Signali i sustavi

Vremenski diskretni linearni sustavi

Sadržaj

- Model sustava s ulazno–izlaznim varijablama
- Rješavanje jednadžbe diferencija
- Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava
- Jedinični odziv diferencijskog sustava
- Konvolucijska sumacija
- Dekonvolucija

Model sustava s ulazno–izlaznim varijablama

- Opis linearnog sustava jednadžbom diferencija
  $a_n y(k+n) + a_{n-1} y(k+n-1) + \ldots + a_0 y(k) =$
  $b_m u(k+m) + b_{m-1} u(k+m-1) + \ldots + b_0 u(k)$
  u – jedan ulaz
  y – jedan izlaz
  $a_n \neq 0$, $a_0 \neq 0$
- Vremenski stalan sustav
  $\rightarrow$ koeficijenti $\{a_i\}$ i $\{b_i\}$ konstante
- Sustav promjenjiv po koraku
  $\rightarrow$ koeficijenti $\{a_i\}$ i $\{b_i\}$ funkcije koraka k

Model sustava s ulazno – izlaznim varijablama

- Jednadžbe diferencija često se pišu pomoću operatora pomaka E ili q

$$(a_n E^n + \ldots + a_0) y = (b_m E^m + \ldots + b_0) u$$

ili

$$A(E) y = B(E) u,$$

gdje je:

$$(E\,y)(k) \overset{\Delta}{=} y(k+1) \quad \text{ili} \quad (q\,y)(k) \overset{\Delta}{=} y(k+1)$$

$$(E^n\,y)(k) \overset{\Delta}{=} y(k+n) \qquad (q^n\,y)(k) \overset{\Delta}{=} y(k+n)$$

Model sustava s ulazno – izlaznim varijablama

- Red diferencijske jednadžbe → razlika najveće i najmanje potencije operatora E ili q
- Prikaz linearnog sustava blokom

$$u \longrightarrow \boxed{H(E)} \longrightarrow y \qquad H(E) = \frac{B(E)}{A(E)}$$

- Prikaz jednadžbe sustava preko linearne kombinacije pobude u i izlaza y

$$c_0 y(k) + c_1 y(k-1) + \ldots + c_n y(k-n) =$$
$$d_0 u(k) + d_1 u(k-1) + \ldots + d_n u(k-n)$$

Rješavanje jednadžbe diferencija

- Rješavanje korak po korak (numerički)

$$y(k) = -\sum_{i=1}^{n} a_i y(k-i) + \sum_{i=0}^{n} b_i u(k-i),$$

$$a_0 = 1, \text{ za } k = 0, 1, 2, \ldots$$

uz poznavanje n početnih uvjeta

$$y(-1), y(-2), \ldots, y(-n).$$

- Rješavanje jednadžbe diferencija analitički

Rješavanje jednadžbe diferencija analitički

- Rješenje linearne jednadžbe dobiva se kao rješenje homogene jednadžbe $y_h(k)$

$$a_n y_h(k+n) + a_{n-1} y_h(k+n-1) + \ldots + a_0 y_h(k) = 0$$

i partikularnog rješenja $y_p(k)$ koje ovisi o funkciji pobude $f(k)$

$$f(k) = b_m u(k+m) + b_{m-1} u(k+m-1) + \ldots + b_0 u(k)$$

Rješavanje homogene jednadžbe diferencija

- Najopćenitije rješenje homogene jednadžbe je linearna kombinacija od n posebnih linearno nezavisnih rješenja

$$y_1(k), y_2(k), \ldots, y_n(k)$$

s proizvoljnim konstantama

$$y_h(k) = C_1 y_1(k) + C_2 y_2(k) + \ldots + C_n y_n(k)$$

- Linearnu jednadžbu diferencija zadovoljava niz e^{ak} ili bolje $y(k) = q^k$ gdje je $q \in \mathbf{C}$

Rješavanje homogene jednadžbe diferencija

- Uvrštenjem dobivamo

$$a_n q^{k+n} + a_{n-1} q^{k+n-1} + \ldots + a_0 q^k = 0$$

$$(a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \ldots + a_0)\, q^k = 0$$

- Netrivijalno rješenje traži da bude

$$a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

- Ovo je karakteristični polinom jednadžbe diferencija s n korjena

$$q_1, q_2, \ldots, q_n$$

- Jednadžbu dakle zadovoljavaju funkcije oblika

$$q_1^k, q_2^k, \ldots, q_n^k$$

Rješavanje homogene jednadžbe diferencija

- Za različite korjene dobivamo rješenje oblika

$$y_h(k) = C_1 q_1^{\,k} + C_2 q_2^{\,k} + \dots + C_n q_n^{\,k}$$

- Za višestruke korjene (npr. q_1 višestrukosti m)

$$y(k) = C_1 q_1^{\,k} + C_2 k q_1^{\,k} + \dots + C_m k^{m-1} q_1^{\,k} + C_{m+1} q_{m+1}^{\,k} + \dots + C_n q_n^{\,k}$$

