Signali i sustavi

Sustavi drugog reda

Definicija i blok dijagram

- Sustav drugog reda ima dva elementa s memorijom, dakle, dva integratora u blok dijagramu.
- Opisan je s diferencijalnom jednadžbom drugog reda, odnosno s dvije jednadžbe prvog reda.

2

Definicija i blok dijagram

- Sustav s ulazom u i izlazom y je drugog reda ako se mogu identificirati dvije varijable stanja x_1 i x_2.

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, u) \qquad x_1(t_0) = x_{10} \qquad \text{za } t > t_0$$

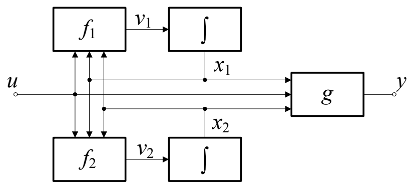
$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, u) \qquad x_2(t_0) = x_{20}$$

$$y = g(x_1, x_2, u)$$

3

Definicija i blok dijagram

- Opći oblik blok dijagrama za sustav drugog reda može se nacrtati s funkcijskim blokovima samo s jednim izlazom:



Definicija i blok dijagram

- Vektor stanja: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$
- Sustav drugog reda:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x},u) \qquad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1,x_2,u) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1,x_2,u) \end{aligned} \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$y = \mathbf{g}(\mathbf{x},u) \qquad y = g(x_1,x_2,u)$$

Definicija i blok dijagram

- Rješenje vektorske diferencijalne jednadžbe možemo napisati formalno u obliku kao da se radi o diferencijalnoj jednadžbi prvog reda:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau),u(\tau))d\tau.$$

- Dobivena je integralna jednadžba u kojoj se funkcija stanja $\mathbf{x}(t)$ pojavljuje implicitno, pa je nije moguće jednostavno riješiti.
- To je oblik koji se koristi u numeričkim postupcima.

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

Linearni sustav vremenski stalan

- Opći oblik jednadžbe stanja:

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2$$
$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

- Može se transformirati u diferencijalnu jednadžbu drugog reda:

$$\ddot{x}_1 - \mathrm{T}\dot{x}_1 + \Delta x_1 = u(t),$$
$$\ddot{x}_2 - \mathrm{T}\dot{x}_2 + \Delta x_2 = v(t).$$

7

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- Pri tom su:

$\mathrm{T} = a_{11} + a_{22}$ trag matrice **A**

$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ determinanta od **A**

$$u(t) = (a_{12}b_{21} - a_{22}b_{11})u_1 + (a_{12}b_{22} - a_{22}b_{12})u_2 + b_{11}\dot{u}_1 + b_{12}\dot{u}_2$$
$$v(t) = (a_{21}b_{11} - a_{11}b_{21})u_1 + (a_{21}b_{12} - a_{11}b_{22})u_2 + b_{21}\dot{u}_1 + b_{22}\dot{u}_2$$

- Ako su obje konstante $a_{12} = a_{21} = 0$ (matrica **A** je dijagonalna) sustav je opisan s dvije razvezane jednadžbe prvog reda.

8

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- Često se jednadžba drugog reda nepobuđenog sustava piše u obliku:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

- $2\alpha = -\mathrm{T}$, α je faktor prigušenja,
- $\omega_0^2 = \Delta$, ω_0 je frekvencija neprigušenog titranja.

9

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- Pretpostavimo da je rješenje eksponencijala:

$$x(t) = Xe^{pt}.$$

- Uvrštenje vodi do karakteristične jednadžbe:

$$p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 = 0,$$

- čija rješenja su karakteristične ili prirodne frekvencije sustava drugog reda.

10

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

$$\mathrm{p}_{12} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \begin{cases} -\alpha \pm \alpha_\mathrm{d} & \text{za} \quad \alpha > \omega_0 > 0 \\ -\alpha & \text{za} \quad \alpha = \omega_0 > 0 \\ -\alpha \pm j\omega_\mathrm{d} & \text{za} \quad 0 < \alpha < \omega_\mathrm{d} \end{cases}$$

$$\alpha_\mathrm{d} = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$\omega_\mathrm{d} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

Rješenje je oblika: $x = X_1 e^{\mathrm{p}_1 t} + X_2 e^{\mathrm{p}_2 t}$

11

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- zavisno od veličina α i ω_0 postoji tzv.
  - nadkritično prigušenje $\alpha > \omega_0$,
  - kritično prigušenje $\alpha = \omega_0$,
  - podkritično prigušenje $\alpha < \omega_0$,
  - neprigušeni slučaj $\alpha = 0$.

