



Signali i sustavi

Linearni diferencijalni sustavi



Sadržaj I

- Model sustava s ulazno izlaznim varijablama
- Klasične metode rješavanja
- Vremenski stalni sustavi
- Amplitude vlastitog titranja sustava
- Prisilni odziv sustava
- Transfer funkcija lin. vremenski invarijantnog sustava dobivena Laplaceovom transformacijom

2



Sadržaj II

- Transfer funkcije složenih sustava
 - Paralelni spoj podsustava
 - Kaskadni spoj podsustava
 - Prstenasti spoj podsustava
- Ulazno izlazni model sustava s više ulaza i izlaza
- Model s varijablama stanja
 - Blok dijagram linearnog sustava
- Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja
 - Direktna, iterativna i paralelna metoda

3



Sadržaj III

- Transformacija varijabli stanja
- Upravlјljivost i osmotrivost

4



Model sustava s ulazno izlaznim varijablama

- Diferencijalni sustavi su oni koji se daju opisati jednom ili više diferencijalnih jednadžbi.
- Linearni sustav s jednim ulazom i jednim izlazom:
$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = f(t) = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_0 u.$$
- Desna strana od $f(t)$ – funkcija smetnje ili funkcija pobude, općenito funkcija ulaznog signala $u(t)$ i njegovih derivacija do m – tog reda, $m \leq n$.

5



Model sustava s ulazno izlaznim varijablama

- Koefficijenti $\{a_i\}$ i $\{b_i\}$:
 - konstantni \Rightarrow vremenski stalan linearni sustav,
 - funkcija vremena \Rightarrow vremenski promjenjiv linearni sustav,
 - zavise od ulaznih ili izlaznih varijabli i njihovih derivacija \Rightarrow nelinearni sustav.
- Sustav je općenito opisan s više simultanih diferencijalnih jednadžbi.
- Često se više simultanih diferencijalnih jednadžbi svodi na jednu jednadžbu višeg reda koja veže jednu izlaznu i jednu ulaznu varijablu.

6



Model sustava s ulazno izlaznim varijablama

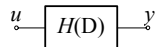
- Svojstva operatora deriviranja:
 $D^n(D^m y) = D^m(D^n y) = D^{n+m} y$
 $D^n(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1 D^n y_1 + C_2 D^n y_2$
 $(D + C_1)(D + C_2)y = [D^2 + (C_1 + C_2)D + C_1 C_2]y.$
- Diferencijalna jednačba napisana pomoću operatora D
 $(a_n D^n + \dots + a_0)y = (b_m D^m + \dots + b_0)u.$

7



Model sustava s ulazno izlaznim varijablama

- Skraćeni oblik zapisa:
 $A(D)y = B(D)u$ gdje su $Dy \equiv \frac{dy}{dt}$, $D^n y \equiv \frac{d^n y}{dt^n}.$
- Predstavljanje linearnog sustava pomoću operatora $H(D)$, gdje je $H(D) = B(D) / A(D)$



8



Klasične metode rješavanja

- Ako postoji funkcija smetnje ili pobude $f(t)$, linearna diferencijalna jednačba je nehomogena.
- Jednačba postaje homogena za $f(t) = 0$:
 $a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_0 y = 0.$
- Homogena jednačba n – tog reda ima n linearno nezavisnih rješenja, pa se opće rješenje može prikazati kao linearna kombinacija pojedinačnih rješenja.

$$y_0 = K_1 y_1 + K_2 y_2 + \dots + K_n y_n$$

9



Klasične metode rješavanja

- Pretpostavlja se rješenje oblika: $y(t) = e^{pt}$, $p \in \mathbb{C}$.
- Supstitucijom se dobije izraz:

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{(n-1)} + \dots + a_1 p + a_0) e^{pt} = 0.$$
- Karakteristična jednačba gornje diferencijalne jednačbe

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{(n-1)} + \dots + a_1 p + a_0 = 0.$$

- Opće rješenje uz n različitih karakterističnih korjena

$$y_0(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \dots + K_n e^{p_n t} = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t}.$$

10



Vremenski stalni sustavi

- Opće rješenje uz k jednakih od ukupno n korjena

$$y_0(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 t e^{p_1 t} + \dots + K_k t^{k-1} e^{p_1 t} + K_{k+1} e^{p_{k+1} t} + \dots + K_n e^{p_n t}.$$

- Opće rješenje uz korjene višestrukosti m_1, m_2, \dots, m_n

$$y_0(t) = \sum_{i=1}^{n'} e^{p_i t} \sum_{j=1}^{m_i} K_{ij} t^{j-1}.$$

- Rješenje nehomogene jednačbe dobiva se dodavanjem tzv. partikularnog rješenja y_p na rješenje homogene $y = y_0 + y_p$.

11



Vremenski stalni sustavi

- Rješenje homogene jednačbe – komplementarno rješenje ili slobodni odziv sustava,
 - postoji i kada nema pobude za $K_i \neq 0$,
 - naziva se i vlastito gibanje ili titranje sustava jer opisuje titranje energije u sustavu bez vanjskog poticaja.
 - Komponente slobodnog odziva titraju isključivo karakterističnim frekvencijama sustava p_i , koje zavise od strukture i parametara sustava, a ne od pobude.
 - Komplementarno rješenje prisutno je u općem rješenju nehomogene jednačbe.

