Signali i sustavi

Ekvivalencija vremenski kontinuiranog i diskretnog signala i sustava

Vremenska diskretizacija tipkanjem kontinuiranog signala

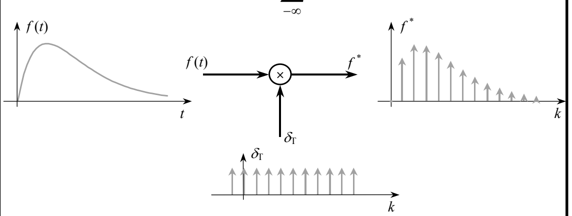
- Postupak uzimanja uzoraka ili tipkanja kontinuiranog signala *f* možemo matematički modelirati kao pridruživanje funkciji *f* niza impulsa f^*, čiji intenzitet je proporcionalan trenutnim vrijednostima kontinuiranog signala.

$$f^*(t) = \mathrm{S}_T\{f(t)\}$$

- Možemo to interpretirati kao modulaciju impulsnog niza $\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k\mathrm{T})$ funkcijom *f*, tj.

Vremenska diskretizacija tipkanjem kontinuiranog signala

$$f^*(t) = f(t)\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - k\mathrm{T})$$



Vremenska diskretizacija tipkanjem kontinuiranog signala

- Zbog svojstva delta funkcije da vadi vrijednost kontinuirane funkcije $f(t)$ na mjestu diskontinuiteta $t - k\mathrm{T} = 0$, tj. $t_k = k\mathrm{T}$, može se napisati i u obliku:

$$f^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\mathrm{T})\delta(t - k\mathrm{T}).$$

Vremenska diskretizacija tipkanjem kontinuiranog signala

- Uvjete ekvivalencije kontinuiranog i diskretnog signala dobivenog postupkom otipkavanja najlakše je pratiti preko njihovih spektara.
- Neka signal f ima spektar:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt.$$

- Iz spektra F se može doći do same funkcije f inverznim Fourierovim integralom:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

Vremenska diskretizacija tipkanjem kontinuiranog signala

- Periodičan niz δ_T nastao ponavljanjem delta funkcije svakih T, kao svaka periodična funkcija se dade predstaviti Fourierovim redom, gdje su amplitude dane s:

$$F_n = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} \delta(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{\mathrm{T}}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}.$$

- Odatle: $$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} = \frac{1}{\mathrm{T}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_0 t}.$$

Vremenska diskretizacija tipkanjem kontinuiranog signala

- Spektar otipkanog signala f^* dan je s:

$$F^*(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{1}{\mathrm{T}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{jn\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt.$$

- Zamjenom redoslijeda sumacije i integracije dobivamo:

$$F^*(\omega)=\frac{1}{\mathrm{T}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j(\omega-n\omega_0)t}dt.$$

- Integral je spektar funkcije f, ali pomaknut za $n\omega_0$, pa izlazi:

$$F^*(\omega)=\frac{1}{\mathrm{T}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(\omega-n\omega_0).$$

Vremenska diskretizacija tipkanjem kontinuiranog signala

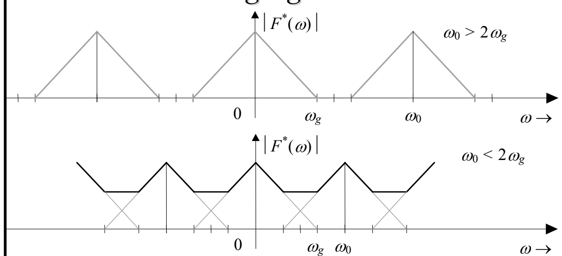
- Spektar F^* otipkanog signala f^* je periodično ponavljani spektar F kontinuiranog signala.
- Pretpostavimo da je spektar F frekvencijski ograničen

$$F(\omega) = 0 \text{ za } |\omega| > \omega_g.$$

- Različite frekvencije tipkanja signala $\omega_0 = 2\pi/\mathrm{T}$ mogu u spektru $F^*(\omega)$ izazvati različite rezultate zavisno od toga da li je $\omega_0 - \omega_g > \omega_g$ ili $\omega_0 - \omega_g < \omega_g$ odnosno:

$$\omega_0 > 2\,\omega_g,\quad \omega_0 < 2\,\omega_g.$$

Vremenska diskretizacija tipkanjem kontinuiranog signala



Preklapanje sekcija spektra (engl. “aliasing”).

