Sustavi i signali

Kontinuirani sustavi bez memorije

Sadržaj

- Funkcijski blok s jednim ulazom
- Funkcijski blok s više ulaza
- Spajanje funkcijskih blokova u sustav
- Eksplicitni i implicitni sustavi
- Prikaz sustava listom spajanja
- Formulacija i rješenje jednadžbi sustava
- Linearnost sustava
- Utjecaji nelinearnosti i povratne veze

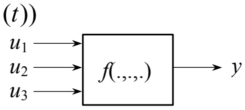
2

Uvod

- Izlaz u trenutku *t* ovisi samo o vrijednosti ulaznog signala u trenutku *t*
- Elementi sustava prikazani funkcijskim blokom
- Funkcijski blok opisan funkcijom

$$y(t) = f(u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t))$$

$$y(t), u_i(t) \in \mathbf{R}$$



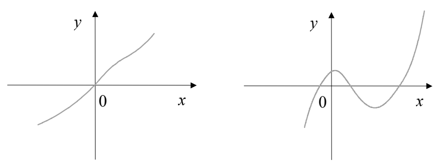
3

Funkcijski blok s jednim ulazom i jednim izlazom

- $y(t) = f(u(t))$, za svaki t
- f je funkcija koja broju pridružuje broj
- Blok označen s f nazivamo funkcijski blok
- Funkcijska veza ulaza i izlaza može se dati
  - analitičkim izrazom pomoću poznatih funkcija
  - krivuljom u x–y ravnini
  - tablicom diskretnih vrijednosti

4

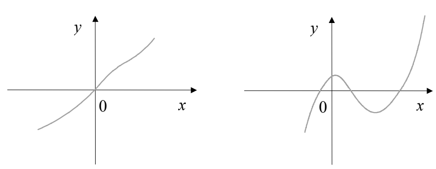
Funkcijski blok s jednim ulazom i jednim izlazom



- Svakoj vrijednosti x–a pridružena je jedna vrijednost y–a.
- Funkcijski blok upravljan od strane ulaza (apcisa na slici).
- Ulazna varijabla slobodna, a izlazna zavisna (ordinata).

5

Funkcijski blok s jednim ulazom i jednim izlazom

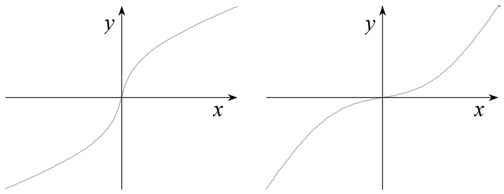


- Prva karakteristika je monotono rastuća $\frac{dy}{dx} > 0$
- Druga karakteristika nije monotona $\frac{dy}{dx} \gtreqless 0$

6

Funkcijski blok s jednim ulazom i jednim izlazom

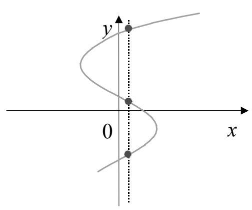
- Monotone funkcije imaju inverziju



7

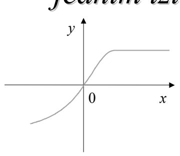
Funkcijski blok s jednim ulazom i jednim izlazom

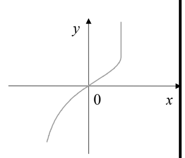
- Relacija – za jednu apcisu imamo više vrijednosti ordinata



8

Funkcijski blok s jednim ulazom i jednim izlazom





- $y = f(x)$ paralelan odsječak s osi x
- Nema inverzije jer je

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

- Jednoj apcisi odgovara bezbroj ordinata

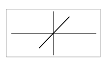
9

MATLAB

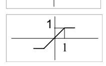
Primjeri funkcijskih blokova s jednim ulazom i jednim izlazom

Skokovite i lomljene karakteristike

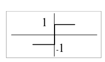
linearno pojačalo — $y = x$



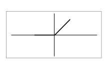
limiter — $y = -1,\ x < -1$; $y = x,\ -1 < x < 1$; $y = 1,\ x > 1$



komparator jedne razine — $y = \mathrm{sgn}(x),\ x \neq 0$; $y = 0,\ x = 0$

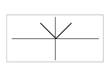


prag — $y = x,\ x > 0$; $y = 0,\ x < 0$

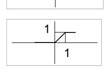


Skokovite i lomljene karakteristike

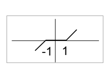
apsolutna vrijednost — $y = |x|$



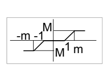
prag sazasićenjem — $y = 0,\ x < 0$; $y = \mathrm{x},\ x > 0$; $y = 1,\ x > 1$



mrtva zona — $y = x + 1,\ x < -1$; $y = 0,\ -1 < x < 1$; $y = x - 1,\ x > 1$



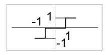
mrtva zona s zasićenjem — $y = -\mathrm{M} + 1,\ x < -\mathrm{m}$; $y = x + 1,\ -\mathrm{m} < x < -1$; $y = 0,\ -1 < x < 1$; $y = x - 1,\ 1 < x < \mathrm{m}$; $y = \mathrm{M} - 1,\ x > \mathrm{m}$



