Teorija sustava i signala

Hrvoje Babić, Branko Jeren
ZESOI
FER

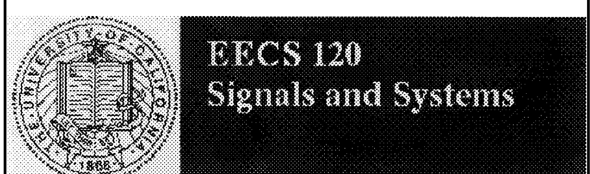
MIT

6.003 Signals and Systems

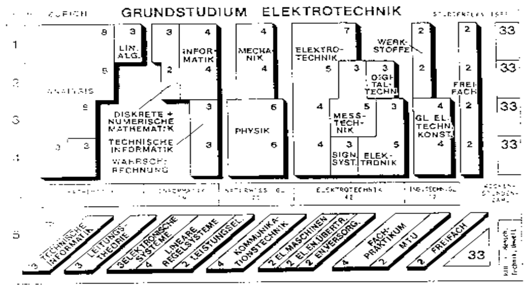
Prereq.: 6.001, 6.002
Units: 4-2-9
URL: http://web.mit.edu/6.003/www/home.html
Lab: *TBA* **Lecture** : *TR12* (34-101) **Recitation** : *WF10* (34-301) or *WF11* (34-301) or *WF12* (34-301) or *WF1* (34-301) or *WF11* (38-136) or *WF12* (26-310) or *WF10* (26-310) or *WF11* (26-310) *+final*
Final : TUESDAY, DECEMBER 16 (9:00 A.M. - 12:00 NOON) in du Pont Gym (W31-140)

System analysis techniques and their application to circuit and filter design, robotic control, computer simulation, communication, and speech and image processing. Topics include: Laplace- and Z-transform techniques; system transfer functions; filtering; convolution and deconvolution; feedback stability analysis; Fourier transforms; modulation system analysis; sampling theorems. 4 Engineering Design Points.
J. K. White

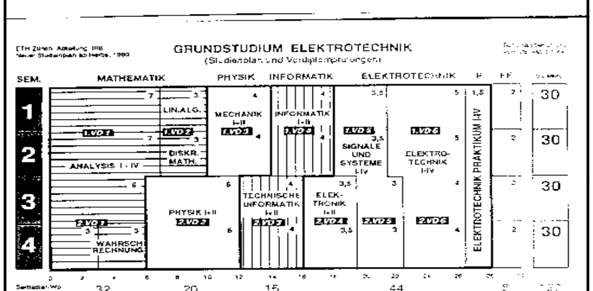
Berkeley



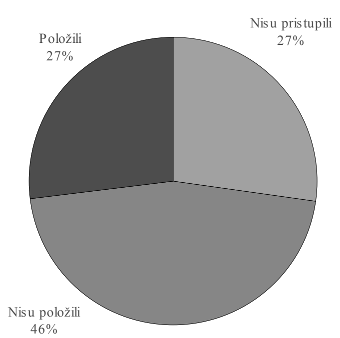
ETH Zuerich, 1985



ETH Zuerich, 1990

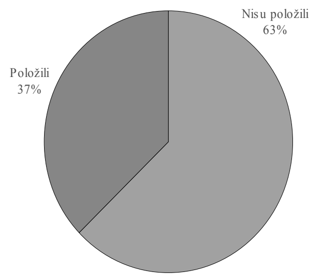


Prolaznost TSIS i SIS

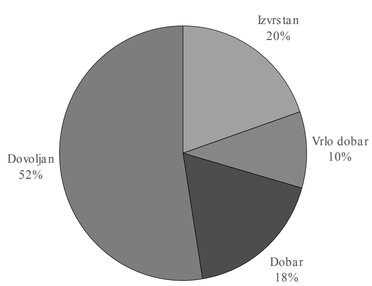


Period: 10.02.97 – 01.10.97

Prolaznost (od onih koji su pristupili)



Ocjene



Prosječna ocjena: 2,97

Uvod u signale i sustave

- Sustav?... teško definirati...
- “Sustav je cjelina sastavljena od međusobno povezanih objekata gdje svojstva objekata i njihovo međudjelovanje određuju svojstva i vladanje cjeline”.
- Sustav je prirodna ili ljudska tvorevina.
- Multidisciplinarni problem: odrediti, podesiti, predvidjeti vladanje sustava, ili pak realizirati sustav željenih svojstava.

