Signali i sustavi

$\mathcal{Z}$ - transformacija

$\mathcal{Z}$ – transformacija

- Linearni, vremenski diskretan sustav je opisan jednadžbom diferencija:

$$a_n y(k+n) + \ldots + a_0 y(k) = b_n u(k+n) + \ldots + b_0 u(k).$$

- Za pobudu oblika $u(k) = Uz^k$ partikularno rješenje je $y_p(k) = Yz^k$.
- Uvrštenjem dobivamo:

$$Y = \frac{b_n z^n + \ldots + b_0}{a_n z^n + \ldots + a_0} U = H(z)U,$$

$y(k) = UH(z)z^k$,
$H(z)$ – transfer funkcija.

$\mathcal{Z}$ – transformacija

- Odziv $y(k)$ se može dobiti i konvolucijskom sumacijom ako je poznat jedinični odziv $h(k)$:

$$y(k) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l)u(k-l).$$

- Za $u(k) = Uz^k$:

$$y(k) = U\sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l)z^{k-l} = Uz^k \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l)z^{-l}.$$

- Izjednačavanjem rješenja slijedi:

$$H(z) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l)z^{-l}.$$

$\mathcal{Z}$– transformacija

- Frekvencijsku karakteristiku dobijemo za $z = e^{j\omega}$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l)e^{-j\omega l}.$$

- Prepoznajemo Fourierov red, pa vrijedi:

$$h(l) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega l}\,d\omega,$$

$H(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{h(k)\}$, *Fourierova* transformacija niza $\{h(k)\}$.

$X(z) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(l)z^{-l} = \mathcal{Z}\{x(k)\}$, $\mathcal{Z}$– transformacija niza $\{x(k)\}$.

$\mathcal{Z}$– transformacija

- Za opći kompleksni broj $z = re^{j\omega}$:

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\left(re^{j\omega}\right)^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(x(k)r^{-k}\right)e^{-j\omega k}.$$

Fourierova transformacija niza $\{x(k)r^{-k}\}$.

- Inverziju dobijemo na temelju izraza za Fourierove koeficijente:

$$x(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(re^{j\omega})\left(re^{j\omega}\right)^{k} d\omega = \left| \begin{matrix} re^{j\omega} = z \\ dz = jre^{j\omega}d\omega \end{matrix} \quad d\omega = \frac{dz}{jz} \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{k-1}dz.$$

Opći izraz za inverznu $\mathcal{Z}$ transformaciju.

Konvergencija $\mathcal{Z}$– transformacije

- Za kauzalne signale $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$

jednostrana $\mathcal{Z}$ transf.

- Ako niz $\{x(k)\}$ zadovoljava slijedeće uvjete:

1. $|x(k)| < \infty$, za sve k
2. postoje pozitivni brojevi A, r i K takvi da vrijedi $|x(k)| \le Ar^{k}$, za sve $k >$ K

tada jednostrana $\mathcal{Z}$ transformacija $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(l)z^{-k}$ konvergira apsolutno za svaki z sa svojstvom $|z| = \zeta > r$.

$\mathcal{Z}$– transformacija - primjeri

$$\mathcal{Z}\{\delta(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k) z^{-k} = 1 \qquad ,\zeta_a = 0,$$

$$\mathcal{Z}\{S(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} S(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} \qquad ,\zeta_a = 1,$$

$$\mathcal{Z}\{\mathrm{a}^k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{a}^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\mathrm{a}}\right)^{-k} = \frac{1}{1-\left(\frac{z}{\mathrm{a}}\right)^{-1}} = \frac{1}{1-\mathrm{a}z^{-1}} = \frac{z}{z-\mathrm{a}} \qquad ,|z| > \mathrm{a}.$$

$\mathcal{Z}$– transformacija - svojstva

- Linearnost $\mathcal{Z}\{\mathrm{a}x(k) + \mathrm{b}y(k)\} = \mathrm{a}X(z) + \mathrm{b}Y(z)$.
- Pomak unaprijed za n koraka:

$$\mathcal{Z}\{x(k+n)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k+n) z^{-k} = |k+n=j| =$$
$$= \sum_{j=n}^{\infty} x(j) z^{-j+n} = z^n \sum_{j=n}^{\infty} x(j) z^{-j} =$$
$$= z^n \left[X(z) - \sum_{j=0}^{n-1} x(j) z^{-j} \right],$$

za $n = 1$: $\mathcal{Z}\{x(k+1)\} = z\,X(z) - zx(0)$.