Zaključak

- Diskretni se signal može smatrati ekvivalentnim kontinuiranom samo ako je moguće rekonstruirati izvorni signal f iz otipkanog f^*, odnosno ako se iz spektra F^* može dobiti originalni F. Postupak rekonstrukcije pretpostavlja izdvajanje osnovne sekcije spektra filtriranjem.
- To će biti moguće načiniti bez pogreške samo ako je spektar F ograničen na ω_g, te ako je frekvencija otipkavanja $\omega_0 > 2\,\omega_g$.

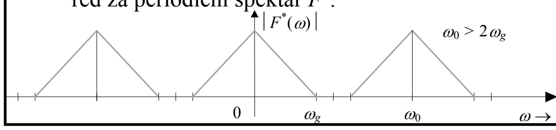
Obnavljanje ili rekonstrukcija kontinuiranog signala iz diskretnog

- Periodični spektar F^* može se dobiti i iz

$$f^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\mathrm{T})\delta(t-k\mathrm{T}),$$

$$F^*(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\mathrm{T})\delta(t-k\mathrm{T})e^{-j\omega t}dt \;= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\mathrm{T})e^{-j\omega k\mathrm{T}}.$$

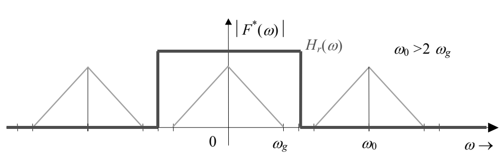
- U dobivenom izrazu se može prepoznati Fourierov red za periodični spektar F^*.



Obnavljanje ili rekonstrukcija kontinuiranog signala iz diskretnog

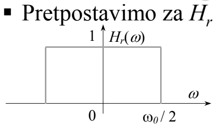
- Da bi se dobila osnovna sekcija spektra F_c odnosno po mogućnosti F , potrebno je izvršiti filtraciju F^* s filtrom frekvencijske karakteristike H_r ,

$$F_c(\omega) = F^*(\omega)\, H_r(\omega).$$



Obnavljanje ili rekonstrukcija kontinuiranog signala iz diskretnog

- Pretpostavimo za H_r idealan filter



$$H_r(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<\omega_0/2\\ 0 & |\omega|>\omega_0/2\end{cases}$$

- Impulsni odziv je $h_r(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H_r(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{\mathrm{T}}\cdot\frac{\sin\omega_0 t/2}{\omega_0 t/2}.$
- Neka je frekvencija otipkavanja $\omega_0>2\omega_g$, tako da unutar pojasa ponavljanja $(-\omega_0/2,\ \omega_0/2)$, nema preklapanja sekcija spektra.
- Tada je: $F^*(\omega)H_r(\omega)=\frac{1}{\mathrm{T}}F(\omega).$

Obnavljanje ili rekonstrukcija kontinuiranog signala iz diskretnog

$$H_r(\omega)\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f(k\mathrm{T})e^{-j\omega k\mathrm{T}}\right)=\frac{1}{\mathrm{T}}F(\omega).$$

- Inverznom Fourierovom transformacijom spektra F dobivamo:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{\mathrm{T}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H_r(\omega)\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f(k\mathrm{T})e^{-j\omega k\mathrm{T}}\right)e^{j\omega t}d\omega.$$

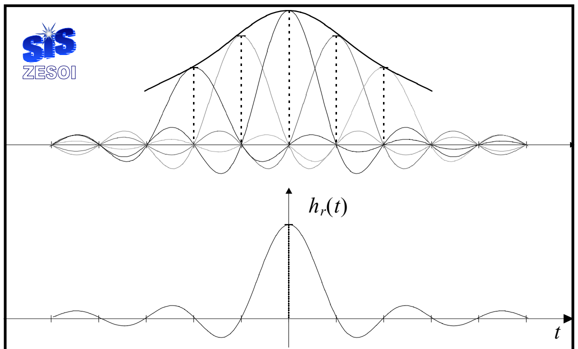
$$f(t)=\frac{\mathrm{T}}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f(k\mathrm{T})\int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2}e^{j\omega(t-k\mathrm{T})}d\omega,$$