Skokovite i lomljene karakteristike

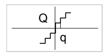
komparator s dvije razine

$y = -1, x < -1$
$y = 0, -1 < x < 1$
$y = 1, x > 1$



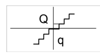
kvantizator (A/D konvertor)

$y = -mQ, \quad -mq < x < (1 - m)q$
$y = mQ, \quad (m - 1)q < x < mq$



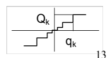
stepeničasta, linearna funkc.

$y = -mQ, \quad (-1 - m)q < x < -mq$
$y = mQ, \quad mq < x < (m + 1)q$



stepeničasta, nelinearna funkc.

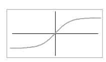
$y = Q_k, \; q_{k-1} < x < q_k$



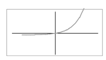
13

Glatke karakteristike (neprekinuta derivacija)

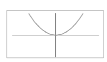
simetrična nelinearna funkc. — $y = \mathrm{th}(x)$



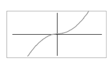
asimetrična nelinearna funkc. — $y = e^x - 1$



parabola (2. stupanj) — $y = x^2$



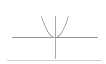
neparna parabola (3. stupanj) — $y = -x^2, x < 0$; $y = x^2, x > 0$



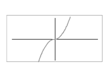
14

Glatke karakteristike (neprekinuta derivacija)

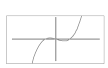
parna parabola višeg reda — $y = x^{2n}$



neparna parabola višeg reda — $y = x^{2n+1}$

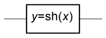


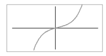
parabola 3. reda + pravac neg. nagiba — $y = x^3 - x$

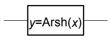


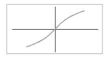
15

Glatke karakteristike (neprekinuta derivacija)

bipolarni kompresor 

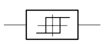
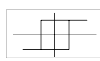
$y = \mathrm{sh}(x)$ 

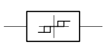
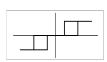
bipolarni dekompresor 

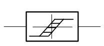
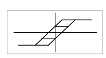
$y = \mathrm{Arsh}(x)$ 

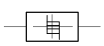
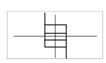
16

Relacijski blokovi (višeznačne funkcije)

komparator s histerezom  

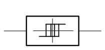
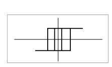
komparator s dvije razine s histerezom  

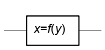
 

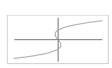
 

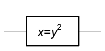
17

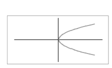
Relacijski blokovi (višeznačne funkcije)



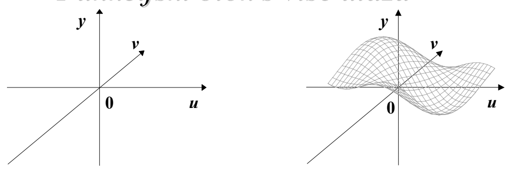
$y = f(x)$ 

horizontalna parabola 

$x = y^2$ 

18

Funkcijski blok s više ulaza



- u, v – ulazne varijable
- y – izlazna varijabla
- Skup krivulja $y = f(u,v)$, uz parametar v

19

Funkcijski blok s više ulaza

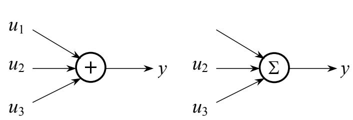
- Prikaz funkcijskih veza ulaza i izlaza
  - analitički često pomoću elementarnih funkcija (polinomi, transcedentne funkcije)
  - grafički prikazi
  - tablice numeričkih podataka
- Grublje aproksimacije po odsječcima funkcija
  - linearne funkcije
  - parabolične funkcije

20

Funkcijski blok s više ulaza

- Složeni funkcijski blokovi mogu se rastaviti na elemente zbrajala i množila

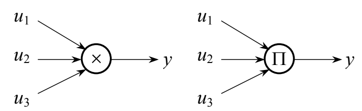
$$y(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$$



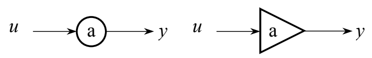
21

Funkcijski blok s više ulaza

$y(t) = u_1(t) \bullet u_2(t) \bullet u_3(t)$



$y(t) = a \bullet u_1(t)$



22

MATLAB

Zbrajanje dva signala

Množenje dva signala

Funkcijski blok s više ulaza

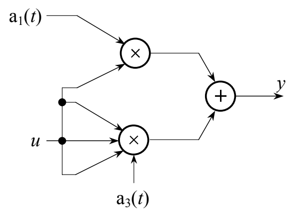
- Ako je *f* polinom
  $y(t) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_n u^n$,
  - funkcijski blok se može predstaviti konačnim brojem zbrajala i množila.
- Ako je *f* transcedentna funkcija
  - aproksimacija moguća konačnim brojem elemenata.

