Signali i sustavi

Vremenski diskretni signali i sustavi

Uvod

- Varijable diskretnog sustava *u*, *x*, *y* su funkcije diskretne nezavisne varijable $t_k \in \mathbf{T}$ gdje je $\mathbf{T} \subset \mathbf{R}$ prebrojiv skup.
- Sve t_k možemo poredati u niz, s rastućim indeksima *k* koje možemo interpretirati kao niz vremenskih trenutaka.
- Niz definiramo kao funkciju $t : \mathbf{Z} \to \mathbf{T}$.
  - Vrijednost niza *t* na cijelom broju *k* označavamo s $t(k)$ ili češće s t_k. Opći član niza *t* je t_k.
  - Nizove označavamo s $\ldots t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \ldots$ ili $\{t_k\}$, $k \in \mathbf{Z}$ ili (t_k), $k \in \mathbf{Z}$

2

Uvod

- Najjednostavniji i najvažniji slučaj niza $t = \{t_k\}$ je slučaj aritmetičkog niza kada je funkcija $t_k = T_0 k$, gdje je T_0 po volji uzeta pozitivna konstanta.

  $t_k = T_0 k$, $k \in \mathbf{Z}$, T_0 – kvant vremena
- Niz označavamo s $u = \{(t_k, u(t_k)), t_k \in \mathbf{T}\}$

  $u = \{u_k\}$ ili $u = \{u(k)\}$, $k \in \mathbf{Z}$, ili

  $u = \ldots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \ldots$ ili

  $u = \{\ldots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \ldots\}$.

3

Uvod

- Npr. $u = \ldots, 3_{-2}, 7_{-1}, 5_0, 9_1, 6_2, \ldots$
- Ako su članovi u svom prirodnom redu, indekse možemo izostaviti i uzorak s $k = 0$ posebno označiti.
- Npr. $u = \ldots, 3, 7, \underline{5}, 9, 6, \ldots$
- Kauzalan niz: $u_k = 0$ za $k < 0$, $k \in \mathbf{Z}$

  $u = \{u_0, u_1, u_2, \ldots\}$.
- Konačan niz: $u_k = 0$ za $k < 0$ i $k \geq K$, $k \in \mathbf{Z}$

  $u = \{u_0, u_1, \ldots, u_{K-1}\}$.
- Periodičan niz s periodom N:

  $u_{k+N} = u_k$ za $k \in \mathbf{Z}$.

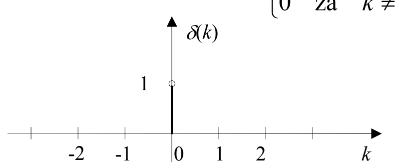
4

Osnovni nizovi

- Jedinični niz (Niz s jediničnim članom ili uzorkom, Kroneckerov delta, δ – niz).

$\delta = \ldots, 0, 0, \underline{1}, 0, 0, \ldots$

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{za} \quad k = 0, k \in \mathbf{Z} \\ 0 & \text{za} \quad k \neq 0 \end{cases}$$



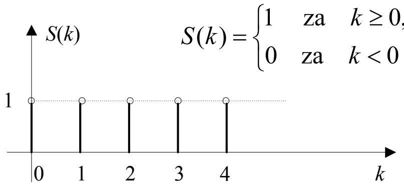
5

Osnovni nizovi

- Jedinična stepenica (Heavisideov niz)

$S = \ldots, 0, 0, \underline{1}, 1, 1, \ldots$

$$S(k) = \begin{cases} 1 & \text{za} \quad k \geq 0, k \in \mathbf{Z} \\ 0 & \text{za} \quad k < 0 \end{cases}$$



- Osnovni kauzalni niz.
  - Množenjem nekauzalnog niza s Heavisideovim nizom on postaje kauzalan.

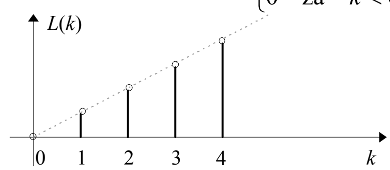
6

Osnovni nizovi

- Jedinična kosina

L = ..., 0, <u>0</u>, 1, 2, 3, 4, ...

$$L(k)=\begin{cases} k & \text{za} \quad k \geq 0, k \in \mathbf{Z} \\ 0 & \text{za} \quad k<0 \end{cases}$$



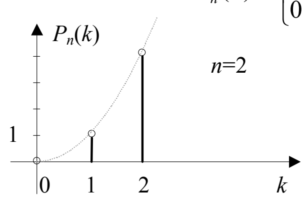
7

Osnovni nizovi

- Jedinična parabola n–tog stupnja

P_n = ..., 0, <u>0</u>, 1^n, 2^n, 3^n, ...

$$P_n(k)=\begin{cases} k^n & \text{za} \quad k \geq 0, k \in \mathbf{Z} \\ 0 & \text{za} \quad k<0 \end{cases}$$

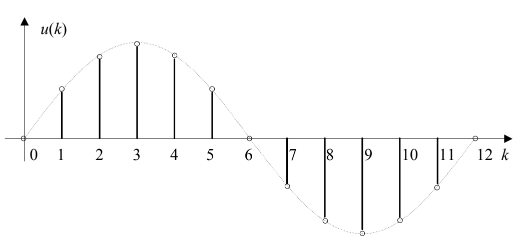


8

Osnovni nizovi

- Sinusni niz

$u(k) = U \cos(\omega T_0 k + \zeta)$,
gdje je ω frekvencija dodirnice.