12



Amplitude vlastitog titranja sustava

- Opće rješenje diferencijalne jednadžbe za slučaj nejednakih korjena je:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t} + y_p(t).$$

- Konstante K_i određuju se iz početnih uvjeta danih preko vrijednosti funkcije i njenih derivacija u $t = 0$.
- Uzastopnom derivacijom izraza za $y(t)$ u $t = 0$ dobiva se sustav linearnih algebarskih jednadžbi.

13



Amplitude vlastitog titranja sustava

$$y(0) - y_p(0) = K_1 + K_2 + \dots + K_n$$

$$\dot{y}(0) - \dot{y}_p(0) = p_1 K_1 + p_2 K_2 + \dots + p_n K_n$$

⋮

$$y^{(n-1)}(0) - y_p^{(n-1)}(0) = p_1^{n-1} K_1 + p_2^{n-1} K_2 + \dots + p_n^{n-1} K_n$$

- Van der Mond – ova determinanta sustava sastavljena od potencija korjena p_i , p_i^{n-1} .

14



Amplitude vlastitog titranja sustava

- Partikularno rješenje označimo s $y_p(t)$. Uz konstantnu ili periodičku pobudu nazovimo ga stacionarno stanje.
- Komplementarno rješenje iščezava s vremenom pa se naziva prijelazno ili prolazno stanje.
 - Prijelazno stanje sastoji se od titranja vlastitim frekvencijama p_i sustava.
 - Amplitude titranja u prijelaznom stanju određene su razlikom početnog stanja $\{y^{(i)}(0)\}$ i iznosa partikularnog rješenja $\{y_p^{(i)}(0)\}$ u trenutku $t = 0$.

15



Amplitude vlastitog titranja sustava

- Prvi specijalni slučaj: početni uvjeti jednaki partikularnom rješenju u $t = 0$

$$y^{(i)}(0) - y_p^{(i)}(0) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

- Trivijalno rješenje, $K_i = 0$.
- Prijelaznog procesa nema, već stacionarno stanje kreće odmah i ima frekvenciju pobude.
- Drugi specijalni slučaj: početni uvjeti jednaki 0

$$y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(0) = 0.$$

- Sustav je bez početne energije – miran sustav.

16



Amplitude vlastitog titranja sustava

- Treći specijalni slučaj: $f(t) = 0$ – nepobuden sustav

$$y_p(t) = 0, \dot{y}_p(t) = 0, \dots, y_p^{(n-1)}(t) = 0.$$

- Označimo s K_{0i} konstante koje slijede iz početnih uvjeta $y_p^{(i)}(0) = 0$.
- Označimo s K_{pi} konstante koje slijede iz početnih uvjeta kada je sustav miran $y^{(i)}(0) = 0$.

17



Amplitude vlastitog titranja sustava

- Ukupno rješenje prikazano pomoću K_{0i} i K_{pi} :

$$y(t) = \left[\sum_{i=1}^n K_{0i} e^{p_i t} + \sum_{i=1}^n K_{pi} e^{p_i t} \right] + y_p(t).$$

- Dio s vlastitim titranjem frekvencijom p_i [u zagradi] te prisilno titranje $y_p(t)$ frekvencijom pobude.

$$y(t) = \sum_{i=1}^n K_{0i} e^{p_i t} + \left[\sum_{i=1}^n K_{pi} e^{p_i t} + y_p(t) \right]$$

- Odziv nepobudenog sustava [u zagradi] te odziv mirnog sustava koji titra s p_i i frekvencijom pobude.

18



Prisilni odziv sustava

- Prisilni odziv sustava predstavlja partikularno rješenje nehomogene jednadžbe.
 - Općenito se može dobiti Lagrange – ovom metodom varijacije parametara.
- Za pobudu eksponencijalnom funkcijom računanje odziva je jednostavno jer se $y_p(t)$ može predstaviti eksponencijalom (deriviranjem se mijenja samo kompleksna amplituda eksponencijale).
- Određivanje kompleksne amplitude temelji se na metodi neodređenih koeficijenata.

19



Prisilni odziv sustava

- Opći oblik diferencijalne jednadžbe:

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_0)y = (b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \dots + b_0)u.$$
- Pobudni signal $u(t)$ u obliku eksponencijale,
 - U kompleksna amplituda ($|U|$ amplituda, φ faza),
 - s kompleksna frekvencija, $s = \sigma + j\omega$,
$$u(t) = U e^{st}, \quad U = |U| e^{j\varphi}.$$
- Pretpostavljeno rješenje (Y neodređeni koeficijent): $y(t) = Y e^{st}$.

20



Prisilni odziv sustava

- Uvrštavanjem i izjednačavanjem koeficijenata lijevo i desno dobiva se:

$$Y = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0} U = H(s) U.$$
- Amplituda partikularnog rješenja Y određena je amplitudom pobude, svojstvima sustava te kompleksnom frekvencijom s.
- Transfer ili prijenosna funkcija sustava $H(s)$ – veličina koja određuje odnos kompleksne amplitude prisilnog odziva $Y e^{st}$ i kompleksne amplitude pobude $U e^{st}$.

