Signali i sustavi

Odziv i svojstva linearnih sustava

Sadržaj

- Odziv nepobuđenog sustava.
- Određivanje *fundamentalne matrice* razvojem u red.
- Klasična metoda određivanja fundamentalne matrice.
- Određivanje $\Phi(t)$ pomoću $\mathcal{L}$ – transformacije.
- Odziv pobuđenog linearnog sustava.
  - Impulsni odziv sustava.
  - Odziv stanja sustava na eksponencijalnu pobudu.
  - Odziv sustava $\mathcal{L}$ – transformacijom.

2

Odziv nepobuđenog sustava

- Dinamičko vladanje i svojstva linearnog sustava određujemo rješavanjem jednadžbi stanja sustava: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$.
- Rješenje matrične jednadžbe uz pobudu $\mathbf{u}$ i početno stanje $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ dati će nam stanje sustava od trenutka $t_0 = 0$ do bilo kojeg trenutka t.
- Homogeni dio (bez pobude):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t),$$

uz rubni uvjet, odnosno uz početno stanje $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$.

3

Odziv nepobuđenog sustava

- Pretpostavimo $\mathbf{x}(t)$ oblika : $\mathbf{x}(t)=\mathbf{c}_0+\mathbf{c}_1 t+\ldots+\mathbf{c}_k t^k+\ldots$, gdje su $\mathbf{c}_k$ vektori.
- Uvrstimo u diferencijalnu jednadžbu stanja:
$$\mathbf{c}_1+2\mathbf{c}_2 t+\ldots+k\mathbf{c}_k t^{k-1}+\ldots=\mathbf{A}(\mathbf{c}_0+\mathbf{c}_1 t+\ldots+k\mathbf{c}_k t^k+\ldots),$$
- pa izjednačimo iste potencije od t:

$$\mathbf{c}_1=\mathbf{A}\mathbf{c}_0,$$
$$\mathbf{c}_2=\frac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{c}_1=\frac{1}{2}\mathbf{A}^2\mathbf{c}_0,$$
$$\mathbf{c}_3=\frac{1}{3}\mathbf{A}\mathbf{c}_2=\frac{1}{3\cdot 2}\mathbf{A}^3\mathbf{c}_0,\ldots$$

... ili općenito:

$$\mathbf{c}_k=\frac{1}{k!}\mathbf{A}^k\mathbf{c}_0.$$

4

Odziv nepobuđenog sustava

- Uvrštavanjem $\mathbf{c}_k$ u izraz za $\mathbf{x}(t)$ dobivamo:
$$\mathbf{x}(t)=\left[\left(\mathbf{I}+\frac{\mathbf{A}t}{1!}+\frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2+\ldots+\frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k+\ldots\right)\right]\mathbf{x}(0).$$
- Razvoj sliči eksponencijalnoj funkciji, ali od matrice $\mathbf{A}$!
$$\mathbf{x}(t)=\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}\right]\mathbf{x}(0)=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0).$$

matrična eksponencijala $\Phi(t)$

- Svojstva $\Phi(t)$:
$$\dot{\mathbf{\Phi}}(t)=\mathbf{A}\Phi(t),$$
uz $\quad \mathbf{\Phi}(0)=\mathbf{I},\quad \mathbf{\Phi}(t)=e^{\mathbf{A}t}.$

5

Odziv nepobuđenog sustava

- Poznavanje $\Phi(t)$ i $\mathbf{x}_0 \Rightarrow$ omogućuje određivanje stanja sustava za bilo koji $t > \mathrm{t}_0$.
- $\Phi(t)$ – prijelazna ili fundamentalna matrica, transformira početno stanje $\mathbf{x}_0$ u stanje $\mathbf{x}(t)$:
$$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}(t-\mathrm{t}_0)}\mathbf{x}(\mathrm{t}_0)=\mathbf{\Phi}(t-\mathrm{t}_0)\mathbf{x}(\mathrm{t}_0).$$
- Deriviranje i integriranje $\Phi(t)$:
$$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t}=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}=\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t},$$
$$\int_{\mathrm{t}_0}^{t}e^{\mathbf{A}\tau}d\tau=\mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}t}-e^{\mathbf{A}\mathrm{t}_0}).$$