12

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

SIMULINK primjer

13

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- Proizvoljne konstante određuju početni uvjeti $x(0)$ i $\dot{x}(0)$.
- Rješenje se može napisati u obliku:

$$x(t) = \frac{\dot{x}(0) - x(0)\mathrm{p}_2}{(\mathrm{p}_1 - \mathrm{p}_2)} e^{\mathrm{p}_1 t} + \frac{\dot{x}(0) - x(0)\mathrm{p}_1}{(\mathrm{p}_2 - \mathrm{p}_1)} e^{\mathrm{p}_2 t}.$$

14

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- Rješenje homogene jednadžbe stanja može se dobiti pretpostavkom da eksponencijalne funkcije $x_1 = \mathrm{X}_1 e^{pt}$, $x_2 = \mathrm{X}_2 e^{pt}$ zadovoljavaju skup od dvije jednadžbe:

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$
$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

15

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- Dobije se sustav karakterističnih algebarskih jednadžbi:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2\end{aligned} \xrightarrow[x_2 = \mathrm{X}_2 e^{pt}]{x_1 = \mathrm{X}_1 e^{pt}} \begin{aligned}p\mathrm{X}_1 e^{pt} &= (a_{11}\mathrm{X}_1 + a_{12}\mathrm{X}_2)e^{pt} \\ p\mathrm{X}_2 e^{pt} &= (a_{21}\mathrm{X}_1 + a_{22}\mathrm{X}_2)e^{pt}\end{aligned}$$

$$p\mathrm{X}_1 = a_{11}\mathrm{X}_1 + a_{12}\mathrm{X}_2$$
$$p\mathrm{X}_2 = a_{21}\mathrm{X}_1 + a_{22}\mathrm{X}_2$$
$$(a_{11} - p)\mathrm{X}_1 + a_{12}\mathrm{X}_2 = 0$$
$$a_{21}\mathrm{X}_1 + (a_{22} - p)\mathrm{X}_2 = 0$$

16

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- Da bi sustav karakterističnih jednadžbi dao rješenja za amplitude X_1, X_2 različite od nule, mora determinanta sustava isčezavati,

$$\begin{vmatrix}(a_{11} - p) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22} - p)\end{vmatrix} = 0.$$

- To daje polinom drugog stupnja:

$$p^2 - \mathrm{T}p + \Delta = 0.$$

17

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- odakle slijede prirodne frekvencije p_1 i p_2 za koje e^{pt} zadovoljava jednadžu.
- Rješenje se može napisati u obliku:

$$x_1(t) = \mathrm{X}_{11}e^{\mathrm{p}_1 t} + \mathrm{X}_{12}e^{\mathrm{p}_2 t},$$
$$x_2(t) = \mathrm{X}_{21}e^{\mathrm{p}_1 t} + \mathrm{X}_{22}e^{\mathrm{p}_2 t}.$$

18

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- Nezavisne su samo dvije konstante i one se odrede iz dva početna uvjeta.
- Druge dvije konstante proizlaze iz prvih uvrštenjem u jednadžbe stanja za $t = 0$.

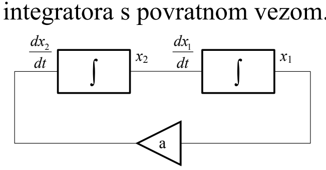
$$X_{11} = \frac{(a_{11} - p_2)x_{10} + a_{12}x_{20}}{p_1 - p_2} \qquad X_{12} = \frac{(a_{11} - p_1)x_{10} + a_{12}x_{20}}{p_2 - p_1}$$

$$X_{21} = \frac{a_{21}x_{10} + (a_{22} - p_2)x_{20}}{p_1 - p_2} \qquad X_{22} = \frac{a_{21}x_{10} + (a_{22} - p_1)x_{20}}{p_2 - p_1}$$

19

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- *Primjer:* Najjednostavniji slučaj dva integratora s povratnom vezom.