21



Prisilni odziv sustava

$$H(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0} = \frac{Y}{U}$$

- $H(s)$ je formalno jednak operatoru $H(D)$ ali
 - $H(D)$ pridružuje vremensku funkciju y funkciji u
 $y = H(D)u,$
 - $H(s)$ ima značenje faktora kojim treba množiti kompleksnu amplitudu ulaza da se dobije amplituda izlaza
 $Y = H(s)U.$

22



Prisilni odziv sustava

- Specijalni slučajevi kompleksne frekvencije pobude s :

- $s = 0$ – prisilni odziv na pobudu konstantom

$$u = Ue^{0t} = U, \quad H(0) = \frac{b_0}{a_0}.$$

- $s = j\omega$ – odziv na harmonijsku (ili sinusnu) pobudu, je dan izrazom:

$$H(j\omega) = H(\omega) = H_r(\omega) + jH_i(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

koji se naziva frekvencijska karakteristika sustava.

23



Prisilni odziv sustava

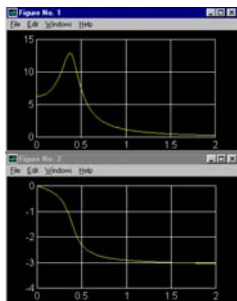
- $A(\omega)$ – amplitudno frekvencijska karakteristika.
- $\varphi(\omega)$ – fazno frekvencijska karakteristika.
- Ako je $y_p(t) = Y e^{st}$ posljedica $u(t) = U e^{st}$ onda je $y_p(t) = \text{Re}\{Y e^{st}\}$ posljedica $\text{Re}\{U e^{st}\}.$

24

SIMULINK primjer

25

Frekvencijske karakteristike



ω	$A(\omega)$	$\varphi(\omega)$
0	6.2500	0
0.2020	7.9460	-0.3268
0.4040	12.3650	-1.6110
0.6061	4.1642	-2.6125
0.8081	1.9275	-2.8248
1.0101	1.1316	-2.9109
1.2121	0.7510	-2.9585
1.4141	0.5372	-2.9891
1.6162	0.4043	-3.0105
1.8182	0.3158	-3.0265

26

Transfer funkcija linearnog, vremenski invarijantnog sustava

- Linearne, vremenski invarijantne sustave možemo proučavati pomoću Laplaceove transformacije:
 - diferencijalne jednačbe prelaze u algebarske,
 - sustav je predstavljen u domeni kompleksne frekvencije.
- Za određivanje transfer funkcije poći ćemo od Laplaceovog transformata ulaznog i izlaznog modela:

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}, Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}.$$

27



Transfer funkcija linearnog, vremenski invarijantnog sustava

- Transformacija derivacije ulaza i izlaza je:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^m u}{dt^m}\right\} = s^m U(s) - s^{m-1}u(0) - \dots - u^{(m-1)}(0),$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n y}{dt^n}\right\} = s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - \dots - y^{(n-1)}(0).$$

- Na temelju linearnosti Laplaceove transformacije može se napisati:

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0)Y(s) = (b_m s^m + \dots + b_0)U(s) + E(s).$$

28



Transfer funkcija linearnog, vremenski invarijantnog sustava

- Ako vrijedi:

$$y^{(v)}(0) = 0 \quad \text{za } v = 0, 1, 2, 3, 4, \dots, n-1$$

$$u^{(\mu)}(0) = 0 \quad \text{za } \mu = 0, 1, 2, 3, 4, \dots, m-1$$

dobivamo odziv mirnog sustava:

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0} U(s).$$

- Dobiveni izraz možemo napisati:

$$Y(s) = H(s)U(s).$$

29



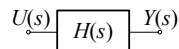
Transfer funkcija linearnog, vremenski invarijantnog sustava

- Funkcija $H(s)$ zove se transfer funkcija ili prijenosna funkcija sustava.

- Definirana je za miran sustav kao:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}} \quad u(t) = 0 \text{ za } t < 0.$$

- Ako znamo $H(s)$, sustav možemo predstaviti kao blok:

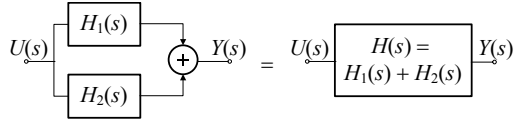


30



Transfer funkcija složenih sustava

- Paralelni spoj podsustava:



$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = [H_1(s) + H_2(s)]U(s) = H(s)U(s)$$

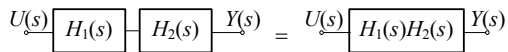
$$H(s) = H_1(s) + H_2(s)$$

31



Transfer funkcija složenih sustava

- Kaskadni spoj podsustava:



$$Y(s) = H_2(s)V(s) = H_2(s)H_1(s)U(s)$$

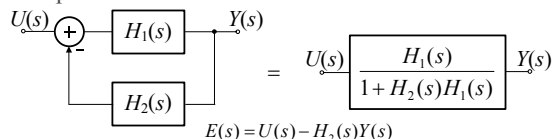
$$H(s) = H_2(s)H_1(s)$$

32



Transfer funkcija složenih sustava

- Prstenasti spoj podsustava – sustav s povratnom vezom:



$$E(s) = U(s) - H_2(s)Y(s)$$

$$Y(s) = H_1(s)E(s) = H_1(s)[U(s) - H_2(s)Y(s)] = Y(s)$$

$$Y(s)(1 + H_1(s)H_2(s)) = H_1(s)U(s)$$

$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$$

33



Transfer funkcija složenih sustava

- Jedan često korišten element sustava je integrator.
- Transfer funkcija integratora:

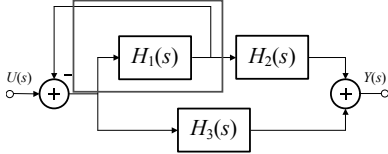
$$U(s) \rightarrow \left[\frac{1}{s} \right] \rightarrow Y(s) \quad H(s) = \frac{1}{s}$$

34



Transfer funkcija složenih sustava

- Korištenjem pokazanih pravila za kaskadu, prsten i paralelni spoj, složene blok dijagrame možemo sažeti i tako odrediti transfer funkciju cijelog sustava.
- *Primjer:* Odrediti transfer funkciju sustava sažimanjem blok dijagrama.



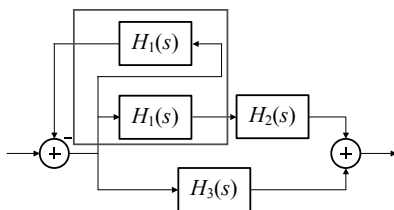
- Transformirajmo označeni dio blok dijagrama.

35



Transfer funkcija složenih sustava

- Dobivamo rezultat:

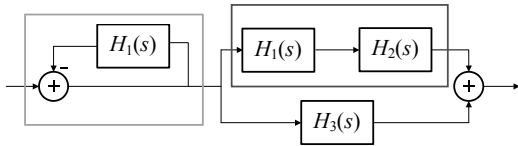


- Nacrtajmo ponovo isti blok dijagram.

36

Transfer funkcija složenih sustava

- Dobivamo:

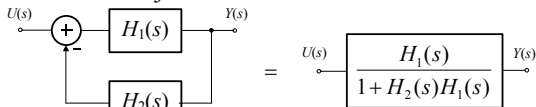


- Na dobivenom blok dijagramu prepoznamo:
 - kaskadu,
 - spoj s povratnom vezom.
- Kaskada se može nadomjestiti blokom čija je transfer funkcija: $H_1 H_2$

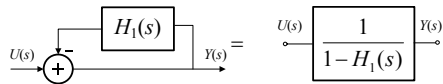
37

Transfer funkcija složenih sustava

- Ranije je pokazano da za spoj s povratnom vezom vrijedi:



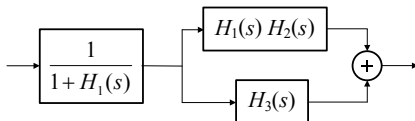
- U našem primjeru bit će:



38

Transfer funkcija složenih sustava

- Prema tome, naš blok dijagram možemo sažeti:

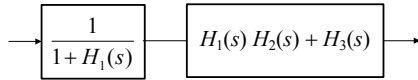


- Desnu stranu blok dijagrama čini paralelni spoj podsustava pa ga možemo nadomjestiti podsustavom čija je prijenosna funkcija: $H_1 H_2 + H_3$.

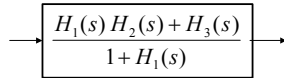
39

Transfer funkcija složenih sustava

- Daljnijim sažimanjem dobivamo kaskadu:



- Cijeli sustav prikazan jednim blokom ima oblik:



40

Ulazno izlazni model sustava s više ulaza i izlaza

- Sustav s više ulaza i izlaza može biti opisan s:

$$A_{11}(D)y_1 + \dots + A_{1r}(D)y_r = B_{11}(D)u_1 + \dots + B_{1m}(D)u_m,$$

$$A_{21}(D)y_1 + \dots + A_{2r}(D)y_r = B_{21}(D)u_1 + \dots + B_{2m}(D)u_m,$$

⋮

⋮

$$A_{r1}(D)y_1 + \dots + A_{rr}(D)y_r = B_{r1}(D)u_1 + \dots + B_{rm}(D)u_m.$$

- Ako su ulaz i izlaz definirani s:

$$\mathbf{y} \equiv [y_1, y_2, \dots, y_r]^T$$

$$\mathbf{u} \equiv [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$$

jednadžbe možemo napisati u matričnom obliku:

$$\mathbf{L}(D)\mathbf{y} = \mathbf{K}(D)\mathbf{u}.$$

41

Transfer matrica sustava s više ulaza i izlaza

- Laplaceova transformacija skupa jednadžbi ima oblik:

$$\mathbf{L}(s)\mathbf{Y}(s) = \mathbf{K}(s)\mathbf{U}(s) + \mathbf{E}(s)$$

gdje $\mathbf{E}(s)$ sadrži članove s početnim uvjetima.

- Za mirni sustav, $\mathbf{E}(s) = \mathbf{0}$, izlaz je jednak:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{L}^{-1}(s)\mathbf{K}(s)\mathbf{U}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{U}(s).$$

- Ulazni vektor se množi s matricom:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{L}^{-1}(s)\mathbf{K}(s)$$

koja se zove transfer matrica sustava.