6

Određivanje fundamentalne matrice razvojem u red

- Pogodno za numeričko određivanje fund. matrice.
- Aproksimacija matrice $e^{\mathbf{A}t}$ s N članova reda:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}(\mathbf{A}t)^2 + \ldots + \frac{1}{N!}(\mathbf{A}t)^N.$$

- Izbor N: $\left\| \frac{1}{N!}(\mathbf{A}t)^N \right\| < \varepsilon.$
- Potreban N ovisit će o vlastitim vrijednostima matrice.

7

Određivanje fundamentalne matrice razvojem u red

- Primjer matrične eksponencijale:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{A}t} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8

Određivanje fundamentalne matrice razvojem u red

- Primjer matrične eksponencijale:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{A}t} \approx \begin{bmatrix} 1+t & 0 & 0 \\ -3t & 1-2t & 0 \\ 3t & t & 1-t \end{bmatrix}$$

9

Određivanje fundamentalne matrice razvojem u red

- Primjer matrične eksponencijale:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{A}t} \approx \begin{bmatrix} 1+t+t^2/2 & 0 & 0 \\ -3t+3t^2/2 & 1-2t+2t^2 & 0 \\ 3t-3t^2/2 & t-3t^2/2 & 1-t+t^2/2 \end{bmatrix}$$

10

Određivanje fundamentalne matrice razvojem u red

- Primjer matrične eksponencijale:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ -e^{t}+e^{-2t} & e^{-2t} & 0 \\ e^{t}-e^{-2t} & -e^{-2t}+e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix}$$

11

Određivanje fundamentalne matrice razvojem u red

- Fiksiramo $t = 1$:

$$e^{\mathbf{A}\cdot 1} = \begin{bmatrix} 2,72 & 0 & 0 \\ -2,58 & 0,14 & 0 \\ 2,58 & 0,23 & 0,37 \end{bmatrix}$$

- Numerički postupak:

$$e^{\mathbf{A}\cdot 1} \approx \begin{bmatrix} [illegible] & 0 & 0 \\ [illegible] & [illegible] & 0 \\ [illegible] & [illegible] & [illegible] \end{bmatrix}$$

12

Određivanje fundamentalne matrice razvojem u red

- Iterativni postupak određivanja:

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{(\mathbf{A}t)^2}{2!} + \frac{(\mathbf{A}t)^3}{3!} + \ldots =$$

$$= \mathbf{I} + \mathbf{A}t\left\{\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{2!} + \frac{(\mathbf{A}t)^2}{3!} + \ldots\right\}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}t\left\{\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{2}\left[\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{3}\left(\ldots\left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{N-1}\left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{N}\right)\right)\ldots\right)\right]\right\}$$

13

Klasična metoda određivanja fund. matrice

- $\Phi(t)$ sadrži vremenske funkcije svih varijabli stanja.
- Svaku varijablu stanja možemo pretpostaviti u obliku: $x_i = \mathrm{X}_i\, e^{pt}$.

homogena jednadžba stanja

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

14

Klasična metoda određivanja fund. matrice

- Dobiva se sustav homogenih jednadžbi za X_i koji daje rješenje $\mathrm{X}_i \neq 0$ samo ako je determinanta sustava jednaka 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-p & a_{12} & & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-p & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & & \\ a_{n1} & & & \cdots & a_{nn}-p \end{vmatrix} = 0$$

- Slijedi karakteristični polinom u varijabli p, koji daje karakteristične korijene ili vlastite frekvencije sustava.

