Sustavi i signali

Modeli memorijskih sustava

Sadržaj

- Sustav u konačnom intervalu
- Vremenski kontinuirani sustavi
- Modeli vremenski kontinuiranih sustava
- Model s varijablama stanja
- Geometrijska interpretacija rješenja
- Klasifikacija sustava
- Otvoreni ili eksplicitni sustav
- Opći model s ulazno izlaznim varijablama
- Modeli vremenski diskretnih sustava
- Element za kašnjenje
- Simulacija sustava

2

Sustav u konačnom intervalu

- Memorijski kauzalni sustav s beskonačnom memorijom definiran je s:

$$y(t) = F(u_{(-\infty,\, t]}),$$

pri čemu $u_{(-\infty,\, t]}$ ne uključuje trivijalni slučaj $u_{(-\infty,\, t]} = u(t)$ koji bi ga načinio bezmemorijskim.

3

Sustav u konačnom intervalu

- Vladanje sustava uglavnom pratimo na konačnom vremenskom intervalu

  $$(t_0, t]$$

  koji nazivamo interval promatranja.
- Zanima nas, dakle, odsječak odziva

  $$y_{(t_0\,,\,t]}$$

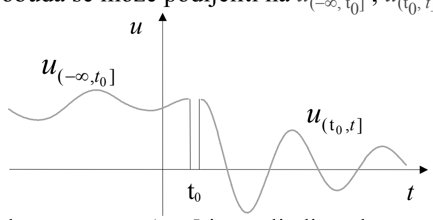
  kao posljedica odsječka pobude

  $$u_{(t_0\,,\,t]}.$$

4

Sustav u konačnom intervalu

- Pobuda se može podijeliti na $u_{(-\infty,\, t_0]}$, $u_{(t_0,\, t]}$.



- Izlaz sustava u $(t_0, t]$ je posljedica oba segmenta

  $$y(t) = F(u_{(-\infty,\, t_0]}, u_{(t_0,\, t]}) \text{ , } t > t_0.$$

5

Sustav u konačnom intervalu

- Uzmimo primjer vremenski stalnog, linearnog sustava $h(t,\ \tau) = h(t-\ \tau)$

  $$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau\,; \quad \tau,\ t \in (-\infty,\infty).$$

- Interval integracije možemo podijeliti na tri intervala koji se dodiruju $(-\infty, t_0]$, $(t_0, t]$, (t, ∞):

$$\int_{-\infty}^{t_0} u(\tau)h(t-\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} u(\tau)h(t-\tau)d\tau + \int_{t}^{+\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

6

Sustav u konačnom intervalu

$$\int_{-\infty}^{t_0} u(\tau)h(t-\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} u(\tau)h(t-\tau)d\tau + \int_{t}^{+\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Prvi integral je odziv sustava na pobudu prije t_0. $\tau \in (-\infty, t_0]$ predstavlja neku funkciju g

Treći integral je nula za kauzalne sustave
$h(t-\tau) = 0$ za $\tau > t$

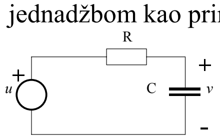
- Vrijednost odziva u t je dana s:

$$y(t) = g(t) + \int_{t_0}^{t} u(\tau)h(t-\tau)d\tau\,,\ t > t_0,$$

odnosno jednoznačno s $u_{(t_0, t]}$ samo ako znamo $g(t)$

Sustav u konačnom intervalu

- Kako odrediti $g(t)$?
- Uzmimo sustav određen diferencijalnom jednadžbom kao primjer:



$$\mathrm{RC}\frac{dv}{dt} + v = u$$

- uz RC = 1, funkcija h je:

$$h(t) = e^{-t}\,, \text{ za } t > t_0$$

Sustav u konačnom intervalu

- odziv na pobudu $u_{(t_0, t]}$:

$$v(t) = \int_{-\infty}^{t_0} u(\tau)e^{-(t-\tau)}d\tau + \int_{t_0}^{t} u(\tau)e^{-(t-\tau)}d\tau$$

$$v(t) = e^{-t}\int_{-\infty}^{t_0} u(\tau)e^{\tau}d\tau + \int_{t_0}^{t} u(\tau)e^{-(t-\tau)}d\tau$$