Rješavanje homogene jednadžbe diferencija

- Kompleksni korjeni u jednadžbi s realnim koeficijentima dolaze u konjugiranim parovima te uz realnu sekvenciju za $y_h(k)$

$$y_h(k) = C_1 q_1^{\,k} + C_2 q_2^{\,k},$$

vrijedi:

$$q_1 = r\, e^{j\theta} \rightarrow q_2 = r\, e^{-j\theta},$$
$$C_1 = C\, e^{j\phi} \rightarrow C_2 = C\, e^{-j\phi}.$$

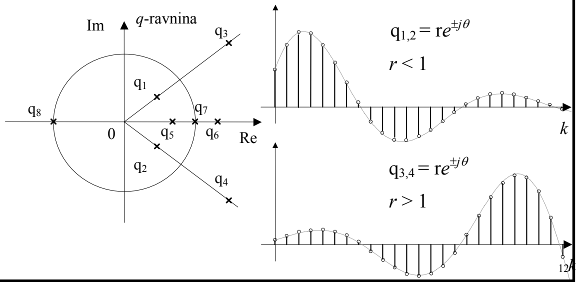
- Rješenje se može zapisati u obliku:

$$y_h(k) = C\, r^k e^{j\phi} e^{jk\theta} + C\, r^k e^{-j\phi} e^{-jk\theta} = 2C\, r^k \cos(k\,\theta + \phi)$$

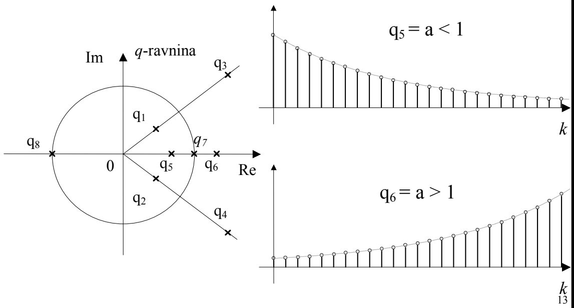
- Korijen $q = 0$ se ne uzima obzir jer on samo smanjuje red jednadžbe za jedan, odnosno za m

Rješavanje homogene jednadžbe diferencija

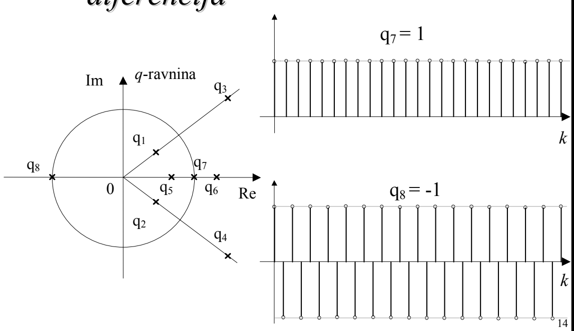
- Predstavljanje korjena u kompleksnoj q–ravnini



Rješavanje homogene jednadžbe diferencija



Rješavanje homogene jednadžbe diferencija



MATLAB primjer

Odziv sustava u ovisnosti o položaju korjena u kompleksnoj ravnini

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija

- Određivanje partikularnog rješenja
  - Lagrange–ova metoda varijacije parametara
    - rješenje se dobiva u eksplicitnom obliku
    - primjena rezultira složenim sumacijama
  - Metoda neodređenog koeficijenta
    - ograničena na pobude oblika polinoma i eksponencijalnih sekvenca
    - veliki broj pobuda može se aproksimirati gore navedenim sekvencijama ili nizovima
    - češće se upotrebljava u analizi sustava

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija

- Pobuda polinomom oblika

  $f(k) = \mathrm{d}_0 + \mathrm{d}_1 k + \ldots + \mathrm{d}_m k^m,$

  dati će partikularno rješenje u obliku polinoma m – tog stupnja

  $y_p(k) = \mathrm{C}_0 + \mathrm{C}_1 k + \ldots + \mathrm{C}_m k^m.$
- Rješenje se uvijek pretpostavlja u obliku kompletnog polinoma tj. sa svim potencijama, bez obzira da li polinom pobude ima sve članove

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija

- Pobuda eksponencijalom oblika

  $u(k) = \mathrm{U}\, e^{\varepsilon k} = \mathrm{U}\, z^k \mid z, \varepsilon \in \mathbf{C}$
- Ovo je najzanimljivija pobuda, jer linearni sustavi daju vlastito titranje u oblicima q_i^k
- Partikularno rješenje možemo napisati u obliku