Uvod u signale i sustave

- Kvantitativna analiza sustava u različitim disciplinama vodi na iste matematičke postupke.
- Matematički postupci omogućavaju uvođenje apstraktne koncepcije.
- Pogodan matematički opis nekog realnog sustava naziva se matematičkim modelom tog sustava ili apstraktni sustav.
- Teorija sustava: skup matematičkih postupaka.

Primjer tehničkog sustava

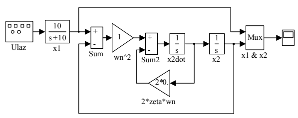
- Sustav: kotač – amortizer – vozilo

Atributi sustava

- Varijable sustava: mjerljive veličine.
- Nezavisna varijabla – vrijeme *t* .
- Ulazne i izlazne varijable.

Teorija sustava:
1. matematički model

$$y''(t) + 2\zeta \cdot y'(t) + \omega^2 = u(t)$$



Teorija sustava:
2. analiza vladanja sustava

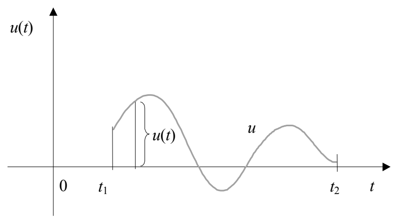
MATLAB / SIMULINK

Vremenske funkcije – signali

- Signal: fenomen koji nosi neku informaciju.
- Signale – vremenske funkcije označavat ćemo malim slovima – *x, v, u*.
- Trenutna vrijednost: $u(t)$, $t \in \mathbf{R}$.
- Ako je t ograničen na $\mathbf{T} \subset \mathbf{R}$, onda je signal u preslikavanje u: $\mathbf{T} \to \mathbf{U}$, gdje je $\mathbf{T}$ domena, a $\mathbf{U}$ kodomena od u.

$$u = \{(t, u(t)) \mid t \in \mathbf{T}\}.$$

Grafička predodžba signala



- Neka je domena interval **T** = (t_1, t_2), tad je
- signal u skup parova $\{(t, u(t)\}$ za $t \in$ **T**.

Klasa signala

- Neka je $\mathcal{U}$ skup svih signala iz **T** na **U**.
- Tada je signal u varijabla iz klase signala $\mathcal{U}$.
- Razlikujemo:
  - kodomena od $u(t)$ je **U** (skup brojeva) ,
  - kodomena od u je $\mathcal{U}$ (skup funkcija).

Još o načinima označavanja

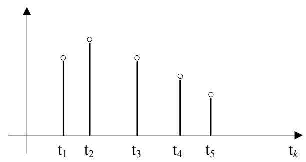
- Cijela funkcija: u, $u(\cdot)$, $\{u(t)\}$.
- Trenutna vrijednost u trenutku t : $u(t)$.
- Segment (odsječak) funkcije u intervalu:

$$u_{(t_0,t_1)} = \{(t, u(t)) \,|\, t \in (t_0, t_1)\}.$$

- Interval može biti:
  - otvoren (t_0, t_1),
  - zatvoren $[t_0, t_1]$ i
  - poluotvoren $(t_0, t_1]$, $[t_0, t_1)$.

Kontinuirani i diskretni signali

- Ako je domena **T** neprebrojiv i neprekinut (kontinuiran) skup, onda se radi o vremenski kontinuiranom signalu.
- Ako je domena **T** prebrojiv skup trenutaka $\{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_k\}$, onda je to vremenski diskretan signal.



