Signali i sustavi

Vremenski diskretni sustavi
prvog i drugog reda

Sadržaj

- Sustavi prvog reda
  - vremenski invarijantni sustavi
  - nelinearni sustavi
- Sustavi drugog reda
  - vremenski invarijantni sustavi
  - vremenski promjenjivi sustavi
  - nelinearni sustavi

Sustavi prvog reda

- Jedan element za kašnjenje + jedan ili više funkcijskih blokova.
- Podaci o stanju $x(k)$ i ulazu $u(k)$ dovoljni su da se odredi stanje u narednom koraku $x(k+1)$,

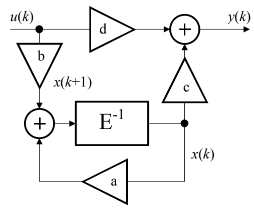
$$x(k+1) = f\,(x(k), u(k), k),$$
$$y(k) = g\,(x(k), u(k), k).$$

- Rješenje gornje jednadžbe diferencija $\Rightarrow$ numeričko, korak po korak.

Linearni vremenski invarijantan sustav

f – linearna funkcija

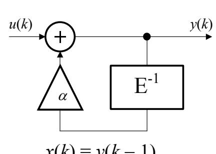
$x(k+1) = ax(k) + bu(k)$
$y(k) = cx(k) + du(k)$



Linearni vremenski invarijantan sustav

- *Primjer:* štednja na bankovnoj knjižici:
  r – godišnja kamata,
  r / n – dnevna kamata,
  $y(k) = y(k-1) + \frac{r}{n} y(k-1) + u(k),$
  $y(k)$ – stanje računa k–tog dana,
  $y(k-1)$ – stanje računa $(k-1)$–og dana,
  $u(k)$ – uplata $u(k) > 0$ ili isplata $u(k) < 0$ k–tog dana.

Linearni vremenski invarijantan sustav



- Blok dijagram ove jednadžbe je:

$$y(k) = (1 + \frac{r}{n}) y(k-1) + u(k)$$

- Ako $x(k) = y(k-1)$ uzmemo kao varijablu stanja:
  $x(k+1) = \alpha\, x(k) + u(k),$
  $y(k) = \alpha\, x(k) + u(k).$

Linearni vremenski invarijantan sustav

- Rješavanje korak po korak (numerički).

$x(1) = \alpha\, x(0) + u(0)$

$x(2) = \alpha\, x(1) + u(1) = \alpha\,(\alpha\, x(0) + u(0)) + u(1)$

$\quad = \alpha^2 x(0) + \alpha\, u(0) + u(1)$

$x(3) = \alpha\, x(2) + u(2) = \alpha^3 x(0) + \alpha^2 u(0) + \alpha\, u(1) + u(2)$

$$x(k) = \alpha^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^{k-(j+1)} u(j), k > 0$$

$$y(k) = \alpha^{k+1} x(0) + \sum_{j=0}^{k} \alpha^{k-j} u(j), \quad k \geq 0$$

Linearni vremenski invarijantan sustav

- Rješavanje korak po korak (numerički).

$$y(k) = (1 + \frac{r}{n}) y(k-1) + u(k)$$

k	$u(k)$	$y(k)$
0	10	10
1	−2,4	8,1
2	−0,5	8,0
3	−0,5	7,9
4	−0,2	8,1
5	−0,4	8,1
6	−1,4	7,1
7	−1,1	6,4

y(0) = 1.05 · y(−1) + 10 = 1.05 · 0 + 10

y(1) = 1.05 · y(0) − 2.4 = 1.05 · 10 − 2.4

y(2) = 1.05 · y(1) − 0.5 = 1.05 · 8.1 − 0.5

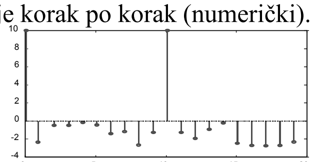
y(3) = 1.05 · y(0) − 0.5 = 1.05 · 8.0 − 0.5

y(4) = 1.05 · y(1) − 0.2 = 1.05 · 7.9 − 0.2

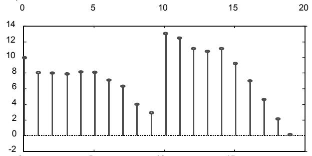
Linearni vremenski invarijantan sustav

- Rješavanje korak po korak (numerički).