15

Klasična metoda određivanja fund. matrice

- Opće rješenje za svaku varijablu stanja sadrži titranja svim karakterističnim frekvencijama sustava: $x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} e^{p_j t}, \quad i=1,\ldots\ldots,n.$
- Amplitude eksp. određuju se iz početnih uvjeta $x_k(0)$.
- $x_i(t)$ na osnovu matrice svih rješenja $\varphi_{ik}(t)$.

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{ik}(t) x_k(0) \quad \text{odnosno } \mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0).$$

- Funkcije $\varphi_{ik}(t)$ su elementi fundamentalne matrice sustava.

16

Klasična metoda određivanja fund. matrice

- Specijalni slučaj: matrica $\mathbf{A}$ dijagonalna, $\mathbf{A} = \Lambda$

$\Rightarrow$ imamo n nezavisnih sustava prvog reda.

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i , \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

- Rješenje za x_i: $x_i = e^{\lambda_i t} x_i(0)$.
- Svaka varijabla x_i titra samo svojom frekvencijom:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = e^{\Lambda t}\mathbf{x}(0).$$

17

Klasična metoda određivanja fund. matrice

- Opća matrica $\mathbf{A}$ može se dijagonalizirati transformacijom varijabli stanja modalnom matricom $\mathbf{M}$:

$$\Lambda = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{M} \quad \text{i} \quad \mathbf{A} = \mathbf{M}\,\Lambda\,\mathbf{M}^{-1}.$$

- Rješenje možemo iskoristiti za izračunavanje matrične eksponencijale od $\mathbf{A}$:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{M}\, e^{\Lambda t}\, \mathbf{M}^{-1},$$

- te slijedi odziv stanja:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{M}\, e^{\Lambda t}\, \mathbf{M}^{-1}\, \mathbf{x}_0.$$

18

Geometrijska interpretacija rješenja

- Neka je matrica $\mathbf{A}$: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$
- Pripadne svojstvene vrijednosti i karak. vektori su: $s_1 = -3,\quad s_2 = -2,\quad s_3 = -1,$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Kako će se mijenjati stanje $\mathbf{x}(t)$, ako je početno stanje $\mathbf{x}(0)$ proporcionalno nekom od karakterističnih vektora?

19

Geometrijska interpretacija rješenja

MATLAB primjer

20

Određivanje $\Phi(t)$ pomoću $\mathcal{L}$ – transformacije

- Vektor stanja sustava $\mathbf{x}(t)$ transformira se kao: $\mathcal{L}\{\mathbf{x}(t)\} = \mathbf{X}(s)$ i obratno $\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{X}(s)\} = \mathbf{x}(t)$.
- Jednadžba stanja sustava u s domeni: $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \longrightarrow s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s)$.
- $\mathbf{X}(s)$ stupčasti vektor $[X_1(s)\ X_2(s)\ \ldots\ X_n(s)]^T$
- Riješimo po $\mathbf{X}(s)$:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) = \hat{\mathbf{\Phi}}(s)\,\mathbf{x}(0).$$

Matrica karakterističnih frekvencija ili resolventa sustava.

21

Određivanje $\Phi(t)$ pomoću $\mathcal{L}$ – transformacije

- $\hat{\mathbf{\Phi}}(s)$ ... $\mathcal{L}$ transf. fundamentalne matrice sustava $\mathbf{\Phi}(t)$:

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\hat{\mathbf{\Phi}}(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\},$$

$$\hat{\mathbf{\Phi}}(s) = (s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}.$$

- Elementi matrice $\hat{\mathbf{\Phi}}(s)$ – razlomljene racionalne funkcije kompleksne frekvencije s.
  - Brojnik – polinom $n-1$ stupnja.
  - Nazivnik – polinom n–tog stupnja.