Diskretna vremenska varijabla

- Trenutke t_k možemo poredati u rastući niz

$$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots ,$$

- tj. uvesti indeksaciju skupa **T**, $t_k \in \mathbf{T}$.
- Trenutke pridružujemo skupu cijelih brojeva

$$t: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}.$$

- t_k ili $t(k)$ je vrijednost t na cijelom broju $k \in \mathbf{Z}$, gdje je k indeks ili korak niza.

$$t = \{(k, t_k) \mid k \in \mathbf{K}\}; \mathbf{K} \subseteq \mathbf{Z}.$$

Diskretna vremenska varijabla

- Nizove vrem. trenutaka označavamo kao

$$\ldots, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \ldots \quad \text{ili}$$

$$\{t(k)\}, k \in \mathbf{Z} \quad \text{ili}$$

$$\{t_k\}, k \in \mathbf{Z}$$

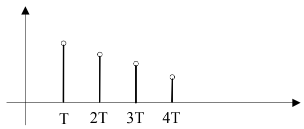
- Najjednostavniji primjer: aritmetički niz

$$t = \{t_0, t_0 + \mathrm{T}, t_0 + 2\mathrm{T}, \ldots\},$$

- gdje je T konstanta (kvant vremena).

Jednolika diskretizacija vremena

- $t_k = Tk,\ k \in \mathbf{Z}$.



Konačna i beskonačna os (domena) signala

- Os (domena) kontinuiranog ili diskretnog signala može biti sadržana u konačnom ili beskonačnom intervalu.
- Konačna os:

$$\mathbf{T} = [t_0, t_1] \subset \mathbf{R} \text{ ili } \mathbf{K} = [k_0, k_1] \subset \mathbf{Z}.$$

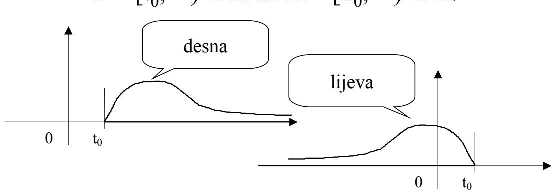
- Beskonačna os (neomeđena):

$$\mathbf{T} = (-\infty, \infty) = \mathbf{R} \text{ ili } \mathbf{K} = (-\infty, \infty) = \mathbf{Z}.$$

Konačna i beskonačna os (domena) signala

- Polubeskonačna os ("desna os", tj. omeđena slijeva):

$$\mathbf{T} = [t_0, \infty) \subset \mathbf{R} \text{ ili } \mathbf{K} = [k_0, \infty) \subset \mathbf{Z}.$$



Amplitude signala

- Ako je područje amplituda signala $\mathbf{U} \subset \mathbf{R}$, neprebrojiv i kontinuiran skup, signal je nekvantiziran ili analogan.
- Ako je područje amplituda signala prebrojiv skup $\mathbf{U} = \{..., u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, ...\}$, signal je kvantiziran.

Diskretizacija amplitude

- Indeksacija amplituda u_n je preslikavanje u: $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{U}$,

$$u = \{u_n \mid n \in \mathbf{N}\}, \mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}.$$

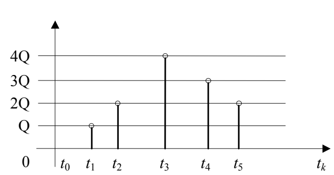
- Najjednostavniji primjer: aritmetički niz

$$u = \{..., a_0 - Q, a_0, a_0 + Q, a_0 + 2Q, ...\},$$

- gdje je Q konstanta (kvant amplitude).

$$u_n = Q\,n,\ n \in \mathbf{N}.$$

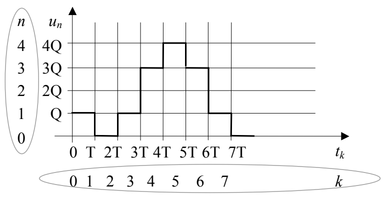
Diskretizacija amplitude



Diskretizacija

- Jednoliko diskretiziran signal (po vremenu i po amplitudi) može se izraziti samo skupovima indeksa k i n (uz poznate T i Q).

$$u = \{n(k)\},\ k \in \mathbf{K} \subseteq \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}.$$



Operacije na signalu

- Promjene na signalu se događaju kad signal prolazi kroz medij ili sustav.
- Važne operacije: modificiranje vremenske i amplitudne osi signala.
- Radi jednoznačnosti koristit ćemo funkcije koje imaju inverziju –

  monotono rastuće ili padajuće funkcije.