Sustav u konačnom intervalu

- Određeni integral uz fiksni t_0 daje neki broj C

$$v(t) = \mathrm{C}e^{-t} + \int_{t_0}^{t} u(\tau)e^{-(t-\tau)}d\tau.$$

- Pretpostavino da znamo $v(t_0)$. C izlazi kao:

$$v(t_0) = \mathrm{C}e^{-t_0} + 0 \Rightarrow \mathrm{C} = v(t_0)e^{t_0}.$$

10

Sustav u konačnom intervalu

- Uz poznato $v(t_0)$ i $u_{(t_0\,,\,t]}$, odziv sustava glasi:

$$v(t) = v(t_0)e^{-(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} u(\tau)e^{-(t-\tau)}d\tau\,, \quad t > t_0.$$

- Odziv sustava je određen:
  - Pobudom u ili signalom iz intervala $(t_0, t]$.
  - Stanjem napona kondenzatora u t_0 odnosno jednim brojem $v(t_0)$. U njemu je sadržan efekt pobude do t_0.

11

Sustav u konačnom intervalu

- Stanje varijable $v(t) = \alpha$ (broj) sadržava efekt pobude do t_0 pa se može napisati:

$$v(t) = F(\alpha, u_{(t_0,t]})$$

  za sustave opisane običnim diferencijalnim jednadžbama.
- U daljnjem toku, napon kondenzatora će se mijenjati, ali u bilo kojem trenutku t_1 možemo zaboraviti proces prije t_1 i na temelju iznosa $v(t_1)$ i pobude $u(t_1, t]$ odrediti $v(t)$.

12

Sustav u konačnom intervalu

- Pogodno je dakle, pratiti stanje sustava. Pomoću stanja i ulaza može se dobiti izlaz.
- U našem primjeru ako bi izlaz y(t) bio napon na otporniku, vrijedilo bi:

$$y(t) = u(t) - v(t).$$

13

Sustav u konačnom intervalu

- Kauzalne sustave moguće je opisati funkcijama φ i η:

$$x(t) = \varphi\left[t, t_0, x(t_0), u_{(t_0,t]}\right], \qquad t > t_0,$$

$$y(t) = \eta\left[t, x(t), u(t)\right], \qquad t > t_0.$$

- $x(t)$ je stanje sustava u trenutku t
- Ovakav opis sustava, gdje dominantnu ulogu ima stanje unutarnjih varijabli, zove se:

  model s varijablama stanja ili model stanja

14

Sustav u konačnom intervalu

- Skup varijabli:

$$\{x_i \mid i = 1,2, \ldots , n\}$$

  čini stanje sustava, ako se uz njihovo poznavanje u trenutku t_0 i poznavanje $u_{(t_0,t]}$, može jednoznačno odrediti $x(t)$ i $y(t)$ za svako $t > t_0$
- Sustav u kojem nema akumuiranih efekata iz prijašnjih pobuda opisan je samo funkcijom η:

$$y(t) = \eta\left[t, u(t)\right], \qquad t > t_0$$

  i čini klasu trenutnih, bezmemorijskih ili statičkih sustava

15

Sustav u konačnom intervalu

- Generalizirano, sustav se može okarakterizirati osmerkom koju čine skupovi i funkcije:
  $$\mathcal{S} = \{T, U, \mathcal{U}, Y, \mathcal{Y}, X, \varphi, \eta\}.$$
- Obzirom na skupove i funkcije, sustav se svrstava u klase koje su modeli određenih realnih sustava.
- U predmetu SIS pretpostavljat ćemo da sustav ima determinističko, a ne stohastičko vladanje.
- Jedna klasifikacija sustava
  - vremenski kontinuiran sustav
  - vremenski diskretan sustav

16

Vremenski kontinuirani sustavi

- Sustav je vremenski kontinuiran ako je vremenska varijabla kontinuirana, $t \in \mathbf{T} \subset \mathbf{R}$.
- Ako je φ neprekinuta funkcija, kažemo da je sustav gladak. U tom slučaju sustav se može opisati diferencijalnom jednadžbom stanja i izlaznom jednadžbom:
  $$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0,$$
  $$y(t) = g(x(t), u(t), t),$$
  gdje su f i g obične funkcije.

17

Vremenski kontinuirani sustavi

- Jednadžbe se mogu predstaviti blokovskim dijagramima ako se uvede blok koji povezuje:
  $$\dot{x} \text{ i } x.$$
- Integrator:

$$u \longrightarrow \boxed{\int} \longrightarrow y \qquad y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} u(\tau)\, d\tau$$

18

Vremenski kontinuirani sustavi

- Integrator je memorijski element.
- Za određivanje y(t) potrebno je $y(t_0)$ i $u_{(t_0,\, t]}$.
- $y(t)$ je funkcional od $u_{(t_0,\, t]}$.
- $y(t_0)$ je stanje integratora i sadrži svu prošlost do t_0.
- Kod integratora izlaz je ujedno i stanje.