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f(k\mathrm{T})\frac{\sin\pi(t-k\mathrm{T})/\mathrm{T}}{\pi(t-k\mathrm{T})/\mathrm{T}}.$$

Obnavljanje ili rekonstrukcija kontinuiranog signala iz diskretnog

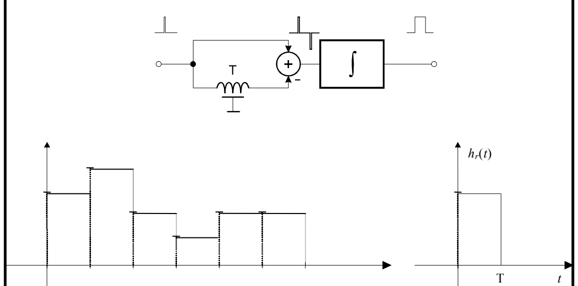
- Vidimo da je $f(t)$ dobiven iz uzoraka $f(kT)$ interpolacijom s funkcijom: $h_r(t)=\frac{\sin\pi\, t/\mathrm{T}}{\pi\, t/\mathrm{T}}.$
- Iz gornjega izvoda slijedi da je kontinuirana funkcija f, koja ima frekvencijski omeđen spektar ($F(\omega)=0$ za $|\omega|>\omega_0/2$), jednoznačno određena svojim trenutnim vrijednostima u jednoliko raspoređenim trenucima $t_k=k\mathrm{T}=2\pi k/\omega_0$.

Interpolacijska funkcija predstavlja impulsni odziv idealnog filtra.

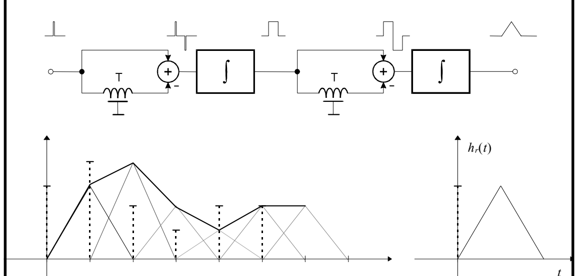


Filtar ima nekauzalan odziv i prema tome je neostvariv.

Interpolator nultog reda

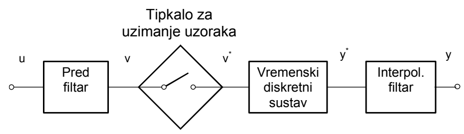


Interpolator prvog reda



Antialiasing filtri

- Greška uslijed aliasinga $\varepsilon = 2\int_{\omega_0/2}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, d\omega.$
- Konstantna amplituda: Butherworth, Chebyshev, Cauer.
- Linearna faza: Bessel.



Diskretizacija spektra kontinuiranog signala

- Analognim pristupom može se provesti diskretizacija kontinuranog spektra nekog signala $F_d(\omega) = S_\Omega\{F(\omega)\}$,

$$F_d(\omega) = F(\omega)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega - n\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n\Omega)\delta(\omega - n\Omega).$$

- Signal u vremenu f_d koji odgovara otipkanom spektru, dan je s

$$f_d(t) = \frac{1}{\Omega}\sum_{-\infty}^{+\infty} f(t + k\mathrm{t}_0), \qquad \mathrm{t}_0 = \frac{2\pi}{\Omega}.$$

- Otipkavanje spektra daje f_d periodično ponavljanu funkciju f.

Diskretizacija spektra kontinuiranog signala

- Ako je funkcija f takva da je njeno trajanje $2\mathrm{t}_g < \mathrm{t}_0$ neće nastupiti preklapanje (aliasing) u vremenu.
  - Izvorni signal moći će se dobiti pomoću vremenskog otvora množenjem f_d s idealnim vremenskim otvorom $f(t) = f_d(t)\, w(t)$

$$w(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \mathrm{t}_0/2 \\ 0 & |t| > \mathrm{t}_0/2 \end{cases} \qquad W(\omega) = \mathrm{t}_0 \cdot \frac{\sin \omega \mathrm{t}_0/2}{\omega \mathrm{t}_0/2}.$$

  - $F(\omega)$ se može jednoznačno dobiti iz svojih uzoraka $F(n\Omega)$, interpolacijom

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\Omega)\frac{\sin \pi(\omega - n\Omega)/\Omega}{\pi(\omega - n\Omega)/\Omega}.$$

  - Kontinuirani spektar signala konačnog trajanja ($f(t) = 0$ za $|t| > \mathrm{t}_0/2$) jednoznačno je određen svojim uzorcima na frekvencijama $\omega_n = n\Omega$.

