z) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} K_{ij}\,\frac{z}{(z - \mathrm{z}_i)^j}. \tag{13.23}$$

Inverzna $\mathcal{Z}$ transformacija daje

$$\hat{\mathbf{\Phi}}(k) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} L_{ij}\,k^{j-1}\mathrm{z}_i^{\,k}, \tag{13.24}$$

sumu potencija vlastitih frekvencija z_i eventualno množenih s polinomom $m_i - 1$ reda u varijabli k.

Elementi matrica K_{ij} i L_{ij} slijede iz razvoja u parcijalne razlomke.

13.6 Upravljivost stanja diskretnog sustava

Uvjeti upravljivosti su jednaki za sustav jednadžbi diferencija kao i za sustav diferencijalnih jednadžbi pokazan kod kontinuiranih sustava.

Drugi pristup upravljivosti je Kalmanov. Uvjeti upravljivosti stanja sistema dobiveni su postavkom da je sistem upravljiv ako se iz bilo kojeg početnog stanja sistema može sistem prevesti u bilo koje krajnje stanje diskretnim signalom u konačnom broju koraka $k_f \geq n$. Jednadžba stanja diskretnih sistema je

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{Ax}(k) + \mathbf{Bu}(k), \tag{13.25}$$

gdje ćemo zbog jednostavnosti pretpostaviti $u(k)$ kao skalar.

Gornji zahtjev neće izgubiti od svoje općenitosti ako za konačno stanje sistema izaberemo nulto stanje, tj. $\mathbf{x}(k_f) = \mathbf{0}$, a početno stanje potpuno po volji.

Ako je dakle stalni sistem upravljiv moći će se primjenom signala $\{u(0), u(1), u(2), \ldots, u(k_f - 1)\}$ gdje je $k_f \geq n$ iz proizvoljnog stanja $\mathbf{x}(0)$ prevesti u mirno stanje.

$$\mathbf{x}(k_f) = \mathbf{0} = \sum_{j=0}^{k_f-1} \mathbf{A}^{k_f-j-1}\mathbf{B}u(j) + \mathbf{A}^{k_f}\mathbf{x}(0)\,. \tag{13.26}$$

Odatle slijedi (za najmanji broj koraka $k_f = n$) da je

$$\mathbf{x}(0) = -\sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{A}^{-j-1}\mathbf{B}u(j)\,. \tag{13.27}$$

Budući da je matrica **B**, $n\times 1$ i matrica **A** nesingularna $n\times n$ veličina $\mathbf{A}^{-j-1}\mathbf{B}$ je vektor odnosno stupčasta matrica, pa se gornji izraz može prikazati kao produkt vektora $\bar{\mathbf{u}} = \{u(0), u(1), \ldots, u(n-1)\}$ i jedne nove matrice čiji stupci su vektori $\mathbf{A}^{-j-1}\mathbf{B}$ za $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

$$\mathbf{x}(0) = -[\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\ \ \mathbf{A}^{-2}\mathbf{B}\ \ldots\ \mathbf{A}^{-n}\mathbf{B}]\ \bar{\mathbf{u}}\,. \tag{13.28}$$

Ako ova jednakost treba dati rješenje za $\bar{\mathbf{u}}$ pri bilo kojem skupu vrijednosti $\mathbf{x}(0) = \{x_1(0),\ x_2(0),\ \ldots,\ x_n(0)\}^t$, tada matrica $\mathbf{G} = [\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\ \ \mathbf{A}^{-2}\mathbf{B}\ \ldots\ \mathbf{A}^{-n}\mathbf{B}]$ ne smije biti singularna, pa prema tome stupci te matrice su linearno nezavisni vektori, odnosno matrica je ranga n.

Budući da matrica **A** nije singularna, onda se može napisati zahtjev da matrica

$$[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \ldots\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}], \tag{13.29}$$

mora biti ranga n ako se želi da je sistem potpuno upravljiv.

Ako je sistem potpuno upravljiv tada se može bilo koje početno stanje prevesti u nulto stanje u n koraka. Pri tom na veličinu uzoraka $u(k)$ nije stavljeno nikakvo ograničenje. Ukoliko je veličina uzoraka omeđena, može trebati katkada više koraka od n.

13.7 Osmotrivost sustava

Za sustav se kaže da je osmotriv ako poznavanje izlaznih signala za konačan broj koraka omogućuje određivanje početnog stanja sustava.

Stanje vremenski stalnog sustava je određeno s

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k\,\mathbf{x}(0), \tag{13.30}$$

a izlaz s

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{CA}^k\,\mathbf{x}(0). \tag{13.31}$$

Potpuna osmotrivost znači da iz $\mathbf{y}(0), \mathbf{y}(1), \ldots, \mathbf{y}(n-1)$ možemo odrediti $x_1(0), x_2(0), \ldots, x_n(0)$

$$\begin{aligned} &\mathbf{y}(0) = \mathbf{Cx}(0),\\ &\mathbf{y}(1) = \mathbf{CAx}(0),\\ &\text{-------------------------}\\ &\mathbf{y}(n-1) = \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{x}(0) \end{aligned} \tag{13.32}$$

.

Ako je izlazni vektor p-dimenzionalan, gornjih n jednadžbi predstavlja np jednadžbi za $x_1(0),\ x_2(0),\ \ldots,\ x_n(0)$ iz kojih mi moramo biti u stanju napisati n linearno nezavisnih jednadžbi. To traži da matrica

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \tag{13.33}$$

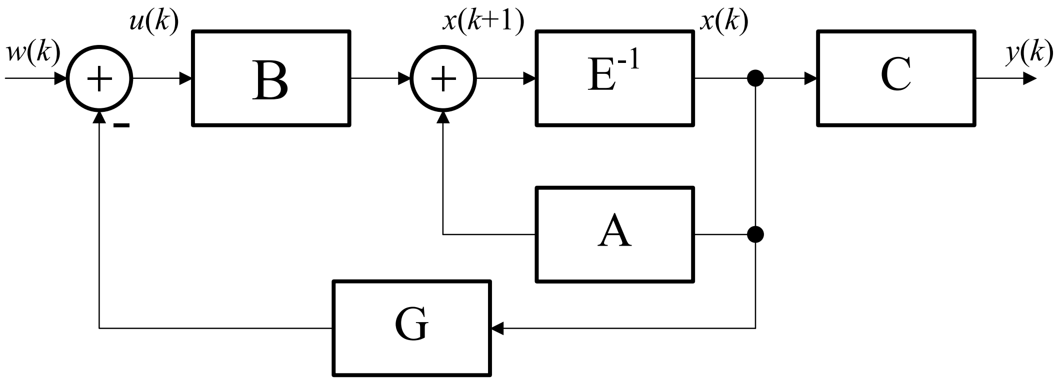
mora biti n-tog ranga.

13.8 Sustav s povratnom vezom

Povratna veza je vrlo efikasan način da se načini sistem s ponašanjem koje specificira projektant.

Polazni sistem može biti nezadovoljavajuće spor, suviše oscilatoran, čak može biti i nestabilan. Sve to određuju karakteristične vrijednosti matrice **A**.

Jednostavan način da se korigiraju odzivna svojstva sustava je vraćanje signala proporcionalnog stanju sustava na ulaz sustava (Sl. 13.1.).



Sl. 13.1

Signal $\mathbf{u}(k)$ koji upravlja sustavom je razlika ulaznog signala i vraćenog signala koji je proporcionalan iznosima varijabli stanja. Tu proporcionalnost određuju elementi matrice **G**. Napišimo jednadžbe sustava uz $\mathbf{D} = 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{Ax}(k) + \mathbf{Bu}(k), \\ \mathbf{u}(k) &= \mathbf{w}(k) - \mathbf{Gx}(k), \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{Cx}(k), \end{aligned} \tag{13.34}$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{Ax}(k) + \mathbf{B}(\mathbf{w}(k) - \mathbf{Gx}(k)),$$

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{BG})\mathbf{x}(k) + \mathbf{Bw}(k), \tag{13.35}$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \overline{\mathbf{A}}\,\mathbf{x}(k) + \mathbf{Bw}(k). \tag{13.36}$$

Ponašanje sustava će određivati matrica $\overline{\mathbf{A}}$ i njene karakteristične frekvencije q_k. $\overline{\mathbf{A}}$ je matrica sustava uz zatvorene petlje povratnih veza.