$u(k)$



$y(k)$



Antidiferencijski operator Δ^{-1}

- Antidiferencijski operator Δ^{-1} daje niz:

$$\{y(k)\} = \Delta^{-1} \{u(k)\} \Rightarrow \Delta\{y(k)\} = \{u(k)\}.$$

Pri tome vrijedi:

$$\Delta\left\{\sum_{j=0}^{k-1} u(j) + K\right\} = \{u(k)\} \Rightarrow \Delta^{-1}\{u(k)\} = \left\{\sum_{j=0}^{k-1} u(j) + K\right\}.$$

Rješavanje jednadžbe diferencija analitički

- Pretpostavimo rješenje homogene jednadžbe oblika $x(k) = Cq^k$, gdje je C proizvoljna konstanta:

  $x(k + 1) = \alpha x(k) \rightarrow Cq^{k+1} = \alpha \cdot Cq^k \rightarrow q = \alpha.$
- Jednadžbu zadovoljava $x_h = Cq^k$ ako je $q = \alpha$.
- Pretpostavimo rješenje nehomogene jednadžbe u obliku:

  $$x(k) = q^k \cdot f(k) \rightarrow x(k) = \alpha^k \cdot f(k),$$
- gdje je $\{f(k)\}$ neka sekvencija stavljena mjesto konstante u rješenju homogene jednadžbe.

Rješavanje jednadžbe diferencija analitički

- Uvrštenjem u jednadžbu diferencija dobivamo:

  $$\alpha^{k+1} f(k+1) = \alpha\alpha^k f(k) + u(k) \rightarrow \alpha^{k+1}[f(k+1) - f(k)] = u(k),$$
  $$\Delta f(k) = f(k+1) - f(k) = u(k)\, q^{-(k+1)},\ q = \alpha.$$
- Primjenom antidiferencijskog operatora izlazi:

  $$f(k) = \Delta^{-1}\left[u(k)q^{-(k+1)}\right] = \sum_{j=0}^{k-1} u(j)q^{-(j+1)} + \mathrm{C}.$$
- Rješenje nehomogene jednadžbe slijedi iz $x(k) = q^k \cdot f(k)$, tj.

$$x(k) = q^k\left[\sum_{j=0}^{k-1} u(j)q^{-(j+1)} + \mathrm{C}\right] = \mathrm{C}q^k + \sum_{j=0}^{k-1} u(j)q^{k-(j+1)}.$$

Rješavanje jednadžbe diferencija analitički

- Konstantu C možemo dobiti uvrštenjem u polaznu jednadžbu uz $k = 0$.
- Za $x(1) = Cq + u(0) = qx(0) + u(0) \rightarrow C = x(0)$.
- Dobivamo rješenje u obliku:

$$x(k) = \begin{cases} x(0), & \text{za } k = 0, \\ q^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} u(j) q^{k-(j+1)}, & \text{za } k > 0, \end{cases}$$

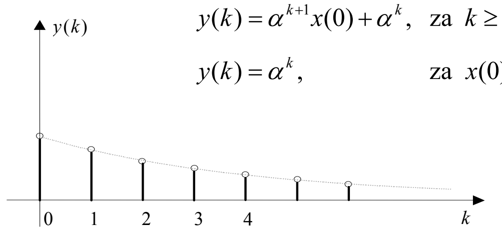
a izlaz $$y(k) = q^{k+1} x(0) + \sum_{j=0}^{k} u(j) q^{k-j}, \quad \text{za } k \geq 0.$$

Jednični odziv u(k) = δ(k)

$$x(k) = \begin{cases} x(0), & \text{za } \ k = 0, \\ \alpha^k x(0) + \alpha^{k-1}, & \text{za } \ k > 0, \end{cases}$$

$$y(k) = \alpha^{k+1} x(0) + \alpha^k, \quad \text{za } \ k \geq 0,$$

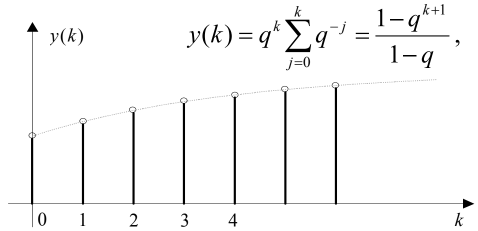
$$y(k) = \alpha^k, \quad \text{za } \ x(0) = 0.$$



Odziv na jediničnu stepenicu u(k) = m(k) uz x(0) = 0

$$x(k) = q^k \sum_{j=0}^{k-1} q^{-(j+1)} = \frac{1-q^k}{1-q}, \quad k > 0,$$

$$y(k) = q^k \sum_{j=0}^{k} q^{-j} = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}, \quad k \geq 0.$$

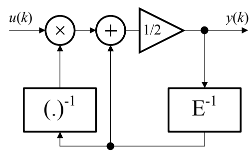


Nelinearni sustav

- *Primjer:* računanje drugog korijena broja $u > 0$.

$$y(k) = \frac{1}{2}\left[y(k-1) + \frac{u}{y(k-1)} \right]$$

- Nelinearan sustav.
- Za $y(k-1) = x(k)$ dobivamo oblik $x(k+1) = f(x(k), u)$.