Transformacija vremenske osi

- Neka funkcija τ preslikava staru os u novu

$$\tau\!:\ \mathbf{T}_s \rightarrow \mathbf{T}_n\ .$$

- Novu vrijednost signala računamo kao

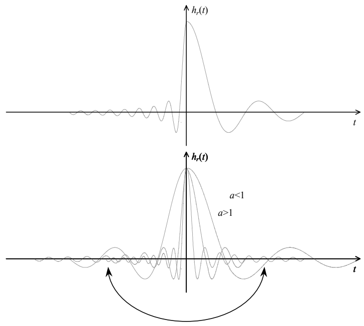
$$u_n(t) = u_s(\tau^{-1}(t)),\ t \in \mathbf{T}_n\ .$$

- Primjer (stezanje ili rastezanje signala):

$$\tau(t) = \mathrm{t} / \mathrm{a} \qquad t \in \mathbf{T}_s\ .$$

$$\tau^{-1}(t) = \mathrm{a\ t} \qquad t \in \mathbf{T}_n\ .$$

Primjer transformacije vremenske osi



Za a < 0
(kao i za sve monotono padajuće funkcije τ)
imamo reverziju vremenske osi !!!

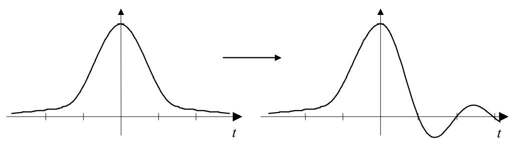
Transformacija područja signala

- Neka je $\mathbf{T}$ os signala u_s . Imamo
- u_s: $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{U}_\mathrm{s}$, gdje je $\mathbf{U}_\mathrm{s}$ područje signala.
- Preslikamo "staro" područje $\mathbf{U}_\mathrm{s}$ u novo $\mathbf{U}_\mathrm{n}$:
- $\varphi : \mathbf{U}_\mathrm{s} \rightarrow \mathbf{U}_\mathrm{n}$.
- Dobili smo novi signal u_n :
- $u_n(t) = \varphi\,(u_s(t)), \qquad t \in \mathbf{T}.$
- Pri tom funkcija φ mora imati inverziju (ako želimo restaurirati stari signal).

Preslikavanje signala

- Jednostavno preslikavanje – kompozicija funkcija:
- $v(t) = f\,(u(t)), \quad v = f\,(u), \quad u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}.$
- Trenutna vrijednost preslikava se u trenutnu.
- Složenije preslikavanje – operator pridružuje signalu drugi signal:
- $v = \boldsymbol{F}\,(u), \qquad u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}.$

Složeno preslikavanje signala



- Signalu slijeva u cjelini pridružen je signal na desnoj strani (ne trenutnim vrijednostima!).

Složeno preslikavanje

- Neka ***F*** preslikava signal *u* iz intervala $[t_1, t_2]$ u signal *v* u intervalu $[t_1, t_2]$.

$$v_{[t_1,t_2]} = \boldsymbol{F}\left(u_{[t_1,t_2]}\right)$$

- Trenutna vrijednost $v(t)$, uz $t \in [t_1, t_2]$ zavisi od svih trenutnih vrijednosti $u(\tau)$ iz intervala $\tau \in [t_1, t_2]$!

Složeno preslikavanje

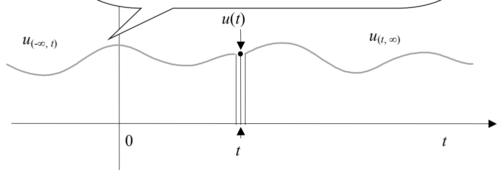
- Trenutna vrijednost $v(t)$ može se izraziti kao:

$$v(t) = F\left(u_{[t_1,t_2]}, t\right)$$

- gdje je F funkcional koji funkciji u na intervalu $[t_1, t_2]$ pridružuje broj $v(t)$.
- Posebice su zanimljive 2 mogućnosti:
  - $v(t)$ ovisi od segmenta $[t_1, t)$ – prije t, ili
  - $v(t)$ ovisi od segmenta $(t, t_2]$ – poslije t.
- Trenutci t_1, t_2 mogu biti i u beskonačnosti.