  $y_p(k) = \mathrm{Y}\, z^k$
- *U* i *Y* nazivaju se kompleksne amplitude pobude odnosno odziva

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija

- Uvrštenjem pretpostavljenog rješenja $\mathrm{Y}z^k$ u jednadžbu

$$(\mathrm{a}_n z^n + \mathrm{a}_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \mathrm{a}_0)\,\mathrm{Y}\,z^k = (\mathrm{b}_m z^m + \mathrm{b}_{m-1} z^{m-1} + \ldots + \mathrm{b}_0)\,\mathrm{U}\,z^k$$

$$\Downarrow$$

$$A(z)\,\mathrm{Y}\,z^k = B(z)\,\mathrm{U}\,z^k$$

izlazi kompleksna amplituda odziva:

$$\mathrm{Y} = \frac{B(z)}{A(z)}\mathrm{U} = \frac{\mathrm{b}_m z^m + \ldots + \mathrm{b}_0}{\mathrm{a}_n z^n + \ldots + \mathrm{a}_0}\mathrm{U} = H(z)\mathrm{U}.$$

- $H(z)$ je prijenosna funkcija

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija

- Prijenosna ili transfer funkcija daje odnos kompleksnih amplituda prisilnog odziva i pobude, kad je pobuda z^k

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \left.\frac{y_p(k)}{u(k)}\right|_{u(k)=z^k} = \frac{\mathrm{Y}z^k}{\mathrm{U}z^k} = \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{U}}.$$

- Transfer funkcija se može lako napisati iz jednadžbe diferencija formalno zamjenom operatora E s brojem z.

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija

- Partikularno rješenje (prisilni odziv)

$$y_p(k) = H(z)\mathrm{U}z^k$$

- Ovisno o z, partikularni niz može biti
  - rastući ili padajući aperiodičan ili valovit
  - stalan ili periodičan
- Linearna kombinacija eksponencijala može dati realni kosinusni niz

$$\rho e^{j\theta k} + \rho e^{-j\theta k} = 2\rho \cos \theta k$$

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija

- Za sinusnu pobudu imamo ($\rho = 1$)

$$u(k) = |\mathrm{U}|\cos(\theta k + \varphi) = \left(\mathrm{U}e^{j\theta k} + \mathrm{U}^* e^{-j\theta k}\right)/2 =$$
$$= |\mathrm{U}|\left(e^{j\varphi}e^{j\theta k} + e^{-j\varphi}e^{-j\theta k}\right)/2$$

- Odziv je također superpozicija dvije konjugirane eksponencijale

$$y_p = H(e^{j\theta})\mathrm{U}e^{j\theta k} + H(e^{-j\theta})\mathrm{U}^* e^{-j\theta k}$$

- Aperiodočan niz je konstantan za $\mathrm{z} = 1$ ili alternirajuće konstantan za $\mathrm{z} = -1$

$$y_p = H(1)\mathrm{U} \text{ ili } y_p = H(-1)\mathrm{U}$$

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija

- Trajnu pobudu imamo kad je z na jediničnoj kružnici $\rightarrow$ prisilni odziv je trajan ili nula
- Za pobudu nizom $u(k) = k^{m-1}$ partikularno rješenje je polinom u varijabli k istog stupnja

Rješavanje nehomogene jednadžbe diferencija

- Transfer funkcija se često upotrebljava u obliku produkta korjenih faktora

$$H(z) = \mathrm{K}\frac{(z-\mathrm{z}_1)(z-\mathrm{z}_2)\ldots(z-\mathrm{z}_m)}{(z-\mathrm{q}_1)(z-\mathrm{q}_2)\ldots(z-\mathrm{q}_n)} \qquad \begin{array}{l} B(\mathrm{z}_i) = 0 \rightarrow \text{nultočke} \\ A(\mathrm{q}_i) = 0 \rightarrow \text{polovi} \end{array}$$

- Ako postoji koincidencija $z = q_i$ pretpostavljamo partikularno rješenje u obliku $y_p(k) = k\,\mathrm{Y}z^k$, a ako je q_i m–terostruki onda je $y_p(k) = k^m\mathrm{Y}z^k$
- Cjeloviti odziv nehomogene jednadžbe diferencija uz pobudu $u(k) = \mathrm{U}z^k$ izlazi:

$$y(k) = y_h(k) + y_p(k) = \mathrm{C}_1\mathrm{q}_1{}^k + \mathrm{C}_2\mathrm{q}_2{}^k + \ldots + \mathrm{C}_n\mathrm{q}_n{}^k + H(z)\mathrm{U}z^k.$$