22

Određivanje $\Phi(t)$ pomoću $\mathcal{L}$ – transformacije

- Determinanta $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ kao produkt korjenih faktora:

$$\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}) = (s-\mathrm{p}_1)^{\mathrm{m}_1}(s-\mathrm{p}_2)^{\mathrm{m}_2}\ldots(s-\mathrm{p}_i)^{\mathrm{m}_i}\ldots(s-\mathrm{p}_n)^{m_n}$$
$$= \prod_1^{n'}(s-\mathrm{p}_i)^{\mathrm{m}_i}.$$

- p_1 do p_n .... karakteristične frekvencije sustava.
- m_i .... višestrukost i–tog korijena $\sum_{i=1}^{n'}\mathrm{m}_i = n.$

23

Određivanje $\Phi(t)$ pomoću $\mathcal{L}$ – transformacije

- Determinanta $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ kao polinom:

$$\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}) = s^n + \mathrm{d}_1 s^{n-1} + \ldots + \mathrm{d}_{n-1}s + \mathrm{d}_n$$

- koeficijenti polinoma $\{\mathrm{d}_i\}$ mogu se dobiti iz tragova matrice $\mathbf{A}$ i njenih potencija:

Trag matrice $\mathbf{T}_1 = tr\ \mathbf{A} = tr\left[a_{ij}\right] = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

$$\mathrm{d}_1 = -\mathrm{tr}\,\mathbf{A}$$
$$\mathrm{d}_2 = -\frac{1}{2}(\mathrm{d}_1\,\mathrm{tr}\,\mathbf{A} + \mathrm{tr}\,\mathbf{A}^2)$$
$$\mathrm{d}_n = -\frac{1}{n}(\mathrm{d}_{n-1}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{A} + \mathrm{d}_{n-2}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^2 + \ldots + \mathrm{d}_1\,\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^{n-1} + \mathrm{tr}\,\mathbf{A}^n)$$

- iterativni postupak

24

Određivanje $\mathbf{\Phi}(t)$ pomoću $\mathcal{L}$ – transformacije

- Inverzna $\mathcal{L}$ transformacija od $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$.
  - Razvojem u parc. razlomke svakog elementa $\varphi_{jk}(s)$

$$\hat{\mathbf{\Phi}}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \sum_{k=1}^{n'} \sum_{j=1}^{\mathrm{m}_k} \mathbf{C}_{jk} \frac{1}{(s-\mathrm{p}_k)^j}$$

$$\mathbf{C}_{jk} = \frac{1}{(\mathrm{m}_k - j)!} \frac{\mathrm{d}^{\mathrm{m}_k - j}}{\mathrm{d}s^{\mathrm{m}_k - j}} \left[(s-\mathrm{p}_k)^{\mathrm{m}_k} \hat{\mathbf{\Phi}}(s) \right]_{s=\mathrm{p}_k}$$

$$\mathbf{C}_{jk} = \frac{1}{(\mathrm{m}_k - j)!} \frac{\mathrm{d}^{\mathrm{m}_k - j}}{ds^{\mathrm{m}_k - j}} \left[\frac{\mathrm{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\prod_{i=1}^{n} (s-\mathrm{p}_i)^{\mathrm{m}_i}} \right]_{s=\mathrm{p}_k}$$

25

Određivanje $\mathbf{\Phi}(t)$ pomoću $\mathcal{L}$ – transformacije

- U slučaju jednostrukog korijena:

$$\mathbf{C}_{1k} = \left[(s-\mathrm{p}_k)\hat{\mathbf{\Phi}}(s) \right]_{s=p_k} = \frac{\mathrm{adj}(\mathrm{p}_k\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\prod_{\substack{1 \\ i \neq k}}^{n} (\mathrm{p}_k - \mathrm{p}_i)}.$$

- Inverzna transformacija daje fundamentalnu matricu oblika:

$$\mathbf{\Phi}(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{\mathrm{p}_k t} \sum_{j=1}^{\mathrm{m}_k} \mathbf{C}_{jk} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}.$$

- Suma eksponencijala eventualno pomnoženih polinomom u varijabli t, $(\mathrm{m}_k - 1)$ stupnja, ako je frekvencija (p_k) višestruki korijen.