19

Vremenski kontinuirani sustavi
Model s varijablama stanja

- Sustav je n–tog reda ako treba n varijabli stanja za potpun opis njegovog vladanja
- Pretpostavimo sustav s više varijabli ulaza, izlaza i stanja:

$\mathbf{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_m]^T \quad \mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m,$

$\mathbf{y} = [y_1, y_2, \ldots, y_r]^T \quad \mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^r,$

$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n.$

- Stanje u trenutku t se može izraziti s:

$$\mathbf{x}(t) = \varphi\,(t, t_0, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0, t)),$$

φ je (jednoznačna) vektorska funkcija

20

Vremenski kontinuirani sustavi
Model s varijablama stanja

- Izlaz ovisi o stanju i pobudi:

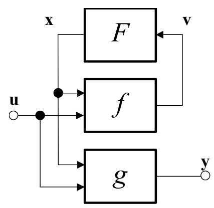
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t),$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(t, t_0, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0, t]).$$

- Vremenski kontinuiran sustav s varijablama stanja možemo rastaviti na dva podsustava:
  - memorijski
  - bezmemorijski

21

Vremenski kontinuirani sustavi
Model s varijablama stanja



- Bezmemorijski dio, f i g

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t),\ \mathbf{u}(t),\ t),$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t),\ \mathbf{u}(t),\ t).$$

- Memorijski dio, F, je ovdje integrator

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(\mathrm{t}_0) + \int_{\mathrm{t}_0}^{t} \mathbf{v}(\tau)d\tau.$$

Vremenski kontinuirani sustavi
Model s varijablama stanja

- Preuredimo posljednje tri jednadžbe

$$\mathbf{v}(\mathrm{t}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t),\ \mathbf{u}(t),\ t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(\mathrm{t}),\ \mathbf{u}(t),\ t)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(\mathrm{t}_0) + \int_{\mathrm{t}_0}^{t} \mathbf{v}(\tau)d\tau$$

$$\Big\downarrow 1$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(t); \quad \mathbf{x}(\mathrm{t}_0) = \mathbf{x}_0$$

2

- Dobivamo rezultat:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t); \quad \mathbf{x}(\mathrm{t}_0) = \mathbf{x}_0,$$
$$\mathbf{y}(t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t).$$

Vremenski kontinuirani sustavi
Model s varijablama stanja

- Funkcija stanja x traži se u eksplicitnom obliku: $x(t) = \varphi\left(t, \mathrm{t}_0, \mathrm{x}_{0,} u_{(\mathrm{t}_0, t]}\right)$
- To je rješenje vektorske dif. jed.
- Prilikom rješavanja treba paziti na:
  - postojenje (egzistenciju) rješenja,
  - jedinstvenost rješenje.
- Izlaz $y(t)$ se dobiva kao algebarska funkcija stanja i pobude

$$y(t) = \eta(t,\ x(t),\ u(t)).$$

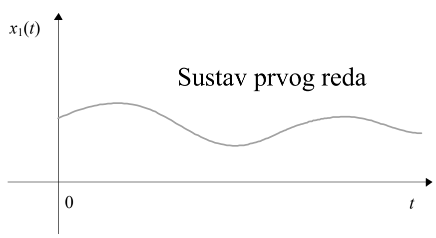
Vremenski kontinuirani sustavi
Geometrijska interpretacija rješenja

- Vektor $\mathbf{x}(t)$ ima koordinate:
  $x_1(t) = \varphi_1(t),\ x_2(t) = \varphi_2(t),\ \dots,\ x_n(t) = \varphi_n(t).$
- Vektor $\mathbf{x}(t)$ možemo prikazati:
  - kao funkciju vremena, x–t prikaz,
  - kao trajektoriju u ravnini stanja (vrijeme je parametar).

25

Vremenski kontinuirani sustavi
Geometrijska interpretacija rješenja

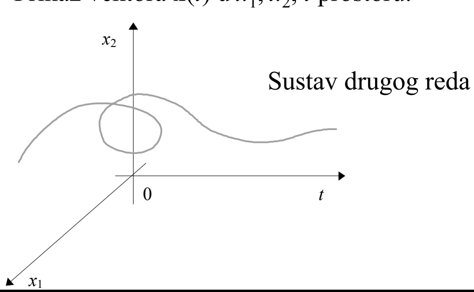
- Prikaz vektora $\mathbf{x}(t)$ u x–t ravnini.



