Signali i sustavi

Opći linearni sustavi

Primjeri kontinuiranih signala

- Za analizu linearnih sustava najveće značenje imaju:
  - kompleksna eksponencijala,
  - Diracova δ – funkcija.

2

Kompleksna eksponencijala

- $u(t) = \mathrm{U}e^{st}$; $s,\mathrm{U} \in \mathbf{C}$.
- Ovisno o kompleksnoj frekvenciji $s = \sigma + j\omega$ imamo slučajeve:
  - konstantnog ($s = 0$),
  - eksponencijalnog ($\omega = 0$)
  - harmonijskog signala ($\sigma = 0$).
- Pobuda kompleksnom eksponencijalom koristi se za analizu vladanja sustava u frekvencijskoj domeni.

3

Diracova δ - funkcija

- Diracova $\delta -$ funkcija

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0; \qquad \text{i} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1.$$

- $\delta(t)$ – singularna funkcija.
- Regularne + singularne funkcije = poopćene funkcije ili distribucije.

$$\delta(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)\, dt = \varphi(0).$$

Delta distribucija

Singularna delta funkcija

Ispitna funkcija, regularna u nuli

Skalar

Impulsni odziv i konvolucija

- Diracovu funkciju nazivamo i jedinični impuls.
- Poznavanje impulsnog odziva nekog sustava je dovoljno za potpun opis njegovog vladanja.
- Odziv linearnog vremenski stalnog sustava na opću pobudu opisuje se konvolucijskim integralom:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)\, d\tau,$$

gdje je $h(t)$ odziv sustava na jedinični impuls.

Linearne operacije na signalima

- Složeni signali se mogu predstaviti linearnom kombinacijom elementarnih signala:

$$u(t) = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{a}_k\, u_k(t),$$

- gdje su a_k – realne ili kompleksne konstante, a $\{u_k(t)\}$ prebrojiv skup elementarnih funkcija.
- Složeni se signali mogu predstaviti također i neprebrojivim skupom elementarnih funkcija:

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\lambda)\, u(t,\lambda)\, d\lambda, \qquad \lambda - \text{kontinuiran.}$$

Linearne operacije na signalima

- *Fourierov* red predstavlja primjer linearne kombinacije eksponencijala, čije frekvencije su aritmetički niz:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{a}_k \, e^{jk\omega_0 t}.$$

- Primjer neprebrojivog skupa je *Fourierov* integral:

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\lambda) \, e^{j\lambda t} \, d\lambda.$$

7

Primjer

- Predstavimo signal integralom delta funkcija

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\lambda) \, \delta(t-\lambda) \, d\lambda, \quad a(\lambda) = u(\lambda).$$

- Djelovanje nekog stalnog linearnog sustava na signal *u* možemo opisati linear. operatorom *F*:

$$F[u(t)] = F\left[\int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda) \, \delta(t-\lambda) \, d\lambda \right] = \int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda) \, F[\delta(t-\lambda)] \, d\lambda,$$

$$F[u] = y, \quad F[\delta] = h,$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda) \, h(t-\lambda) \, d\lambda \longrightarrow$$

konvolucijski integral !

8

Harmonijska pobuda sustava

- Korisna za analizu linearnog nepromjenjivog sustava u frekvencijskoj domeni:

$$u(t) = \mathrm{U} e^{j\omega t} \quad \to \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \, \mathrm{U} e^{j\omega\tau} \, d\tau.$$

- Nakon supstitucije $t - \tau = \vartheta$ i sređivanja izlazi:

$$y(t) = H(\omega) \, \mathrm{U} e^{j\omega t}, \quad H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\vartheta) \, e^{-j\omega\vartheta} \, d\vartheta.$$

- Harmonijska pobuda daje harmonijski odziv – nema izobličenja ni viših harmonika.

9

Harmonijska pobuda sustava

- Veličina $H(\omega)$ je kompleksan broj koji nam pokazuje za svaku frekvenciju ω:
  - koliko se promijenila amplituda harmonijskog odziva
  - kakav je fazni pomak u odnosu na harmonijsku pobudu $u(t)$.
- $A(\omega) = |H(\omega)|$ je frekv. karakteristika amplitude,
- $\varphi(\omega) = \arg H(\omega)$ je frekv. karakteristika faze.
- Izraz za $H(\omega)$ predstavlja *Fourierov* integral ili *Fourierov* spektar impulsnog odziva sustava $h(t)$.

10

Pobuda sustava kompleksnom eksponencijalom

- Općenito, pobuda kompleksnom eksponencijalom opet daje kompleksnu eksponencijalu:

$$u(t) = \mathrm{U}e^{st} \quad \rightarrow \quad y(t) = H(s)\mathrm{U}e^{st},$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\vartheta)\, e^{-s\vartheta} d\vartheta.$$

- To nam kazuje da je kompleksna ksponencijala svojstvena funkcija (*eigenfunction*) konvolucije!

11

Pobuda sustava kompleksnom eksponencijalom

- Izraz za $H(s)$ je ujedno izraz za dvostranu *Laplaceovu* transformaciju impulsnog odziva h.

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\vartheta)\, e^{-s\vartheta} d\vartheta.$$

- Izraz za jednostranu *Laplaceovu* transformaciju dobivamo uz kauzalnu pobudu $u(t) = \mathrm{U}e^{st} \cdot \mu(t)$!!!

12