26

Odziv pobuđenog linearnog sustava

- Za totalni odziv sustava treba odrediti rješenje nehomogene matrične jednadžbe $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$
- Lagrange–ova metoda varijacije parametara
  - proizvoljne konstante rješenja homogene jednadžbe pretpostave se kao funkcija vremena:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{f}(t).$$

- Uvrštenjem u jednadžbu sustava slijedi:

$$e^{\mathbf{A}t}\dot{\mathbf{f}}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}$$

odnosno: $\dot{\mathbf{f}}(t) = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$

27

Odziv pobuđenog linearnog sustava

- Integriranjem u intervalu (0, t] slijedi:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{f}(t) \leftarrow \mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(0) = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\left[\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{f}(0)\right]$$

- Za $t = 0$ slijedi: $\mathbf{x}(0) = \mathbf{f}(0)$,
  pa se stanje sustava može naći kao:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau.$$

28

Odziv pobuđenog linearnog sustava

- Budući da je $\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$, stanje sustava se može zapisati i kao:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau.$$

Titranje početnog stanja, ili funkcija stanja sustava $\mathbf{x}_n(t)$ kad nema pobude.

Stanje uzrokovano pobudom, ili odziv stanja mirnog sustava $\mathbf{x}_m(t)$.

29

Odziv pobuđenog linearnog sustava

- Uvrstimo stanje $\mathbf{x}(t)$ u izlaznu jednadžbu sustava: $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$.

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{C}\mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t),$$

odziv sustava bez pobude

odziv mirnog sustava

ili, općenito za pobudu koja počinje u trenutku t_0:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{\Phi}(t-t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{C}\mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t).$$

30

Odziv pobuđenog linearnog sustava

- Konvolucijski integral daje cjelovit odziv i kada t_0 teži prema $-\infty$, ako je pobuda trajna $(-\infty, \infty)$:

$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathbf{C\Phi}(t-\tau)\mathbf{Bu}(\tau)d\tau + \mathbf{Du}(t).$$

- Početno stanje $\mathbf{x}(-\infty)$ je proizvoljno – vlastito titranje uslijed početnog uvjeta ne postoji niti u jednom (konačnom) trenutku t.

31

Impulsni odziv sustava

- Pobuda sustava impulsima $\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}\delta(t)$.
  - Elementi stupca $\mathbf{U}$ su intenziteti impulsa na pojedinim ulazima sustava.
- Stanje sustava:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0^-) + \int_{0^-}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{BU}\delta(\tau)d\tau$$

$$= e^{\mathbf{A}t}\left[\mathbf{x}(0^-) + \mathbf{BU}\right] = \mathbf{\Phi}(t)\left[\mathbf{x}(0^-) + \mathbf{BU}\right].$$

  - Stanje sustava bez pobude određeno stanjem $\mathbf{x}(0^-)$.
  - Stanje mirnog sustava određeno impulsima pobude $\mathbf{BU}$.

32

Impulsni odziv sustava

- Pobuda razložena na impulse: $\mathbf{u}(t) = \int_{0^-}^{t^+} \delta(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau.$
- Množenjem matricom $\mathbf{D}$ i uvrštavanjem u konvolucijski integral dobivamo odziv mirnog sustava:

$$\mathbf{y}(t) = \int_{0^-}^{t^+} \left[\mathbf{C\Phi}(t-\tau)\mathbf{B} + \delta(t-\tau)\mathbf{D}\right]\mathbf{u}(\tau)d\tau,$$

$$\mathbf{y}(t) = \int_{0^-}^{t^+} \mathbf{H}(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau,$$

