Signali i sustavi

Model linearnog sustava
s varijablama stanja

Uvod

- Vremenski diskretan sustav je linearan i vremenski invarijantan ako se može opisati jednadžbama:

  $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{Ax}(k) + \mathbf{Bu}(k)$,

  $\mathbf{y}(k) = \mathbf{Cx}(k) + \mathbf{Du}(k)$, za $k = 0, 1, 2,...$,

  $\mathbf{x}(k)$, $\mathbf{u}(k)$, $\mathbf{y}(k)$ – vektori,

  A, **B**, **C**, **D** – matrice s realnim i konstantnim elementima.

Uvod

- Vektorska jednadžba stanja je identična skupu n linearnih jednadžbi diferencija:

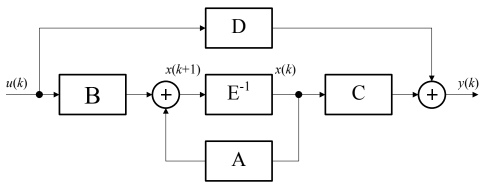
$$x_i(k+1) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(k) + \sum_{l=1}^{m} b_{il} u_l(k); \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

- Izlazna jednadžba identična je skupu r linearnih algebarskih jednadžbi:

$$y_i(k) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j(k) + \sum_{l=1}^{m} d_{il} u_l(k); \qquad i = 1,2,\ldots,r.$$

Uvod

- Opći kabelski blok diagram



Jednadžbe stanja u domeni $\mathcal{Z}$– transformacije

$$\mathbf{U}(z) = \mathcal{Z}\{\mathbf{u}(k)\},\ \mathbf{Y}(z) = \mathcal{Z}\{\mathbf{y}(k)\},\ \mathbf{X}(z) = \mathcal{Z}\{\mathbf{x}(k)\}$$

transformacija jednadžbe stanja

$$z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) = \mathbf{AX}(z) + \mathbf{BU}(z),$$
$$(z\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(z) = z\mathbf{x}(0) + \mathbf{BU}(z),$$
$$\mathbf{X}(z) = z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}(z).$$

transformacija izlazne jednadžbe

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{CX}(z) + \mathbf{DU}(z),$$
$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z\mathbf{x}(0) + [\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\ \mathbf{U}(z).$$

Jednadžbe stanja u domeni $\mathcal{Z}$– transformacije

- Izlaz mirnog sustava $\mathbf{x}(0) = 0$ biti će određen sa:

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{H}(z)\ \mathbf{U}(z).$$

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

- transfer matrica vremenski diskretnog sustava

$$\mathbf{\Phi}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z$$

- rezolventa sustava

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava

- Vektorska jednadžba sustava:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k),$$

može se riješiti korak po korak:

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(0),$$

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) = \mathbf{A}[\mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(0)] + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1),$$

$$\mathbf{x}(3) = \mathbf{A}\mathbf{x}(2) + \mathbf{B}\mathbf{u}(2) = \mathbf{A}[\mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1)] + \mathbf{B}\mathbf{u}(2) = \mathbf{A}^3\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(2).$$

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-1-j}\mathbf{B}\mathbf{u}(j)$$

- Stanje u koraku k je određeno iz početnog stanja $\mathrm{x}(0)$ i pobude $\{\mathbf{u}(\mathrm{k})\}$

- Nepobuđeni sustav ima odziv:

$$\mathbf{x}_{\text{nepob.}}(k) = \mathbf{A}^k\,\mathbf{x}(0) = \mathbf{\Phi}(k)\,\mathbf{x}(0)’$$

- $\mathbf{\Phi}(k) = \mathbf{A}^k$ – fundamentalna matrica sustava odgovara matričnoj eksponencijali $\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$.
- Stanje mirnog sustava u koraku *k:*

$$\mathbf{x}_{\text{mirni}}(k) = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-1-j}\mathbf{B}\mathbf{u}(j) = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{\Phi}(k-1-j)\mathbf{B}\mathbf{u}(j).$$

Odziv linearnih vremenski diskretnih sustava

- Izlaz sustava dan je s:

$$\mathbf{y}(k) = \begin{cases} \mathbf{C}\mathbf{x}(0) + \mathbf{D}\mathbf{u}(0), & k = 0, \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1-j}\mathbf{B}\mathbf{u}(j) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k), & k > 0. \end{cases}$$

Odziv sustava na jedinični uzorak

$$\{\mathbf{u}(k)\} = \{\mathbf{U}\delta(k)\};\ \mathbf{u}(k) = \mathbf{U}\delta(k)$$

- Stanje sustava je dano s:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1}\mathbf{A}^{k-1-j}\mathbf{B}\mathbf{U}\delta(j),$$

$$\mathbf{x}(k) = \begin{cases} \mathbf{x}(0), & k = 0, \\ \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}\mathbf{U}, & k > 0. \end{cases}$$

- Uzorak pobude u $k = 0$ utječe tek na stanje prvom uzorku.