26

Vremenski kontinuirani sustavi
Geometrijska interpretacija rješenja

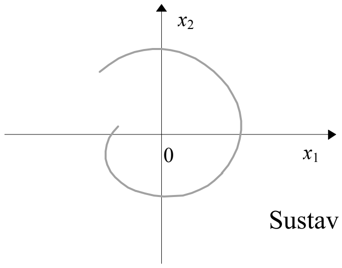
- Prikaz vektora $\mathbf{x}(t)$ u x_1, x_2, t prostoru.



27

Vremenski kontinuirani sustavi
Geometrijska interpretacija rješenja

- Prikaz trajektorije vektora $\mathbf{x}(t)$ u ravnini stanja.

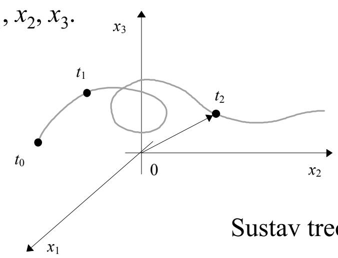


Sustav drugog reda

28

Vremenski kontinuirani sustavi
Geometrijska interpretacija rješenja

- Prikaz trajektorije vektora $\mathbf{x}(t)$ u prostoru stanja x_1, x_2, x_3.



Sustav trećeg reda

29

Vremenski kontinuirani sustavi
Geometrijska interpretacija rješenja

- Primjeri u MATLAB – u

  (XXT, XX, XXX)

30

Vremenski kontinuirani sustavi
Klasifikacija sustava

- Vremenski varijantan sustav

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t).$$

- Vremenski invarijantan sustav

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}),$$
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \text{ za } \mathbf{u}(t) = 0.$$

31

Vremenski kontinuirani sustavi
Klasifikacija sustava

- Sustav je otvoren, eksplicitan odnosno bez povratnih veza ako se jednadžbe stanja mogu sortirati:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(u_1, u_2, \cdots, u_m), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, u_1, u_2, \cdots, u_m), \\ \dot{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, u_1, u_2, \cdots, u_m), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, u_1, u_2, \ldots, u_m). \end{aligned}$$

- Rješenje jednadžbi dobiva se sukcesivnom integracijom.

32

Vremenski kontinuirani sustavi

- Sustav je linearan ako je funkcija $\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ linearna, tj.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t).$$

- Ako su A i B konstantne, sustav je linearan i vremenski nepromjenjiv

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t).$$

33

Vremenski kontinuirani sustavi
Otvoreni ili eksplicitni sustav

- Nepobuđen linearan sustav (tj. $u(t) = 0$, za sve t) ima homogenu diferencijalnu jednadžbu.
- Vremenski promjenjiv sustav

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t).$$

- Vremenski stalan sustav:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t).$$

34

Vremenski kontinuirani sustavi
Opći model s ulazno izlaznim varijablama

- Promatrajmo primjer sustava s jednim ulazom i jednim izlazom opisanim jednadžbama:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u) \qquad x_1(\mathrm{t}_0) = \mathrm{x}_{10},$$
$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u) \qquad x_2(\mathrm{t}_0) = \mathrm{x}_{20},$$
$$y = g(x_1, x_2, u).$$

- Model s ulazno izlaznim varijablama ne sadrži varijable stanja $\Rightarrow$ treba ih eliminirati iz gornjih jednadžbi.
- Polazimo od izlazne jednadžbe i deriviramo y po vremenu:

35

Vremenski kontinuirani sustavi
Opći model s ulazno izlaznim varijablama

$$y = g(x_1, x_2, u) \quad \Big| \frac{d}{dt}$$
$$\Downarrow$$
$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, u)\\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, u)\end{aligned}\right\} \rightarrow \dot{y} = h(\dot{x}_1, \dot{x}_2, x_1, x_2, u, \dot{u})$$
$$\Downarrow$$
$$\dot{y} = h'(x_1, x_2, u, \dot{u}) \quad \Big| \frac{d}{dt}$$
$$\Downarrow$$
$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, u)\\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, u)\end{aligned}\right\} \rightarrow \ddot{y} = k(\dot{x}_1, \dot{x}_2, x_1, x_2, u, \dot{u}, \ddot{u})$$
$$\Downarrow$$
$$\ddot{y} = k'(x_1, x_2, u, \dot{u}, \ddot{u})$$