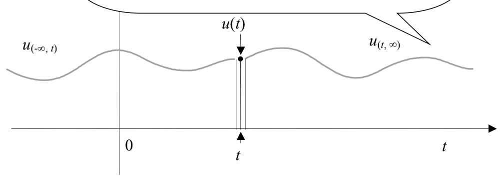
Memorijsko i prediktivno preslikavanje

1. slučaj: $v(t)$ ovisi o $u_{(-\infty,\, t)}$,
a to je čitava prošlost signala $u(t)$.
Funkcional F je memorijski.



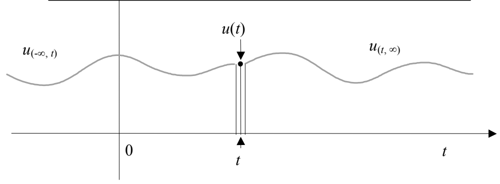
Memorijsko i prediktivno preslikavanje

2. slučaj: $v(t)$ ovisi o $u_{(t,\, \infty)}$,
a to je čitava budućnost od $u(t)$.
Funkcional F je predikcijski.



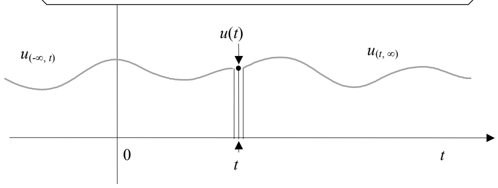
Memorijsko i prediktivno preslikavanje

3. granični slučaj: $v(t)$ ovisi samo o $u(t)$,
$v(t) = f(u(t))$,
postoji samo ovisnost trenutnih vrijednosti.



Memorijsko i prediktivno preslikavanje

4. slučaj: $v(t)$ ovisi o $u_{(-\infty,\,\infty)}$,
radi se o memorijsko-prediktivnom ili nekauzalnom preslikavanju.



Primjer

- Linearni funkcional

$$v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

ili

$$v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

$h(t)$ – težinska ili Greenova funkcija.

Operacije među signalima

- Djelovanje više signala na jedan rezultirajući može se opisati funkcijom:

$$v(t) = f(u_1(t),\, u_2(t),\, u_3(t),...).$$

- Općenito, to je nelinearna funkcija, npr.

$$v(t) = [u_1(t)]^{u_2(t)},$$

- ili linearna, npr.

$$v(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t).$$

Operacije među signalima

- Elementarne operacije – ne mogu se dalje razlagati.
- Važne elementarne operacije:
  - zbrajanje $v = u_1 + u_2$
  - množenje $v = u_1 u_2$
- Razlaganje *f* na elementarne operacije – Taylorov red s konačnim brojem članova.
- Funkcionali: linearni ili nelinearni.

Realni i apstraktni objekti

- Realni objekt – objekt iz stvarnog svijeta s pridruženim atributima (mjerljivim veličinama).
- Apstraktni objekt – skup veličina (varijabli) i relacija među njima.
- Objekt može biti karakteriziran skupom algebarskih relacija:

$$\mathcal{R}_1(u_1, u_2, u_3) = 0,$$
$$\mathcal{R}_2(u_1, u_2, u_3) = 0,$$
$$\mathcal{R}_3(u_1, u_2, u_3) = 0.$$

Realni i apstraktni objekti

- Ako se varijable mijenjaju s vremenom, skup relacija može biti skup diferencijalnih jednadžbi (nezavisna varijabla *t*):

$$a_{11}\frac{du_1}{dt} + a_{12}\frac{du_2}{dt} + a_{13}u_3 = 0$$
$$a_{21}\frac{du_1}{dt} + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 = 0$$
$$a_{31}\frac{du_1}{dt} + a_{32}\frac{du_2}{dt} + a_{33}\frac{du_3}{dt} = 0$$

Objekti sa zbijenim i raspodijeljenim parametrima

- To su bili diferencijalni sustavi ili sustavi sa zbijenim parametrima.
- Ako postoje i prostorne koordinate kao nezavisne varijable – dobivamo parcijalne diferencijalne jednadžbe.
- Takvi sustavi su sustavi sa raspodijeljenim parametrima.