24

Vremenski promjenljivi funkcijski blok

- Primjer vremenski promjenjivog sustava:

$$y = \mathrm{a}_1(t)u + \mathrm{a}_3(t)u^3.$$



25

Spajanje funkcijskih blokova u sustav

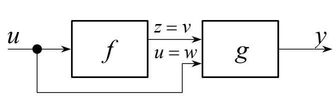
- Pravila za spajanje elemenata ili funkc. blokova:
  - Izlazi dva bloka se ne spajaju.
  - Svaki ulaz bloka se spaja na izlaz nekog bloka ili je ulaz u spojeni sustav.
  - Samo jedan izlaz bloka je izlaz spojenog sustava. Svi ostali izlazi moraju biti spojeni na ulaze nekih blokova.
- Rezultirajući sustav će opet biti sustav s više ulaza i jednim izlazom.

26

Spajanje funkcijskih blokova u sustav

$z = f(u)$

$y = g(v,w)$

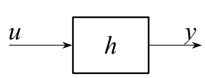


- Jednadžbe spajanja:

$$\left.\begin{matrix} v = z \\ w = u \end{matrix}\right\} \; y = g(f(u),u)$$

$y = h(u)$

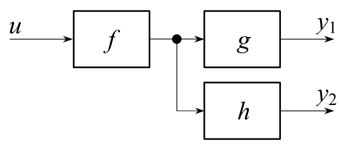
jedan funkcijski blok



27

Spajanje funkcijskih blokova u sustav

- Sustav s jednim ulazom i više izlaza



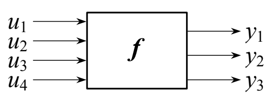
$y_1 = g(v)$
$y_2 = h(v)$
$v = \mathrm{f}(u)$
$y_1 = f_1(u)$
$y_2 = f_2(u)$

28

Spajanje funkcijskih blokova u sustav

- Sustav s više ulaza i više izlaza

$y_1 = f_1(u_1, u_2, u_3, u_4)$
$y_2 = f_2(u_1, u_2, u_3, u_4)$
$y_3 = f_3(u_1, u_2, u_3, u_4)$



Uvođenjem vektora:
ulaz: $[u_1, u_2, \ldots u_m]^t$
izlaz: $[y_1, y_2, \ldots y_r]^t$
$\}$ $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$ ... gdje je f vektorska funkcija

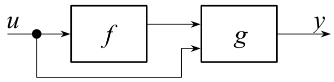
29

Eksplicitni i implicitni sustavi

- Dvije grupe sustava bez memorije
  - eksplicitni sustavi
  - implicitni sustavi
- Podjela prema tome da li signal na svom putu kroz sustav ne čini petlju
- Eksplicitni sustav – nema petlje
- Implicitni sustav – ima jednu ili više petlji

30

Prikaz sustava listom spajanja



g: *f*, *u*
f: *u*

- Svaki funkcijski blok ima jedan redak u listi
- Izlazne varijable označene su oznakom funkcijskog bloka
- Ulazne varijable označene su
  - ulazima u dotični blok
  - oznakama bloka čiji izlaz ulazi u dotični blok

31

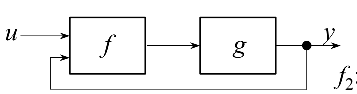
Prikaz sustava listom spajanja

- Sortirana lista
  - Kada su retci u listi spajanja složeni tako da u svakom retku ime funkcije ili varijable desno od dvotočke možemo naći lijevo od dvotočke negdje iznad tog retka ili je to ulaz sustava, kažemo da je lista sortirana

nesortirana lista		sortirana lista
g: *f*, *u* *f*: *u*	⇒	*f*: *u* *g*: *f*, *u*

32

Prikaz sustava listom spajanja



f_2: f_1
f_1: f_2, u

ili

f_1: f_2, u
f_2: f_1

- Lista se ne može sortirati – > sustav je implicitan
- Implicitni sustav je sustav s povratnom vezom
- Spojna lista je način ustanovljavanja da li je sustav eksplicitni ili implicitni u slučaju da to nije moguće ustanoviti vizualnom inspekcijom