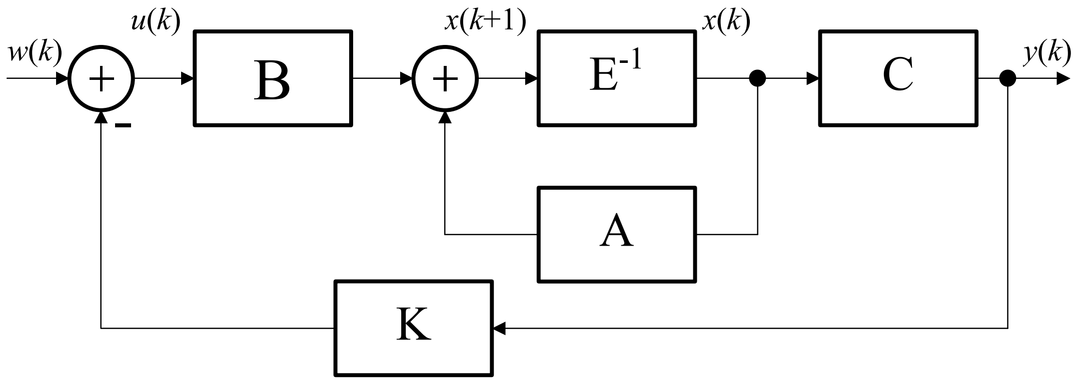
Možemo očekivati da se može naći barem jedna matrica **G** koja osigurava da sve karakteristične vrijednosti imaju apsolutnu vrijednost manju od jedan, tako da je sustav stabilan. Što više, treba naći za bilo koje **A** i **B** matricu **G** takvu da n karakterističnih vrijednosti matrice $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{BG}$ podese na specificirane vrijednosti.

Budući da karakteristične vrijednosti matrice $\overline{\mathbf{A}}$ određuju mijenjanje stanja, vidimo da upotrebom povratne veze možemo podesiti odziv odnosno dinamičko ponašanje sustava.

Može se dokazati da za upravljivi sustav postoji najmanje jedna matrica **G** takva da karakteristične vrijednosti $q_1, \ldots, q_n$ matrice $\overline{\mathbf{A}}$ budu jednake zadanima.

13.9 Povratna veza s izlaza sustava

U sustavu s povratnom vezom od varijabli stanja mi pretpostavljamo da su varijable stanja dostupne ili mjerljive. Međutim, ima mnogo slučajeva kad su u sustavu dostupne samo izlazne varijable tako da mogućnost da se korigira dinamika sustava povratnom vezom postoji samo s izlaznih varijabli, Sl. 13.2.



Sl. 13.2

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k), \tag{13.37}$$

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{w}(k) - \mathbf{K}\mathbf{y}(k), \tag{13.38}$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k),$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(\mathbf{w}(k) - \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{x}(k)),$$

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{w}(k). \tag{13.39}$$

Jednadžba stanja je opet

$$\mathbf{x}(k+1) = \overline{\mathbf{A}}\,\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{w}(k), \tag{13.40}$$

ali matrica $\overline{\mathbf{A}}$ uz zatvorenu petlju zavisi od matrice **A** otvorenog sustava i matrica **B** i **C**, te matrice povratne veze **K**. Ako je odziv izvornog sustava nezadovoljavajući, mi ćemo pokušati naći matricu **K** takvu da sustav ima željeni odziv.

To se, međutim, ne može postići za bilo kakvu matricu **B** i **C**, tako da se taj zahtjev nekad može a nekad ne može ostvariti.

Znači da povratna veza s varijablama stanja osigurava potpunu kontrolu dinamičkog ponašanja sustava dok povratna veza s izlaznih varijabli to ne omogućava uvijek.

Zato se često u sustavima s povratnom vezom dodaju sklopovi koji na temelju mjernih veličina određuju točno ili približno (estimatori) stanje sustava, da bi se mogla praktički realizirati povratna veza s varijabli stanja i time omogućila realizacija sustava željenih svojstava.

14. EKVIVALENCIJA VREMENSKI KONTINUIRANOG I DISKRETNOG SIGNALA I SUSTAVA

14.1 Vremenska diskretizacija tipkanjem kontinuiranog signala

Vezu između vremenski kontinuiranog i diskretnog signala možemo analizirati upotrebom Dirac-ove delta funkcije (ili jediničnog impulsa) budući da je ona definirana u kontinuiranom vremenu, ali protezanje npr. $\delta(t-\mathrm{t}_0)$ u vremenu je ograničeno na točku lociranu na mjestu gdje njen argument prolazi kroz nulu, tj. $t=\mathrm{t}_0$.

Postupak uzimanja uzoraka ili tipkanja kontinuiranog signala $f(t)$ možemo matematički modelirati kao pridruživanje funkciji f niza impulsa f_s, čiji intenzitet je proporcionalan trenutnim vrijednostima kontinuiranog signala.

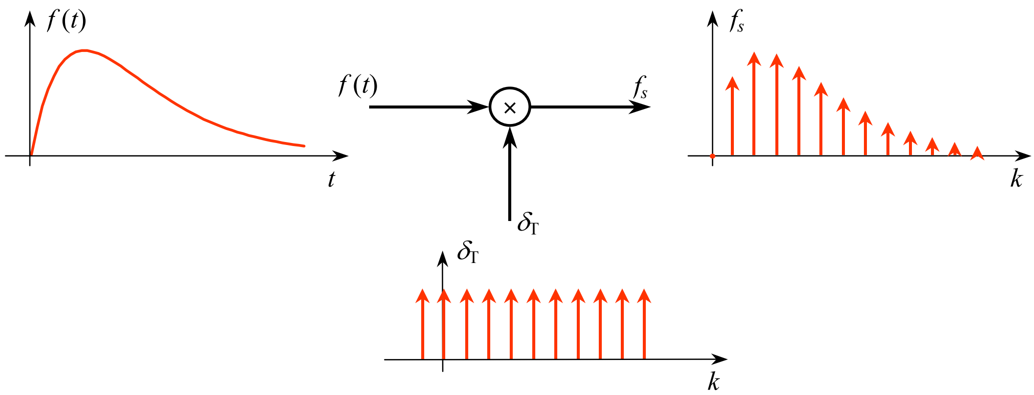
$$f_s(t)=S_T\{f(t)\}. \tag{14.1}$$

Možemo to interpretirati kao modulaciju impulsnog niza

$$\delta_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-k\mathrm{T}) \tag{14.2}$$

funkcijom f, tj.

$$f_s(t)=f(t)\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-k\mathrm{T}) \tag{14.3}$$



Sl. 14.1

Zbog svojstva delta funkcije da vadi vrijednost kontinuirane funkcije na mjestu diskontinuiteta $t-k\mathrm{T}=0$, tj. $\mathrm{t}_k=k\mathrm{T}$, vrijedi $(f(t)\delta(t\text{-}k\mathrm{T})=f(kT)\delta(t\text{-}k\mathrm{T}))$, te se izraz (14.3) može napisati i u obliku

$$f_s(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f(k\mathrm{T})\delta(t-k\mathrm{T}). \tag{14.4}$$

Uvjete ekvivalencije kontinuiranog i diskretnog signala dobivenog postupkom otipkavanja najlakše je pratiti preko njihovih spektara.