Nelinearni sustav

$$\sqrt{10} = ?$$

$$y(k) = \frac{1}{2}\left[y(k-1) + \frac{u}{y(k-1)} \right]$$

$$\sqrt{10} = 3{,}162277660|16838$$

k	$y(k)$
0	10.000000000
1	5.500000000
2	3.659090909
3	3.196005082
4	3.162455623
5	3.162277665
6	3.162277660
7	3.162277660
8	3.162277660

Sustavi drugog reda

- Opis sustava s dvije jednadžbe diferencija prvog reda:

$$x_1(k+1) = f_1(x_1(k), x_2(k), u(k)),\ x_1(0) = x_{10},$$
$$x_2(k+1) = f_2(x_1(k), x_2(k), u(k)),\ x_2(0) = x_{20},$$
$$y(k) = g(x_1(k), x_2(k), u(k)).$$

- Zapisano u vektorskom obliku:

$$\mathbf{x}(k) = [x_1(k), x_2(k)]^t,$$
$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)],\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)].$$

Sustavi drugog reda

- Rješenje možemo dobiti korak po korak počevši od $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$,

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(0), \mathbf{u}(0)),$$
$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(1), \mathbf{u}(1)) = \mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}(0), \mathbf{u}(0)), \mathbf{u}(1)],$$
$$\mathbf{x}(3) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(2), \mathbf{u}(2)) = $$
$$= \mathbf{f}\{\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}(0), \mathbf{u}(0)), \mathbf{u}(1)], \mathbf{u}(2)\}.$$

- Ulazni niz $\{u(k)\}$ mora biti poznat.

Sustavi drugog reda

- Sustav se može opisati s jednom jednadžbom diferencija drugog reda u obliku

$$y(k+2) = f(y(k+1), y(k), u(k+2), u(k+1), u(k)),$$

ili

$$y(k) = f(y(k-1), y(k-2), u(k), u(k-1), u(k-2)),$$

što predstavlja model s ulazno izlaznim varijablama.

Linearni sustav drugog reda

- Ako su f_1 i f_2 linearne funkcije:

$$x_1(k+1) = a_{11}x_1(k) + a_{12}x_2(k) + u_1(k),$$
$$x_2(k+1) = a_{21}x_1(k) + a_{22}x_2(k) + u_2(k),$$

sustav se može transformirati u:

$$x_1(k+2) - Tx_1(k+1) + \Delta x_1(k) = u(k),$$
$$x_2(k+2) - Tx_2(k+1) + \Delta x_2(k) = v(k),$$

gdje je

$$T = a_{11} + a_{22}, \qquad u(k) = u_1(k+1) + a_{12}u_2(k) - a_{22}u_1(k),$$
$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \qquad v(k) = u_2(k+1) + a_{21}u_1(k) - a_{11}u_2(k).$$

Linearni sustav drugog reda

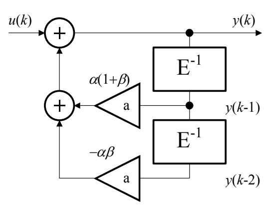
- *Primjer:* model nacionalnog bruto dohotka
  - $y(k)$ – bruto dohodak na kraju k–te godine,
  - $p(k)$ – potrošnja – kupovina dobara,
  - $i(k)$ – investicije – kupovina proizvodnih sredstava,
  - $d(k)$ – troškovi državne uprave,
  - $y(k) = p(k) + i(k) + d(k)$.
- Ustanovljen je slijedeći odnos između navedenih veličina:
  - $p(k) = \alpha \cdot y(k-1)$,
  - $i(k) = \beta \cdot \nabla p(k-1) = \beta \cdot \alpha \cdot (y(k-1) - y(k-2))$,
  - $d(k) = \mathrm{d}$.

Linearni sustav drugog reda

- Uvršteno u sumu daje:

$$y(k) = \alpha(1+\beta)y(k-1) - \alpha\beta y(k-2) + \mathrm{d}.$$

- Blok dijagram:



Rješavanje jednadžbe diferencija

- Za rješavanje jednadžbe od trenutka $k = 0$ treba poznavati:
  - $y(-1)$ i $y(-2) \rightarrow$ početne uvjete,
  - α i $\beta \rightarrow$ parametre sustava.
- Pretpostavimo rješenje linearne homogene jednadžbe u obliku $y(k) = q^k$.