Rješavanje jednadžbe diferencija

- *Primjer:* Riješiti jednadžbu diferencija

  $$y(k+2) + y(k+1) + 0.21y(k) = (-1)^k$$

  uz početne uvjete $y(0) = 0$ i $y(1) = 0$
- Rješenje homogene jednadžbe

$$y(k+2) + y(k+1) + 0.21y(k) = 0$$

$$\Downarrow \; y_h(k) = q^k$$

$$q^2 + q + 0.21 = 0$$

Rješavanje jednadžbe diferencija

- Korijeni su $q_1 = -0.7$ i $q_2 = -0.3$ pa izlazi

  $$y_h(k) = C_1(-0.7)^k + C_2(-0.3)^k$$
- Partikularno rješenje oblika $y_p(k) = Y(-1)^k$

  $$y_p(k) = \frac{1}{1+(-1)+0.21}(-1)^k = \frac{1}{0.21}(-1)^k$$
- Kompletno rješenje je

  $$y(k) = y_h(k) + y_p(k) =$$

  $$= \mathrm{C}_1(-0.7)^k + \mathrm{C}_2(-0.3)^k + \frac{1}{0.21}(-1)^k$$

Rješavanje jednadžbe diferencija

- Uvrštenjem početnih uvjeta:

  $$0 = \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 + 1 / 0.21,$$

  $$0 = (-0.7)\,\mathrm{C}_1 + (-0.3)\,\mathrm{C}_2 - 1 / 0.21\ ,$$

  dobivamo:

  $$y(k) = -8.33(-0.7)^k + 3.5(-0.3)^k + 4.76(-1)^k.$$

Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava

- Pobuda sustava sinusnim nizom

$$u(k) = |\mathrm{U}|\cos(\Omega k + \phi) =$$

$$= \frac{|\mathrm{U}|}{2}\left(e^{j(\Omega k+\phi)} + e^{-j(\Omega k+\phi)}\right) = \mathrm{Re}\{\mathrm{U}e^{j\Omega k}\},$$

daje odziv $y_p(k) = \mathrm{Re}\{Ye^{j\Omega k}\}$ gdje je Y dobiven iz odziva na $\mathrm{U}e^{j\Omega k}$.

- To se može pokazati s uvrštenjem u jednadžbu diferencija

$$u(k) = \mathrm{U}e^{j\Omega k} = \mathrm{Re}\,\{\mathrm{U}e^{j\Omega k}\} + j\,\mathrm{Im}\,\{\mathrm{U}e^{j\Omega k}\}$$

Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava

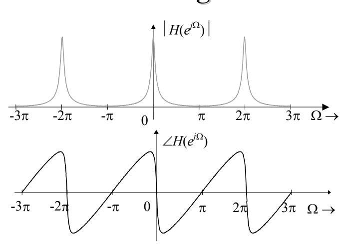
- Partikularno rješenje dobiva se u obliku

$$y_p(k) = Ye^{j\Omega k} = \underbrace{\mathrm{Re}\,\{Ye^{j\Omega k}\}}_{\text{rješenje realnog dijela pobude } \mathrm{Re}\,\{Ue^{j\Omega k}\}} + j\,\mathrm{Im}\,\{Ye^{j\Omega k}\}$$

$$\left.\begin{array}{l} A(\mathrm{E})y = B(\mathrm{E})u \\ +\text{ pobuda } e^{j\Omega k} \end{array}\right\} \quad H(e^{j\Omega}) = \frac{\mathrm{b}_m e^{jm\Omega} + \ldots + \mathrm{b}_0}{\mathrm{a}_n e^{jn\Omega} + \ldots + \mathrm{a}_0}$$

$$\left.\begin{array}{l} H(e^{j\Omega}) \text{ funkcija od } e^{j\Omega} \\ e^{j\Omega} = e^{j(\Omega + 2\pi i)} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{vrijednost transfer} \\ \text{funkcije za } z = e^{j\Omega} \text{ je} \\ \text{periodična s } 2\pi\end{array}$$

Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava



- Radi periodičnosti karakteristike, dovoljno je promatrati interval $(-\pi, \pi)$ ili čak $(0, \pi)$

Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava

- Frekvencijska karakteristika $H(e^{j\Omega})$ daje stacionarno stanje sustava $y_p = H(e^{j\Omega})\mathrm{U}$ u ovisnosti o frekvenciji Ω pobudnog sinusnog signala
- Zapis karakteristike $H(e^{j\Omega})$:

$$H(e^{j\Omega}) = H_r(e^{j\Omega}) + H_i(e^{j\Omega})$$
$$= A(\Omega)e^{j\varphi(\Omega)} \longrightarrow \begin{array}{l} A(\Omega) = |H(e^{j\Omega})| \\ \varphi(\Omega) = \arg(H(e^{j\Omega})) \end{array}$$