Neka signal f ima spektar F

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt. \tag{14.5}$$

Iz spektra se može doći do same funkcije inverznim Fourierovim integralom

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega. \tag{14.6}$$

Periodičan niz δ_T nastao ponavljanjem delta funkcije svakih T, kao svaka periodična funkcija se dade predstaviti Fourierovim redom, gdje su amplitude dane s

$$F_n = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} \delta(t)e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{\mathrm{T}}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}. \tag{14.7}$$

Odatle

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} = \frac{1}{\mathrm{T}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_0 t}. \tag{14.8}$$

Spektar F_s otipkanog signala f_s može se dobiti iz (14.3) i (14.8)

$$F_s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_s(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{1}{\mathrm{T}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt. \tag{14.9}$$

Zamjenom redoslijeda sumacije i integracije dobivamo

$$F_s(\omega) = \frac{1}{\mathrm{T}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j(\omega - n\omega_0)t} dt. \tag{14.10}$$

Integral je spektar funkcije f, ali pomaknut za $n\omega_0$, pa izlazi

$$F_s(\omega) = \frac{1}{\mathrm{T}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - n\omega_0). \tag{14.11}$$

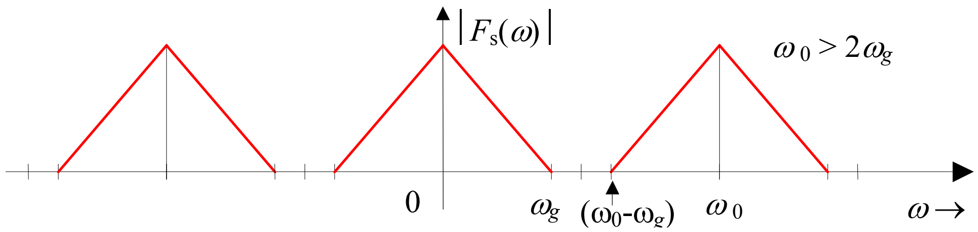
Spektar otipkanog signala f_s je periodično ponavljani spektar kontinuiranog signala s periodom ω_0.

Spektar $F_s(\omega)$ je kako se obično kaže periodično produženje spektra $F(\omega)$.

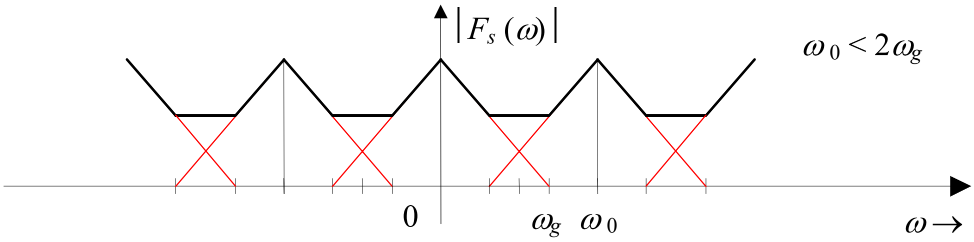
Pretpostavimo da je spektar $F(\omega)$ frekvencijski ograničen

$$F(\omega) = 0 \text{ za } |\omega| > \omega_g \tag{14.12}$$

Različite frekvencije tipkanja signala $\omega_0 = 2\pi/\mathrm{T}$ mogu u spektru $F_s(\omega)$ izazvati različite rezultate zavisno od toga da li je $\omega_0 - \omega_g > \omega_g$ odnosno $\omega_0 > 2\omega_g$, ili $\omega_0 < 2\omega_g$.



Sl. 14.2



Sl. 14.3

Vidimo da je u slučaju $\omega_0 < 2\omega_g$ nastupilo preklapanje sekcija spektra koje se u engleskoj literaturi naziva aliasing.

Diskretni se signal može smatrati ekvivalentnim kontinuiranom samo ako je moguće rekonstruirati izvorni signal iz otipkanog, odnosno ako se iz spektra $F_s(\omega)$ može dobiti originalni $F(\omega)$. Taj postupak pretpostavlja izdvajanje osnovne sekcije spektra filtriranjem. To će biti moguće načiniti bez pogreške samo ako je spektar $F(\omega)$ ograničen na ω_g, te ako je frekvencija otipkavanja $\omega_0 > 2\omega_g$.

14.2 Obnavljanje kontinuiranog signala iz diskretnog

Periodičan spektar $F_s(\omega)$ se može predstaviti korištenjem izraza (14.4), gdje su prisutni uzorci $f(k\mathrm{T})$.

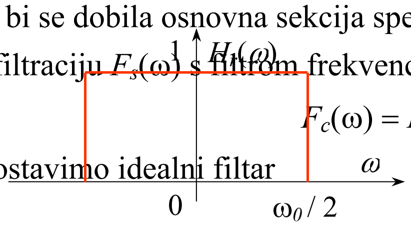
$$F_s(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\mathrm{T})\delta(t - k\mathrm{T})e^{-j\omega t}dt \tag{14.13}$$

$$F_s(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\mathrm{T})e^{-j\omega kT}. \tag{14.14}$$

u kojem možemo prepoznati Fourierov red za periodični spektar $F_s(\omega)$.

Da bi se dobila osnovna sekcija spektra $F_c(\omega)$, odnosno po mogućnosti $F(\omega)$, potrebno je izvršiti filtraciju $F_s(\omega)$ s filtrom frekvencijske karakteristike $H_r(\omega)$,

$$F_c(\omega) = F_s(\omega)\, H_r(\omega) \tag{14.15}$$



Pretpostavimo idealni filtar

$$H_r(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \dfrac{\omega_0}{2} = \dfrac{\pi}{\mathrm{T}} \\ 0 & |\omega| > \dfrac{\omega_0}{2} = \dfrac{\pi}{\mathrm{T}} \end{cases}, \tag{14.16}$$

čiji impulsni odziv je

$$h_r(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H_r(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{\mathrm{T}}\cdot\frac{\sin\omega_0 t/2}{\omega_0 t/2} = \frac{1}{\mathrm{T}}\frac{\sin \pi t/\mathrm{T}}{\pi t/\mathrm{T}}, \tag{14.17}$$

te frekvenciju otipkavanja $\omega_0 > 2\omega_g$, tako da unutar pojasa $(-\omega_0/2, \omega_0/2)$ ponavljanja nema preklapanja sekcija spektra. Tada je

$$F_s(\omega)H_r(\omega) = \frac{1}{\mathrm{T}}F(\omega). \tag{14.18}$$

Uz F_s iz (14.14) izlazi

$$H_r(\omega)\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\mathrm{T})e^{-j\omega k\mathrm{T}}\right)=\frac{1}{\mathrm{T}}F(\omega). \tag{14.19}$$

Budući da se f može dobiti iz

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega\,,$$

$$f(t)=\frac{\mathrm{T}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H_r(\omega)\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f(k\mathrm{T})e^{-j\omega k\mathrm{T}}\right)e^{j\omega t}d\omega\,,$$

$$f(t)=\frac{\mathrm{T}}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f(k\mathrm{T})\int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2}e^{j\omega(t-k\mathrm{T})}d\omega, \tag{14.20}$$

izlazi

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f(k\mathrm{T})\frac{\sin\pi(t-k\mathrm{T})/\mathrm{T}}{\pi(t-k\mathrm{T})/\mathrm{T}}. \tag{14.21}$$