Orijentirani i neorijentirani objekti

- Neorijentirani objekti: možemo proizvoljno proglasiti ulaze i izlaze sustava.
- Primjer: električni otpor, veza napona i struje.
  - Možemo proizvoljno proglasiti napon ili struju kao ulaz ili izlaz iz sustava.
- Orijentirani objekti: čvrsta uzročno – posljedična veza ulaznih i izlaznih varijabli.
- Primjer: elektroničko pojačalo.

- Uvod u predmet
- Primjer tehničkog sustava
  - video prikaz
  - matematički model
  - simulacija (matlab / simulink)
- Prikaz i označavanje signala
  - kontinuirani signal
  - diskretni signal
- Diskretizacija amplitude

- Operacije na signalu
  - transformacija vremenske osi
  - transformacija područja signala
  - složeno preslikavanje signala
- Operacije među signalima
- Realni i apstraktni objekti
- Objekti sa zbijenim i raspodijeljenim parametrima
- Orjentirani i neorjentirani objekti

Model i realizacija objekta

- Apstraktni objekt koji ima iste varijable i iste ulazno – izlazne relacije kao neki realni objekt je model realnog objekta.
- Realni objekt je tada (jedna) realizacija apstraktnog objekta.

Definicija apstraktnog objekta

- Neka je (u, y) uređeni par vremenskih funkcija u intervalu $[t_0, t]$.
- Skup uređenih parova varijabli (u, y) je apstraktni objekt **S**.
- **S** je relacija koja vezuje slobodnu varijablu u i zavisnu y:

$$\mathbf{S} = \{(u, y) \mid u \in \mathcal{U}, y \in \mathcal{Y}\}.$$

- **S** predstavlja sveukupnost ul./izl. parova (u, y).

Definicija apstraktnog objekta

- Relacija **S** općenito ne mora davati jednoznačnu vezu pobude i odziva.
- Kada je veza jednoznačna, imamo

  $$y = \boldsymbol{F}(u),$$

  gdje je ***F*** funkcija, operator ili transformacija funkcije pobude.
- Tada sustav vrši operaciju na signalu, odnosno preslikavanje ulazne *u* u izlaznu *y*.

Klasifikacija sustava

- Bezmemorijski ili trenutni

  $y(t) = f\,(t, u(t)),$
- memorijski ili kauzalni

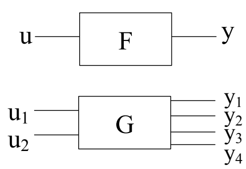
  $y(t) = F\,(t, u_{(-\infty,\, t]}\,),$
- prediktivni (anticipativni) ili antikauzalni

  $y(t) = F\,(t, u_{[t,\, \infty)}\,),$
- memorijsko – prediktivni ili nekauzalni

  $y(t) = F\,(t, u_{(-\infty,\infty)}\,).$
- Nekauzalni sustavi često se dobivaju pri sintezi sustava, uslijed idealiziranih zahtjeva.

Spajanje sustava

- Orjentirani apstraktni objekt ili sustav predstavlja se grafički u obliku pravokutnika s označenim ulaznim i izlaznim varijablama.

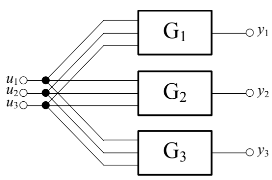


Spajanje sustava

- Sustav s više ulaza i izlaza može se jednostavno razložiti na više sustava s više ulaza, ali samo s po jednim izlazom .
- Dva i više objekata ili podsustava mogu se spojiti tako da zajedno čine jedan složeni sustav.
- Sustavi od kojih je sastavljen složeni sustav zovu se podsustavi.