$\mathcal{Z}$– transformacija - svojstva

- Kašnjenje za n koraka:

$$\mathcal{Z}\{x(k-n)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k-n) z^{-k} = |k-n=j| =$$
$$= \sum_{j=-n}^{\infty} x(j) z^{-j-n} = z^{-n} \sum_{j=-n}^{\infty} x(j) z^{-j} =$$
$$= z^{-n} \left[X(z) + \sum_{j=-n}^{-1} x(j) z^{-j} \right],$$

za $n = 1$: $\mathcal{Z}\{x(k-1)\} = z^{-1} X(z) + x(-1)$.

$\mathcal{Z}$– transformacija - svojstva

- Konvolucijska sumacija kauzalnih nizova:

$$X(z)=\mathcal{Z}\{x\}=\mathcal{Z}\{u*h\}=\sum_{k=0}^{\infty}z^{-k}\sum_{i=0}^{k}u(i)h(k-i)=$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}u(i)\sum_{k=0}^{\infty}h(k-i)z^{-k}=\left|k-i=j\right|=$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}u(i)\sum_{j=-i}^{\infty}h(j)z^{-(i+j)}=\sum_{i=0}^{\infty}u(i)z^{-i}\sum_{j=0}^{\infty}h(j)z^{-j}=$$

$$=U(z)H(z).$$

$\mathcal{Z}$– transformacija - svojstva

- Multiplikacija s a^k $\quad y(k)=a^k x(k)$:

$$\mathcal{Z}\{y\}=\sum_{k=0}^{\infty}a^k x(k)z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}x(k)\left(\frac{z}{a}\right)^{-k}=X\left(\frac{z}{a}\right).$$

- Multiplikacija sa $e^{j\omega k}$ (frekvencijski pomak) $y(k)=x(k)\,e^{j\omega k}$:

$$\mathcal{Z}\{y\}=\sum_{k=0}^{\infty}x(k)e^{j\omega k}z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}x(k)\left(\frac{z}{e^{j\omega}}\right)^{-k}.$$

$\mathcal{Z}$– transformacija - svojstva

- Multiplikacija s k:

$$\mathcal{Z}\left\{\{kx(k)\}\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}kx(k)z^{-k}=z\sum_{k=0}^{\infty}x(k)kz^{-k-1}=$$

$$=z\sum_{k=0}^{\infty}x(k)\left(-\frac{d}{dz}z^{-k}\right)=-z\frac{d}{dz}\left(\sum_{k=0}^{\infty}x(k)z^{-k}\right)=$$

$$=-z\frac{d}{dz}X(z).$$

- Multiplikacija s k^n:

$$\mathcal{Z}\left\{\{k^n x(k)\}\right\}=\left(-z\frac{d}{dz}\right)^n X(z).$$

Inverzna $\mathfrak{Z}$– transformacija

1. razvoj u red

$Y(z) = y(0) + y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \ldots$

razvoj u McLaurentov red oko točke $z^{-1} = 0$

$$y(k) = \frac{1}{k!}\frac{d^k Y(z^{-1})}{d(z^{-1})^k}\bigg|_{z^{-1}=0}$$

Primjer:

$$Y(z) = \frac{2 - 0{,}5z^{-1}}{1 - 0{,}5z^{-1} - 0{,}5z^{-2}} = 2 + 0{,}5z^{-1} + 1{,}25z^{-2} + 0{,}875z^{-3} + \ldots$$

$y(k) = 2\ \delta(k) + 0.5\ \delta(k-1) + 1.25\ \delta(k-2) + 0.875\ \delta(k-3) + \ldots$