9

Svojstva sinusnog niza

$u(k) = U \cos(\Omega k + \zeta),\ k \in \mathbf{Z}$,

U – amplituda, ζ – faza,

$\Omega = \omega T_0$ – korak argumenta u radijanima analogan frekvenciji.

- Za $\Omega = \pi + \Delta$ izlazi

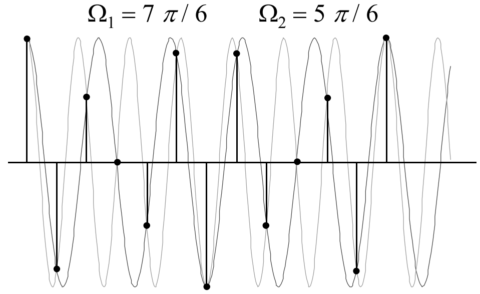
$$u(k) = \cos(\pi + \Delta)k = \cos(-2\pi + \pi + \Delta)k$$
$$= \cos(-\pi + \Delta)k = \cos(\pi - \Delta)k.$$

- Iz raspoloživog niza se ne može razlikovati da li je frekvencija dodirnice

$$\Omega_1 = \pi + \Delta \text{ ili } \Omega_2 = \pi - \Delta.$$

Svojstva sinusnog niza

$$u(k) = \cos(\Omega\, k + \zeta),\ k \in \mathbf{Z}$$
$$\Omega_1 = 7\ \pi / 6 \qquad \Omega_2 = 5\ \pi / 6$$



Svojstva sinusnog niza

- Za $\Omega = 2\pi - \Delta$ izlazi

$$u(k) = \cos(2\pi - \Delta)k = \cos(-\Delta k) = \cos \Delta k.$$

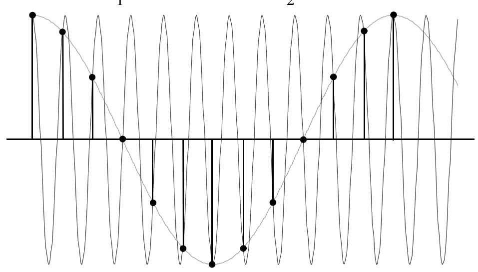
- Iz raspoloživog niza se ne može razlikovati da li je frekvencija dodirnice

$$\Omega_1 = 2\pi - \Delta \text{ ili } \Omega_2 = \Delta.$$

Svojstva sinusnog niza

$u(k) = \cos(\Omega\, k + \zeta),\ k \in \mathbf{Z}$

$\Omega_1 = \pi / 6 \qquad \Omega_2 = 11\pi / 6$



13

Svojstva sinusnog niza

- Vidi se da se iz ovog niza ne može razlikovati frekvencija Ω_1 od bilo koje

$$\Omega_n = \Omega_1 + 2n\pi,\ n \in \mathbf{Z}$$

jer je

$$\cos[(\Omega_1 + 2n\pi)k] = \cos(\Omega_1 k + 2nk\pi) = \cos(\Omega_1 k)$$

$$n,\ k \in \mathbf{Z}.$$

- Da bi se Ω mogao odrediti jednoznačno iz niza moramo biti sigurni da je $|\Omega| < \pi$, odnosno

$$\omega < \pi / T_0 \text{ ili } 2f < 1 / T_0.$$

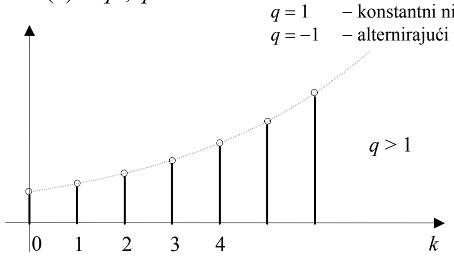
14

Osnovni nizovi

- Eksponencijalni niz

$u(k) = q^k,\ q \in \mathbf{R}$

$q < 1$ – padajući niz
$q > 1$ – rastući niz
$q = 1$ – konstantni niz
$q = -1$ – alternirajući niz



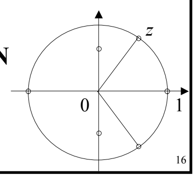
15

Svojstva eksponencijalnog niza

- Eksponencijalni niz ovisno od kompleksnog parametra q ili z_n može poprimiti različite oblike, a pogotovo ako nekoliko elementarnih nizova z_n^k formira linearnu kombinaciju.

$$u(k)=\sum_{n=0}^{N-1} c_n z_n^k$$

- Za $k \in \mathbf{Z}$ nizovi su nekauzalnog oblika, a za $k \in \mathbf{N}$ su kauzalni, pri čemu z može biti realan, imaginaran ili konjugirano kompleksan.