$$a_2 y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = 0 \quad\Rightarrow\quad q^k(a_2 q^2 + a_1 q + a_0) = 0$$

$$a_2 y(k) + a_1 y(k-1) + a_0 y(k-2) = 0 \quad\Rightarrow\quad q^{k-2}(a_2 q^2 + a_1 q + a_0) = 0$$

$$q_{12} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2}$$

Rješavanje jednadžbe diferencija

- Karakteristična jednadžba se često piše u obliku:
  1) $q^2 - (2r\cos\theta)\,q + r^2 = 0$, za $\cos^2(\theta) < 1$,
     $q_{12} = r(\cos\theta \pm j\sin\theta) = r\,e^{\pm j\theta}$ (par kompleksnih korjena),
  2) $q^2 - (2r\,\mathrm{ch}\,\alpha)\,q + r^2 = 0$, za $\mathrm{ch}^2\,\alpha > 1$,
     $q_{12} = r(\mathrm{ch}\,\alpha \pm \mathrm{sh}\,\alpha) = r\,e^{\pm\alpha}$ (par realnih korjena),
  3) $q^2 - 2rq + r^2 = 0$,
     $q_{12} = r$ (dvostruki korjen).
- Rješenje jednadžbe diferencija je linearna kombinacija od q_1^k i q_2^k:

$$y_h(k) = C_1 q_1^k + C_2 q_2^k.$$

Rješavanje jednadžbe diferencija

- Tri slučaja:
  - oscilatorni slučaj,
  - kritički aperiodičan slučaj,
  - aperiodičan slučaj.
- Oscilatorni slučaj za $\cos^2(\theta) < 1$

$$y_n(k) = C_1 r^k e^{jk\theta} + C_2 r^k e^{-jk\theta} = 2C\,r^k\cos(\theta k - \phi),$$

uz:
  - $r < 1 \rightarrow$ padajući niz.
  - $r > 1 \rightarrow$ rastući niz (nestabilan sustav).
  - $r = 1 \rightarrow$ neprigušeni oscilatorni slučaj.

$$y_n(k) = 2C\cos(\theta k - \phi),$$

Rješavanje jednadžbe diferencija

- Kritički aperiodičan slučaj $\cos^2(\theta) = 1$,

$$y_n(k) = C_1 r^k + C_2 k r^k,$$

  - $r < 1 \rightarrow$ padajući niz,
  - $r > 1 \rightarrow$ rastući niz (nestabilan sustav),
  - $r = 1 \rightarrow$ odziv linearno raste,

$$y_n(k) = C_1 + C_2 k.$$

- Aperiodičan slučaj $\mathrm{ch}\,(\alpha) > 1$,

$$y_n(k) = C_1 r^k e^{\alpha k} + C_2 r^k e^{-\alpha k},$$

  - $re^{\alpha} < 1$ i $re^{-\alpha} < 1$ niz je padajući (stabilan sustav).

Homogeni sustav jednadžbi s varijablama stanja

- Rješenje jednadžbi sustava drugog reda može se odrediti supstitucijom $x_1(k) = X_1 q^k$ i $x_2(k) = X_2 q^k$ u jednadžbe stanja:

$$x_1(k+1) = a_{11}x_1(k) + a_{12}x_2(k),$$
$$x_2(k+1) = a_{21}x_1(k) + a_{22}x_2(k),$$

$$X_1 q^{k+1} = a_{11}X_1 q^k + a_{12}X_2 q^k,$$
$$X_2 q^{k+1} = a_{21}X_1 q^k + a_{22}X_2 q^k,$$

$$qX_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2,$$
$$qX_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2.$$

Rješavanje jednadžbe diferencija

- Da bi sustav algebarskih jednadžbi imao rješenje za X_1 i X_2 mora determinanta isčezavati tj.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - q & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - q \end{vmatrix} = 0.$$

- Determinanta daje polinom:

$$q^2 - \mathrm{T}q + \Delta = 0,$$

čiji su korjeni q_1 i q_2 prirodne ili vlastite frekvencije sustava.

Vremenski promjenjiv sustav drugog reda

MATLAB primjer

Nelinearni sustav drugog reda

- Diskretni ekvivalent Van der Polove jednadžbe je:

$$y(k) = 2y(k-1) - y(k-2)[1 + T^2] + \varepsilon T[y(k-1) - y(k-2) - y(k-1)y^2(k-2) + y^3(k-2)].$$

- Jednadžbu rješavamo korak po korak (numerički).
- Primjer numeričkog rješavanja uz slijedeće parametre:

$T = 0.1$
$\varepsilon = 0.1,$
$y(-1) = 0.1,$
$y(-2) = 0.$

Numeričko rješenje Van der Polove jednadžbe

k	$y(k)$
0	0,201
1	0,293
2	0,366
3	0,410
4	0,418
5	0,385
6	0,310
7	0,196

$$y(k) = 2{,}01 \cdot y(k-1) - 0{,}01 \cdot y(k-1) \cdot y^2(k-2) - 1{,}11 \cdot y(k-2) + 0{,}01 \cdot y^3(k-2)$$

$$y(0) = 2.01 \cdot 0{,}1 - 0.01 \cdot 0.1 \cdot 0 - 1.11 \cdot 0 + 0.01 \cdot 0 = 0.201$$

Numeričko rješenje Van der Polove jednadžbe