$y(k) = 1 + (-0.5)^k$, za $k \geq 0$

Inverzna $\mathfrak{Z}$– transformacija

2. rastavljanje racionalane funkcije na parcijalne razlomke

$$\mathfrak{Z}\{a^k\} = \frac{z}{z-a}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A}{z-q_1} + \frac{B}{z-q_2} + \ldots \quad \bigg| \cdot z$$

$$Y(z) = \frac{Az}{z-q_1} + \frac{Bz}{z-q_2} + \ldots$$

$$y(k) = Aq_1^k + Bq_2^k + \ldots$$

Inverzna $\mathfrak{Z}$– transformacija

2. rastavljanje racionalane funkcije na parcijalne razlomke – primjer

$$Y(z) = \frac{2z^2 - 0.5z}{z^2 - 0.5z - 0.5}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2z - 0.5}{z^2 - 0.5z - 0.5} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+0.5} \quad \bigg| \cdot z$$

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z+0.5}$$

- u domeni koraka izlazi $y(k) = 1^k + (-0.5)^k = 1 + (-0.5)^k$

Inverzna $\mathcal{Z}$– transformacija

3. integralom po zatvorenoj krivulji radiusa većeg od radiusa apsolutne konvergencije

$$y(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint Y(z)z^{k-1}dz = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}_i\left[Y(z)z^{k-1}\right]$$

$$\mathrm{Res}_i\left[Y(z)z^{k-1}\right] = \lim_{z\to z_i}\left[Y(z)z^{k-1}(z - \mathrm{z}_i)\right]$$

Rješenje jednadžbi diferencija upotrebom $\mathcal{Z}$– transformacije

$$\mathrm{a}_2 y(k+2) + \mathrm{a}_1 y(k+1) + \mathrm{a}_0 y(k) = \mathrm{b}_1 u(k+1) + \mathrm{b}_0 u(k)$$

$$\mathrm{a}_2[z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(1)] + \mathrm{a}_1[zY(z) - zy(0)] + \mathrm{a}_0Y(z) =$$
$$= \mathrm{b}_1[zU(z) - zu(0)] + \mathrm{b}_0U(z)$$

$$[\mathrm{a}_2\mathrm{z}^2 + \mathrm{a}_1z + \mathrm{a}_0]Y(z) =$$
$$= [\mathrm{b}_1z + \mathrm{b}_0]U(z) - \mathrm{b}_1zu(0) + \mathrm{a}_2z^2\,(0) + \mathrm{a}_1zy(1) + \mathrm{a}_0zy(0)$$

$$Y(z) = \frac{\mathrm{b}_1z + \mathrm{b}_0}{\mathrm{a}_2z^2 + \mathrm{a}_1z + \mathrm{a}_0}U(z) + E(z)$$

uz početne uvjete jednake nuli
$$Y(z) = \frac{\mathrm{b}_1z + \mathrm{b}_0}{\mathrm{a}_2z^2 + \mathrm{a}_1z + \mathrm{a}_0}U(z) = H(z)U(z)$$

Rješenje jednadžbi diferencija upotrebom $\mathcal{Z}$– transformacije

- $H(z)$ – transfer funkcija vremenski diskretnog sustava.
- Za pobudu jediničnim uzorkom

  $u(k) = \delta(k)$, $U(z) = 1$,

  dobivamo:

  $Y(z) = H(z)$.
- Transfer funkcija je $\mathcal{Z}$ – transformat odziva na pobudu $\{\delta(k)\}$ uz početne uvjete jednake nuli.

Pobuđeni mirni sustav drugog reda

$y(k+2) + y(k+1) + 0.21y(k) = (-1)^k$

transformacijom uz $y(1) = y(0) = 0$:

$$(z^2 + z + 0.21)Y(z) = \frac{z}{z+1}, \quad Y(z) = \frac{1}{z^2 + z + 0.21} \cdot \frac{z}{z+1},$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A}{z+0.3} + \frac{B}{z+0.7} + \frac{C}{z+1}, \quad A = \frac{1}{0.28} \; B = -\frac{1}{0.12} \; C = \frac{1}{0.21},$$

$$y(k) = \frac{(-0.3)^k}{0.28} - \frac{(-0.7)^k}{0.12} + \frac{(-1)^k}{0.21}.$$