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{C\Phi}(t)\mathbf{B} + \delta(t)\mathbf{D} = \begin{bmatrix} h_{11}(t) & \cdots & h_{1m}(t) \\ h_{21}(t) & \cdots & h_{2m}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ h_{k1}(t) & \cdots & h_{km}(t) \end{bmatrix}.$$

matrica impulsnog odziva

33

Impulsni odziv sustava

- Konvolucijski integral predstavlja cjelovit odziv kauzalnog sustava kada t_0 teži u $-\infty$:

$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathbf{H}(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau.$$

- U slučaju nekauzalnog sustava gornja granica integracije se proteže u $+\infty$:

$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\tau)\mathbf{u}(t-\tau)d\tau.$$

34

Odziv stanja sustava na kauzalnu eksponencijalnu pobudu

- Pobuda sustava: $\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}\mu(t)e^{s_0 t}$.
  - Elementi stupca $\mathbf{U}$ (U_1 do U_m) su amplitude stepenice na pojedinim ulazima sustava.
- Stanje sustava:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_{0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{BU}e^{s_0\tau}d\tau,$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t}\int_{0}^{t} e^{(s_0\mathbf{I}-\mathbf{A})\tau}\mathbf{BU}d\tau,$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t}\left[e^{(s_0\mathbf{I}-\mathbf{A})t} - \mathbf{I}\right](s_0\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU},$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + (\mathbf{I}e^{s_0 t} - e^{\mathbf{A}t})(s_0\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}.$$

35

Odziv stanja sustava na kauzalnu eksponencijalnu pobudu

- U izrazu prepoznajemo tri komponente:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) - e^{\mathbf{A}t}(s_0\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU} + (s_0\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}e^{s_0 t}$$

$\mathbf{x}_n(t)$, stanje nepobuđenog sustava koje titra vlastitim frekv. sustava

$\mathbf{x}_{ms}(t)$, stanje mirnog sustava koje titra frekvencijom pobude s_0

$\mathbf{x}_{mp}(t)$, stanje mirnog sustava koje titra vlastitim frekv. sustava

36

Odziv stanja sustava na kauzalnu eksponencijalnu pobudu

- Spajamo članove koji titraju istim frekvencijama:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\left[\mathbf{x}(0) - (\mathrm{s}_0\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}\right] + (\mathrm{s}_0\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}e^{\mathrm{s}_0 t}$$

Prijelazno stanje sustava

Stacionarno stanje sustava

  - Desni pribrojnik se naziva i stacionarnim stanjem u slučaju konstantne $\mathrm{s}_0 = 0$ ili periodičke $\mathrm{s}_0 = j\omega_0$ pobude.
  - Amplitude titranja prijelaznog stanja određene su neskladom između početnog stanja $\mathbf{x}(0)$ i stacionarnog stanja $\mathbf{x}_{ms}(0)$ u trenutku $t = 0$.

37

Odziv stanja sustava na kauzalnu eksponencijalnu pobudu

- Odziv stanja sustava se može pisati i kao:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\left[\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_{ms}(0)\right] + \mathbf{x}_{ms}(t)$$

- Cjelovit odziv sustava na eksponencijalnu pobudu: $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C\Phi}(t)\left[\mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{\Phi}}(\mathrm{s}_0)\mathbf{BU}\right] + \left[\mathbf{C}\hat{\mathbf{\Phi}}(s_0)\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]\mathbf{U}e^{\mathrm{s}_0 t}$

Prolazni ili prijelazni odziv sustava, $y_{\mathrm{pr}}(t)$

Stacionarni odziv sustava, $y_{\mathrm{s}}(t)$

- Partikularno rješenje ili stacionarni odziv:

$$\mathbf{y}_s(t) = \left[\mathbf{C}\hat{\mathbf{\Phi}}(\mathrm{s}_0)\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]\mathbf{U}e^{\mathrm{s}_0 t} = \mathbf{H}(\mathrm{s}_0)\mathbf{U}e^{\mathrm{s}_0 t} = \mathbf{Y}e^{\mathrm{s}_0 t}.$$