33

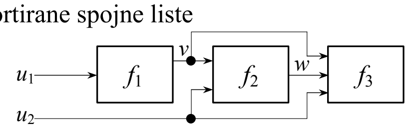
MATLAB

Eksplicitni sustav

Implicitni sustav

Formulacije i rješenje jednadžbi sustava (eksplicitni sustav)

- Ulazno izlazne jednadžbe na osnovu sortirane spojne liste



f_1: u_1

f_2: f_1, u_2

f_3: f_1, f_2, u_2

$$v = f_1(u_1)$$
$$w = f_2(v,\ u_2)$$
$$y = f_3(v,\ w,\ u_2)$$
$$y = f_3\{f_1(u_1),\ f_2[f_1(u_1),\ u_2],\ u_2\}$$

35

Formulacije i rješenje jednadžbi sustava (eksplicitni sustav)

- Na temelju poznavanja u_1 i u_2 možemo odrediti funkciju $y = h(u_1,u_2)$
- Primjer: $f_1(u_1) = u_1^2$ $\qquad v = u_1^2$

$$f_2(v,u_2) = v + u_2 \qquad w = v + u_2$$
$$f_3(v,w,u_2) = vwu_2 \qquad y = vwu_2$$
$$y = u_1^2(u_1^2 + u_2)u_2 = u_1^4u_2 + u_1^2u_2^2$$

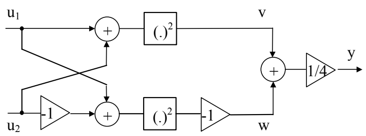
Uz $u_1 = -2$ i $u_2 = 1$ izlazi $v = 4$, $w = 5$, $y = 20$

- Lako izračunavanje odziva, pogodno i za računalo

36

Formulacije i rješenje jednadžbi sustava (eksplicitni sustav)

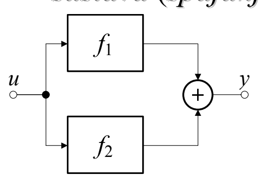
- Primjer:Analogni multiplikator



$$v=(u_1+u_2)^2$$
$$w=-(u_1-u_2)^2$$
$$y=\frac{1}{4}(w+v) \Rightarrow y=\frac{1}{4}\left[(u_1+u_2)^2-(u_1-u_2)^2\right]=u_1u_2$$

37

Formulacije i rješenje jednadžbi sustava (spajanje u paralelni slog)



$$y=y_1+y_2$$
$$y_1=f_1(u)$$
$$y_2=f_2(u)$$
$$y=f(u)=f_1(u)+f_2(u)$$
$$f=f_1+f_2$$

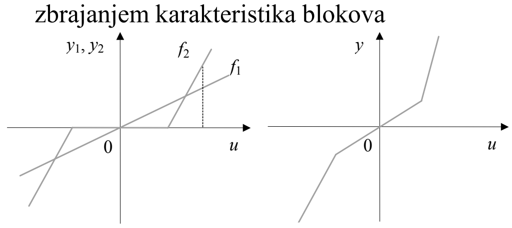
- Paralelni spoj ili slog
- Veći broj sustava složenih paralelno

$$y=f(u)=\sum_1^n f_i(u)$$

38

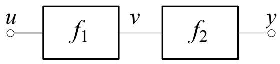
Formulacije i rješenje jednadžbi sustava (spajanje u paralelni slog)

- Karakteristika paralelnog sloga dobiva se zbrajanjem karakteristika blokova



39

Formulacije i rješenje jednadžbi sustava (spajanje u kaskadu)



$$y = f_2(v)$$
$$v = f_1(u)$$
$$y = f_2(f_1(u))$$

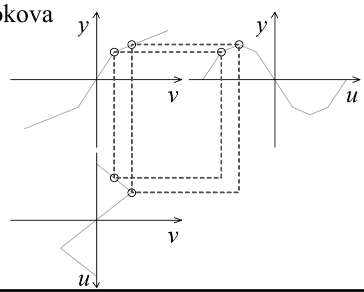
- Kaskada sustava
- Funkcija kaskade je kompozicija funkcija
  - $f = f_1 \circ f_2$
- Za kaskadu s većim brojem blokova vrijedi

$$y = f_n(f_{n-1}(f_{n-2}(\ldots(f_1(u))\ldots))).$$
$$f = f_n \circ f_{n-1} \circ f_{n-2} \circ \ldots \circ f_1.$$

40

Formulacije i rješenje jednadžbi sustava (spajanje u kaskadu)