Vidimo da je $f(t)$ dobiven iz uzoraka $f(k\mathrm{T})$ interpolacijom s funkcijom

$$h_r(t)=\frac{\sin\pi\, t/\mathrm{T}}{\pi\, t/\mathrm{T}}.$$

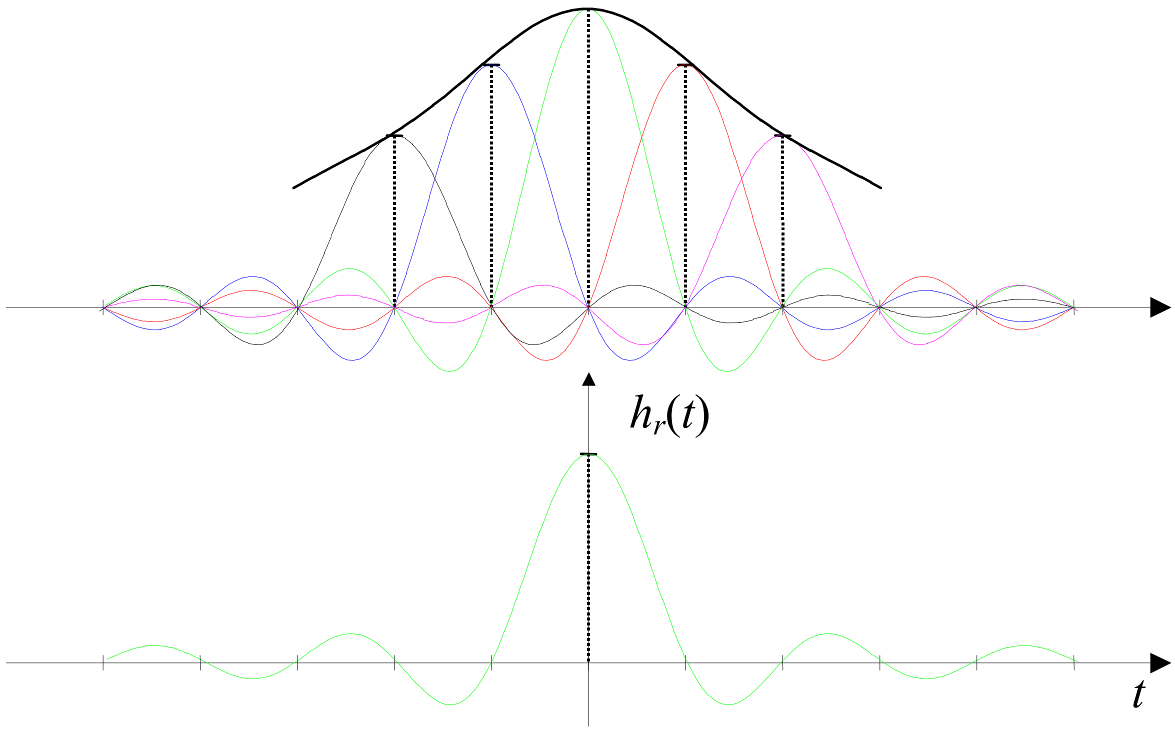
Iz gornjeg izvoda slijedi da je kontinuirana funkcija $f(t)$, koja ima frekvencijski omeđen spektar ($F(\omega)=0$ za $\omega>\omega_0$), jednoznačno određena svojim trenutnim vrijednostima u jednoliko raspoređenim trenucima $t_k = k\mathrm{T} = 2\pi k/\omega_0$.

Interpolacijska funkcija predstavlja impulsni odziv idealnog filtra (14.16) i (14.17).

Impulsni niz f_s prolaskom kroz filtar postaje dakle izvorni kontinuirani signal $f = f_s * h_r$.

$$f_s(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f(k\mathrm{T})\delta(t-k\mathrm{T}) \longrightarrow \boxed{h_r(t)} \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty}f(k\mathrm{T})\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau-k\mathrm{T})h_r(t-\tau)d\tau$$

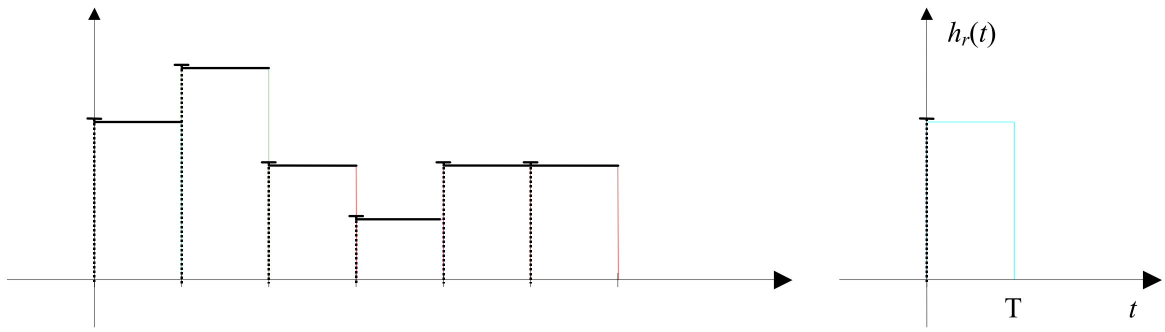
$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f(k\mathrm{T})h_r(t-k\mathrm{T})=f(t)$$



Sl. 14.4

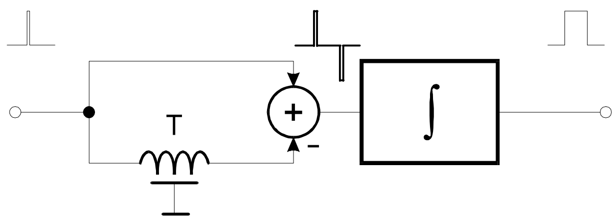
Vidimo da filtar ima nekauzalan odziv i prema tome je neostvariv. Zato se koriste druge vrste filtara za interpolaciju kod sustava koji rade u realnom vremenu.

Jednostavan i ostvariv filtar za interpolaciju čiji je odziv pravokutni puls trajanja T naziva se interpolatorom nultog reda.



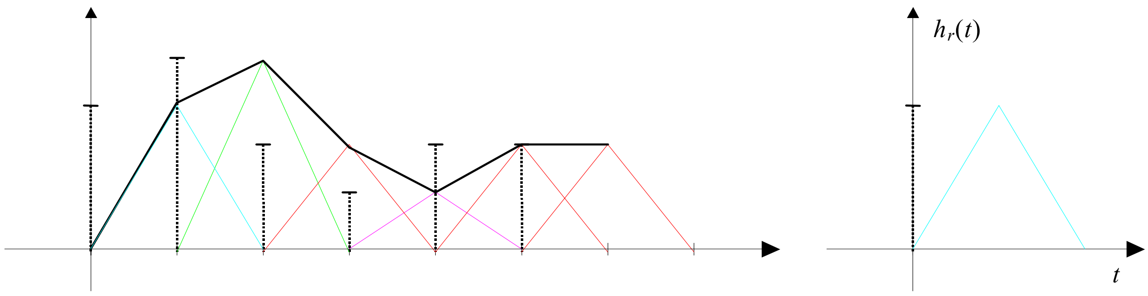
Sl. 14.5

Ima više sklopova koji ga mogu realizirati. Na Sl. 14.6 je princip koji iskorištava jedan element za kašnjenje (umjetnu liniju) i integrator.



Sl. 14.6

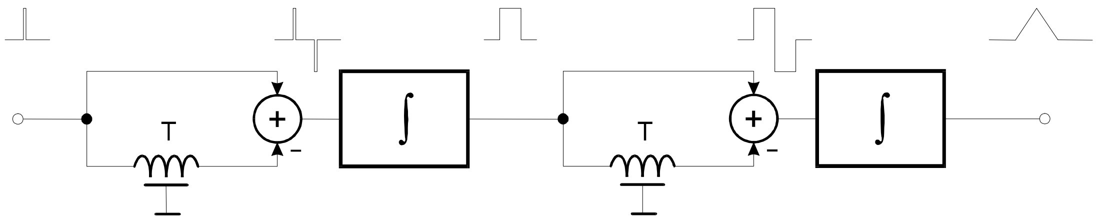
Slijedeći bolji interpolator je s trokutnim impulsnim odzivom (interpolator prvog reda).



Sl. 14.7

Rezultat je interpolacija lomljenom crtom i bolja je od one s pravokutnim pulsom, ali unosi veće vremensko kašnjenje.

Jedna realizacija je kaskada od dva interpolatora nultog reda (Sl. 14.8).