42



Model s varijablama stanja linearnog sustava

- Vladanje sustava opisuje vektorska dif. jednađzba:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

- A** je matrica koeficijenata (realnih i konstantnih): $\{a_{ij}\}, i, j = 1, 2, \dots, n.$
- B** je pobudna ili kontrolna matrica konstantnih elemenata:

$$\{b_{ik}\}, i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m.$$

43



Model s varijablama stanja linearnog sustava

- Vektorska jednađzba:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

identična je skupu linearnih dif. jednađzbi prvog reda:

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j(t) + \sum_{k=1}^m b_{ik}u_k(t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

- Ako je pobuda $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, jednađzba je homogena:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t).$$

44



Model s varijablama stanja linearnog sustava

- Izlazna vektorska jednađzba:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(t) + \mathbf{Du}(t).$$

identična je skupu linearnih algebarskih jednađzbi:

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^n c_{ij}x_j(t) + \sum_{k=1}^m d_{ik}u_k(t), \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

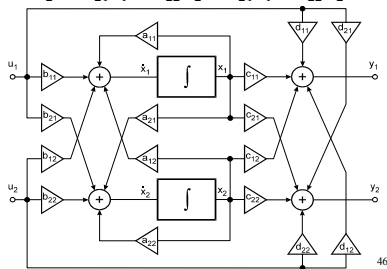
45

Blok dijagram linearnog sustava

- Primjer sustava drugog reda s 2 ulaza i 2 izlaza:

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2,$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2.$$



Blok dijagram linearnog sustava

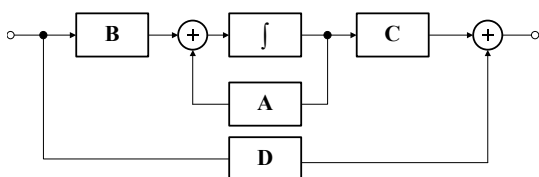
- Izlazna jednađba se realizira s 2 sumatora:

$$y_1(t) = c_{11}x_1(t) + c_{12}x_2(t) + d_{11}u_1(t) + d_{12}u_2(t),$$

$$y_2(t) = c_{21}x_1(t) + c_{22}x_2(t) + d_{21}u_1(t) + d_{22}u_2(t).$$

Blok dijagram linearnog sustava

- Kompletan sustav jednađbi stanja i izlaznih jednađbi prikazuje kabelski blok dijagram:



Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

Direktna metoda:

- Podimo od prijenosne funkcije:

$$H(s) = \frac{b_0}{s^n + \dots + a_0}, \quad a_n = 1,$$

$$(s^n + \dots + a_0)Y(s) = b_0U(s).$$

- Izdvojimo član s najvišom derivacijom:

$$s^n Y(s) = b_0 U(s) - \frac{1}{s} a_{n-1} (s^n Y(s)) - \dots - \frac{1}{s^n} a_0 (s^n Y(s)),$$

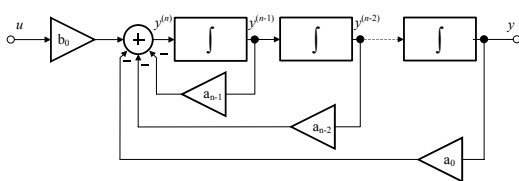
$$y^{(n)} = b_0 u - a_{n-1} y^{(n-1)} - \dots - a_0 y.$$

49

Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

- Realizacija:

$$y^{(n)} = b_0 u - a_{n-1} y^{(n-1)} - \dots - a_0 y.$$



50

Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

- Prijelaz u model stanja: Označimo na dijagramu izlaze integratora kao varijable stanja.

- Jednadžbe stanja glase:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

⋮

$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-1} x_n + b_0 u.$$

- Jednadžba izlaza glasi: $y(t) = x_1(t)$.

51

Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

- U općem slučaju, $b_i \neq 0$, možemo pisati:

$$Y(s) = B(s) \left(\frac{U(s)}{A(s)} \right) = B(s)Z(s).$$

- Sada prvo realiziramo: $Z(s) = \frac{U(s)}{A(s)}$

što je isto kao u prošlom primjeru.

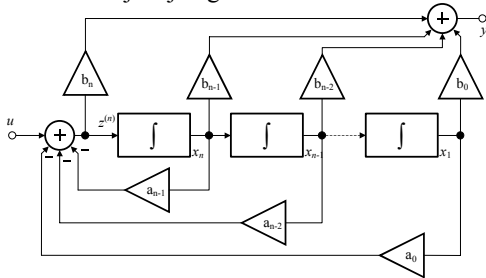
- Nakon toga napravimo linearnu kombinaciju svih izlaza integratora, prema izrazu:

$$Y(s) = B(s)Z(s) = (b_m s^m + \dots + b_0)Z(s).$$

52

Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

- Realizacija cijelog sustava:



53

Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

- Istim postupkom kao u slučaju $b_i = 0$, dobivamo jednadžbe stanja:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = [b_0 - a_0 b_n \quad b_1 - a_1 b_n \quad \dots \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u.$$

54



Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

Iterativna metoda:

- Brojnik i nazivnik prijenosne funkcije možemo prikazati kao produkt korjenih faktora:

$$\left. \begin{aligned} B(s) &= b_m s^m + \dots + b_0 = b_m \prod_{i=1}^m (s - s_k) \\ A(s) &= a_n s^n + \dots + a_0 = a_n \prod_{k=1}^n (s - p_k) \end{aligned} \right\} H(s) = \frac{b_m \prod_{i=1}^m (s - s_k)}{a_n \prod_{k=1}^n (s - p_k)}$$

- Produkt – upućuje na kaskadu podsustava.