Dimenzionalnost signala

- Otipkavanje signala $\to$ ponavljanje spektra s $\Omega_p = \omega_0$.
  (aliasing u FD)
- Otipkavanje spektra $\to$ ponavljanje signala s $T_p = t_0$.
  (aliasing u VD)

$$\varepsilon_{FD} = \frac{2\int_{\Omega_p/2}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega}{2\int_0^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega} \qquad \varepsilon_{VD} = \frac{2\int_{T_p/2}^{\infty} |f(t)|^2 dt}{2\int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt}$$

relativna greška u FD — relativna greška u VD

  - Greške se mogu ocijeniti poznavanjem brzine opadanja signala i spektra za $t > T_p / 2$ odnosno $\omega > \Omega_p / 2$.

Dimenzionalnost signala

- Uz specificiranu dozvoljenu grešku aliasinga u FD i VD dobivamo T_p i Ω_p – trajanje i širinu pojasa signala
  - potreban broj uzoraka u VD $\quad N_T T = T_p = N_T \frac{2\pi}{\Omega_p} \qquad N_T = \frac{T_p \Omega_p}{2\pi},$
  - potreban broj uzoraka u FD $\quad N_\Omega \Omega = \Omega_p = N_\Omega \frac{2\pi}{T_p} \qquad N_\Omega = \frac{\Omega_p T_p}{2\pi},$
  - dimenzija signala $\quad N_T = N_\Omega = \frac{T_p \Omega_p}{2\pi} = T_p F_p.$
- Dimenzionalnost signala je važna u teoriji, a ima direktnu primjenu u diskretnoj Fourierovoj transformaciji.

Diskretna Fourierova transformacija

- DFT se koristi za numeričko određivanje spektra signala.
- Signal i njegov spektar treba predstaviti uzorcima odnosno otipkati.
- To s druge strane znači da će se otipkani signal i njegov otipkani spektar periodički produžiti.
- Uzmimo signal f i ponovimo ga periodički svakih T_p i predstavimo ga Fourierovim redom

$$\tilde{f}(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(t - mT_p) \qquad \tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega t}, \qquad \Omega = \frac{2\pi}{T_p}.$$

Diskretna Fourierova transformacija

- Otipkavanje tog signala može se provesti nizom delta funkcija $\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k\mathrm{T}).$

$$\widetilde{f}(t)\delta_T(t) = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega t}\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k\mathrm{T})\right),$$

$$\widetilde{f}(kT)\delta(t - k\mathrm{T}) = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega t}\right)\delta(t - k\mathrm{T}) \;= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega k\mathrm{T}}\delta(t - k\mathrm{T}).$$

- Odakle iz jednakosti $2\pi / \mathrm{T} = \mathrm{N}\Omega$ slijedi:

$$\widetilde{f}(k\mathrm{T}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{j\frac{2\pi kn}{\mathrm{N}}}, k \in \mathbf{Z}.$$

25

Diskretna Fourierova transformacija

- Budući da je eksponencijala periodična funkcija

$$e^{j\frac{2\pi(n+lN)k}{\mathrm{N}}} = e^{j\frac{2\pi\, nk}{\mathrm{N}}},$$

mogu se skupiti komponente, koje množi ista eksponencijala.

$$\left(F_n + F_{n+\mathrm{N}} + \ldots + F_{n+l\mathrm{N}} + \ldots\right)e^{j\frac{2\pi nk}{\mathrm{N}}} = \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} F_{n+l\mathrm{N}}\right)e^{j\frac{2\pi nk}{\mathrm{N}}}.$$

- Uvođenjem $\widetilde{F}_n = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} F_{n+l\mathrm{N}}$

  izlazi $\widetilde{f}(kT) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} \widetilde{F}_n e^{j\frac{2\pi nk}{\mathrm{N}}},\; 0 \le k \le \mathrm{N}-1.$
- Beskonačna suma se može prikazati sumom od samo N različitih eksponencijala.