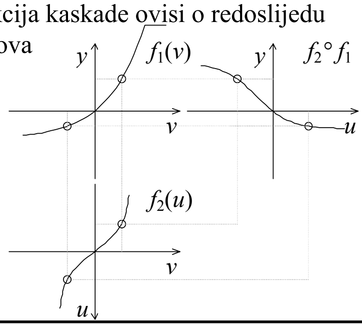
- Funkcija kaskade ovisi o redoslijedu blokova



41

Formulacije i rješenje jednadžbi sustava (spajanje u kaskadu)

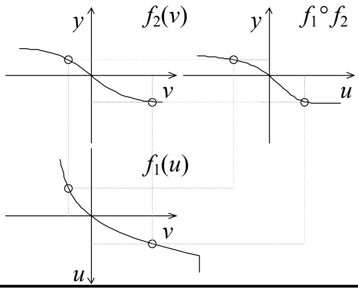
- Funkcija kaskade ovisi o redoslijedu blokova



42

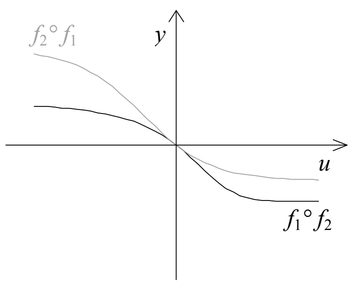
Formulacije i rješenje jednadžbi sustava (spajanje u kaskadu)

- Obrnuti redoslijed kaskada



43

Formulacije i rješenje jednadžbi sustava (spajanje u kaskadu)



44

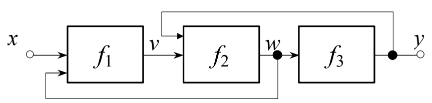
MATLAB

Spajanje u paralelni slog

Spajanje u kaskadu

Formulacije i rješenje jednadžbi sustava (implicitni sustavi)

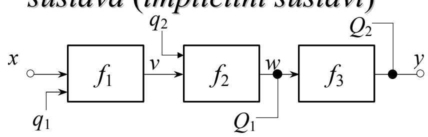
- Formulacija jednadžbi provodi se prekidom petlje povratne veze kako bi se dobio eksplicitni sustav
- Dodavanje jednadžbi koje izražavaju zatvaranje petlji



f_1: x, f_2
f_2: f_3, f_1
f_3: f_2

46

Formulacije i rješenje jednadžbi sustava (implicitni sustavi)



$f_1 : x, q_1$	$v = f_1(x, q_1)$	Dodatni uvijeti:
$f_2 : q_2, f_1$	$w = f_2(q_2, v)$ ⇨	$q_1 = w$
$f_3 : f_2$	$y = f_3(w)$	$q_2 = y$

$q_1 = w = f_2(q_2, f_1(x, q_1))$ $\quad$ $q_1 = f_2(f_3(q_1), f_1(x, q_1))$

$q_2 = f_3(q_1)$ $\quad$ $q_1 = \varphi(x_1, q_1) \rightarrow q_1 = \psi(x)$

$y = q_2$ $\quad$ $y = q_2 = f_3(q_1) = f_3(\psi(x)) = \lambda(x)$

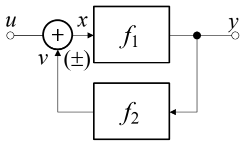
47

Formulacije i rješenje jednadžbi sustava (implicitni sustavi)

- Dobivene implicitne jednadžbe
- Ponekad se mogu rješiti analitički i dobiti $y = f(x)$ ili $x = f^{-1}(y)$
- Redovito se mogu riješiti numerički, iterativnim postupkom
  - krene se od nekih pretpostavljenih vrijednosti za q_1
  - Izračuna se novi q_1 na osnovu pretpostavljenog
  - postupak se ponavlja dok nije postignuta zadovoljavajuća točnost

48

Formulacije i rješenje jednadžbi sustava (implicitni sustavi)



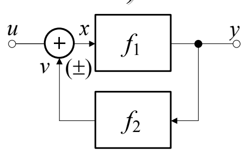
$$y = f_1(x)$$
$$v = f_2(y)$$
$$x = u \pm v$$

- Spajanje u prsten dva bloka s jednim ulazom i izlazom
- Sustav s povratnom vezom
  - pozitivna : $x = u + v$
  - negativna : $x = u - v$

49

Formulacije i rješenje jednadžbi sustava (implicitni sustavi)

- Za ovaj sustav vrijedi:

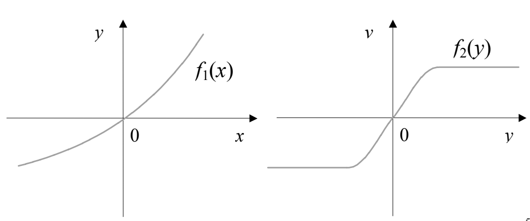


$$u = x \mp v = f_1^{-1}(y) \mp f_2(y)$$
$$y = f(u);\; f = (f_1^{-1} \mp f_2)^{-1}$$