$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \qquad \frac{dx_2}{dt} = \mathrm{a}x_1$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \mathrm{a} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = 0 \qquad a_{12} = 1$$
$$a_{21} = \mathrm{a} \qquad a_{22} = 0$$
$$T = 0 \qquad \Delta = -\mathrm{a}$$

20

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- Determinanta sustava mora isčezavati

$$\begin{vmatrix} -p & 1 \\ \mathrm{a} & -p \end{vmatrix} = p^2 - \mathrm{a} = 0 \qquad p_{12} = \pm\sqrt{\mathrm{a}} = \pm\alpha$$

$$\text{za } \mathrm{a} > 0$$

$$\vdots$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{ch}(\alpha t) & \dfrac{\mathrm{sh}(t)}{\alpha} \\ \alpha\,\mathrm{sh}(\alpha t) & \mathrm{ch}(\alpha t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0$, gdje je $\Phi(t)$ – prijelazna matrica.

21

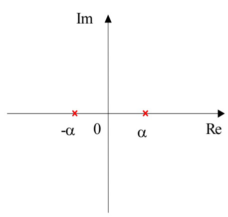
Vladanje i svojstva sustava drugog reda

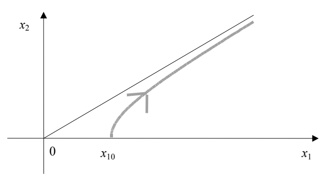
- Veza između $x_1(t)$ i $x_2(t)$.
- Jednadžbu krivulje $F(x_1, x_2) = 0$ možemo dobiti eliminacijom vremena.
- Uzmimo početno stanje x_{10}, ($x_{20} = 0$):

$$\left(\frac{x_1}{x_{10}}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{\alpha x_{10}}\right)^2 = 1.$$

22

Vladanje i svojstva sustava drugog reda





$x_1 \to \infty$ za $t \to \infty$

$x_2 \to \infty$ za $t \to \infty$

- Nestabilan sustav. Ravnoteža $\mathbf{x} = 0$ se ne dosegne – sedlo

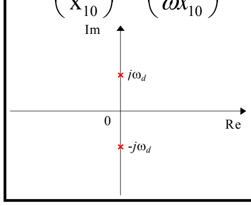
23

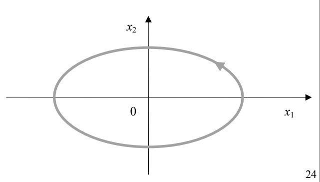
Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- *Primjer:* za $a < 0$ $\quad p_{12} = \pm\sqrt{-\omega_0^2} = \pm j\omega_0$

$$\left(\frac{x_1}{x_{10}}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\omega x_{10}}\right)^2 = 1$$

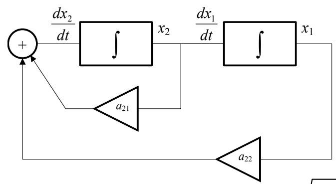
- Zatvorena krivulja – periodičan proces. Trajektorija obilazi oko točke ravnoteže – fokus.





24

Vladanje i svojstva sustava drugog reda



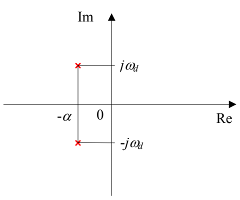
$$p_{12} = -\alpha \pm j\omega_d \qquad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

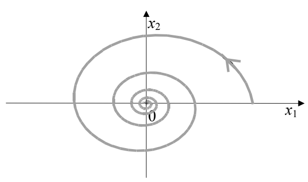
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

25

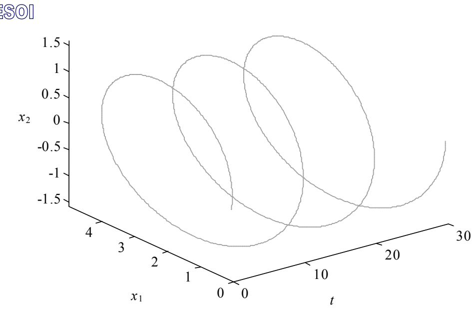
Vladanje i svojstva sustava drugog reda

$$\left(\frac{x_1}{x_{10}e^{-\alpha t}}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\omega_d x_{10}e^{-\alpha t}}\right)^2 = 1$$