Sl. 14.8

Bolji interpolacijski filtri su bili predmet istraživanja koje se temeljilo na minimizaciji greške bilo u vremenskoj bilo u frekvencijskoj domeni i mogu se naći u literaturi. Bolje interpolacije se općenito plaćaju većim kašnjenjem.

14.3 Antialiasing filtri

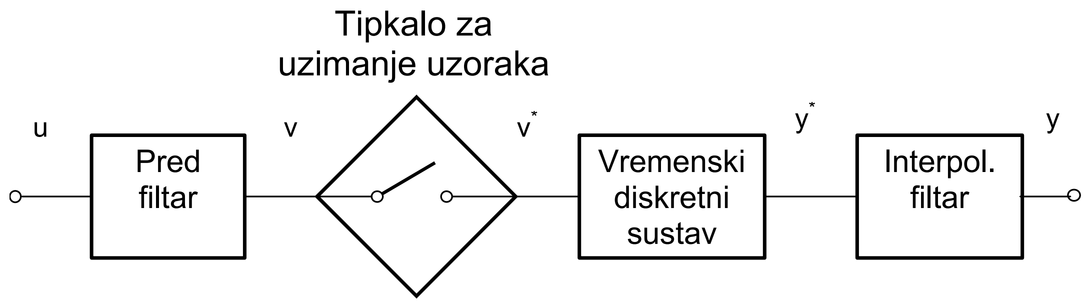
Drugi izvor greški pri tipkanju signala je neograničen spektar signala, pa dolazi do preklapanja sekcija spektra u osnovnu sekciju i time unosi grešku koja se ne može više ukloniti. Tu grešku nazivamo greškom uslijed aliasinga.

Često je uz korisni dio signala prisutan smetajući signal ili šum čiji spektar može biti širi od spektra korisnog signala i time nepotrebno unositi pogreške i smetnje. Zato se redovito prije prekidača ili tipkala stavlja filtar, tzv. predfiltar ili antialiasing filtar, koji propušta samo korisni, odnosno željeni spektar. Prema korisnom spektru prilagođena je i frekvencija otipkavanja (obično nešto viša od Nyquistove $\omega_0 > 2\omega_g$ da ne bi zahtjevi za filtar bili previše oštri). Kako tipični filtrirani spektar signala postepeno teži nuli, greška ε uslijed aliasinga će biti teoretski uvijek prisutna, a njena veličina odnosno energija greške će zavisiti od izabrane frekvencije otipkavanja.

$$\varepsilon = 2\int_{\omega_0/2}^{\infty} \left|F(\omega)\right|^2 d\omega. \tag{14.22}$$

Filtri se projektiraju bilo prema zahtjevu konstantne amplitudne karakteristike (Butherworth, Chebyshev, Cauer) ili kad se želi bolji prijenos valnog oblika prema zahtjevu linearne faze (Bessel).

Blok dijagram sustava koji obrađuje kontinuirani signal diskretnim sustavom prikazan je na Sl. 14.9.



Sl. 14.9

14.4 Diskretizacija spektra kontinuiranog signala

Analogan pristup pokazan u sekcijama 14.1 i 14.2 može se primijeniti pri diskretizaciji kontinuiranog spektra nekog signala

$$F_d(\omega) = S_\Omega\{F(\omega)\}. \tag{14.23}$$

Uzimanje uzoraka ćemo provesti periodičnim nizom delta funkcija, ali ovaj put u frekvencijskoj domeni

$$\delta_\Omega(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega) = \frac{1}{\Omega}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jkt_0\omega} \qquad \mathrm{t}_0 = \frac{2\pi}{\Omega}. \tag{14.24}$$

Diskretni spektar izlazi:

$$F_d(\omega) = F(\omega)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega - n\Omega), \tag{14.25}$$

$$F_d(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\Omega)\delta(\omega - n\Omega). \tag{14.26}$$

Signal u vremenu f_d koji odgovara otipkanom spektru, dan je s

$$f_d(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_d(\omega)e^{j\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\left(\frac{1}{\Omega}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk\omega \mathrm{t}_0}\right)e^{j\omega t} d\omega =$$

$$f_d(t) = \frac{1}{2\pi\Omega}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega(t+k\mathrm{t}_0)} d\omega \tag{14.27}$$

Integral je funkcija f pomaknuta za $kt_0 = 2k\pi/\Omega$, pa dobivamo

$$f_d(t) = \frac{1}{\Omega}\sum_{-\infty}^{+\infty} f(t + k\mathrm{t}_0)\,. \tag{14.28}$$

Otipkavanje spektra daje f_d, periodično ponavljanu funkciju f, s periodom $\mathrm{t}_0 = 2\pi/\Omega$. Ako je funkcija omeđena u vremenu $f(t) = 0$ za $|t| > \mathrm{t}_0$ tako da njeno trajanje $2\mathrm{t}_g$ bude kraće od perioda t_0, tj.

$$2\mathrm{t}_g < \mathrm{t}_0, \tag{14.29}$$

neće nastupiti preklapanje (aliasing) u vremenu. Osnovnu sekciju, odnosno izvorni signal, će se tada moći dobiti pomoću vremenskog otvora (prozora), a otipkani spektar će se moći smatrati ekvivalentnim izvornom kontinuiranom spektru.

14.5 Obnavljanje kontinuiranog spektra iz diskretnog

Može se pokazati da vrijedi

$$f_d(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\Omega)\delta(\omega - n\Omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\Omega)e^{jn\Omega t},\ \Omega = \frac{2\pi}{t_0}, \tag{14.30}$$

da je f_d periodična funkcija prikazana Fourierovim redom. Da bi se dobila osnovna sekcija od f_d, odnosno po mogućnosti izvorna f, potrebno je f_d pomnožiti s idealnim pravokutnim vremenskim otvorom

$$w(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \mathrm{t}_0/2 \\ 0 & |t| > \mathrm{t}_0/2 \end{cases} \tag{14.31}$$

čiji spektar je

$$W(\omega) = \mathrm{t}_0\frac{\sin\omega\mathrm{t}_0/2}{\omega t_0/2} = \mathrm{t}_0\frac{\sin\pi\omega/\Omega}{\pi\omega/\Omega}\,. \tag{14.32}$$

Ako je vrijeme ponavljanja t_0 takvo da unutar njega nema preklapanja, izlazi iz (14.28)

$$f_d(t)w(t) = \frac{1}{\Omega}f(t) = \left(\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n\Omega)e^{jn\Omega t}\right)w(t) \tag{14.33}$$

Budući da se $F(\omega)$ može dobiti iz

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \frac{\Omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} w(t)\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n\Omega)e^{j\Omega nt}\right)e^{-j\omega t}dt = \\ &= \frac{\Omega}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n\Omega)\int_{-t_0/2}^{t_0/2}e^{-jt(\omega-n\Omega)}dt, \end{aligned} \tag{14.34}$$

izlazi

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n\Omega)\frac{\sin\pi(\omega - n\Omega)/\Omega}{\pi(\omega - n\Omega)/\Omega}. \tag{14.35}$$

$F(\omega)$ je dobiven jednoznačno iz svojih uzoraka $F(n\Omega)$ interpolacijom funkcijom

$$W(\omega) = \frac{\sin\pi\omega/\Omega}{\pi\omega/\Omega}, \tag{14.36}$$

koja predstavlja spektar pravokutnog vremenskog otvora.

Iz gornjeg izvoda slijedi da je kontinuirani spektar signala koji ima omeđeno trajanje ($f(t) = 0$ za $|t| > t_0/2$) jednoznačno određen svojim uzorcima na jednoliko raspoređenim frekvencijama $\omega_n = n\Omega = 2\pi n/t_0$.

14.6 Dimenzionalnost signala

Pretpostavimo da signal i njegov spektar trnu za $|t| \to \infty$ i $|\omega| \to \infty$, tako da imaju Fourierovu transformaciju. Ako je signal konačnog trajanja njegov spektar je beskonačne širine i obratno.