50

Formulacije i rješenje jednadžbi sustava (implicitni sustavi)

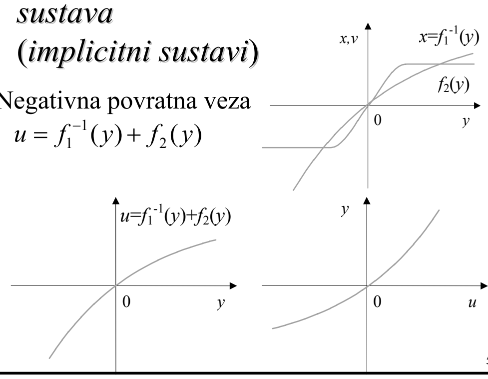
- Rješavanje grafičkim postupcima
- Primjer:



51

Formulacije i rješenje jednadžbi sustava (implicitni sustavi)

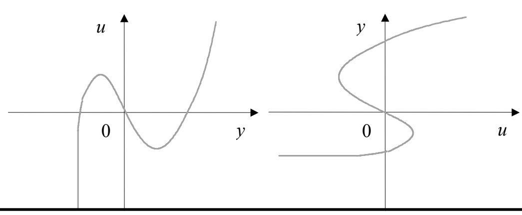
- Negativna povratna veza
  $u = f_1^{-1}(y) + f_2(y)$



52

Formulacije i rješenje jednadžbi sustava (implicitni sustavi)

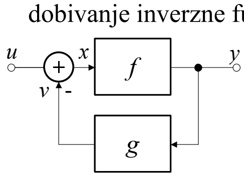
- Pozitivna povratna veza
  $u = f_1^{-1}(y) - f_2(y)$



53

Formulacije i rješenje jednadžbi sustava (implicitni sustavi)

- Primjer: Sustav s povratnom vezom za dobivanje inverzne funkcije

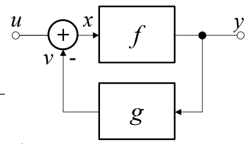


$$y = f(x) = ax$$
$$v = g(y)$$
$$x = u - v$$

- Blok *f* je pojačalo velikog pojačanja (a >> 1)

54

Formulacije i rješenje jednadžbi sustava (implicitni sustavi)



$$y = f(x) = ax = a(u - g(y))$$

$$\Downarrow$$

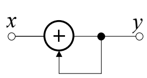
$$u = g(y) + \frac{y}{a} \quad \xrightarrow{a >> 1} \quad u \cong g(y)$$

$$\Downarrow$$

$$y \cong g^{-1}(y)$$

Formulacije i rješenje jednadžbi sustava (implicitni sustavi)

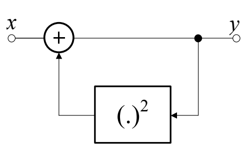
- Implicitni sustavi mogu biti i relacijski
- Rješenje ne mora postojati
- Primjer: zbrajalo s povratnom vezom



$$y = x + y$$

- $x = 0$, $y = 0$
- $x \neq 0$, nema rješenja

Formulacije i rješenje jednadžbi sustava (implicitni sustavi)



$$y = y^2 + x$$

- Uz $x = 0$ jednadžba zadovoljena za $y = 0$ i $y = 1$
- Pitanje egzistencije i jednoznačnosti rješenja
- Implicitni sustavi su generalno karakterizirani relacijama

Ekvivalencija i aproksimacija sustava

- Dva sustava su ekvivalentna ako su za sve moguće ulazne vrijednosti njihovi ulazno – izlazni odnosi identični
- Dva sustava su aproksimativno ekvivalentna ako za sve moguće identične ulaze imaju aproksimativno jednake izlaze
- Više je načina za definiciju aproksimativno jednakih signala

58

Ekvivalencija i aproksimacija sustava

- Definicije aproksimativno jednakih signala
  - najveći iznos apsolutnog odstupanja

$$\varepsilon_m = \max\left|y_1(x) - y_2(x)\right| < \varepsilon_{md} \qquad \mathrm{a} \leq x \leq \mathrm{b}$$

  - integral kvadrata odstupanja (efektivna greška)

$$\varepsilon_{ef} = \int_a^b \left[y_1(x) - y_2(x)\right]^2 dx < \varepsilon_{efd} \qquad \mathrm{a} \leq x \leq \mathrm{b}$$