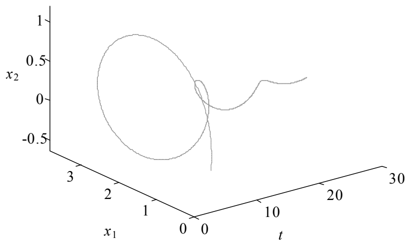




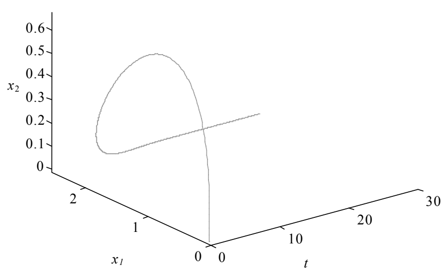
26



27



28

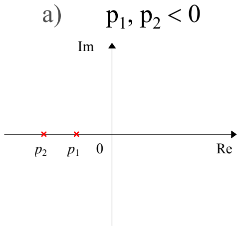


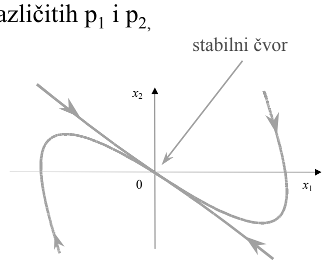
29

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- Slučaj realnih i različitih p_1 i p_2,

a) $p_1, p_2 < 0$



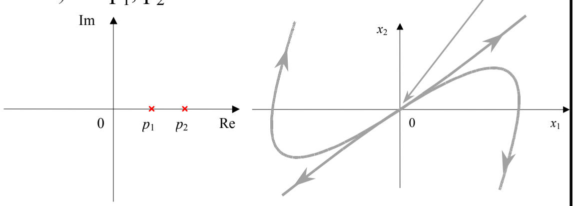


30

Vladanje i svojstva sustava drugog reda

- Slučaj realnih i različitih p_1 i p_2

b) $p_1, p_2 > 0$

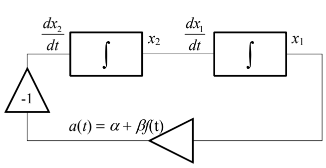


31

SIMULINK primjer

32

Vremenski varijantan sustav drugog reda



- Pojačanje $a(t)$ u petlji blok dijagrama je zavisno od vremena.

$$\dot{x}_1(t) = x_2$$
$$\dot{x}_2(t) = -a(t)x_1(t)$$

33

Vremenski varijantan sustav drugog reda

- Vremenska funkcija $a(t)$ pojačanja će utjecati na vladanje sustava.
- *Hillova diferencijalna jednadžba* $a(t) = \alpha + \beta f(t)$

$$\ddot{x}_1 = \dot{x}_2 = -(\alpha + \beta f(t))x_1,$$
$$\ddot{x}_1 + (\alpha + \beta f(t))x_1 = 0.$$

- Za $f(t) = 2\cos 2t$ izlazi *Mathieu – ova diferencijalna jednadžba*:

$$\ddot{x}_1 + (\alpha + 2\beta \cos 2t)x_1 = 0.$$

34

Vremenski varijantan sustav drugog reda

- Za $f(t) = r(t)$ pravokutan oblik, gdje je funkcija pojačanja konstantna po odsječcima (*Meissnerova jednadžba*).
- Jednadžba se može rješavati po invervalima kao diferencijalna jednadžba s konstantnim koeficijentima.

35

Vremenski varijantan sustav drugog reda

- Pretpostavimo $a(t)$

$$a(t) = \alpha(1 + \mathrm{m}r(t)) \qquad r(t) = \begin{cases} 1 & 0 < \sqrt{(1+\mathrm{m})\alpha} \le \frac{\pi}{2} \\ -1 & \frac{\pi}{2} < \sqrt{(1-\mathrm{m})\alpha} \le \pi \end{cases}$$

- Za 1,3,5,... četvrtinu perioda jednadžba stanja je

$$\dot{x}_2 = -\alpha(1+\mathrm{m})x_1 \quad \dot{x}_1 = x_2 \quad \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = 0.$$