26

Diskretna Fourierova transformacija

- U se nalaze zrcaljene amplitude svih komponenti izvan pojasa $\Omega_p = \mathrm{N}\Omega$ i zbrajaju s onim unutar pojasa.
- su dakle uzorci periodički produženog spektra (Ω_p) jednog periodički produženog signala (T_p).
- Odnos između uzoraka $\widetilde{F}_n = \widetilde{F}(n)$ i $\widetilde{f}\,(k\mathrm{T}) = \widetilde{f}\,(k)$ u potpunosti je određen tzv. diskretnom Fourierovom transformacijom (DFT). $\widetilde{f}\,(k) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} \widetilde{F}(n) e^{j\frac{2\pi nk}{\mathrm{N}}}, 0 \le k \le \mathrm{N}-1$
- Potrebni broj uzoraka N u bilo kojoj od domena je dan dimenzionalnošću signala.

27

Diskretna Fourierova transformacija

- Uzorci spektra $\widetilde{F}(n)$ slijede također iz sumacije, koju možemo dobiti ako izvorni izraz pomnožimo s $e^{-j2\pi kr/\mathrm{N}}$ i sumiramo preko N vremenskih uzoraka

$$\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}\widetilde{f}(k)e^{-j\frac{2\pi kr}{\mathrm{N}}}=\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1}\widetilde{F}(n)e^{j\frac{2\pi k(n-r)}{\mathrm{N}}}=\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1}\widetilde{F}(n)\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}e^{j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}(n-r)k}.$$

- Suma eksponencijala po k daje za $n = r + m\mathrm{N}$ iznos N a inače 0, kako se može zaključiti iz izraza za sumu geometrijskog reda

$$\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}\widetilde{f}(k)e^{-\frac{2\pi kr}{\mathrm{N}}}=\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1}\widetilde{F}(n)\mathrm{N}\delta(n-r-m\mathrm{N})=\mathrm{N}\widetilde{F}(r).$$

Diskretna Fourierova transformacija

- Može se napisati konačno DFT par

$$\widetilde{F}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{f}(k)e^{-j\frac{2\pi nk}{N}},0\le n\le N-1,$$

$$\widetilde{f}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\widetilde{F}(n)e^{j\frac{2\pi nk}{N}},0\le k\le N-1.$$

- Koeficijent 1/N se nekada pridružuje drugoj sumaciji koja se naziva inverznom DFT. Izrazi daju jednoznačnu vezu između nizova $\left\{\widetilde{f}(k)\right\}$ i $\left\{\widetilde{F}(n)\right\}$ periodičnih s periodom N.

Diskretna Fourierova transformacija

- DFT je numerički postupak.
- Koliko točno postupak predstavlja Fourierovu transformaciju izvornog kontinuiranog signala f u spektar F, zavisi kako je pokazano ranije od izabranog $\mathrm{T_p}$ i Ω_p, te brzine opadanja signala i spektra za $t > \mathrm{T_p}/2$ i $\omega > \Omega_\mathrm{p}/2$.

Brza Fourierova transformacija

- Brzom Fourierovom transformacijom (FFT) naziva se skupina efikasnih postupaka za računanje DFT–a.
- Direktno računanje jednog uzorka traži N kompleksnih množenja s i N kompleksih zbrajanja.
- Buduće da treba izračunati N uzoraka $\{\widetilde{F}(n)\}_0^{N-1}$ odnosn $\{\widetilde{f}(k)\}_0^{N-1}$ pri inverznoj transformaciji (IDFT) trebat će N^2 množenja.
- FFT postupci omogućuju računanje DFT–a uz znantno manji broj množenja proporcionalan s $N \log_2 N$.