Odziv sustava na jedinični uzorak

- Izlaz sustava je dan s:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{A}^k\,\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\,\mathbf{B}\mathbf{U} + \mathbf{D}\mathbf{U}\delta(k).$$

- Izlaz mirnog sustava $\mathbf{x}(0) = 0$ koji predstavlja jedinični odziv sustava je:

$$\mathbf{h}(k) = \begin{cases} \mathbf{D}\mathbf{U}, & k = 0, \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}\mathbf{U}, & k > 0. \end{cases}$$

Upravljivost sustava

- Sustav je upravljiv ako se iz bilo kojeg početnog stanja sustav može prevesti u bilo koje krajnje stanje diskretnim signalom u konačnom broju koraka $k_f \geq n$.
- Jednadžba stanja:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k).$$

- Radi jednostavnosti pretpostavimo:
  - u(k) je skalar,
  - konačno stanje sustava je $\mathbf{x}(k_f) = \mathbf{0}$.

Upravljivost sustava

- Ako je sustav upravljiv može se primjenom signala $\{u(0), u(1), ..., u(k_f - 1)\}$ iz bilo kojeg stanja $\mathbf{x}(0)$ prevesti u mirno stanje $\mathbf{x}(k_f) = 0$.

$$\mathbf{x}(k_f) = \mathbf{0} = \sum_{j=0}^{k_f-1} \mathbf{A}^{k-j-1}\mathbf{B}u(j) + \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0)$$

- Za najmanji broj koraka $k_f = n$

$$\mathbf{x}(0) = -\sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{A}^{-j-1}\mathbf{B}u(j)$$

$$\mathbf{x}(0) = -\left[\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^{-2}\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{-n}\mathbf{B}\right] \cdot \bar{\mathbf{u}} \qquad \bar{\mathbf{u}} = \{u(0), u(1), \dots, u(n-1)\}$$

- Sustav je upravljiv ako matrica $\mathbf{G} = [\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\ \mathbf{A}^{-2}\mathbf{B}\ ...\ \mathbf{A}^{-n}\mathbf{B}]$ nije singularna.
  - Ekvivalentan uvjet: matrica $[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ ...\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$ nije singularna.

Osmotrivost sustava

- Sustav je osmotriv ako poznavanje izlaznih signala za konačan broj koraka omogućuje određivanje početnog stanja sustava.
- Stanje vremenski stalnog sustava: $\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0)$.
- Izlaz: $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x}(0)$,

$\mathbf{y}(0) = \mathbf{C}\mathbf{x}(0)$,

$\mathbf{y}(1) = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(0)$,

....

$\mathbf{y}(n-1) = \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x}(0)$.

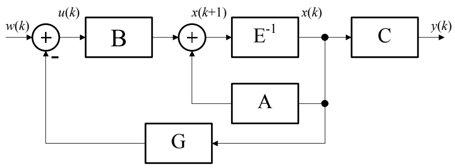
Osmotrivost sustava

- Uvjet osmotrivosti sustava:

Matrica $\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \dots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$ mora biti n–tog ranga,

gdje je n dimenzija vektora $\mathbf{x}(0)$.

Sustav s povratnom vezom



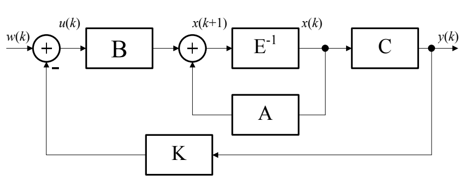
$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k),$$
$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{w}(k) - \mathbf{G}\mathbf{x}(k),$$
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k).$$

Sustav s povratnom vezom

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(\mathbf{w}(k) - \mathbf{G}\mathbf{x}(k)),$$
$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G})\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{w}(k),$$
$$\mathbf{x}(k+1) = \overline{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{w}(k)$$

- $\overline{\mathbf{A}}$ – matrica sustava uz zatvorene petlje povratne veze.
- Njene karakteristične frekvencije q_k određuju vladanje sustava.

Povratna veza s izlaza sustava



$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k),$$
$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{w}(k) - \mathbf{K}\mathbf{y}(k),$$
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k).$$

Povratna veza s izlaza sustava

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(\mathbf{w}(k) - \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{x}(k)),$$
$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{w}(k),$$
$$\mathbf{x}(k+1) = \overline{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{w}(k).$$