59

Ekvivalencija i aproksimacija sustava

- Razvoj u Taylor – ov red u okolini jedne točke

$$\delta_0(x) = \left[y_1(x) - y_2(x)\right]_{x=\mathrm{x}_0} =$$

$$= \delta(\mathrm{x}_0) + \delta'(\mathrm{x}_0)\frac{\Delta x}{1!} + \delta''(\mathrm{x}_0)\frac{(\Delta x)^2}{2!} + \ldots$$

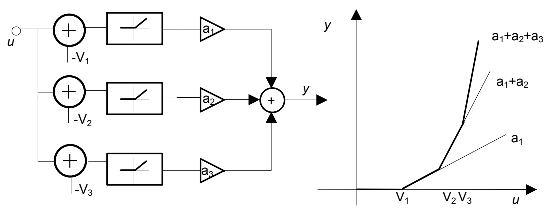
$$+ \delta^{(n)}(\mathrm{x}_0)\frac{(\Delta x)^n}{n!} + R$$

$$\Delta x = x - x_0$$

- Greška se procjenjuje (n + 1) članom

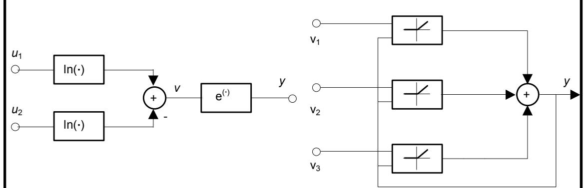
60

Realizacije nekih karakteristika



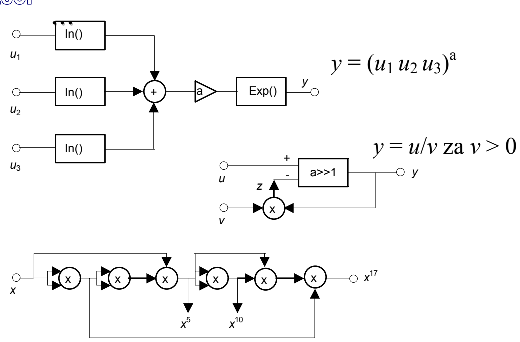
61

Realizacije nekih karakteristika



62

Realizacije nekih karakteristika



63

MATLAB

Realizacija karakteristike s nekoliko blokova tipa prag

Linearnost sustava

- Definicija:
  - Sustav s jednim ulazom *x* i jednim izlazom *y* je linearan ako zadovoljava uvjet

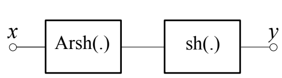
$$f(\mathrm{a} \cdot x_1 + \mathrm{b} \cdot x_2) = \mathrm{a} \cdot f(x_1) + \mathrm{b} \cdot f(x_2)$$

za sve realne vrijednosti a, b, x_1, x_2, gdje su x_1 i x_2 bilo koje dvije vrijednosti ulaza

65

Linearnost sustava

- Složeni sustav koji zadovoljava uvjet linearnosti ne mora nužno biti sastavljen od elemenata koji su linearni
- Primjer:



- Elementi sustava su nelinearni, a sustav je linearan
  - sustav nije strukturno linearan
- Svaki sustav koji je strukturno linearan (svi elementi linearni) linearan je i operacijski

66

Linearnost sustava

- Sustav s dva ulaza x_1 i x_2 je linearan ako vrijedi
  $f(\mathrm{a}x_{11} + \mathrm{b}x_{12}, \mathrm{a}x_{21} + \mathrm{b}x_{22}) = \mathrm{a}f(x_{11}, x_{21}) + \mathrm{b}f(x_{12}, x_{22})$
- Linearni sustav s n ulaza karakterizira se ulazno izlaznom relacijom:

$$y = \sum_{1}^{n} \mathrm{a}_i x_i = \begin{bmatrix} \mathrm{a}_1 & \cdots & \mathrm{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- Linearni sustav s *n* ulaza može se se promatrati kao suma n identičnih sustava (superpozicija)
  $y = f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, 0, 0) + f(0, x_2, 0) + f(0, 0, x_3)$

67

Linearnost sustava

- Sustav s *m* ulaza i *n* izlaza

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{1n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \mathbf{Ax}$$

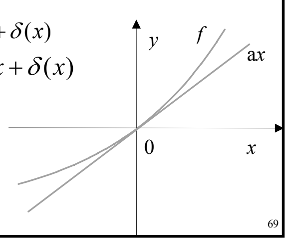
68

Aproksimacija nelinearnog sustava linearnim

- Razvoj nelinearne funkcije $f(x)$ u Taylorov red u okolini točke x_0

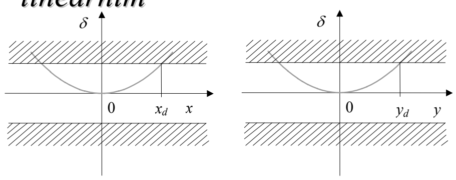
$$f(\mathrm{x}_0 + x) = f(\mathrm{x}_0) + f'(\mathrm{x}_0)x + \delta(x)$$
$$y = f(\mathrm{x}_0 + x) - f(\mathrm{x}_0) = \mathrm{a}x + \delta(x)$$