Koeficijent $\{a_i\}$ i $\{b_i\}$ su realni te vrijedi

$$H(e^{-j\Omega}) = H^*(e^{j\Omega}) \Rightarrow \begin{array}{l} H_r(e^{j\Omega}) \text{ i } A(\Omega) \text{ parne funkcije od } \Omega \\ H_i(e^{j\Omega}) \text{ i } \varphi(\Omega) \text{ neparne funkc. od } \Omega \end{array}$$

Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava

- Kvadrat amplitude dobiva se iz:

$$A^2(\Omega) = |H(e^{j\Omega})|^2 = H(e^{j\Omega})\, H(e^{-j\Omega})$$

odnosno

$$A^2(\Omega) = H(e^{j\Omega})H(e^{-j\Omega}) = G\left(\frac{e^{j\Omega}+e^{-j\Omega}}{2}\right) =$$

$$= G(\cos\Omega) = \frac{d_0 + 2\sum_{r=0}^{n} d_r \cos(r\Omega)}{c_0 + 2\sum_{r=0}^{n} c_r \cos(r\Omega)}$$

Frekvencijska karakteristika sustava prvog reda

Primjer:

$$y(k) - \alpha y(k-1) = \mathrm{U}z^k,\ \mathrm{U}\in\mathbf{R}$$

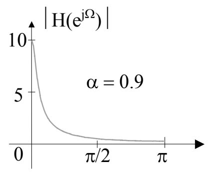
$$\Downarrow\ y(k) = \mathrm{Y}z^k$$

$$\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{U}} = H(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$

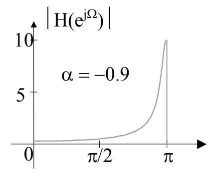
$$H(z)\big|_{z=e^{j\Omega}} = H(e^{j\Omega}) =$$
$$= \frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}} = \frac{1}{1-\alpha(\cos\Omega - j\sin\Omega)}$$

Frekvencijska karakteristika sustava prvog reda

$$|H(e^{j\Omega})| = \frac{1}{\left\{(1-\alpha\cos\Omega)^2 + (\alpha\sin\Omega)^2\right\}^{1/2}} = \frac{1}{(1+\alpha^2 - 2\alpha\cos\Omega)^{1/2}}$$



nisko–propusni filtar



visoko–propusni filtar

Frekvencijska karakteristika sustava drugog reda

- Transfer funkcija:

$$H(z) = \frac{1}{(z-\mathrm{q}_1)(z-\mathrm{q}_2)}$$

$$\Downarrow \; z = e^{j\Omega}$$

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{(e^{j\Omega}-\mathrm{q}_1)(e^{j\Omega}-\mathrm{q}_2)}$$

Frekvencijska karakteristika sustava drugog reda

Primjer: $\left.\begin{array}{l} \mathrm{q}_1 = 0.9e^{j\pi/4} \\ \mathrm{q}_2 = 0.9e^{-j\pi/4} \end{array}\right\}$ r = 0.9

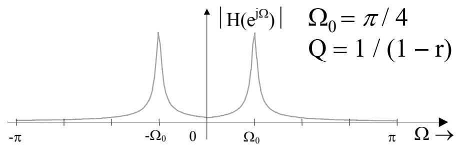
$$|H(e^{j\Omega})| = \frac{1}{\left|(e^{j\Omega}-\mathrm{r}e^{j\pi/4})(e^{j\Omega}-\mathrm{r}e^{-j\pi/4})\right|}$$

r ≈ 1, r < 1, $\Omega_0 = \pi/4$

$$|H(e^{j\Omega})| = \frac{1}{\left[(1-\mathrm{r})^2 + (2(\Omega-\Omega_0)/\Omega_0)^2\right]^{1/2}}$$

Frekvencijska karakteristika sustava drugog reda

r = 0,9
$\Omega_0 = \pi / 4$
$Q = 1 / (1 - r) = 10$



- rezonator na frekvenciji Ω_0
- pojasno – propusni filter

37

Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava

- Frekvencijska karakteristika se može odrediti grafički iz:

$$H(z) = \mathrm{K}\frac{\prod_{i=1}^{m}(z - \mathrm{z}_i)}{\prod_{i=1}^{n}(z - \mathrm{q}_i)}$$

praćenjem apsolutne vrijednosti $|H(e^{j\Omega})|$ i argumenta $H(e^{j\Omega})$ transfer funkcije na jediničnoj kružnici $z = e^{j\Omega}$ ravnine z