Spajanje sustava

- Složeni sustav



Spajanje sustava

- Neka sustavi $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ imaju ulaze

  $\{u_{1i}$ za $i = 1, 2,..., \mathrm{m}_1\}$ i $\{u_{2j}$ za $j = 1, 2,..., \mathrm{m}_2\}$

  i izlaze

  $\{y_{1k}$ za $k = 1, 2,..., \mathrm{r}_1\}$ i $\{y_{2l}$ za $l = 1, 2,..., \mathrm{r}_2\}$.
- Sustavi $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ su spojeni ako je barem jedna varijabla $u_{1i}(t)$ ulaza sustava $\mathcal{S}_1$ izjednačena s jednom varijablom $y_{2k}(t)$ izlaza sustava $\mathcal{S}_2$ za svaki t tj.

  $u_{1i}(t) = y_{2l}(t)$, $i \in [1, \mathrm{m}_1]$ i $l \in [1, \mathrm{r}_2]$

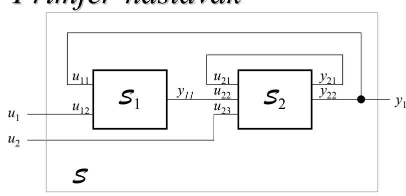
  $u_{2j}(t) = y_{1k}(t)$, $j \in [1, m_2]$ i $k \in [1, \mathrm{r}_1]$.

Primjer

- Neka je $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $m = 2$ i $r = 3$.

$$y_{11} = F_{11}(u_{11}, u_{12})$$
$$y_{12} = F_{12}(u_{11}, u_{12})$$
$$y_{21} = F_{21}(u_{21}, u_{22}, u_{23})$$
$$y_{22} = F_{22}(u_{21}, u_{22}, u_{23})$$
$$y_{23} = F_{23}(u_{21}, u_{22}, u_{23})$$

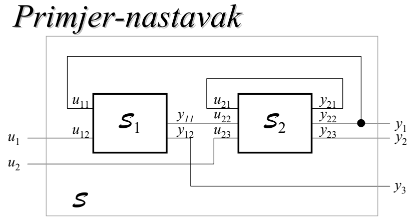
Primjer-nastavak



- Jednadžbe spajanja mogu biti:

Ulazi u S_1	Ulazi u S_2
$u_{11}(t) = y_{22}(t)$ $u_{12}(t) = u_1(t)$	$u_{21}(t) = y_{21}(t)$ $u_{22}(t) = y_{11}(t)$ $u_{23}(t) = u_2(t)$

Primjer-nastavak



- Varijable složenog sustava:

Ulazi u S	Izlazi S
$u_1(t)$ $u_2(t)$	$y_1(t) = y_{22}(t)$ $y_2(t) = y_{23}(t)$ $y_3(t) = y_{12}(t)$

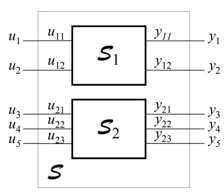
Pravila spajanja

- Izlazi iz blokova se ne spajaju međusobno.
- Svaki ulaz bloka spaja se na izlaz nekog bloka ili je ulaz u spojeni složeni sustav.
- Svi ulazi podsustava su angažirani.
- Izlaz bloka može biti izlaz složenog sustava. Najmanje jedan izlaz podsustava je izlaz spojenog sustava.

Primjer

Sustav složen od dva nezavisna podsustava:

Ulazi u $\mathcal{S}$	Izlazi iz $\mathcal{S}$
$u_1(t)$	$y_1(t) = y_{11}(t)$
$u_2(t)$	$y_2(t) = y_{12}(t)$
$u_3(t)$	$y_3(t) = y_{21}(t)$
$u_4(t)$	$y_4(t) = y_{22}(t)$
$u_5(t)$	$y_4(t) = y_{23}(t)$



- Ulazi u_1, u_2 ne djeluju na izlaze y_3, y_4, y_5.
- Ulazi u_3, u_4, u_5 ne utječu na izlaze y_1 i y_2.

Primjer-nastavak

- Sustav $\mathcal{S}$ složen od dva nezavisna podsustava.
- Složeni sustav zadanih ili željenih svojstava može se dobiti sintezom jednostavnih sustava u kompleksniji.
- Razlaganjem ili analizom sustava možemo dobiti dobar uvid u vladanje sustava i utjecaj pojedinih podsutava.