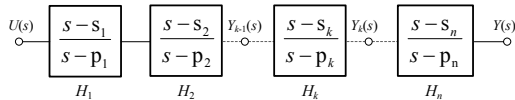
55



Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

- Realizacija:

$$H(s) = \frac{b_m \prod_{i=1}^m (s - s_k)}{a_n \prod_{k=1}^n (s - p_k)}$$



$$Y(s) = \left[\prod_{k=1}^n H_k(s) \right] U(s)$$

56



Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

- Sekcija s nulom i jednim polom zove se bilinearna sekcija.
- Bilinearna sekcija može se realizirati jednim integratorom.

$$Y_k = H_k(s) Y_{k-1} = \frac{s - s_k}{s - p_k} Y_{k-1}$$

$$\Downarrow$$

$$X_k(s) = \frac{1}{s - p_k} Y_{k-1} \quad \Leftrightarrow \quad s X_k(s) = p_k X_k(s) + Y_{k-1}$$

$$\Downarrow$$

$$Y_k(s) = (s - s_k) X_k(s) \quad s X_k(s) = Y_{k-1} + p_k \frac{1}{s} (s X_k(s))$$

realizacija

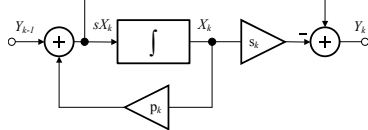
57



Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

- Realizacija:

$$sX_k(s) = Y_{k-1} + p_k \frac{1}{s}(sX_k(s)), \quad Y_k(s) = (s - s_k)X_k(s).$$



- p_k i s_k mogu biti kompleksni \Rightarrow neostvarivo u praksi,

58



Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

- Prijelaz u model stanja: Za k -tu bilinernu sekciju u kaskadi, mogu se napisati jednadžbe:

$$\dot{x}_k = p_k x_k + y_{k-1}, \quad y_k = \dot{x}_k - s_k x_k$$

za $k = 1, 2, \dots, n$.

- Uz $y_0 = u$, eliminacijom derivacije x_k iz jed. za y_k :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= p_1 x_1 + u & y_1 &= (p_1 - s_1)x_1 + u \\ \dot{x}_2 &= p_2 x_2 + (p_1 - s_1)x_1 + u & y_2 &= (p_2 - s_2)x_2 + (p_1 - s_1)x_1 + u \\ \dot{x}_3 &= p_3 x_3 + y_2, \text{ itd.} \\ y &= y_n = (p_n - s_n)x_n + (p_{n-1} - s_{n-1})x_{n-1} + \dots + (p_1 - s_1)x_1 + u \end{aligned}$$

59



Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

- Dobivene jednadžbe možemo prikazati matricno:

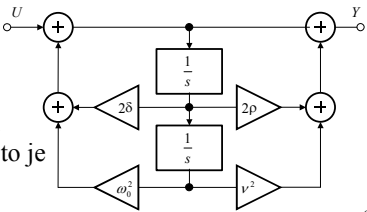
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots \\ (p_1 - s_1) & p_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (p_1 - s_1) & (p_2 - s_2) & \dots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} (p_1 - s_1) & (p_2 - s_2) & \dots & (p_n - s_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + u.$$

60

Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

- Kombiniranjem konjugiranih parova polova i nula: $H_k = \frac{(s-s_k)(s-s_k^*)}{(s-p_k)(s-p_k^*)}$ $s_k = -\rho + j\nu$, $\nu_0^2 = \rho^2 + \nu^2$
 $p_k = -\delta + j\omega$, $\omega_0^2 = \delta^2 + \omega^2$
- dobiva se bikvadratna sekcija
- koeficijenti polinoma su sada realni što je bitno za realizaciju



61

Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

Paralelna metoda:

- Prijenosnu funkciju bez višestrukih polova, s istim redom brojnika i nazivnika, možemo rastaviti:

$$H(s) = d_0 + \frac{c_1}{s-p_1} + \dots + \frac{c_n}{s-p_n} = d_0 + \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{s-p_k},$$

gdje je:

$$c_k = (s-p_k)H(s)|_{s=p_k}, \quad d_0 = \frac{b_n}{a_n}.$$

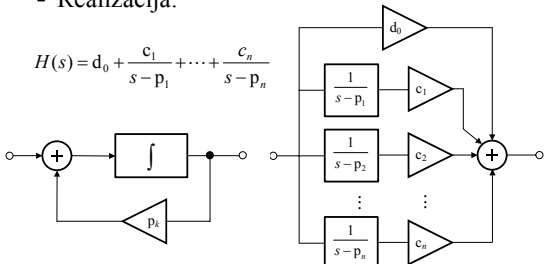
- Suma – upućuje na paralelni spoj podsustava

62

Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

- Realizacija:

$$H(s) = d_0 + \frac{c_1}{s-p_1} + \dots + \frac{c_n}{s-p_n}$$



63



Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

- Svaki sustav prvog reda sa prethodne slike daje jednadžbu:

$$\dot{x}_j = p_j x_j + u.$$

- Izlaz je dan jednadžbom:

$$y = \sum_1^n c_j x_j + du.$$

64



Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

- Matrični opis modela stanja glasi:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & & 0 \\ 0 & p_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + du.$$

- Ovaj model zovemo razvezani.