Tipkanje signala će izazvati ponavljanje spektra s $\Omega_p = \omega_0$ (aliasing u FD), a tipkanje spektra će izazvati ponavljanje signala s $T_p = t_0$ (aliasing u VD).

Relativna greška u FD i VD može biti ocjenjena energijom signala i spektra izvan izabranog trajanja T_p odnosno pojasa Ω_p, prema ukupnoj energiji signala.

$$\varepsilon_{VD} = \frac{2\int_{T_p/2}^{\infty} |f(t)|^2 dt}{2\int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt} \qquad \varepsilon_{FD} = \frac{2\int_{\Omega_p/2}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega}{2\int_0^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega} \tag{14.37}$$

Da bi tu ocjenu odredili moramo znati po kojem zakonu trne signal, a po kojem spektar. Najčešće u sustavima imamo $f(t) \approx e^{-\alpha t}$, a $F(\omega) \approx (\alpha + j\omega)^{-n}$.

Ako se specificira dozvoljena greška aliasinga u FD i VD izići će potrebni parametri T_p i Ω_p. Oni predstavljaju trajanje i širinu pojasa signala uz dopustivu grešku.

Frekvencija otipkavanja signala treba biti najmanje

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \Omega_p \tag{14.38}$$

Potrebni broj uzoraka u VD

$$N_T T = T_p = N_T \frac{2\pi}{\Omega_p} \qquad N_T = \frac{T_p \Omega_p}{2\pi} \tag{14.39}$$

ili FD

$$N_\Omega \Omega = \Omega_p = N_\Omega \frac{2\pi}{T_p} \qquad N_\Omega = \frac{\Omega_p T_p}{2\pi}, \tag{14.40}$$

pokazuje

$$N_T = N_\Omega = \frac{T_p \Omega_p}{2\pi} = T_p F_p, \tag{14.41}$$

koji se naziva dimenzijom signala.

Uzmimo kao primjer dvostranu eksponencijalu (*engl. cusp*)

$$f(t) = e^{-\alpha|t|}\,; \qquad F(\omega) = \frac{2}{\alpha}\frac{1}{1+\left(\dfrac{\omega}{\alpha}\right)^2}\,,$$

$$2\int_{\mathrm{T_p}/2}^{\infty} e^{-2\alpha t}dt = \left.\frac{2e^{-2\alpha t}}{-2\alpha}\right|_{\mathrm{T_p}/2}^{\infty} = \frac{0}{-2\alpha} - \frac{2e^{-2\alpha \mathrm{T_p}/2}}{-2\alpha} = \frac{e^{-\alpha \mathrm{T}_p}}{\alpha}\,,$$

$$\varepsilon_{TD} = e^{-\alpha \mathrm{T_p}}\,, \tag{14.42a}$$

$$2\alpha\frac{4}{\alpha^2}\int_{\Omega_\mathrm{p}/2}^{\infty}\frac{d\left(\dfrac{\omega}{\alpha}\right)}{\left[1+\left(\dfrac{\omega}{\alpha}\right)^2\right]^2} = \frac{4}{\alpha}\left\{\frac{\left(\dfrac{\omega}{\alpha}\right)}{1+\left(\dfrac{\omega}{\alpha}\right)^2} + \mathrm{arctg}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)\right\}\Bigg|_{\Omega_\mathrm{p}/2}^{\infty}\,,$$

$$\varepsilon_{FD} \approx \frac{4}{3\pi}\left(\frac{2\alpha}{\Omega_\mathrm{p}}\right)^3. \tag{14.42b}$$

Dimenzionalnost signala pokazuje koliko podataka, tj. bilo uzoraka signala bilo uzoraka spektra treba da bi ga se predstavilo sa specificiranom greškom. Razumljivo je da će biti potrebno više podataka ako je tražena greška manja ili kad signal bilo u vremenskoj domeni ili frekvencijskoj domeni sporije teži nuli. Dimenzionalnost je važna u teoriji signala, a imat će direktnu primjenu u diskretnoj Fourierovoj transformaciji.

14.7 Diskretna Fourierova transformacija

Numeričko određivanje spektra signala ima značenje za veliki broj primjena kao što su npr. digitalna ili numerička spektralna analiza ili računanje odziva sustava u vremenskoj i frekvencijskoj domeni itd.

Da bi se mogla računati Fourierova transformacija numerički, trebat će oblik signala i njegov spektar predstaviti uzorcima—brojevima, što znači da će trebati tipkati signal i njegov spektar. To s druge strane znači da će se *otipkani signal i njegov otipkani spektar periodički produžiti*.

Uzmimo signal f i ponovimo ga periodički svakih $\mathrm{T_p}$

$$\tilde{f}(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(t - m\mathrm{T_p})\,. \tag{14.43}$$

Predstavimo ga Fourierovim redom

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega t}\,, \qquad \Omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T_p}}\,. \tag{14.44}$$

Tipkanje tog signala može se provesti nizom delta funkcija $\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t - k\mathrm{T})$. .

$$\begin{aligned}
&\widetilde{f}(t)\delta_T(t) = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega t}\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-k\mathrm{T})\right),\\
&\widetilde{f}(k\mathrm{T})\delta(t-k\mathrm{T}) = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega t}\right)\delta(t-k\mathrm{T}) == \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega k\mathrm{T}}\delta(t-k\mathrm{T}).
\end{aligned} \tag{14.45}$$

odakle iz jednakosti $2\pi/\mathrm{T} = \mathrm{N}\Omega$ slijedi

$$\widetilde{f}(k\mathrm{T}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{j\frac{2\pi kn}{\mathrm{N}}}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{14.46}$$

Budući da je eksponencijala periodična funkcija

$$e^{j\frac{2\pi(n+lN)k}{\mathrm{N}}} = e^{j\frac{2\pi\, nk}{\mathrm{N}}}, \tag{14.47}$$

mogu se skupiti komponente koje množi ista eksponencijala

$$\left(F_n + F_{n+\mathrm{N}} + \ldots + F_{n+l\mathrm{N}} + \ldots\right)e^{j\frac{2\pi nk}{\mathrm{N}}} = \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} F_{n+l\mathrm{N}}\right)e^{j\frac{2\pi nk}{\mathrm{N}}}. \tag{14.48}$$

Uvođenjem

$$\widetilde{F}_n = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} F_{n+l\mathrm{N}}, \tag{14.49}$$

izlazi

$$\widetilde{f}(kT) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} \widetilde{F}_n e^{j\frac{2\pi nk}{\mathrm{N}}}, \quad 0 \le k \le \mathrm{N}-1, \tag{14.50}$$

tj. da se suma (14.46) može prikazati sumom od samo N različitih eksponencijala.

Samo N komponenti spektra $\left\{\widetilde{F}_n\right\}_0^{\mathrm{N}-1}$ je dakle dovoljno za određivanje bilo kojeg od N uzoraka signala $\left\{\widetilde{f}(kT)\right\}_0^{\mathrm{N}-1}$.

Lako se vidi iz (14.50) da se u $\widetilde{F}_n$ nalaze zrcaljene amplitude svih komponenti koje se nalaze izvan pojasa $\Omega_\mathrm{p} = \mathrm{N}\Omega$. $\widetilde{F}_n$ su uzorci periodički produženog spektra (s periodom Ω_p), jednog otipkanog periodički produženog signala (s periodom $\mathrm{T_p}$). Imamo dakle periodičnu sekvenciju u VD i periodičnu sekvenciju u FD. Odnos između njih je u potpunosti određen odnosom uzoraka unutar jednog perioda N s tzv. diskretnom Fourierovom transformacijom. ($\widetilde{F}_n = \widetilde{F}(n)$).

$$\widetilde{f}(k) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} \widetilde{F}(n) e^{j\frac{2\pi nk}{\mathrm{N}}} \tag{14.51}$$

Potrebni broj uzoraka u bilo kojoj od domena je N, što predstavlja dimenzionalnost signala.