- Za 2,4,6,... četvrtinu perioda jednadžba stanja je

$$\dot{x}_2 = -\alpha(1-\mathrm{m})x_1 \quad \dot{x}_1 = x_2 \quad \ddot{x}_1 + \omega_2^2 x_1 = 0.$$

36

Vremenski varijantan sustav drugog reda

- U oba slučaja je to rješenje vremenski nepromjenljivog sustava.
  - Prvi slučaj: $\omega_1^2 = \alpha(1+\mathrm{m}).$
  - Drugi slučaj: $\omega_2^2 = \alpha(1-\mathrm{m}).$
- Rješenje izraženo s početnim uvjetima je:

$$x_1 = x_{10}\cos\omega t + \frac{x_{20}}{\omega}\sin\omega t,$$

$$x_2 = -\omega x_{10}\sin\omega t + x_{20}\cos\omega t.$$

37

Vremenski varijantan sustav drugog reda

- Odredimo rješenje gornjih diferencijalnih jednadžbi u 1, 2, 3 i 4. vremenskom odsječku.
- U svakom odsječku ćemo smatrati da vrijeme počinje od $t = 0$.
- Kao početno stanje uzet ćemo krajnje stanje iz prethodnog vremenskog intervala.
- Kao početno stanje u prvom intervalu uzmimo: $x_{10} = 0,\ x_{20} \neq 0.$

38

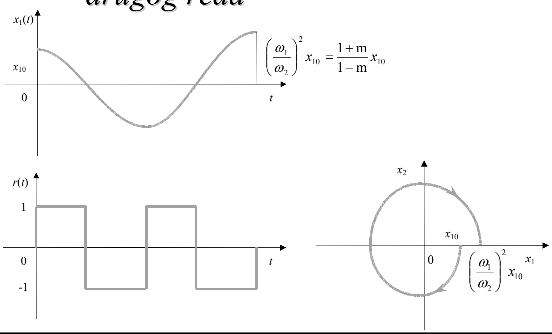
Vremenski varijantan sustav drugog reda

- Uz dane pretpostavke dobije se izraz za amplitudu titranja:

$$x_1(2\pi) = \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 x_{10} = \frac{1+\mathrm{m}}{1-\mathrm{m}}x_{10}.$$

39

Vremenski varijantan sustav drugog reda



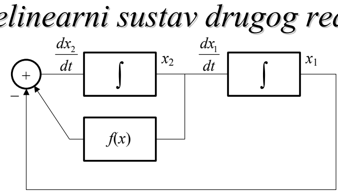
40

Vremenski varijantan sustav drugog reda

- Periodična promjena parametra pogodnog polariteta m > 0 i dvostruke frekvencije izaziva porast amplitude titranja.
- Analizirani sustav je model:
  - *fizikalnog njihala* (dječja ljuljačka) gdje se težiste mase mijenja,
  - *titrajnog kruga* čiji se kapacitet mijenja dvostrukom frekvencijom od frekvencije titranja kruga.
- Promjenljivi element *pumpa* energiju u sustav.

41

Nelinearni sustav drugog reda



- Neka je funkcija nelinearnog bloka polinom trećeg stupnja, $f(x) = ax - cx^3$.

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \qquad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + f(x_2)$$

42

Nelinearni sustav drugog reda

- Jednadžbe se mogu svesti na jednadžbu drugog reda

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{dx_1}{dt} + \frac{df}{dx_2} \cdot \frac{x_2}{dt}$$
$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -x_2 + \frac{df}{dx_2} \cdot \frac{dx_2}{dt},$$

odnosno $\frac{d^2x_2}{dt^2} - (\mathrm{a} - 3\mathrm{c}x_2^2)\frac{dx_2}{dt} + x_2 = 0.$

Van der Pol – ova jednadžba

43

SIMULINK primjer

44

Nelinearni sustav drugog reda

- Ova jednadžba je poslužila za analizu nekoliko tipova oscilatora.
- Od niza zanimljivih fenomena posvetit će se pažnja radu ovog sustava kao oscilatora.
- Pretpostavit ćemo da veličine a << 1 i c << 1 tako da je sustav vrlo oscilatoran.
- Uz zanemarenje člana s $\frac{dx_2}{dt}$ dominantni proces može se opisati jednadžbom: $\ddot{x}_2 + x_2 = 0$ čije je rješenje *harmonijsko titranje.*