38

Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava

$$\left|H(e^{j\Omega})\right| = \mathrm{K}\frac{\prod_{i=1}^{m}\left|(e^{j\Omega} - \mathrm{z}_i)\right|}{\prod_{i=1}^{n}\left|(e^{j\Omega} - \mathrm{q}_i)\right|}$$

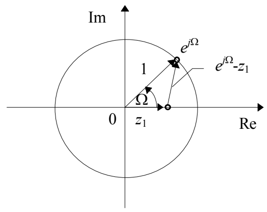
$$\arg H(z) = \sum\left[\arg(e^{j\Omega} - \mathrm{z}_i) - \arg(e^{j\Omega} - \mathrm{q}_i)\right]$$

- Svaki korijeni faktor transfer funkcije daje svoj individualni doprinos veličini (multiplikativno) i fazi (aditivno).

39

Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava

- Grafički prikaz u polarnom koordinatnom sustavu



Korjeni faktori → vektori

Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava

- Vrijednost transfer funkcije na frekvenciji Ω

$$\left|H(e^{j\Omega})\right| = \mathrm{K}\frac{\prod_{1}^{m}\mathrm{d}_i}{\prod_{1}^{n}\mathrm{l}_i}$$

$\{\mathrm{d}_i\}$ – udaljenost točke na kružnici $e^{j\Omega}$ do nultočki $\{\mathrm{z}_i\}$

$\{\mathrm{l}_i\}$ – udaljenost točke na kružnici $e^{j\Omega}$ do polova $\{\mathrm{q}_i\}$

- Fazni kut transfer funkcije

$$\arg H(e^{j\Omega}) = \sum_{1}^{m}\varphi_i - \sum_{1}^{n}\psi_i$$

$\varphi_i = \arg(e^{j\Omega}) - \arg(\mathrm{z}_i)$
$\psi_i = \arg(e^{j\Omega}) - \arg(\mathrm{q}_i)$

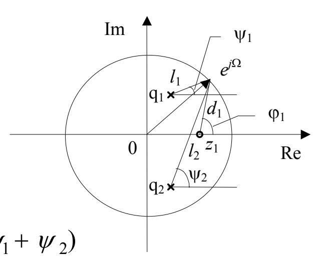
Frekvencijske karakteristike vremenski diskretnog sustava

- *Primjer:*

$$H(z) = \mathrm{K}\frac{z - \mathrm{z}_1}{(z-\mathrm{q}_1)(z-\mathrm{q}_2)}$$

$$\left|H(e^{j\Omega})\right| = \mathrm{K}\frac{\mathrm{d}_1}{\mathrm{l}_1\mathrm{l}_2}$$

$$\arg H(e^{j\Omega}) = \varphi_1 - (\psi_1 + \psi_2)$$



Primjer

$$H(z)=\frac{1}{(1-0.8\sqrt{2}z^{-1}+0.64z^{-2})}$$

$$H(e^{j\Omega})=\frac{1}{(1-0.8\sqrt{2}e^{-j\Omega}+0.64e^{-2j\Omega})}$$

- QuickTime: 9, 11 i 12.
- MATLAB: freqz3d

Jedinični odziv diferencijskog sustava

- Specijalni tipovi pobuda
  - Kroneckerov ili delta niz $\{\delta(k)\} \rightarrow$ jedinični impuls
  - Heavisideov niz $\{\mu(k)\} \rightarrow$ stepenica
- Odzivi na ove pobude
  - $\{\delta(k)\} \rightarrow \{h(k)\}$
  - $\{S(k)\} \rightarrow \{g(k)\}$
- Poznavanje ovih odziva može poslužiti za određivanje odziva na bilo koji oblik pobude

Jedinični odziv diferencijskog sustava

- Određivanje odziva sustava na jedinični impuls

$a_n y(k+n) + a_{n-1} y(k+n-1) + \ldots + a_0 y(k) =$
$b_n u(k+n) + b_{n-1} u(k+n-1) + \ldots + b_0 u(k)$

$$\Big\Downarrow \quad \begin{matrix} u(k)=\delta(k) \\ y(k)=0 \text{ za } k<0 \end{matrix}$$

$a_n y(k+n) + a_{n-1} y(k+n-1) + \ldots + a_0 y(k) =$
$b_n \delta(k+n) + b_{n-1} \delta(k+n-1) + \ldots + b_0 \delta(k)$

za $k > 0$ je desna strana nula $\rightarrow$ jedinični odziv za $k > 0$ je rješenje homogene jednadžbe