Da bi dobili drugi izraz transformacije, pomnožimo izraz (14.51) s $e^{-j2\pi kr/\mathrm{N}}$ i sumirajmo preko N vremenskih uzoraka

$$\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} \widetilde{f}(k) e^{-j\frac{2\pi kr}{\mathrm{N}}} = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} \widetilde{F}(n) e^{j\frac{2\pi k(n-r)}{\mathrm{N}}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1}\widetilde{F}(n)\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}e^{j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}(n-r)k}=\sum_{n=0}^{N-1}\widetilde{F}(n)N\delta(n-r-mN)=N\widetilde{F}(r)\,. \tag{14.52}$$

Suma eksponencijala po k, daje za $n = r + m\mathrm{N}$ i $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ iznos N, a inače 0, kako se može zaključiti iz izraza za sumu geometrijskog reda. Može se napisati konačno:

$$\widetilde{F}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{f}(k)e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}\,. \tag{14.53}$$

Izrazi (14.51) i (14.53) čine par izraza za diskretnu Fourierovu transformaciju (DFT) i daju jednoznačnu vezu između sekvencija $\{\widetilde{f}(k)\}$ i $\{\widetilde{F}(n)\}$. Koeficijent 1/N se nekada pridružuje sumaciji (14.51) koja se naziva inverznom DFT.

DFT omogućuje numerički postupak jer su signal i spektar dani konačnim brojem uzoraka. Koliko točno DFT predstavlja Fourierovu transformaciju izvornog kontinuiranog signala f u spektar F, zavisi kako je pokazano ranije u sekciji 14.6 od izabranog $\mathrm{T_p}$ i Ω_p, te brzine opadanja signala i spektra za $t > \mathrm{T_p}/2$ i $\omega > \Omega_\mathrm{p}/2$.

14.8Brza Fourierova transformacija

Brzom Fourierovom transformacijom (FFT) naziva se skupina efikasnih postupaka za računanje DFT-a. Direktno računanje jednog uzorka traži N kompleksnih množenja s $W_\mathrm{N}^{kn}=e^{-j2\pi kn/\mathrm{N}}$ i N kompleksnih zbrajanja.

Budući da treba izračunati N uzoraka $\{\widetilde{F}(n)\}_0^{\mathrm{N}-1}$, odnosno $\{\widetilde{f}(k)\}_0^{\mathrm{N}-1}$ pri inverznoj transformaciji (IDFT) trebat će N^2 množenja.

FFT postupci omogućuju računanje DFT-a uz znatno manji broj množenja proporcionalan s $\mathrm{N}\log_2\mathrm{N}$.

FFT postupci se općenito temelje na razlaganju n uzoraka niza u nekoliko grupa uzoraka. Pritom se koristi periodičnost i simetrija eksponencijale $W_\mathrm{N}^{kn}=e^{-j2\pi kn/\mathrm{N}}$. Pretpostavimo da sumaciju za $\widetilde{F}(n)$ razložimo u dvije sume, gdje smo u prvoj uzeli parne uzorke $n = 2r$, a u drugoj neparne $n = 2r + 1$.

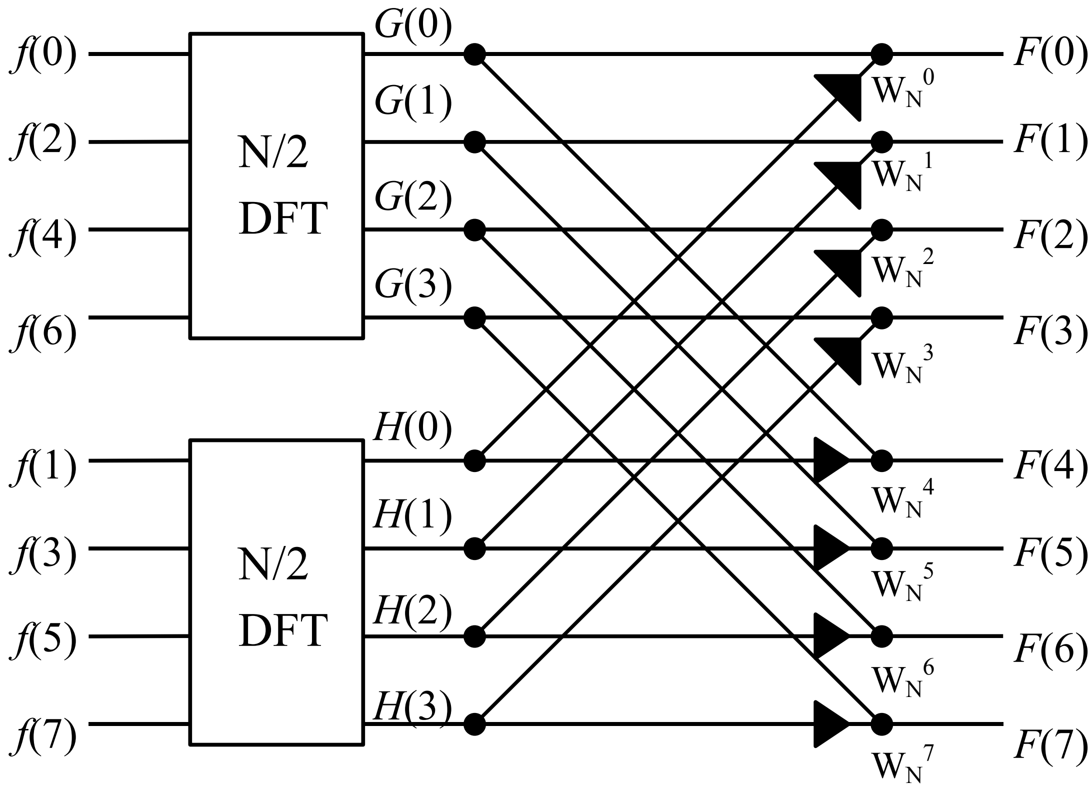
$$\begin{aligned}\widetilde{F}(n)&=\sum_{r=0}^{\mathrm{N}/2-1}\widetilde{f}(2r)e^{-j\frac{2\pi n2r}{\mathrm{N}}}+\sum_{r=0}^{\mathrm{N}/2-1}\widetilde{f}(2r+1)e^{-j\frac{2\pi n(2r+1)}{\mathrm{N}}}=\\&=\sum_{r=0}^{\mathrm{N}/2-1}\widetilde{f}(2r)e^{-j\frac{2\pi nr}{\mathrm{N}/2}}+e^{-j\frac{2\pi n}{\mathrm{N}}}\sum_{r=0}^{\mathrm{N}/2-1}\widetilde{f}(2r+1)e^{-j\frac{2\pi nr}{\mathrm{N}/2}}\,.\end{aligned}$$

Rezultat se može napisati u obliku

$$\widetilde{F}(n)=G(n)+e^{-j\frac{2\pi n}{\mathrm{N}}}H(n)\,,$$

gdje je $G(n)$ u stvari DFT od N/2 uzoraka (parnih) i $H(n)$ također DFT od N/2 uzoraka (neparnih).

Blok dijagram za N = 8 i $\mathrm{W_N}=e^{-j2\pi/\mathrm{N}}$ prikazan je na Sl. 14.10.