45

Nelinearni sustav drugog reda

- Za očekivati je da će se proces moći opisati približno s harmonijskim titranjem.
- Mali srednji član $(\mathrm{a}-3\mathrm{c}x^2)\dot{x}$ će utjecati na sporo mijenjanje amplitude titranja.
- Pretpostavimo zato rješenje u obliku:

$$x = A(t)\sin(t)$$

gdje je $A(t)$ sporo mijenjajuća amplituda oscilacija.

$$\dot{x} = \dot{A}(t)\sin t + A(t)\cos t$$

$$\ddot{x} = \ddot{A}(t)\sin t + 2\dot{A}(t)\cos t - A(t)\sin t$$

46

Nelinearni sustav drugog reda

- Da bi jednadžba bila zadovoljena, svi članovi koji množe $\sin(t)$ i koji množe $\cos(t)$ moraju biti jednaki nuli.

$$\ddot{A}(t)\sin t - A(t)\sin t - \mathrm{a}\dot{A}(t)\sin t + 3A^2(t)\mathrm{c}\dot{A}(t)\sin^3 t = 0,$$

$$2\dot{A}(t)\cos t - \mathrm{a}A(t)\cos t + 3\mathrm{c}A^3(t)\sin^2 t\cos t = 0.$$

- Iz druge jednadžbe izlazi:

$$2\dot{A}(t)\cos t - \mathrm{a}A(t)\cos t + \frac{3\mathrm{c}}{4}A^3\left(\cos t - \cos 3t\right) = 0.$$

47

Nelinearni sustav drugog reda

- Efekt treće harmoničke komponente ($3t$) se može zanemariti, pa dobijemo jednadžbu za *sporo mijenjanje amplitude*:

$$2\dot{A}(t) - \mathrm{a}A(t) + \frac{3\mathrm{c}}{4}A^3(t) = 0.$$

- Stalna amplituda $\dot{A}(t)=0$ uspostavit će se pri:

$$A(t)\left(\mathrm{a} - \frac{3\mathrm{c}}{4}A^2(t)\right) = 0 \quad \text{tj. } \mathrm{A}_{\mathrm{s}_1} = 0 \text{ i } \mathrm{A}^2_{\mathrm{s}_{2,3}} = \frac{4\mathrm{a}}{3\mathrm{c}}.$$

48

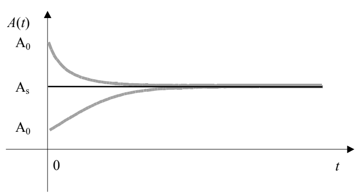
Nelinearni sustav drugog reda

- Pretpostavimo da je početno stanje u sustavu izazvalo početnu amplitudu titranja $A(0) = A_0$.
- Rješenjem jednadžbe za amplitudu, dobit ćemo izraz za utitravanje oscilatora od A_0 do A_s:

$$A(t) = \frac{A_s}{\sqrt{1 + \left[\left(\frac{A_s}{A_0} \right)^2 - 1 \right] e^{-at}}}.$$

49

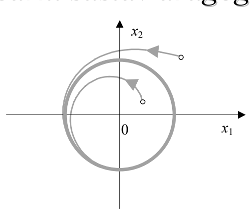
Nelinearni sustav drugog reda



- Amplituda se u početku ekspenencijalno razvija počevši od A_0, a kasnije asimptotički približava stalnoj vrijednosti A_s.
- U slučaju $A_0 < A_s$ raste, dok za $A_0 > A_s$ asimptotički pada na A_s.
- Amplituda oscilacija pokazuje svojstvo stabilnosti.

50

Nelinearni sustav drugog reda



- Trajektorija u ravnini stanja kreće od početnog stanja i teži zatvorenoj krivulji.
- Zatvorena krivulja opisuje tzv. *granični ciklus* u sustavu.

51

Nelinearni sustav drugog reda

- Za razliku od zatvorenih trajektorija u linearnom sustavu, gdje početno stanje određuje veličinu zatvorene krivulje, ovdje parametri nelinearnog funkcijskog bloka (a, c) određuju veličinu zatvorene trajektorije.
- U njenoj neposrednoj blizini nema drugih trajektorija.
- Takve trajektorije se nazivaju *izoliranim*.

52