Jedinični odziv diferencijskog sustava

- Rješenje je tada linearna kombinacija

$$h(k) = C_1 y_1(k) + C_2 y_2(k) + \ldots + C_n y_n(k) \text{ za } k > 0,$$

n nepoznanica $\{C_i\}$ $\rightarrow$ potrebno je n početnih uvjeta:

$$h(1), h(2), \ldots, h(n).$$

- Uvjeti proizlaze iz jednadžbe diferencija i svojstva δ niza

$$\delta(k + i) = 1, \text{ za } k = -i,$$
$$\delta(k + i) = 0, \text{ za } k \neq -i.$$

Jedinični odziv diferencijskog sustava

- Iz jednadžbe diferencija s $u(k) = \delta(k)$ i $k\in[-n, 0]$ možemo dobiti $n + 1$ jednadžbu

$$k = -n \rightarrow a_n h(0) + a_{n-1} h(-1) + \ldots + a_0 h(-n) = b_n$$
$$k = -n + 1 \rightarrow a_n h(1) + a_{n-1} h(0) + \ldots + a_0 h(-n + 1) = b_{n-1}$$
$$k = -n + 2 \rightarrow a_n h(2) + a_{n-1} h(1) + \ldots + a_0 h(-n + 2) = b_{n-2}$$
$$\vdots$$
$$k = -1 \rightarrow a_n h(n - 1) + a_{n-1} h(n - 2) + \ldots + a_0 h(-1) = b_1$$
$$k = 0 \rightarrow a_n h(n) + a_{n-1} h(n - 1) + \ldots + a_0 h(0) = b_0$$

Jedinični odziv diferencijskog sustava

- Budući je sustav miran, $h(k) = 0$, za $k < 0$

$$\begin{bmatrix} a_n & & & & \\ a_{n-1} & a_n & & & \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ \vdots \\ h(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Ah} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{h} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

- Rješenje za $\{h(k)\}$, $k\in[0, n]$ može se dobiti inverzijom matrice $\mathbf{A}$

Jedinični odziv diferencijskog sustava

- Za različite korijene karakteristične jednadžbe $q_1, q_2, \dots q_n$

$h(k) = C_1 q_1^k + C_2 q_2^k + \dots + C_n q_n^k$, $k = 1, 2, \dots , n$

- Zapisano pomoću matrice

$$\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ q_1^2 & q_2^2 & \cdots & q_n^2 \\ q_1^3 & q_2^3 & \cdots & q_n^3 \\ \vdots & & & \\ q_1^n & q_2^n & \cdots & q_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(1) \\ h(2) \\ h(3) \\ \vdots \\ h(n) \end{bmatrix}$$

- Rješenje **QC** = **h**, je **C** = $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{h}$

Određivanje jediničnog odziva

- *Primjer:*
- Odrediti impulsni odziv sustava

$y(k + 2) - 3y(k + 1) + 2y(k) = 2u(k + 1) - 2u(k)$

za $u(k) = \delta(k) \rightarrow y(k) = h(k)$

$$\begin{aligned} k = -2 \quad &\rightarrow \quad h(0) - 3h(-1) + 2h(-2) = 0 - 0 \\ & \qquad h(0) = 0 \\ k = -1 \quad &\rightarrow \quad h(1) - 3h(0) + 2h(-1) = 2 \\ & \qquad h(1) = 2 \\ k = 0 \quad &\rightarrow \quad h(2) - 3h(1) + 2h(0) = 0 - 2 \\ & \qquad h(2) = 3 \cdot 2 - 2 = 4 \end{aligned}$$

Određivanje jediničnog odziva

- Karakteristična jednadžba

$q^2 - 3q + 2 = 0 \rightarrow q_1 = 1, q_2 = 2$

$h(k) = C_1 \cdot 1^k + C_2 \cdot 2^k$, za $k > 0$

$$\left.\begin{aligned} h(1) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 2 = 2 \\ h(2) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 4 = 4 \end{aligned}\right| \cdot 2 \;\Big|\; + \;\Big|\; -$$

$C_1 = 0, C_2 = 1$

$$h(k) = \begin{cases} 0, & k \le 0 \\ 2^k, & k > 0 \end{cases}$$

Konvolucijska sumacija

- Linearni sustav karakteriziran je svojstvom

$$H(\mathrm{E})[\alpha\{u_1(k)\} + \beta\{u_2(k)\}] =$$
$$= \alpha H(\mathrm{E})\ \{u_1(k)\} + \beta H(\mathrm{E})\ \{u_2(k)\}$$

odnosno za jedinični odziv vrijedi

$$\{h(k)\} = H(\mathrm{E})\ \{\delta(k)\};\ H(\mathrm{E})\ \{c\delta(k)\} = \{ch(k)\}$$