transfer matrica

38

Odziv stanja sustava na kauzalnu eksponencijalnu pobudu

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Y}_1 \\ \mathrm{Y}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{Y}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(\mathrm{s}_0) & H_{12}(\mathrm{s}_0) & \cdots & H_{1m}(\mathrm{s}_0) \\ H_{21}(\mathrm{s}_0) & & & \\ \vdots & & & \vdots \\ H_{r1}(\mathrm{s}_0) & & \cdots & H_{rm}(\mathrm{s}_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{U}_1 \\ \mathrm{U}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{U}_m \end{bmatrix}$$

kompleksna amplituda eksponencijale na izlazu

$H_{ij}(\mathrm{s}_0)$, transfer funkcija između j – tog ulaza i i – tog izlaza za frekvenciju pobude s_0

kompleksna amplituda eksponencijale na ulazu

39

Odziv stanja sustava na kauzalnu eksponencijalnu pobudu

- Odziv sustava na harmonijsku pobudu, $s_0 = j\omega$:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}e^{j\omega t}\mu(t),$$
$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}[\mathbf{x}(0) - (j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}] + (j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}e^{j\omega t},$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C\Phi}(t)[\mathbf{x}(0) - (j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}] + [\mathbf{C}(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\,\mathbf{U}e^{j\omega t}.$$

- Stacionarni odziv:

$$\mathbf{y}_s(t) = \underbrace{\left[\mathbf{C}\left(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]}_{\text{transfer matrica pri frekvenciji } \omega}\mathbf{U}e^{j\omega t} = \underbrace{\hat{\mathbf{H}}\left(j\omega\right)}_{\text{transfer matrica pri frekvenciji } \omega}\mathbf{U}e^{j\omega t}.$$

- Veza transfer matrice i matrice impulsnog odziva: $\hat{\mathbf{H}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau.$

Odziv sustava $\mathcal{L}$ - transformacijom

- $\mathcal{L}$ transformacija jednadžbi stanja sustava:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{AX}(s) + \mathbf{BU}(s),$$
$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{BU}(s),$$
$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}(s),$$
$$\mathbf{X}(s) = \hat{\mathbf{\Phi}}(s)\mathbf{x}(0) + \hat{\mathbf{\Phi}}(s)\mathbf{BU}(s),$$
$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\{\hat{\mathbf{\Phi}}(s)\}}_{\text{fundamentalna matrica } \Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}}\mathbf{x}(0) + \mathcal{L}^{-1}\{\hat{\mathbf{\Phi}}(s)\mathbf{BU}(s)\},$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{BU}(\tau)d\tau.$$

Odziv sustava $\mathcal{L}$ - transformacijom

- $\mathcal{L}$ transformacija izlazne jednadžbe sustava:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{CX}(s) + \mathbf{DU}(s),$$
$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{\Phi}}(s)\mathbf{x}(0) + \left[\mathbf{C}\hat{\mathbf{\Phi}}(s)\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]\mathbf{U}(s).$$

- Miran sustav: $\mathbf{x}(0) = 0$:

$$\mathbf{Y}(s) = \underbrace{\left[\mathbf{C}\hat{\mathbf{\Phi}}(s)\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]}_{\text{transfer matrica}}\mathbf{U}(s) = \underbrace{\hat{\mathbf{H}}(s)}_{\text{transfer matrica}}\mathbf{U}(s).$$

- Elementi matrice $\hat{\mathbf{H}}(s)$ su transfer funkcije između pojedinih ulaza i pojedinih izlaza sustava.

Odziv sustava $\mathcal{L}$ - transformacijom

- Inverznom $\mathcal{L}$ transformacijom transfer matrice dobiva se matrica impulsnog odziva $\mathbf{H}(t)$:

$$\mathbf{H}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\hat{\mathbf{H}}(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathbf{C}\hat{\mathbf{\Phi}}(s)\mathbf{B} + \mathbf{D}\right\}.$$

43