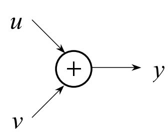


16

Osnovne operacije na nizovima i elementi diskretnog sustava

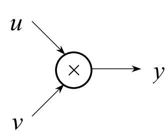
- Zbrajanje nizova

Zbroj dva niza $y = u + v$ ili
$\{y(k)\} = \{u(k)\} + \{v(k)\}$
je niz s općim članom
$y(k) = u(k) + v(k)$ za svaki $k \in \mathbf{Z}$.



- Produkt nizova

Produkt dva niza $y = uv$ ili
$\{y(k)\} = \{u(k)\}\ \{v(k)\}$
je niz s općim članom
$y(k) = u(k)v(k)$ za svaki $k \in \mathbf{Z}$.

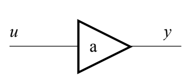


17

Osnovne operacije na nizovima i elementi diskretnog sustava

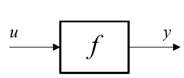
- Množenje s konstantom

$y = a\,u$ ili
$\{y(k)\} = a\{u(k)\} = \{a\,u(k)\}$
$y(k) = a\,u(k)$ za svaki $k \in \mathbf{Z}$.



- Funkcijski blok

$y = f(u)$ ili
$\{y(k)\} = f[\{u(k)\}]$
$y(k) = f[u(k)]$ za svaki $k \in \mathbf{Z}$.



18

Osnovne memorijske i predikcijske operacije

- Pomak niza – jedinični pomak daje iz ulaznog niza, niz pomaknut za jedan korak.

unaprijed (predikcija) | unatrag (kašnjenje i pamćenje)

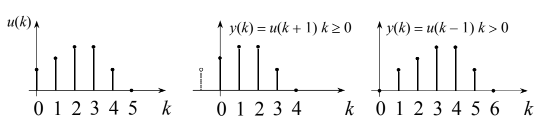
$y = \mathrm{E}\, u$ ili $\{y(k)\} = \mathrm{E}\,\{u(k)\}$,
$y(k) = (\mathrm{E}u)(k)$,
$y(k) = u(k+1)\ k \geq 0$.

$y = \mathrm{E}^{-1} u$ ili $\{y(k)\} = \mathrm{E}^{-1}\{u(k)\}$,
$y(k) = (\mathrm{E}^{-1}u)(k)$,
$y(k) = u(k-1)\ k > 0$.

19

Pomak niza

- Operacija pomaka niza unaprijed traži nekauzalan sustav pa je neostvariva u realnim sustavima.
- Zato se služimo redovito jedinicama za kašnjenje, odnosno operacijom E^{-1}.



20

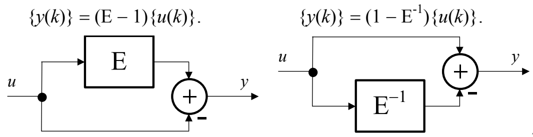
Osnovne memorijske i predikcijske operacije

- Diferencija niza

uzlazna | silazna

$y = \Delta\, u$ ili $\{y(k)\} = \Delta\,\{u(k)\}$,
$y(k) = (\Delta u)(k) = u(k+1) - u(k)$,
$\{y(k)\} = (\mathrm{E} - 1)\{u(k)\}$.

$y = \nabla u$ ili $\{y(k)\} = \nabla\{u(k)\}$,
$y(k) = (\nabla u)(k) = u(k) - u(k-1)$,
$\{y(k)\} = (1 - \mathrm{E}^{-1})\{u(k)\}$.