65



Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

- Ako su polovi višestruki, dobivamo slijedeću j. stanja:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_k \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & p_1 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & p_1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & p_k & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

- Matrica A je kvazidijagonalna, ima tzv. Jordanov blok.

66



Razlaganje sustava i prijelaz u model s varijablama stanja

- Izlazna jednadžba ima oblik:

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + du.$$

67



Transformacija varijabli stanja

- Pretpostavimo da je sustav opisan pomoću varijabli stanja x_i :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}.$$

- Isti sustav možemo prikazati i pomoću drugih varijabli stanja z_i .
- Varijable z su linearna kombinacija varijabli x :

$$\mathbf{x} = \mathbf{Pz}$$

- Matrica P ne smije biti singularna:

$$\det \mathbf{P} \neq 0$$

68



Transformacija varijabli stanja

- Uvrstimo:

$$\mathbf{x} = \mathbf{Pz} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{P}^{-1} \cdot / \quad \mathbf{P}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{APz} + \mathbf{Bu}$$

$$\downarrow$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{APz} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Bu} \quad \mathbf{y} = \mathbf{CPz} + \mathbf{Du}$$

$$\downarrow$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^* \mathbf{z} + \mathbf{B}^* \mathbf{u} \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}^* \mathbf{z} + \mathbf{D}^* \mathbf{u}$$

- Nove matrice sustava imaju oblik:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}, \quad \mathbf{B}^* = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}, \quad \mathbf{C}^* = \mathbf{CP}, \quad \mathbf{D}^* = \mathbf{D}.^{69}$$

69

Transformacija varijabli stanja

- Kako odabrati matricu \mathbf{P} ?
 - Tako da matrica \mathbf{A}^* bude dijagonalna (kanonski oblik).
 - U tom slučaju \mathbf{P} se zove modalna matrica.
- Kako naći modalnu matricu ?
 - Promatramo transformaciju vektora \mathbf{x} u \mathbf{y} :

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$
 - Za koji λ će \mathbf{y} imati isti smjer u vektorskom prostoru ?

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

(λ je skalar)

70

Transformacija varijabli stanja

- Jednakost:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$
 predstavlja homogen sustav jednačbi:

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$
 Matrica \mathbf{I} je jedinična matrica:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

71

Transformacija varijabli stanja

- Netrivijalno rješenje $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{0}$ dobiva se:

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0.$$
- Ako je matrica \mathbf{A} dimenzija $n \times n$, dobiva se karakteristični polinom n -tog stupnja.
- Korjeni karakterističnog polinoma su vlastite vrijednosti matrice \mathbf{A} .
- Rješenjem jednačbe

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$
 dobivaju se vlastiti vektori.

72



Transformacija varijabli stanja

- Transformacija varijabli ne mijenja vlastite vrijedosti:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_n(\lambda) &= \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}^*) = \\
 &= \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}) = \\
 &= \det(\lambda \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}) = \\
 &= \det \mathbf{P}^{-1} \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \det \mathbf{P} = \\
 &= \det \mathbf{P}^{-1} \det \mathbf{P} \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \\
 &= \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}).
 \end{aligned}$$

73



Transformacija varijabli stanja

- Kako dobiti modalnu matricu ?
- Formirajmo matricu \mathbf{M} od vlastitih vektora matrice \mathbf{A} :

$$\mathbf{M} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \dots \quad \mathbf{x}_n].$$

- Određimo produkt $\mathbf{A}\mathbf{M}$:
- $$\mathbf{A}\mathbf{M} = \mathbf{A}[\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \dots \quad \mathbf{x}_n] = [\mathbf{A}\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{x}_2 \quad \dots \quad \mathbf{A}\mathbf{x}_n].$$

- Uvrštavanjem $\mathbf{A}\mathbf{x}_k = \lambda_k \mathbf{x}_k$ dobivamo:

$$\mathbf{A}\mathbf{M} = [\lambda_1 \mathbf{x}_1 \quad \lambda_2 \mathbf{x}_2 \quad \dots \quad \lambda_n \mathbf{x}_n].$$

74



Transformacija varijabli stanja

- Izraz: $\mathbf{A}\mathbf{M} = [\lambda_1 \mathbf{x}_1 \quad \lambda_2 \mathbf{x}_2 \quad \dots \quad \lambda_n \mathbf{x}_n]$ možemo napisati u obliku:

$$\mathbf{A}\mathbf{M} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \dots \quad \mathbf{x}_n] \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{M}\mathbf{\Lambda}$$

- Vidimo da vrijedi: $\mathbf{A}\mathbf{M} = \mathbf{M}\mathbf{\Lambda} \rightarrow \mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}\mathbf{M}$
- Matrica \mathbf{M} je modalna matrica.

75



Upravlјivost i osmotrivost sustava

- Sustav prikazan u kanonskom obliku ima oblik:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{x} + \mathbf{\beta}\mathbf{u},$$

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n],$$

- Za sluĉaj s razliĉitim korjenima imamo jednadzbe stanja:

$$\dot{x}_1 = p_1x_1 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2,$$

$$\dot{x}_2 = p_2x_2 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2,$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = p_nx_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2.$$

- Svaka varijabla stanja moze se dobiti rješavanjem jedne jednadzbe.