Sl. 14.10

Time je DFT za $N = 8$ uzoraka dobiven s dvije transformacije po $N/2 = 4$ uzorka. Sada će trebati

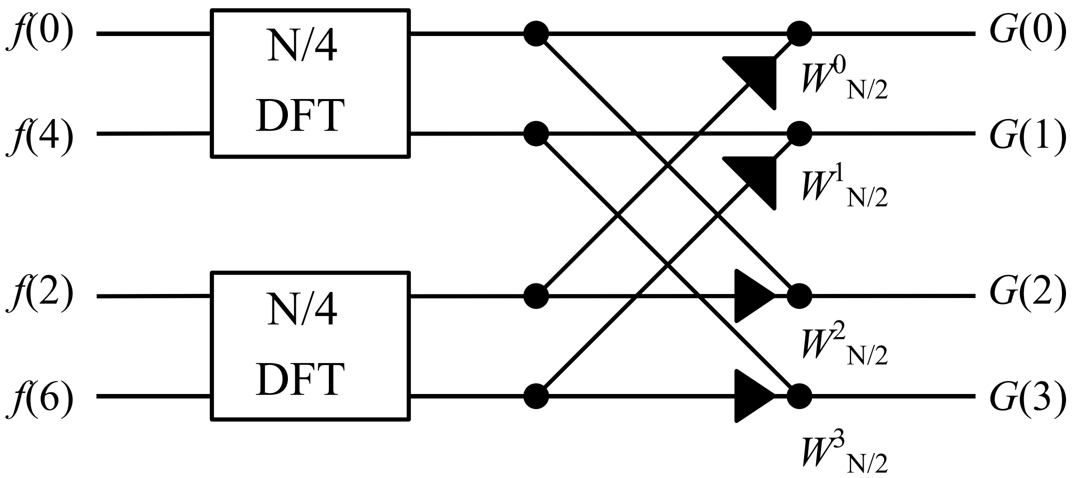
(i) dvije DFT po N/2 uzoraka što traži $2(N/2)^2$ množenja,

(ii) N množenja s W_N^n, $n = 0, 1, ..., N - 1$,

(iii) N zbrajanja.

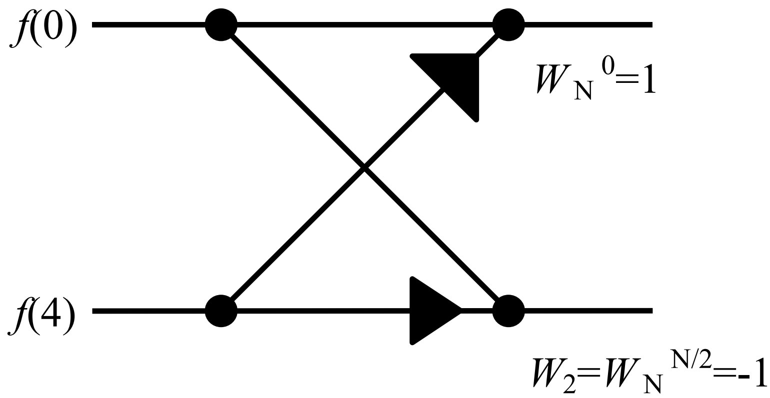
Ovaj postupak za malo veći N traži praktički pola od N^2 množenja, što daje veliku uštedu.

Ako je N/2 i dalje paran broj možemo svaku sumaciju s N/2 uzoraka izračunati pomoću dvije sumacije s N/4 uzoraka, tj. ukupan broj množenja je $4(N/4)^2 = N^2/4$ pa će ušteda prema N^2 biti 4 puta.



Sl. 14.11

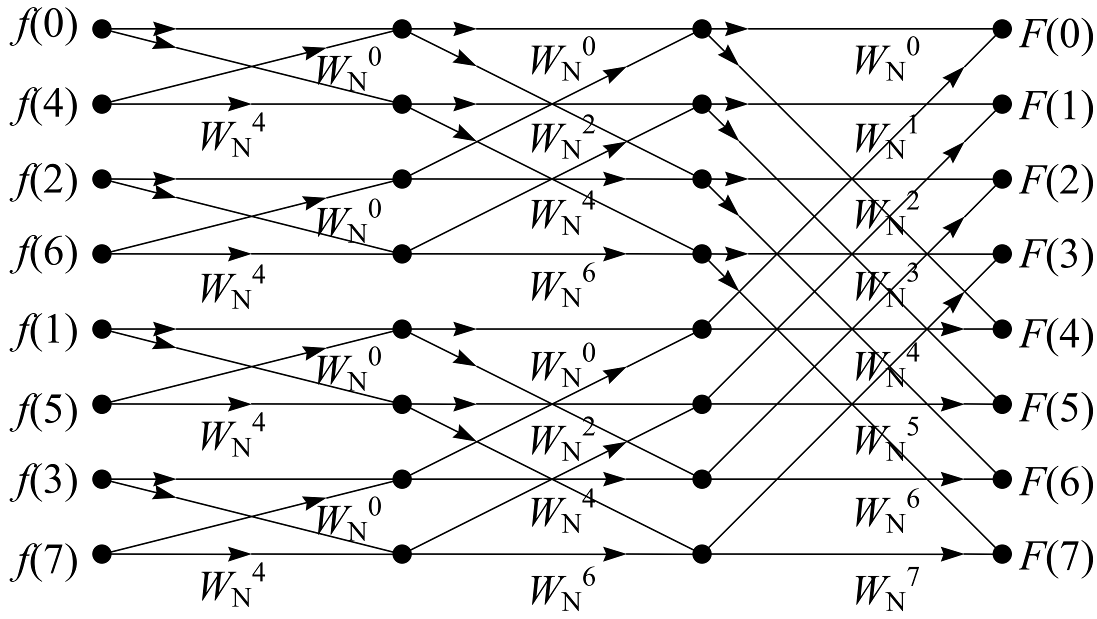
U našem primjeru (N = 8) blokovi "N/4 DFT" se svode na DFT od 2 uzorka.



Sl. 14.12

Ova struktura se naziva DFT leptir.

Cjelokupni blok dijagram FFT za naš primjer N = 8 je na Sl. 14.13, a broj multiplikacija je dan s $m_{FFT} = N\log_2 N = 8 * 3 = 24$, dok je za direktnu metodu računanja DFT-a broj multiplikacija $m_{DFT} = N^2 = 64$.



Sl. 14.13

U općem slučaju s $N = 2^q$ za svođenje na DFT od samo dva uzorka trebat će q stupnjeva računanja. Kako u svakom stupnju imamo N množenja izlazi $m_{FFT} = Nq = N\log_2 i$. Ovaj broj množenja treba uzeti približno jer W_N^n dobiva vrijednosti $1, -1, +j, -j$, što se ne može uzeti kao množenje.

Pokazali smo efikasan postupak za računanje DFT-a koristeći tzv. decimaciju u vremenskoj domeni. Na sličan način se može iskoristiti decimacija u frekvencijskoj domeni. Kad je potrebna transformacija niza s $N \neq 2^q$, niz se može nadopuniti s nulama.

Postoje strukture i postupci za DFT za N = 3,4,5,... uzoraka tako da se N može rastaviti u umnožak prostih (prim) brojeva.

15. LITERATURA

[1] De Russo et all: State Variables for Engineers. John Wiley & sons N.Y. 1965 (postoji i rusko izdanje)

[2] Gabel & Roberts: Signal and Linear Systems John Wiley & Sons, N.Y. 1973.

[3] Athans at all: Systems, Networks and computation: Multivariable Methods. Mc Graw Hill Inc. 1974.

[4] Ogata K.: State Space Analysis of Control Systems Prentice Hall, 1967.

[5] Director & Rohrer: Introduction to System Theory. Mc Graw Hill, N.Y. 1972 (postoji rusko izdanje).

[6] R.A. Gabel & R.A. Roberts: “Signals and Linear Systems”, John Wiley & Sons, N.Y. Third Edition, 1987.

[7] J.A. Cadzow: “Discrete Time Systems”, Prentice-Hall, Inc. 1973.

[8] Athans, Dertouzos, Spann & Mason: “Systems, Networks and Computation: Multivariable Methods”, Mc Graw-Hill, N.Y.,1974.

[9] E.I. Jury: “Theory and Applications of the Z-Transform Method”, John Wiley & Sons, N.Y., 1964.