21

Osnovne memorijske i predikcijske operacije

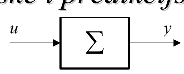
- Diferencija višeg reda

$$\Delta^n\{u(k)\}=(\mathrm{E}-1)^n\{u(k)\}=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\mathrm{E}^{n-r}\{u(k)\},$$

$$\nabla^n\{u(k)\}=(1-\mathrm{E}^{-1})^n\{u(k)\}=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\mathrm{E}^{-r}\{u(k)\},$$

$$\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Osnovne memorijske i predikcijske operacije

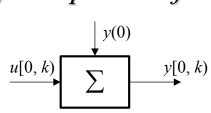


- Akumulacija niza
- Antidiferencijski operator Δ^{-1} daje niz $\{y(k)\} = \Delta^{-1}\{u(k)\}$ takav da je $\Delta\{y(k)\} = \{u(k)\}$.
- Može se pokazati da vrijedi $\Delta\left\{\sum_{j=0}^{k-1}u(j)+K\right\}=\{u(k)\}.$
- Za slučaj kauzalnih signala $\left(\sum_{j=0}^{k}u(j)+K\right)-\left(\sum_{j=0}^{k-1}u(j)+K\right)=u(k).$
- Prema tome:

$$\Delta^{-1}\{u(k)\}=\left\{\sum_{j=0}^{k-1}u(j)+K\right\},\qquad y(k)=\begin{cases}y(0), & k=0,\\ y(0)+\sum_{j=0}^{k-1}u(j), & k>0.\end{cases}$$

Osnovne memorijske i predikcijske operacije

- Uzlazni akumulator



$y(k+1)-y(k)=u(k),$

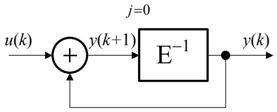
$y(k+1)=u(k)+y(k),$

$y(1)=u(0)+y(0)$ moramo poznavati $y(0)$,

$y(2)=u(1)+y(1)=u(1)+u(0)+y(0),$

$$y(k)=\sum_{j=0}^{k-1}u(j)+y(0)\ ,\ k>0$$

diskretni analogon integratora



$y(k+1)=y(k)+u(k)$

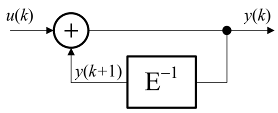
$y[0,k)=F(y(0),u[0,k))$

Osnovne memorijske i predikcijske operacije

- Silazni akumulator
- Silazni antidiferencijski operator ∇^{-1} daje niz

$\{y(k)\} = \nabla^{-1}\{u(k)\}$ takav da je $\nabla\{y(k)\} = \{u(k)\}$.

$$\nabla^{-1}\{u(k)\} = \left\{\sum_{j=0}^{k} u(j) + K\right\}$$



$$y(k) = y(-1) + \sum_{j=0}^{k-1} u(j)\,, \quad k \geq 0$$

$$y(k) = y(k-1) + u(k)$$

$$y[0, k) = F(y(-1), u[0, k))$$

Osnovne memorijske i predikcijske operacije

$y(\mathrm{k}) - y(k-1) = u(k),$

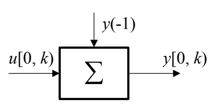
$y(\mathrm{k}) = u(k) + y(k-1),$

$y(0) = u(0) + y(-1)$ *moramo poznavati* $y(-1)$,

$y(1) = u(1) + u(0) + y(-1),$

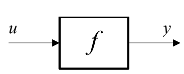
$y(2) = u(2) + u(1) + u(0) + y(-1),$

$$y(k) = \sum_{j=0}^{k-1} u(j) + y(-1).$$

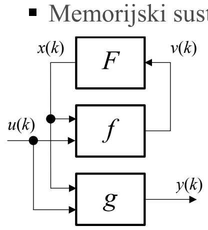


Model vrem. diskretnog sustava

- Bezmemorijski sustav
  $y(k) = f\,[u(k)]$.



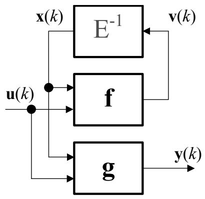
- Memorijski sustav $y(k) = F(x(k_0), u(k_0, k])$ za $k > k_0$.



- Bezmemorijski dio:
  $v(k) = f\,(x(k), u(k)),$
  $y(k) = g\,(x(k), u(k)).$
- Memorijski dio:
  $x(k) = F\,(x(k_0), v(k_0\,, \mathrm{k}]).$

Model vrem. diskretnog sustava

- Posebno važan memorijski element u memorijskom podsustavu je element jediničnog kašnjenja.



$\mathbf{u}(k)$, $\mathbf{x}(k)$, $\mathbf{y}(k)$ – vektori sustava

- Jednadžbe sustava:
  $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}\,(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(\mathrm{k}))$,
  $\mathbf{y}(k) = \mathbf{g}\,(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(\mathrm{k}))$.

28

Model vrem. diskretnog sustava

- Veza s kontinuiranim sustavom u slučaju da se derivacija aproksimira s diferencijom

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \cong \frac{\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k)}{\mathrm{T}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)),$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + \mathrm{T}\mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)).$$

- linearni sustav

$$\frac{\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k)}{\mathrm{T}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u},$$

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{I} + \mathrm{T}\mathbf{A})\mathbf{x}(k) + \mathrm{T}\mathbf{B}\mathbf{u}(k),$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d\mathbf{x}(k) + \mathrm{T}\mathbf{B}\mathbf{u}(k).$$

29