76



Upravlјivost i osmotrivost sustava

- Promotrimo i–tu jednadzbu:

$$\dot{x}_i = p_i x_i + b_{i1}u_1 + b_{i2}u_2, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- Varijabla x_i u svom odzivu ima istitravanje karakteristiĉnom frekvencijom p_i
- Poĉetni uvjet $x_i(0)$ istitrat će se frekvencijom p_i
- Svaka varijabla stanja istitrava svojom frekvencijom

77



Upravlјivost i osmotrivost sustava

- Sustav je upravljiv ako ulazni signali mogu pobuditi sve karakteristiĉne frekvencije sustava.

$$\dot{x}_1 = p_1x_1 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2$$

$$\dot{x}_2 = p_2x_2 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = p_nx_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{x} + \mathbf{\beta}\mathbf{u}$$

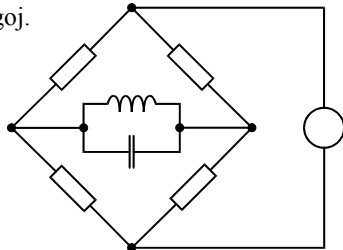
- Sustav s razliĉitim karakteristiĉnim frekvencijama je upravljiv ako matrica $\mathbf{\beta}$ nema nulnih redaka

- Ako je i–ti red nul–redak, titranje frekvencijom moze doći samo od poĉetnih uvjeta, a ne pobude
- Varijabla stanja koja odgovara nul–retku je neupravljiva

78

Upravlјivost i osmotrivost sustava

- Primjer: Pobuda u jednoj dijagonali uravnoteženog mosta, a titrajni krug u drugoj.



79

Upravlјivost i osmotrivost sustava

- Kad matrica A ima višestruke vlastite vrijednosti, sustav je upravljiv:
 - Ako ne postoje dva Jordanova bloka koja pripadaju istim vlastitim vrijednostima.
 - Ako elementi matrice β koji odgovaraju zadnjem redu svakog Jordanovog bloka nisu jednaki nuli.
 - Ako svi elementi svakog reda matrice β , koji pripadaju jednostrukim vlastitim vrijednostima nisu jednaki nuli.

80

Upravlјivost i osmotrivost sustava

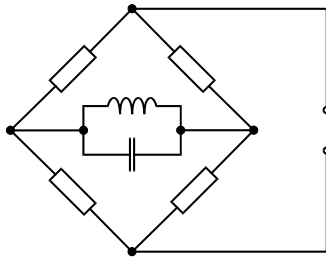
- Sustav je osmotriv ako se preko izlaza sustava mogu registrirati sve prirodne frekvencije sustava.

$$\begin{aligned}
 y_1 &= \gamma_{11}x_1 + \gamma_{12}x_2 + \dots + \gamma_{1n}x_n \\
 y_2 &= \gamma_{21}x_1 + \gamma_{22}x_2 + \dots + \gamma_{2n}x_n \\
 &\vdots \\
 y_r &= \gamma_{r1}x_1 + \gamma_{r2}x_2 + \dots + \gamma_{rn}x_n
 \end{aligned}
 \quad \mathbf{y} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

- Sustav s jednostrukim frekvencijama je osmotriv ako matrica Γ nema nultih stupaca
 - Varijabla koja odgovara nultom stupcu je neosmotriva

81

- Primjer: Uravnotežen most



82

- U slučaju višestrukih korjena, sustav je osmotriv:
 - Ako ne postoje dva Jordanova bloka koja pripadaju istim vlastitim vrijednostima.
 - Ako u stupcima matrice Γ , koji pripadaju prvom redu svakog Jordanovog bloka nisu nule.
 - Ako u stupcima matrice Γ , koji pripadaju jednostrukim vlastitim vrijednostima nisu nule.

83

- U oćem slučaju, sustav možemo rastaviti na četiri podsustava:
upravljiv, neupravljiv, osmotriv, neosmotriv

SUSTAV	osmotriv	neosmotriv
upravljiv	$\dot{\mathbf{x}}_1 = \Lambda_1 \mathbf{x}_1 + \beta_1 \mathbf{u}_1$ $\mathbf{y}_1 = \Gamma_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_1 \mathbf{u}_1$	$\dot{\mathbf{x}}_2 = \Lambda_2 \mathbf{x}_2 + \beta_2 \mathbf{u}_2$ $\mathbf{y}_2 = \mathbf{0}$
neupravljiv	$\dot{\mathbf{x}}_3 = \Lambda_3 \mathbf{x}_3$ $\mathbf{y}_3 = \Gamma_3 \mathbf{x}_3$	$\dot{\mathbf{x}}_4 = \Lambda_4 \mathbf{x}_4$ $\mathbf{y}_4 = \mathbf{0}$

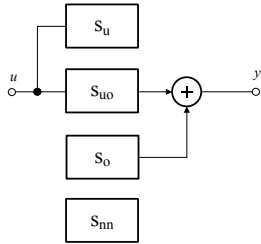
- Kombiniranjem jednadžbi iz tablice dolazimo do jednadžbi sustava:

84

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & & & \\ & \Lambda_2 & & \\ & & \Lambda_3 & \\ & & & \Lambda_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

- Razlaganje sustava mođe se prikazati blok dijagramom:



- Primjer:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ 1]x + [0]u$$