- ax – linearni član
- $\delta(x)$ – odstupanje od linearnosti



69

Aproksimacija nelinearnog sustava linearnim



- Grafički prikaz odstupanja
- analiza za mali signal ⟹ linearna analiza
- analiza za veliki signal ⟹ nelinearna analiza

70

Aproksimacija nelinearnog sustava linearnim

- Karakterizacije odstupanja od linearnosti
  - relativna pogreška linearnosti

$$\delta_r = \frac{\delta}{y} = \frac{y - \mathrm{a}x}{\mathrm{a}x}$$

  - apsolutna diferencijalna pogreška linearnosti

$$\varepsilon = \left(\frac{dy}{dx}\right) - \mathrm{a}$$

  - relativna diferencijalna pogreška linearnosti

$$\varepsilon_r = \frac{\frac{dy}{dx} - \mathrm{a}}{\mathrm{a}}$$

71

Aproksimacija nelinearnog sustava linearnim

- Diferencijalna pogreška se može napisati u obliku $\frac{dy}{dx} - \mathrm{a} = \mathrm{a}\varepsilon_r(y), \qquad y \doteq \mathrm{a}x$
- Integracija po x odnosno y daje:

$$y - \mathrm{a}x = \mathrm{a}\int_0^x \varepsilon_r d\xi = \mathrm{a}\int_0^y \varepsilon_r \frac{d\eta}{\mathrm{a}},$$

pa vrijedi veza između pogreški

$$\delta(y) = \int_0^y \varepsilon_r d\eta$$

72

Aproksimacija nelinearnog sustava linearnim

- Apsolutna greška se može dobiti integracijom diferencijalne pogreške po izlazu ili relativne diferencijalne pogreške po ulazu

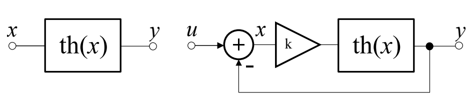
73

MATLAB

Linearizacija sustava

Utjecaj povratne veze na linearnost

- Primjer nelinearnog funkcijskog bloka



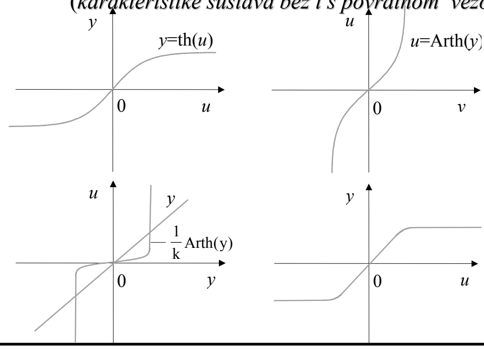
$$x = u - y, \quad y = \mathrm{th}(\mathrm{k} \cdot x), \quad \mathrm{k} \cdot x = \mathrm{Arth}(y)$$

$$u = x + y = y + \frac{1}{\mathrm{k}}\mathrm{Arth}(y)$$

75

Utjecaj povratne veze na linearnost

(*karakteristike sustava bez i s povratnom vezom*)



76

Utjecaj povratne veze na linearnost

- Povratna veza popravlja linearnost unutar raspoloživih granica izlaza

$$u = y + \frac{1}{\mathrm{k}}\mathrm{Arth}(y)$$

- Veće pojačanje, a manje odstupanje od linearnosti

77

Linearizacija funkcijskog bloka s više ulaza i izlaza

- Taylorov razvoj za sve izlaze kao funkcije više varijabli

$$y_i = f_i(u_1, u_2, \ldots, u_m), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

razvoj daje

$$y_i = f_i(\mathrm{u}_{10}, \mathrm{u}_{20}, \ldots, \mathrm{u}_{m0}) + \frac{\partial f_i}{\partial u_1}\Delta u_1 + \frac{\partial f_i}{\partial u_2}\Delta u_2 + \ldots$$

$$+ \frac{\partial f_i}{\partial u_m}\Delta u_m + \text{članovi višeg reda}$$

78

Linearizacija funkcijskog bloka s više ulaza i izlaza

- Napisano pomoću Jacobijeve matrice

$$\Delta \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \vdots \\ \Delta y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial u_1} & \cdots & & \frac{\partial f_r}{\partial u_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \vdots \\ \Delta u_m \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u}$$

- U okolini točke y_0 vrijedi $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$

79