36

Vremenski kontinuirani sustavi Opći model s ulazno izlaznim varijablama

$$\left.\begin{aligned} y &= g(x_1, x_2, u) \\ \dot{y} &= h'(x_1, x_2, u, \dot{u}) \\ \ddot{y} &= k'(x_1, x_2, u, \dot{u}, \ddot{u}) \end{aligned}\right\} \rightarrow \varphi(\ddot{y}, \dot{y}, y, \ddot{u}, \dot{u}, u) = 0$$

sustav drugog reda

- Sustav n–tog reda

$$\varphi\left(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, \dot{y}, y, u^{(m)}, u^{(m-1)}, \ldots, \dot{u}, u\right) = 0.$$

- Linearan sustav n–tog reda

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + y = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \ldots + u.$$

37

Vremenski kontinuirani sustavi Opći model s ulazno izlaznim varijablama

- Koje veličine uzeti kao varijable stanja ?

$$\begin{aligned} y &= x_1, \\ \dot{y} &= x_2, \\ &\vdots \\ y^{(n-1)} &= x_n. \end{aligned}$$

- To je dobar izbor jer su početni uvjeti u dif. jed.:

$$y(0), \dot{y}(0), \ldots, y^{(n-1)}(0).$$

38

Vremenski kontinuirani sustavi Opći model s ulazno izlaznim varijablama

- Izbor varijabli stanja:

$$y = x_1, \dot{y} = x_2, \ldots, y^{(n-1)} = x_n,$$

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, \dot{y}, y, u^{(m)}, u^{(m-1)}, \ldots, \dot{u}, u),$$

daje slijedeći model s varijablama stanja:

$$\begin{array}{lll} y = x_1 & \dot{y} = x_2 & \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{y} = x_2 & \ddot{y} = x_3 & \dot{x}_2 = x_3, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y^{(n-2)} = x_{n-1} & y^{(n-1)} = x_n & \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ & & \dot{x}_n = f\left(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, u^{(m)}, u^{(m-1)}, \ldots, u\right). \end{array}$$

39

Modeli vremenski diskretnih sustava

- Sustav je vremenski diskretan ako je skup $\mathbf{T} \subset \mathbf{R}$ prebrojiv.
- Signali u, x, y su nizovi brojeva.
- Npr., pobudni niz može se izraziti u obliku:

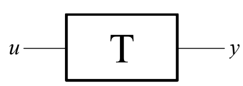
$$\bar{u} = \{(k, u(k)) \mid k \in \mathbf{Z}\},$$
$$\{u(k)\},\ k \in \mathbf{Z}$$

- $\mathbf{U} = \mathbf{Y} = \mathbf{X} = \mathbf{R} \Rightarrow$ jednadžba diferencija:

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k),$$
$$y(k) = g(x(k), u(k), k).$$

- Diskretni sustavi proizlaze i iz numeričkog rješavanja diferencijalnih jednadžbi.

Modeli vremenski diskretnih sustava Element za kašnjenje



$$y = \mathrm{T}(u)$$
$$y(t) = u(t - \tau)$$

- Operacija T je operacija s pamćenjem.
- Element za kašnjenje je, na primjer, električni vod konačne duljine.

Simulacija sustava

REALNI SUSTAV

⇩ (indukcijom ili dedukcijom)

APSTRAKTNI SUSTAV

⇩

APSTRAKTNI MODEL FIZIKALNI MODEL

⇩ ⇩

analitička ili numerička analiza | simulacija

Simulacija sustava

- Apstraktni sustav dobivamo iz realnog sustava postupcima:
  - dedukcije (iz poznatih prikodnih zakona, Kirchoff, Newton i sl.),
  - indukcije (zaključivanjem ne temelju mjerenja ulazno izlaznih veličina).
- Npr. mehanički i električki sustav mogu se predstaviti istim apstraktnim sustavom.
- Ako neki apstraktni sustav interpretiramo kao električnu mrežu, ona se zove interpretacija apstraktnog sustava.

43

Simulacija sustava

- Ako mrežu napravimo, ona se zove realizacija apstraktnog sustava.
- Realna el. mreža i realni mehanički sustav koji su interpretacija istog aptraktnog sustava su međusobno analogni $\Rightarrow$ možemo analizirati mrežu umjesto realnog sustava.
- Tada se mreža naziva analogni model mehaničkog sustava.

44

Simulacija sustava

- Ponavljanje procesa na analognom modelu zove se simulacija ili simuliranje.
- Određivanje i realizacija modela zove se modeliranje.
- Simuliranje se obavlja na analognom ili digitalnom računalu.

45