Brza Fourierova transformacija

- FFT postupci se općenito temelje na razlaganju n uzoraka niza u nekoliko grupa uzoraka. Pri tom se koristi periodičnost i simetrija eksponencijale
- Pretpostavimo da sumaciju za $\widetilde{F}(n)$ razložimo u dvije sume

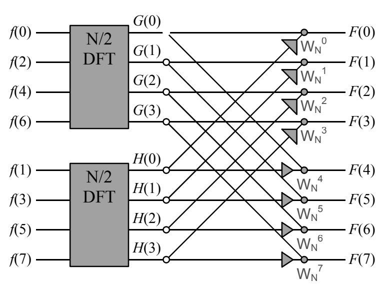
$$\widetilde{F}(n) = \sum_{r=0}^{N/2-1} \widetilde{f}(2r) e^{-j\frac{2\pi n 2r}{N}} + \sum_{r=0}^{N/2-1} \widetilde{f}(2r+1) e^{-j\frac{2\pi n(2r+1)}{N}} =$$

$$= \sum_{r=0}^{N/2-1} \widetilde{f}(2r) e^{-j\frac{2\pi n r}{N/2}} + e^{-j\frac{2\pi n}{N}} \sum_{r=0}^{N/2-1} \widetilde{f}(2r+1) e^{-j\frac{2\pi n r}{N/2}}$$

$$\widetilde{F}(n) = G(n) + e^{-j\frac{2\pi n}{N}} H(n) \qquad \mathrm{W}_{\mathrm{N}}^{2r} = \mathrm{W}_{\mathrm{N/2}}^{r}$$

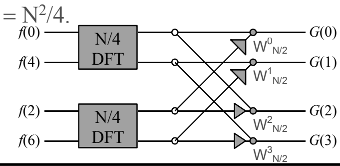
$G(n)$, $H(n)$ – DFT od N/2 parnih i N/2 neparnih zoraka

Blok dijagram za N = 8



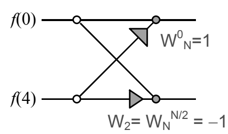
Brza Fourierova transformacija

- Dvije transformacije po N/2 uzoraka traži $2(N/2)^2$
- N množenja s W_N^n, $n = 0, 1, ..., N - 1$,
- N zbrajanja. → ušteda praktički $N^2/2$
- Ako je N/2 i dalje paran broj možemo N/2 DFT odrediti s dvije DFT s N/4 uzoraka tj. $4(N/4)^2 = N^2/4$.



DFT leptir

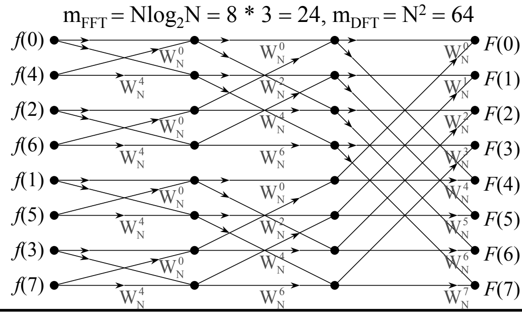
- U našem primjeru N = 8 svodi se na DFT od 2 uzorka.



- Ova struktura se naziva DFT leptir.

Blok dijagram FFT za N = 8

$m_{FFT} = N\log_2 N = 8 * 3 = 24$, $m_{DFT} = N^2 = 64$



Brza Fourierova transformacija

- U općem slučaju s $N = 2^q$ za svođenje na DFT od samo dva uzorka trebat će za postupak računanja q–stupnjeva.
- Kako u svakom stupnju imamo N množenja izlazi

$$m_{FFT} = N\log_2 N$$

Brza Fourierova transformacija

- Pokazali smo efikasan postupak za računanje DFT–a koristeći tzv. decimaciju u vremenskom domenu.
- Na sličan način se može iskoristiti decimacija u frekvencijskom domenu.
- Kad je potrebna transformacija niza s $N \neq 2^q$, niz se može nadopuniti s nulama.

Literatura

- R.A. Gabel & R.A. Roberts: "*Signals and Linear Systems*", John Wiley & Sons, N.Y. Third Edition, 1987.
- J.A. Cadzow: "*Discrete Time Systems*", Prentice – Hall, Inc. 1973.
- Athans, Dertouzos, Spann & Mason: "*Systems, Networks and Computation: Multivariable Methods*", Mc Graw – Hill, N.Y.,1974.
- E.I. Jury: "*Theory and Applications of the Z – Transform Method*", John Wiley & Sons, N.Y., 1964.