- Za vremenski promjenljiv sustav vrijedi

$$H(\mathrm{E})\ \{\delta(k-i)\} = \{h(k,i)\}$$

- Za vremenski nepromjenljiv sustav vrijedi

$$H(\mathrm{E})\ \{\delta(k-i)\} = \{h(k-i)\}$$

Konvolucijska sumacija

- Pretpostavimo proizvoljni signal oblika

$$u = \ldots u(-1)\ \{\delta(k+1)\} + u(0)\ \{\delta(k)\} +$$
$$+ u(1)\ \{\delta(k-1)\} + u(2)\ \{\delta(k-2)\} + \ldots$$
$$u(i)\ \{\delta(k-i)\} \to u(i)\ \{h(k-i)\}$$

- Odziv na niz u je

$$y = \ldots u(-1)\ \{h(k+1)\} + u(0)\ \{h(k)\} +$$
$$+ u(1)\ \{h(k-1)\} + u(2)\ \{h(k-2)\} + \ldots$$

- Obje sekvence se mogu napisati kraće u obliku tzv. konvolucijske sumacije

Konvolucijska sumacija

$$u = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} u(i)\{\delta(k-i)\} \qquad u = u * \delta$$

- Za vremenski promjenjiv sustav

$$y = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} u(i)\{h(k,i)\}.$$

- k – ti uzorak ove sekvence je dan s

$$y(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} u(i)h(k,i).$$

Konvolucijska sumacija

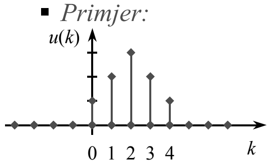
- Za vremenski stalan sustav je $y = u * h$

$$y(k)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}u(i)h(k-i) \quad \text{ili} \quad y(k)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}h(i)u(k-i)$$

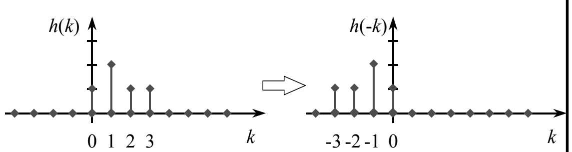
- Konvolucijska sumacija omogućuje određivanje odziva na bilo kakvu pobudu kad je poznat odziv na δ niz

Konvolucija dvaju signala

- *Primjer:*

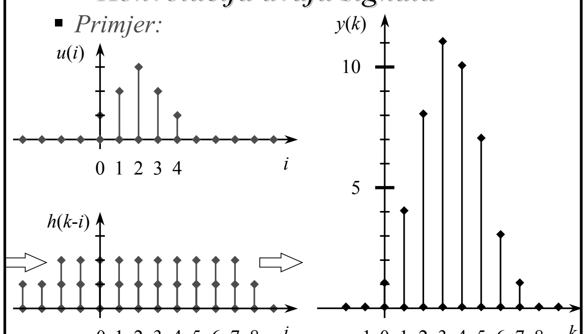


$$y(k)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}u(i)h(k-i)$$



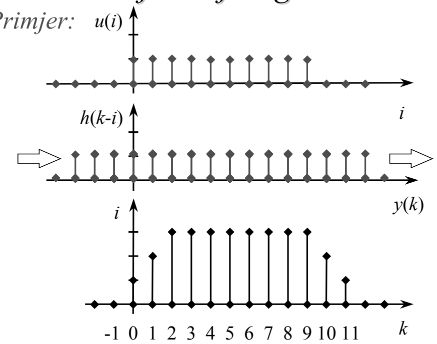
Konvolucija dvaju signala

- *Primjer:*



Konvolucija dvaju signala

- *Primjer:*



Dekonvolucija

- Postupak dobivanja nepoznate pobude $\{u(k)\}$, ako je poznat odziv sustava $\{y(k)\}$
- Izraz za konvoluciju (diskretni oblik) je

$$y(k) = \sum_{i=0}^{k} u(k-i)h(i) =$$

$$= u(k)h(0) + \sum_{i=1}^{k} u(k-i)h(i) = y(k)$$

što vodi na jednostavnu rekurzivnu formulu

Dekonvolucija

$$u(k) = \left[y(k) - \sum_{i=1}^{k} u(k-i)h(i) \right] \frac{1}{h(0)}$$

- Za uzorak $u(k)$ koriste se uzorci $u(0)$, $u(1)$, … $u(k-1)$
- Ukoliko je $\{u(k)\} * \{v(k)\} = \{\delta(k)\}$

$$\Downarrow$$

$$\{v(k)\} = \{u(k)\}^{-1}$$

- nizovi su međusobno inverzni